ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Методические указания

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.

В практических расчетах часто встречаются задачи, в которых напряжения, деформации и перемещения зависят только от двух координат, например x и y. Это так называемая плоская задача, которая принадлежит к одному из наиболее обширных и важных классов задач теории упругости. К плоским задачам сводятся расчеты на прочность и жесткость таких конструкционных элементов, как тонкие пластины и оболочки, длинные подпорные стенки, подвергающиеся действию поперечной нагрузки и т.д.

1. Основные положения теории.

Различают два типа плоских задач : плоскую деформацию и плоское напряженное состояние.

Все уравнения теории упругости значительно упрощаются, когда задачу сводят к отысканию функций только двух переменных x и y.

Деформация тела называется плоской, если перемещения происходят только параллельно плоскости деформации XOY

$$U = U(x, y)\ ;\quad V = V(x, y)\ ;\quad W = 0\ ,$$

где $U(x, y)$, $V(x, y)$, W – перемещения точки в направлении осей x, y и z соответственно.

То есть деформации для плоской задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y)\ ; && \varepsilon_z = 0\ ; \\ &\varepsilon_y = \varepsilon_y(x, y)\ ; && \gamma_{yx} = 0\ ; \qquad (1) \\ &\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y)\ ; && \gamma_{zx} = 0. \end{aligned}$$

Отсутствие линейных деформаций ε_z приводит к появлению напряжений σ_z :

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \qquad (2)$$

где ν - коэффициент поперечной деформации; σ_x , σ_y – значения напряжений в направлениях x и y соответственно.

Таким образом, составляющие напряжений для плоской задачи запишутся :

$$\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_x(x, y)\ , && \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)\ ; \\ &\sigma_y = \sigma_y(x, y)\ , && \tau_{yz} = 0\ ; \qquad (3) \\ &\sigma_z = \sigma_z(x, y)\ , && \tau_{zx} = 0. \end{aligned}$$

Основные уравнения теории упругости в случае плоской деформации упрощаются. Из дифференциальных уравнений равновесия остается только два:

$$\begin{aligned} &\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + X = 0\ ; \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4) \\ &\partial\tau_{yx}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + Y = 0, \end{aligned}$$

где **X, Y –** поверхностные силы.

Геометрических соотношений Коши будет три :

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \partial U/\partial x\ ; \\ &\varepsilon_y = \partial V/\partial y\ ; \qquad (5) \\ &\gamma_{xy} = \partial U/\partial y + \partial V/\partial x. \end{aligned}$$

Формулы закона Гука принимают вид:

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \nu_1 \ \sigma_y)/E_1 \ ;$$

$$\varepsilon_y = (\sigma_y - \nu_1 \ \sigma_x)/ E_1 \ ; \qquad (6)$$

$$\gamma_{xy} = 2(-1+\nu_1) \ \tau_{xy} \ / \ E_1 \ ,$$

где $E_1 = E/ (1-\nu^2)$; $\nu_1 = \nu/ (1-\nu)$.

Таким образом, для плоской деформации $\sigma_z \neq 0$ $\varepsilon_z = 0$.

Плоским напряженным состоянием называется такое состояние, при котором все действующие напряжения направлены вдоль одной плоскости и зависят от координат точки в этой плоскости.

Составляющие напряжений запишутся:

$$\sigma_x = \sigma_x (x, y) \ ; \qquad \tau_{xy} = \tau_{xy} (x, y) \ ;$$

$$\sigma_y = \sigma_y (x, y) \ ; \qquad \tau_{yz} = 0 \ ; \qquad (7)$$

$$\sigma_z = 0 \ ; \qquad \tau_{zx} = 0 \ .$$

Тогда составляющие деформаций определяются:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x (x, y) \ ; \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{xy} (x, y) \ ;$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y (x, y) \ ; \qquad \gamma_{yz} = 0 \ ; \qquad (8)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z (x, y) \ ; \qquad \gamma_{zx} = 0 \ .$$

