

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ЧАСТЬ 2

Контрольные задания и методические указания к расчетно-проектировочной работе для студентов механических специальностей

Приведены задания и примеры выполнения расчетно-проектировочных работ по разделам курса сопротивления материалов: статически неопределимые балки и рамы, сложное сопротивление, устойчивость.

5.3. Расчёт статически неопределимых балок

Задача №12

Для заданных балок (рис. 5.11) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, а также подобрать двутавровое сечение при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ (схема *а*) и определить угол поворота левой опоры деревянной балки прямоугольного сечения с размерами b и h (схема *б*).

Данные взять из табл. 5.3.

Таблица 5.3

Буквы алфавита	Схема по рис.5.11	$a, \text{ м}$	$q, \text{ кН/м}$	$P, \text{ кН}$	$M, \text{ кНм}$	$b \times h, \text{ см}^2$
а, б, в	I	1,0	15	20	25	10×20
г, д, е	II	1,1	16	22	23	10×25
ё, ж, з	III	1,2	17	24	21	10×30
и, й, к	IV	1,3	18	26	18	10×35
л, м, н	V	1,4	19	28	20	15×25
о, п, р	VI	1,5	10	30	22	16×30
с, т, у	VII	1,6	12	12	24	17×20
ф, х, ц	VIII	1,7	14	14	26	18×20
ч, ш, щ	IX	1,8	13	16	28	19×25
ы, э, ю,я	X	1,9	11	18	30	20×30
	1	2	3	4	5	6

Порядок выполнения задачи 12 аналогичен решению примеров 12 *а, б*.

Пример 12 а. Для неразрезной двутавровой балки (рис. 5.12, *а*) выполнить проектировочный расчёт при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $P = 15 \text{ кН}$, $M = 18 \text{ кНм}$, $q = 27 \text{ кН/м}$, $a = 1 \text{ м}$.

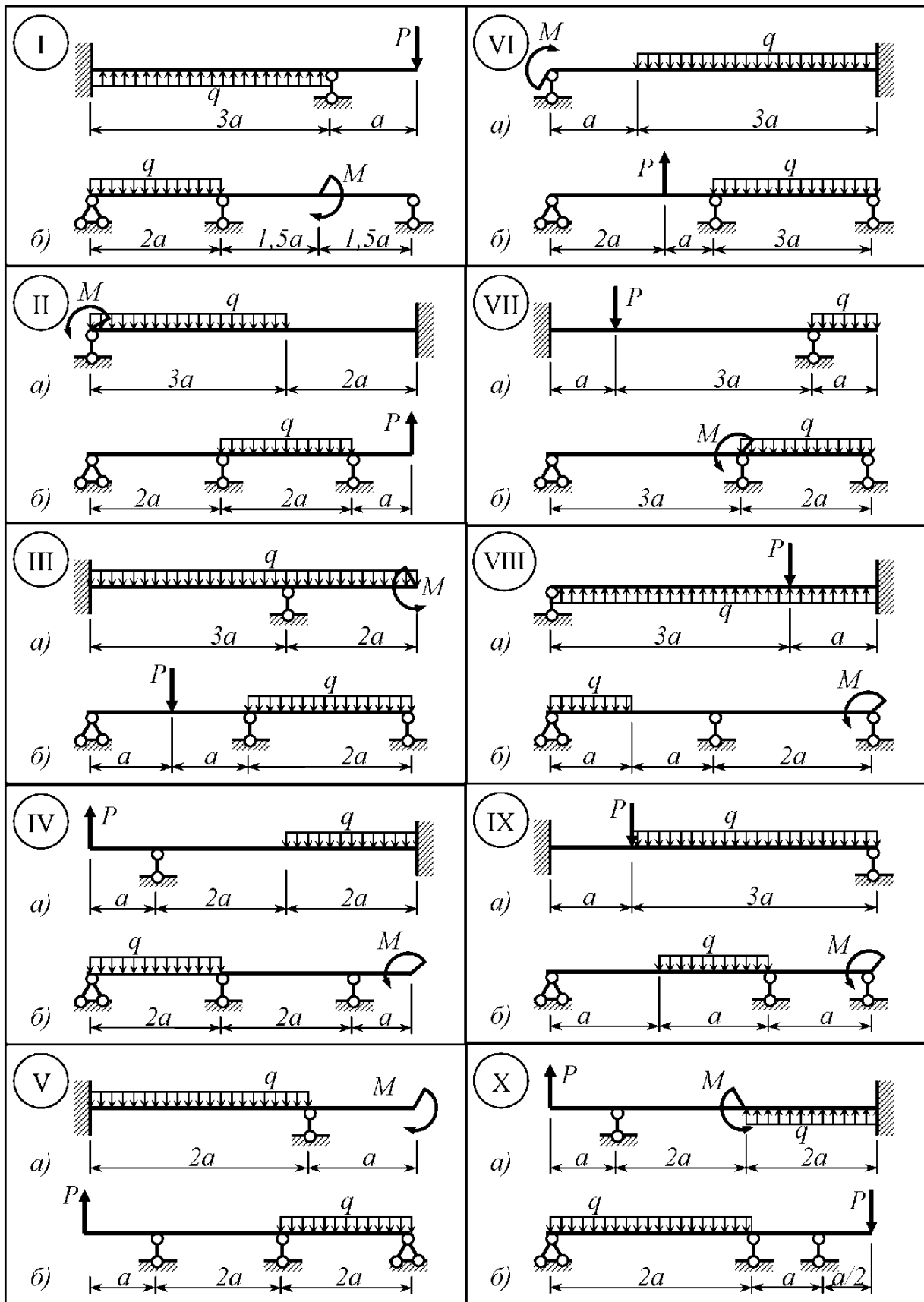


Рис. 5.11.