Дифференциальные уравнения равновесия (4), геометрические соотношения Коши (5) сохраняют такой же вид, как и при плоском напряженном состоянии, а формулы закона Гука принимают вид:

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \nu \, \sigma_y)/E \ ;$$

$$\varepsilon_y = (\sigma_y - \nu \, \sigma_x)/E \ ; \qquad (9)$$

$$\gamma_{xy} = 2(1+\nu)\ \tau_{xy}/E.$$

Для плоского напряженного состояния $\varepsilon_z \neq 0;\ \sigma_z = 0.$

В плоской задаче теории упругости неизвестными являются восемь функций σ_x, σ_y, τ_{xy}, ε_x, ε_y, γ_{xy}, U и V. Уравнений для решения задачи тоже восемь: два дифференциальных уравнения (4), три геометрических соотношения Коши (5), три формулы закона Гука (6) или (9).

Решение плоской задачи в напряжениях сводится к отысканию трех неизвестных функций $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$. Это решение можно упростить, если ввести так называемую функцию напряжений (функцию Эри). Её выбирают таким образом, чтобы дифференциальные уравнения равновесия обращались в тождества. Тогда :

$$\sigma_x = \partial^2\varphi/\partial y^2;\qquad \sigma_y = \partial^2\varphi/\partial x^2;$$

$$\tau_{xy} = -\,\partial^2\varphi/\partial x\partial y. \tag{10}$$

Уравнение равновесия представляется с помощью оператора Лапласа:

$$\nabla^4\varphi = 0 \tag{11}$$

Отыскание бигармонической функции φ возможно различными методами: решение плоской задачи в полиномах, в тригонометрических рядах, с помощью метода конечных разностей.

2. Расчет балки – стенки. (Задание № 1)

Представлена прямоугольная полоса-балка (рис. 1) длиной l, высотой h и толщиной, равной 1. Начало координат *O* принято в середине торцевого сечения. Главными осями поперечного сечения являются оси *Oy* и *Oz*, продольная ось *Ox* проходит по середине полосы балки.

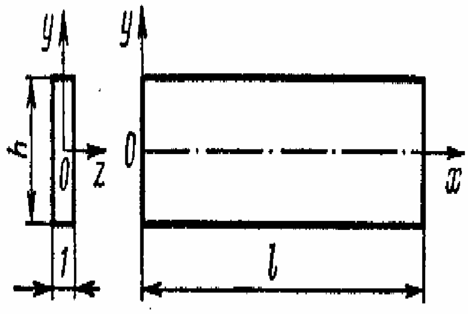

Рис. 1

Выражения для функции напряжений φ выбрать из табл. 1, а числовые значения — из табл. 2. Объемными силами пренебречь.

Задание:

1) проверить, можно ли предложенные функции φ (x,y) принять для решения плоской задачи теории упругости. В этих целях используют бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0; \qquad (12)$$

2) найти выражения для напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} решаемой

задачи, пользуясь следующими формулами для напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};\ \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}; \qquad (13)$$

3) построить эпюры напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} для одного сечения: либо перпендикулярного оси Ох, либо перпендикулярного оси Оу (значения х и у заданы в табл. 2);

4) определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки, дать их изображение на рисунке полосы-балки и привести соответствующие эпюры. В этих целях используют условия на поверхности тела (условия на контуре тела или статические граничные условия)

$$\begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x\cos(x,v) + \tau_{xy}\cos(y,v), \\ p_{yv} &= \tau_{yx}\cos(x,v) + \sigma_y\cos(y,v), \end{aligned} \qquad (14)$$

где p_{xv}, p_{yv} — проекции на оси Ох и Оу внешних сил, действующих на гранях полосы-балки; v — нормаль к грани; cos(x,v), cos(y,v) — направляющие косинусы нормали v.