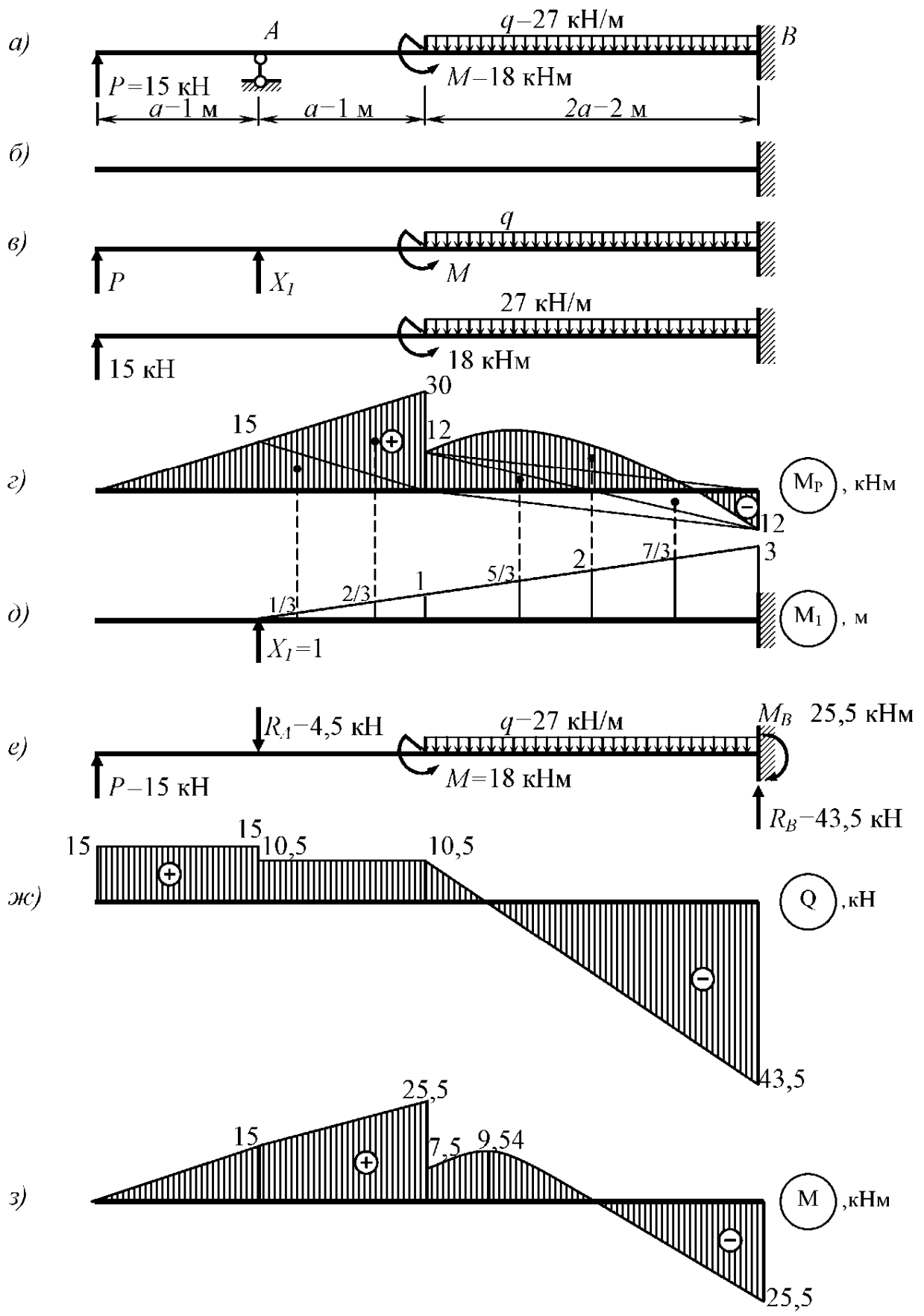


Рис. 5.12

Решение.

1. Определяем степень статической неопределимости балки. На балку наложены четыре связи; система плоская и можно использовать три уравнения равновесия, значит, балка один раз статически неопределима ($4 - 3 = 1$).

2. Выбираем основную систему, которая должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой (рис. 5.12, б) и эквивалентную систему, которая получается путём загрузки основной системы заданной нагрузкой и неизвестной силой X_1 в месте отброшенной связи (в точке А) (рис. 5.12, в).

3. Построим в основной системе эпюры изгибающих моментов отдельно от заданной нагрузки (M_p) и от $X_1=1$ (M_1), (рис. 5.12 з, д).

4. Составляем каноническое уравнение метода сил для один раз статически неопределимой системы

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

5. Определяем коэффициенты δ_{11} и Δ_{1p} , используя правило Верещагина по формуле $\delta_{kp} = \sum \frac{\omega_i M_{ci}}{E_i I_{zi}}$, где ω_i – площадь эпюры M_p , m_{ci} – ордината, взятая из эпюры M_1 под центром тяжести эпюры M_p . Следовательно,

$$\Delta_{1p} = \left[\frac{15 \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{30 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{12 \cdot 2}{2} \cdot \frac{5}{3} + \frac{27 \cdot 2^3}{12} \cdot 2 - \frac{12 \cdot 2}{2} \cdot \frac{7}{3} \right] \frac{1}{EJ_z} = \frac{40,5}{EJ_z} \text{ кНм}^3.$$

Находим δ_{11} т.е. вычисляя составляющие площади эпюры M_1 и умножаем на ординаты, соответствующие центрам тяжести площадей той же эпюры M_1 .

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{9}{EJ_z} \text{ м}^3.$$

6. Решая каноническое уравнение, получим $X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{40,5}{9} = -4,5 \text{ кН}$.

Знак «минус» указывает на то, что сила X_1 (т.е. реакция R_A) направлена не вверх, а вниз (рис. 5.12, е).

7. Строим эпюры Q и M_z , как для обычной балки (рис. 5.12, ж, з).

8. Проверяем правильность раскрытия статической неопределимости. Для этого методом начальных параметров вычислим прогиб на левой опоре балки,

приняв начало координат на правом конце (рис. 5.12, *e*). Величина этого прогиба должна быть равна нулю (допускается погрешность до 1%).

$$EJy_1 = -\frac{27^2}{24}(3^4 - 1) + \frac{18 \cdot 1}{2} = -204,75 + 204,75 = 0,$$

т.е. статическая неопределимость раскрыта правильно.

9. Из условия прочности $\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]$ находим момент сопротивления балки

$$W_z \geq \frac{M_{z\max}}{[\sigma]} = \frac{25,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 159,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 159,4 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр №18а с $W_z = 159 \text{ см}^3$, при этом $\sigma > [\sigma]$ на 0,23%.

Пример 12 б. Для балки (рис. 5.13, *a*) построить эпюры Q и M_z и вычислить угол поворота левой опоры. Поперечное сечение балки прямоугольное, $b=10 \text{ см}$, $h=20 \text{ см}$, материал – дерево, $E = 0,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение.

План решения такой же, как в примере 12, *a*. Степень статической неопределимости системы равна единице. Рациональная основная система изображена на рис. 5.13, *б*, эквивалентная – рис. 5.13, *в*. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов строятся отдельно для каждой балки, а изображаются на одной оси (рис. 5.13, *г, ж*).

Вычисляем коэффициенты канонического уравнения $\delta_{11}x_1 + \Delta_{1P} = 0$ по правилу Верещагина:

$$EJ\delta_{11} = \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 2;$$

$$EJ\Delta_{1P} = -12 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{5,625 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5,625 \cdot 2,5}{2} \cdot \frac{5}{12} - \frac{9 \cdot 2,5}{2} \cdot \frac{5}{24} = -8,25.$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{8,25}{2} = 4,125 \text{ кНм}.$$