ПРИМЕР .

Задана полоса-балка (см. рис. 1) Выражение функции напряжений: $\varphi(x,y) == axy^3 + bx^3\,y + cx^2$, где $a = 2$, $b = 1$, с = 2.

Размеры балки: l = 2,0 м; h = 1,0 м; b =1.

Решение.

1. Проверка пригодности $\varphi(x,y)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = ay^3 + 3bx^2y + 2cx;\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 6bxy + 2c;\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} = 6by;\ \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} = 0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3ay^2x + bx^3;\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 6axy;\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3} = 6ax;\ \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0;$$

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y} = 6bx;\ \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} = 0;\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = 3ay^2 + 3bx^2.$$

Подставляем найденные производные в бигармоническое уравнение (I): 0 + 2·0 + 0 =.0 Следовательно, заданное $\varphi(x,y)$ тождественно удовлетворяет бигармоническому уравнению плоской задачи теории упругости и может быть принято для решения этой задачи.

2. Выражения для напряжении (10):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 6axy;\ \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 6bxy + 2c;\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} =$$
$$= -3ay^2 - 3bx^2.$$

3. Построение эпюр напряжений в сечении $x = 1$.

Для этого сечения $\sigma_x = 6ay = 12y$, $\sigma_y = 6y + 4$; $\tau_{xy} = -6y^2 - 3$. По указанным выражениям для напряжений, изменяя y от - h/2 до + h/2, строим их эпюры (рис.2)

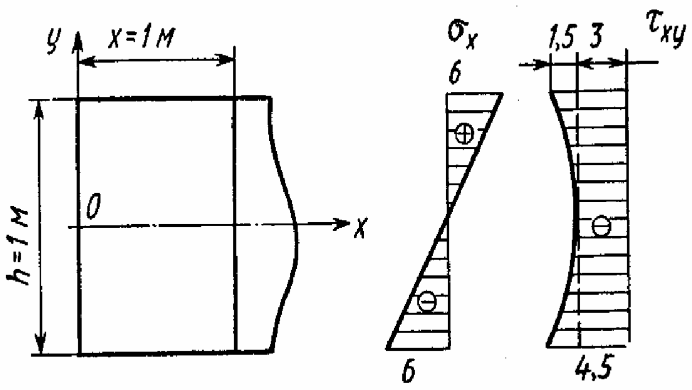

рис.2

4. Внешние силы (нормальные и касательные), приложенные к граням балки (14).

Верхняя грань: y= h/2 = 0,5 м; σ_x == 6х; $\sigma_y = 3x + 4$; τ_{xy} = = -1,5 – $3x^2$; $l = cos\,(x,v)$ == cos $(x, y) = 0$, m = cos (y, v) = cos (y, y) =1 ; $p_{xy} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot 1 = \tau_{xy} = -1{,}5 - 3\,x^2$; $p_{yv} = \tau_{xy} \cdot 0 + \sigma_x \cdot 1 = \sigma_y = 3\,x + 4$.

Для сил, нормальных p_{yv} и касательных p_{xv} к этой грани, строим их эпюры, изменяя x от 0 до l = 2,0 м.

Нижняя грань: y = - h / 2= — 0,5 м; σ_x= - бx; σ_y = — $3x + 4$; τ_{xy} = — 1,5 — $3x^2$; l = cos (x,v) = cos $(x, -y) = 0$; m =cos (y, v) = cos $(y, -y)$=- 1; $p_{xv} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy}(-1) = -\tau_{xy} = 1{,}5 + 3x^2$; $p_{yv} = \tau_{yx} \cdot 0 + \sigma_y(-1) = -\sigma_x = 3x - 4$.

Для сил, нормальных p_{yv} и касательных p_{xv} к этой грани, строим их эпюры, изменяя x от 0 до l == 2,0 м.