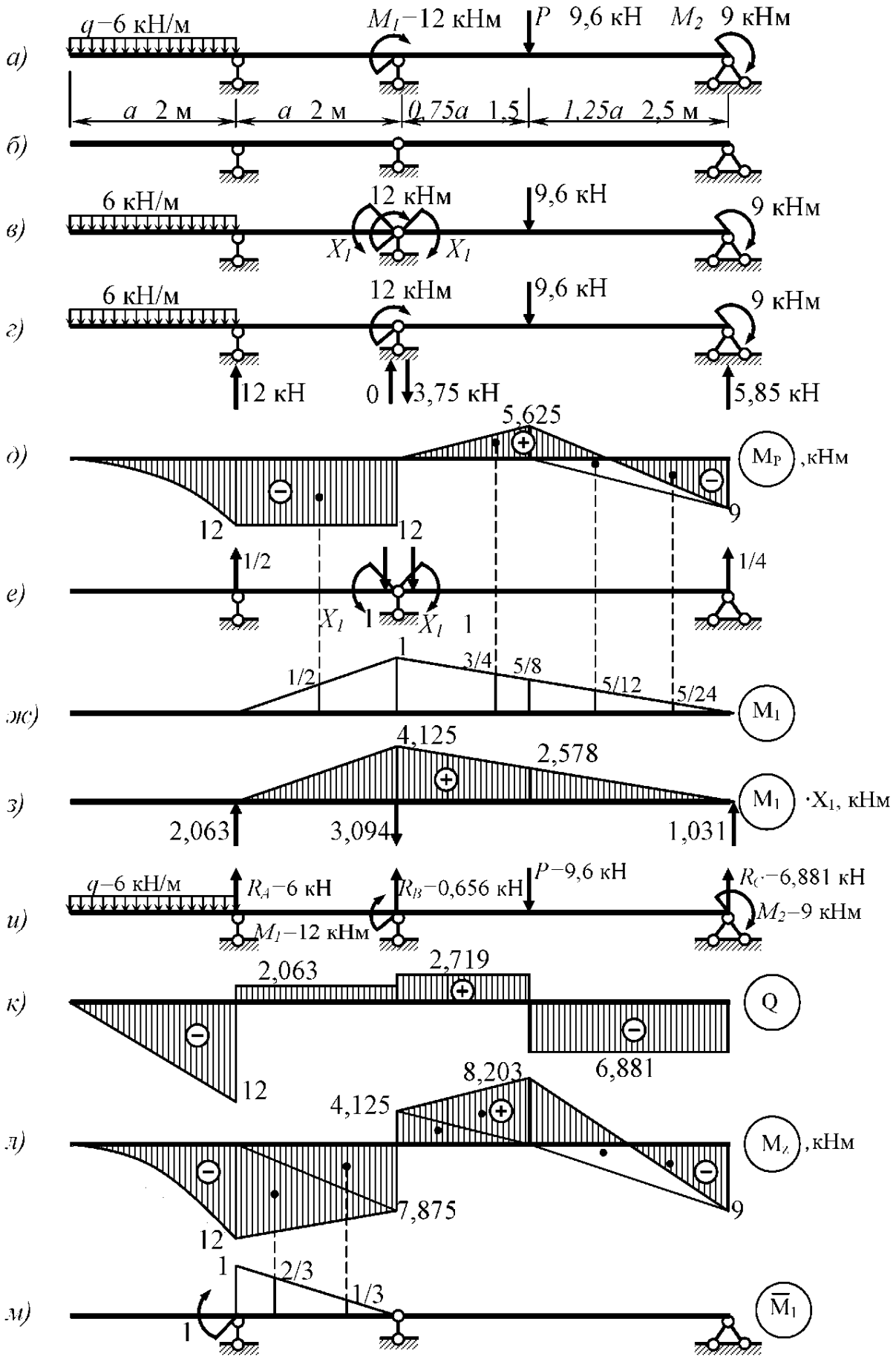


Рис. 5.13

Известными методами или сложением эпюр $M(x) = M_1 \cdot X_1 + M_p$ строим эпюры Q и M_z отдельно для каждой балки, а изображаем на одной оси (рис. 5.13, з, и, к).

Для проверки правильности построения эпюры M можно вычислить прогиб балки на какой либо опоре, или перемножив эпюру M на M_1 , вычислить взаимный угол поворота сечения балки на промежуточной опоре B , где он должен быть равен нулю.

$$EJ\alpha_{1M}^B = -\frac{12 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{7,875 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4,125 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{7}{8} + \frac{8,203 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{8,203 \cdot 2,5}{2} \cdot \frac{5}{12} - \frac{9 \cdot 2,5}{2} \cdot \frac{5}{24} = -11,594 + 11,594 = 0.$$

Определим угол поворота сечения балки на левой опоре A . Для этого приложим в основной системе (в левой балке) единичный момент на опоре A и построим эпюру изгибающих моментов от этой нагрузки \bar{M}_1 (рис. 5.12, е, ж). Перемножая по правилу Верещагина эпюры M_z и \bar{M}_1 находим:

$$EJ\alpha_A = -\frac{12 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{7,875 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} = -10,625.$$

Для деревянной балки ($E = 10^4$ МПа) прямоугольного поперечного сечения $b \times h = 12 \times 20$ см²

$$J_z = \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 8000 \text{ см}^4, E = 0,1 \cdot 10^5 \text{ МПа. Угол поворота на опоре } A:$$

$$\alpha_A = -\frac{10,625}{EJ} = -\frac{10,625 \cdot 10^3}{10^{10} \cdot 8000 \cdot 10^{-8}} = -0,01328 \text{ рад} = -0^\circ,76.$$

Знак минус указывает на то, что направление угла поворота балки на левой опоре противоположно направлению единичного момента, приложенного на этой опоре (рис. 5.13, л), т.е. сечение поворачивается против хода часовой стрелки.

5.4. Расчёт статически неопределимой рамы

Задача №13

Для плоской стальной ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа) статически неопределимой рамы (рис. 5.14) требуется:

- 1) - определить степень статической неопределимости;
- 2) - выбрать основную и эквивалентную системы; составить канонические уравнения метода сил;
- 3) - построить эпюры изгибающих моментов в основной системе от заданной нагрузки и единичных неизвестных;
- 4) - вычислить коэффициенты канонических уравнений;
- 5) - найти неизвестные силовые факторы;
- 6) - построить окончательные эпюры продольных и поперечных сил и изгибающих моментов;
- 7) - сделать проверку правильности раскрытия статической неопределимости;
- 8) - подобрать двутавровое поперечное сечение рамы, проверить его прочность в опасном сечении;
- 9) - определить перемещение узла A рамы.

Данные взять из табл. 5.3.

Порядок выполнения задачи 13 аналогичен приведенному в примере 13.

Пример 13.

Для рамы (рис. 5.15, a) выполнить задание, изложенное в задаче №13.

Решение.

- 1) – Степень статической неопределимости заданной рамы равна двум, т.к. неизвестных опорных реакций 5, а уравнений равновесия можно составить 3.

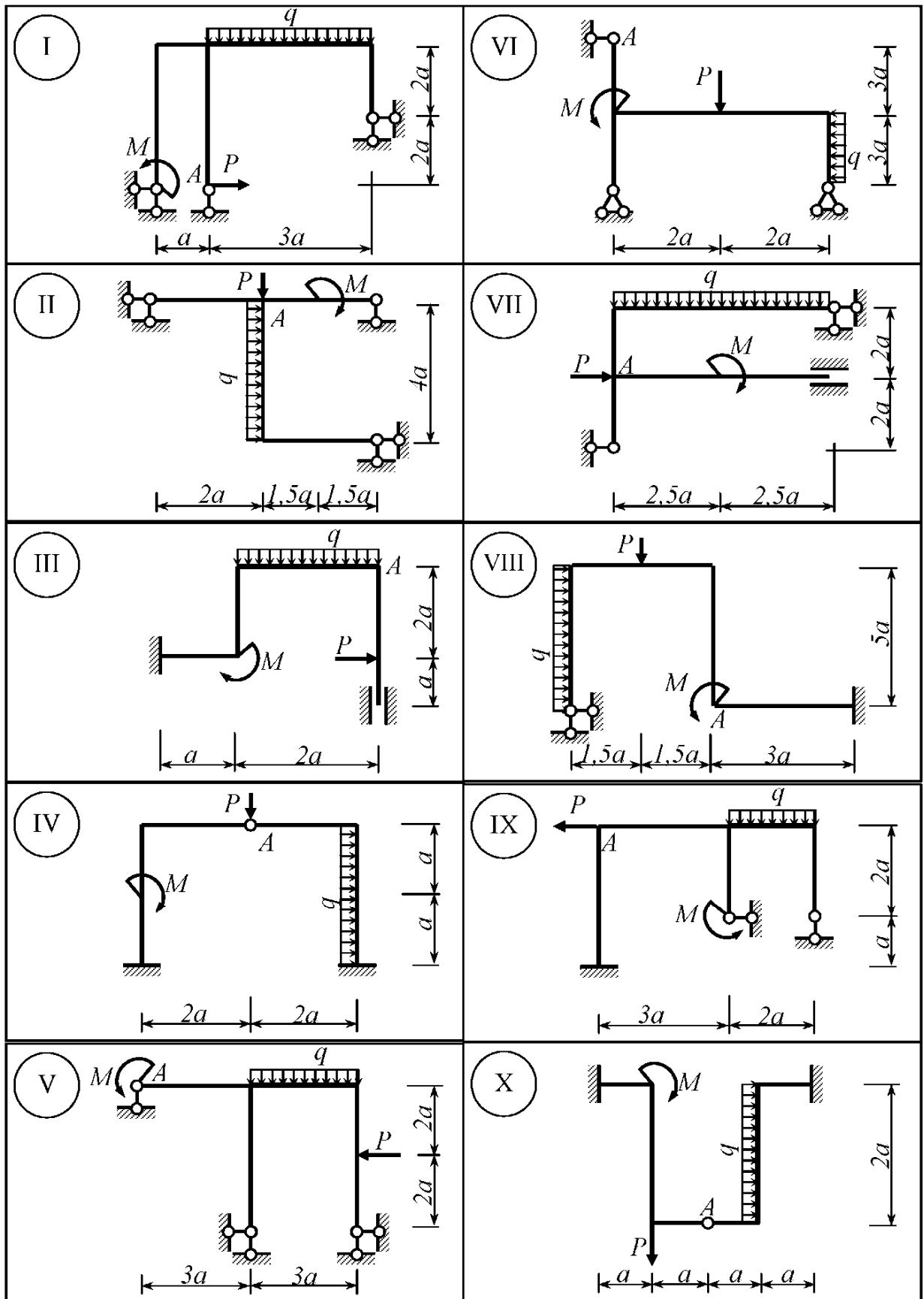


Рис. 5.14

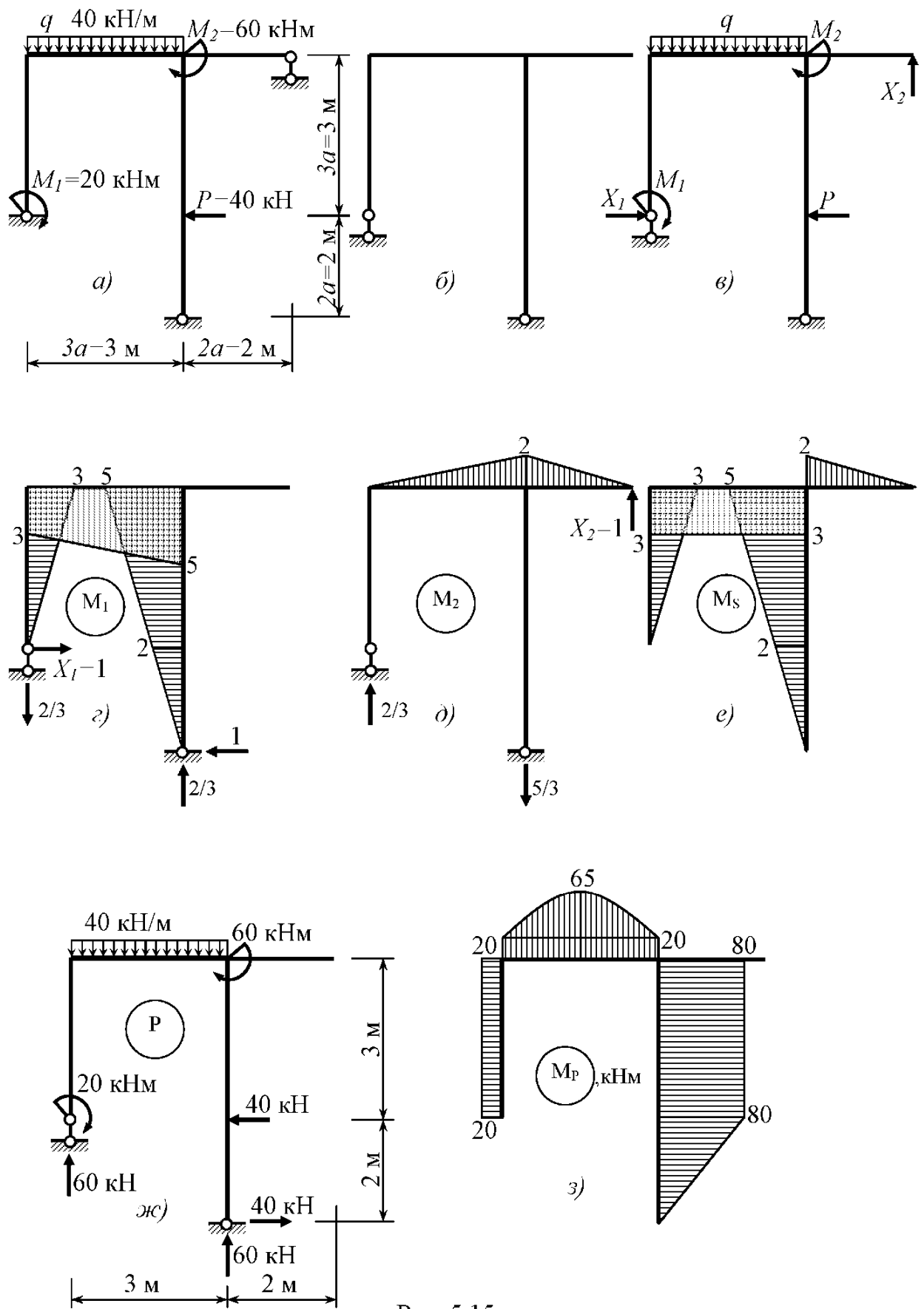


Рис. 5.15

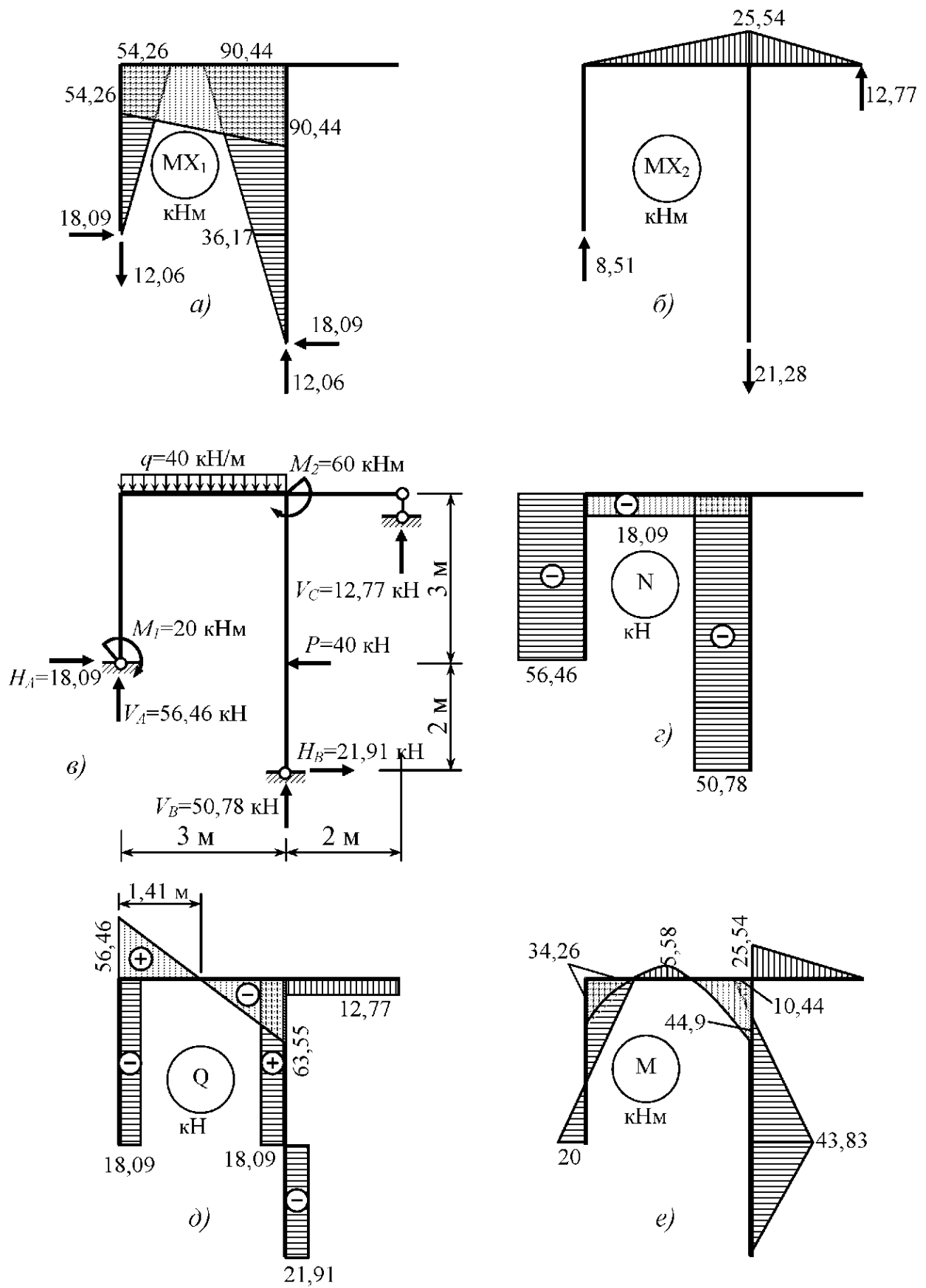


Рис. 5.16

2) – Основная система получена путём отбрасывания двух «лишних» связей (рис. 5.15, б). Эквивалентная система (рис. 5.15, в) – это основная система плюс заданная нагрузка и неизвестные силы, приложенные вместо отброшенных связей.

Каноническое уравнение метода сил для дважды статически неопределимой системы имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

3) – В основной системе строим эпюры изгибающих моментов от единичных сил $X_1=1$ и $X_2=1$ (рис. 5.15, г, д), суммарную единичную эпюру M_s (рис. 5.15, е), полученную суммированием в каждой точке рамы эпюр M_1 и M_2 . На рис. 5.15, ж изображена заданная нагрузка в основной системе, а грузовая эпюра M_p – на рис. 5.15, з.