Левая грань: $x = 0$; $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = 4$; $\tau_{xy} = -6y^2$; l = cos(x, v) =cos $(x,-x)$= -1 ; m = cos (y, v) = cos $(y, -x) = 0$; $p_{xv} = \sigma_x(-1) + \tau_{xy} \cdot 0 = -\sigma_x = 0$; $p_{yv} = \tau_{yx}(-1) + \sigma_y \cdot 0 = -\tau_{yx} = 6y^2$.

Для сил, нормальных p_{xv} и касательных p_{yv} к этой грани, строим их эпюры, изменяя y от — h / 2 до + h / 2 .

Правая грань: $x = l = 2{,}0$; $\sigma_x = 24y$; $\sigma_y = 4 + 12y$; $\tau_{xy} = — 6y^2 — 12$; $l = \cos(x,\ v) = \cos(x,\ x) = 1$; $m = \cos(y, v) = \cos(y, x) = 0$; $p_{xv} = \sigma_x \cdot 1 + \tau_{xy}\, 0 = \sigma_x = 24y$; $p_{yv} = \tau_{yx} \cdot 1 + \sigma_y \cdot 0 = \tau_{yx} = — 6y^2 —12$.

Для сил, нормальных p_{xv} и касательных p_{yv} к этой грани, строим их эпюры, изменяя y от -h/2 до +h/2. Эпюры сил, действующих на все четыре грани, приведены на рис. 3.