4) – Вычисляем коэффициенты канонических уравнений, используя правило Верещагина $\delta_{kp} = \sum \frac{\omega_i m_{ci}}{EJ_z}$:

$$EJ\delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 5 \right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = \frac{299}{3};$$

$$EJ\delta_{22} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{20}{3};$$

$$EJ\delta_{21} = EJ\delta_{12} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = -13;$$

$$EJ\Delta_{1p} = -20 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - \left(20 \cdot 3 + \frac{40 \cdot 3^3}{3} \right) \cdot \frac{3+5}{2} - 80 \cdot 3 \cdot \frac{5+2}{2} - \frac{80 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{4910}{3};$$

$$EJ\Delta_{2p} = \left(20 \cdot 3 + \frac{40 \cdot 3^3}{12} \right) \frac{1}{2} \cdot 2 = 150.$$

Для проверки правильности вычисления коэффициентов системы уравнений вычисляем:

$$EJ\delta_{ss} = \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{241}{3};$$

$$EJ\Delta_{sp} = -EJ(\Delta_{1P} + \Delta_{2P}) = -\frac{4910}{3} + 150 = -\frac{4460}{3}.$$

$$EJ\Delta_{sp} = -20 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - \left(20 \cdot 3 + \frac{40 \cdot 3^3}{12}\right) \cdot 3 - 80 \cdot 3 \cdot \frac{5+2}{2} - \frac{80 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{4460}{3}.$$

Проверка правильности вычисления коэффициентов системы уравнений:

$$1) \quad \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \delta_{ss}, \quad \frac{299}{3} + 2 \cdot (-13) + \frac{20}{3} = \frac{241}{3};$$

$$2) \quad \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \Delta_{sp}; \quad -\frac{4910}{3} + 150 = -\frac{4460}{3}.$$

Таким образом, коэффициенты канонического уравнения вычислены верно.

5) – Подставляем значения коэффициентов в систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{299}{3} X_1 - 13X_2 - \frac{4910}{3} = 0; \\ -13X_1 + \frac{20}{3} X_2 + 150 = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 299X_1 - 39X_2 = 4910; \\ -39X_1 + 20X_2 = -450. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{-\Delta_{1P}\delta_{22} + \Delta_{2P}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} = \frac{4910 \cdot 20 - 450 \cdot 39}{299 \cdot 20 - 39^2} = 18,09 \text{ кН}; \\ X_2 = \frac{-\Delta_{2P}\delta_{11} + \Delta_{1P}\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} = \frac{-450 \cdot 299 + 4910 \cdot 39}{299 \cdot 20 - 39^2} = 12,77 \text{ кН}; \end{cases}$$

6) – Строим эпюры изгибающих моментов $M_1 \cdot X_1$ и $M_2 \cdot X_2$ (рис. 5.16, а, б) и определяем окончательные опорные реакции (рис. 5.16, в).

Эпюру изгибающих моментов строим как сумму уже имеющих эпюр: $M = M_p + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$ (рис. 5.16, е). Все эпюры изгибающих моментов строим со стороны сжатых волокон. Знаки – не ставить, так как они противоречивы (на вертикальных участках).

Эпюры продольных сил N (рис. 5.16, z) и поперечных сил Q (рис. 5.16, d) строятся просто и их построение не требует пояснений (см. растяжение-сжатие и изгиб балок).

На участке с распределенной нагрузкой

$$Q(x) = V_A - q \cdot x = 0, \quad x = \frac{V_A}{q} = \frac{56,46}{40} = 1,41 \text{ м.}$$

Уравнение изгибающих моментов

$$M(x) = V_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} + M_1 - H_A \cdot 3 = 56,46 - 20x^2 + 20 - 18,09 \cdot 3;$$

при $x = 1,41 \text{ м}$ $M_{\max} = 5,58 \text{ кНм}$ (рис. 5.16, e)

7) – Проверим правильность раскрытия статической неопределенности системы. Для этого надо установить, что деформации по направлению имеющихся в системе связей равны нулю, т.е. в любой основной системе по направлению отброшенных связей надо приложить единичную нагрузку, построить от этой нагрузки эпюру изгибающих моментов и по правилу Верещагина перемножить эту эпюру на окончательную эпюру изгибающих моментов. В результате должен быть нуль (допустимая погрешность 1%).

$$\begin{aligned} EJ\Delta_{SM} = & -\frac{20 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{34,26 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{34,26 + 44,9}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \frac{40 \cdot 3^3}{12} \cdot 3 + \frac{25,54 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \\ & + \frac{10,44 \cdot 3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) - \frac{43,83 \cdot 3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 5 \right) - \frac{43,83 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = -30 + 102,78 + 356,2 - \\ & - 270 + 34,05 + 62,61 - 197,22 - 58,43 = -555,65 + 555,64 = -0,01 \end{aligned}$$

Погрешность $\frac{0,01}{555,65} \cdot 100\% = 0,002\% < 1\%$, что допустимо.

8) – Подбор двутаврового сечения рамы производим из условия его прочности по нормальным напряжениям (5.1) при $M_{\max} = 44,9$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{44,9 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 280,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 280,6 \text{ см}^3.$$

По ГОСТ 8239-72 принимаем двутавр № 24 с $W_z = 289 \text{ см}^3$, $J_z = 3460 \text{ см}^4$, $F = 34,8 \text{ см}^2$, $h = 24 \text{ см}$, $b = 11,5 \text{ см}$, $d = 0,56 \text{ см}$, $t = 0,95 \text{ см}$.

Выбираем опасное сечение, которое в рассматриваемой раме проходит через опору B , для которой $M_{расч} = 44,9 \text{ кНм}$, $N_{расч} = -18,09 \text{ кН}$, $Q_{расч} = -63,55 \text{ кН}$.