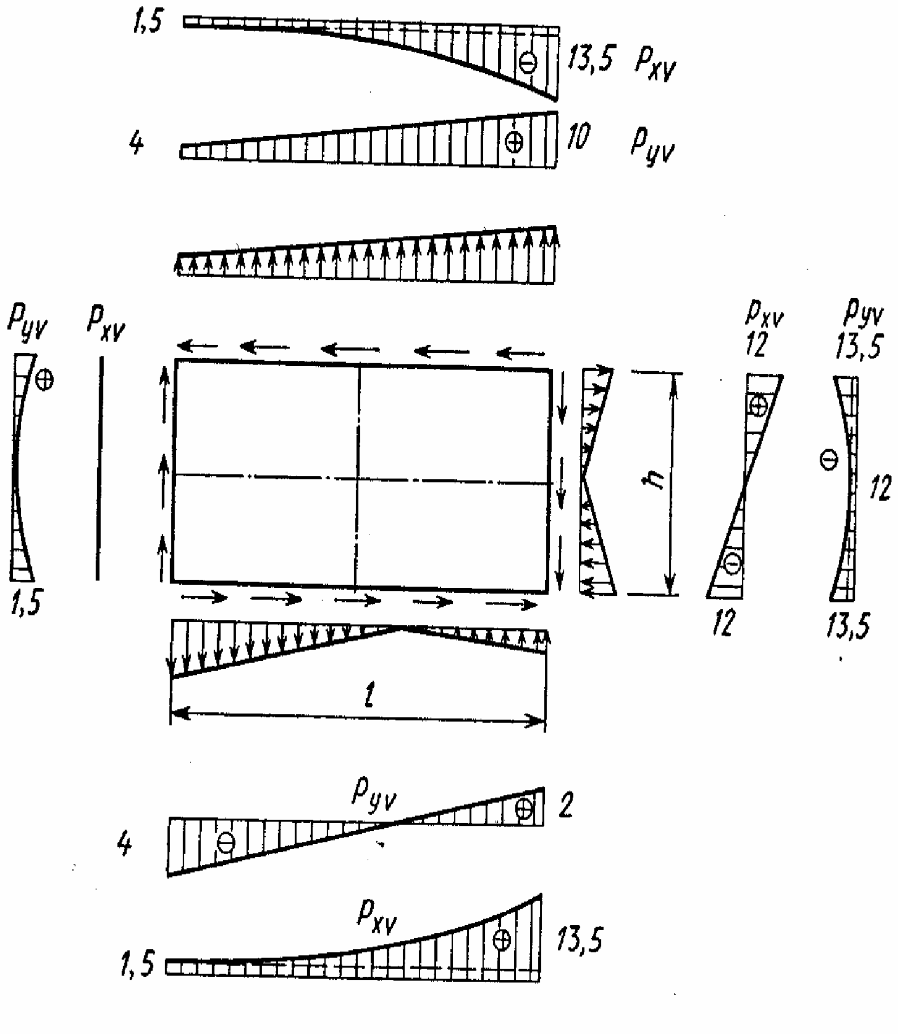

Рис. 3

Пример расчета и варианты контрольных заданий были взяты из методических указаний "Сопротивление.материалов с основами теории упругости и пластичности"[5].

Контрольные вопросы.

1. Какая разница между плоской деформацией и плоским напряженным состоянием ?
2. Запишите уравнения для плоской деформации и плоского напряженного состояния.
3. Каким образом решение плоской задачи теории упругости в напряжениях сводится к отысканию одной переменной?
4. Чему равна наивысшая степень полинома, при которой тождественно удовлетворяется бигармоническое уравнение плоской задачи?

Литература

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести . М., 1968.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. М., 1982
3. Тимошенко С.П. и Гудыр Дж. Теория упругости. М., 1979.
4. Киселев В.А. Плоская задача теории упругости. М., 1976

5.Методические указания и контрольные задания "Сопротивление .материалов с основами теории упругости и пластичности". М: Высшая школа, 1990.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения для функций напряжений Таблица 1.

N N варианты	Функция напряжений $\varphi\,(x, y)$
0	$\varphi = a(x^4-y^4)+bx^3y+xy^3$
1	$\varphi = ax(x^2+y^2)+bx^2y+xy$
2	$\varphi = ay(x^2+y^2)+bxy^2+xy$
3	$\varphi = axy^3+b(x^2y^2-x^4/3)$
4	$\varphi = ax^3+bx^2y+xy^2+xy$
5	$\varphi = a(x^4-y^4)+by^2+by^2(x^2-y^2/3)$
6	$\varphi = a(y^4-x^4)+bxy^4+x^2y$
7	$\varphi = a(x^4-y^4)/12+xy(bx^2+y^2)/3$
8	$\varphi = 1/3\,x^3y+1/2\,bx^2y^2-1/6\,by^4$
9	$\varphi = 1/3\,axy^3+1/2\,bx^2y^2-1/6bx^4$
10	$\varphi = ax^4-3ax^2y^2+bxy^3$
11	$\varphi = ax^3y-3bx^2y^2+by^4$
12	$\varphi = ax^4-3(a+b)x^2y^2+by^4$
13	$\varphi = axy^3+x^3+y^3-b\,xy$
14	$\varphi = ax^3y+b(x^2y^2-1/3\,y^4)$
15	$\varphi = ax^3y+by^3x+16$
16	$\varphi = axy^3+y^3-bx^2y$

17	$\varphi = ax^4 + bx^2y^2 + \frac{1}{2}\cdot bxy$
18	$\varphi = \frac{1}{4}\cdot(x^4 - y^4) + xy^2/8 + by^2x^2$
19	$\varphi = ay^4 + by^3x + (x^2 - y^2)$
20	$\varphi = by^3x + a(x^4 - y^4) + \frac{1}{2}\cdot by^4$

Числовые значения Таблица 2.

NN вариантов		*a*	*b*	*l*	*h*	*x*	*y*
0	-	1	1	5	1	1	0,2
1	11	2	1	6	1	2	0,3
2	12	2	1	5	2	2	0,4
3	13	1	2	6	1	2	0,3
4	14	1	2	6	2	2	0,5
5	15	2	2	4	2	1	0,5
6	16	2	1	4	2	1	0,5
7	17	2	1	6	1	3	0,3
8	18	1	2	5	1	2	0,2
9	19	2	1	5	2	2	0,4