Условия прочности рамы:

$$а) \sigma_{\max} = \sigma_{\max}(M) + \sigma(N) \leq [\sigma];$$

$$б) \sigma_{расч}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Определяем напряжения:

$$\sigma_{\max}(M) = \pm \frac{M_{\max}}{W_{\pm}} = \pm \frac{44,9 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = \pm 155,35 \cdot 10^6 \text{ Па} = \pm 155,35 \text{ МПа};$$

$$\sigma(N) = \frac{N_{расч}}{F} = \frac{-18,09 \cdot 10^3}{34,8 \cdot 10^{-4}} = -5,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = -5,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma = \pm \frac{M_{расч}}{J_{\pm}} (0,5h - t) = \pm \frac{44,9 \cdot 10^3}{3460 \cdot 10^{-8}} \cdot (0,5 \cdot 24 - 0,95) \cdot 10^{-2} = \pm 143,38 \cdot 10^6 \text{ Па} = \pm 143,38 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{Q_{расч} \cdot \eta \cdot t \cdot (h - t)}{2 \cdot d \cdot J_{\pm}} = \frac{63,55 \cdot 10^3 \cdot 11,5 \cdot 0,95 \cdot (24 - 0,95) \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 0,56 \cdot 10^{-2} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 41,3 \cdot 10^5 \text{ Па} = 41,3 \text{ МПа}.$$

Тогда условия прочности приобретают вид:

$$а) \sigma_{\max} = \pm 155,35 + (-5,2) = -160,55 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

$$\text{Перенапряжение} \frac{160,55 - 160}{160} \cdot 100\% = 0,34\% < 5\%, \text{ что допустимо.}$$

$$б) \sigma_{расч}^{IV} = \sqrt{(-143,38 - 5,2)^2 + 3 \cdot 41,3^2} = 164,9 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

$$\text{Перенапряжение} \frac{164,9 - 160}{160} \cdot 100\% = 3,06\% < 5\%, \text{ что допустимо.}$$

Значит, прочность рамы обеспечена.

9) – Определим перемещения сечения C . Для этого в любой основной системе построим эпюру изгибающих моментов M_1 от единичной силы, приложенной по горизонтали в сечении C (рис. 5.17, а), учитывая, что вертикальное перемещение рамы в сечении C равно нулю, так как там есть опора. По правилу Верещагина определим

$$\delta_C^{zop} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \left(\frac{20 \cdot 3}{2} \cdot 1 - \frac{34,26 \cdot 3}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{40 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{3}{2} - \frac{44,9 \cdot 3}{2} \cdot 1 \right) = -\frac{107,91}{EJ} =$$

$$= -\frac{107,91 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = -15,6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -15,6 \text{ мм.}$$

Знак минус в ответе указывает, что перемещение сечения C произошло по направлению, противоположному направлению единичной силы (рис. 5.17, a), т.е. влево.

Определим угол поворота сечения C . В любой основной системе (рис. 5.17, b) в сечении C приложим единичный момент и построим эпюру изгибающих моментов M_1 от этого нагружения (рис. 5.17, b).

По правилу Верещагина определим

$$\alpha_C = \frac{1}{EJ_z} \cdot \frac{25,54 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8,51}{EJ_z} = \frac{8,51 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Знак плюс в ответе указывает на то, что направление угла поворота в сечении C совпадает с направлением приложенного единичного момента (рис. 5.17, b), т.е. против хода часовой стрелки.

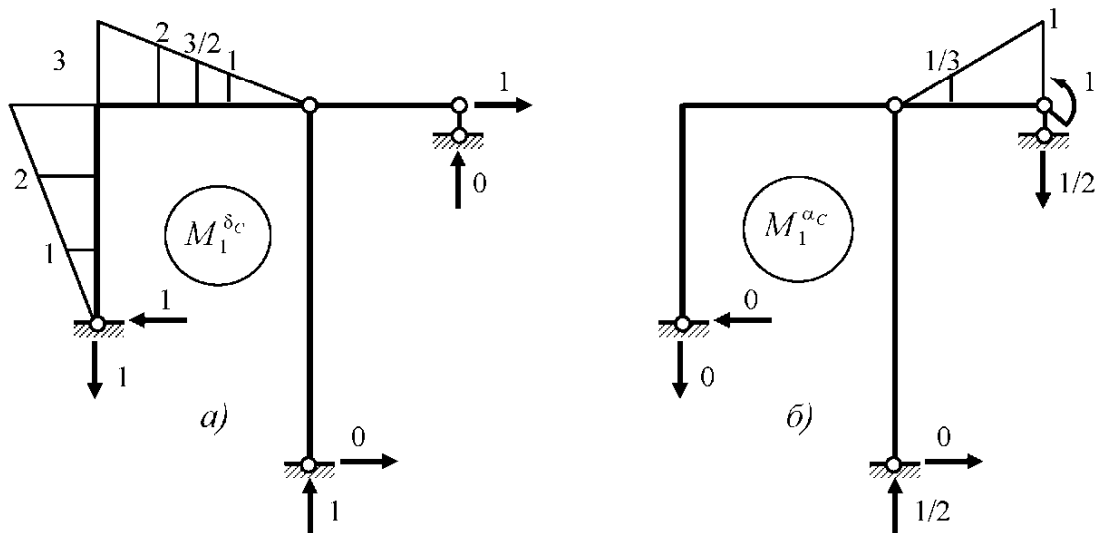


Рис. 5.17

6. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Рассматривается расчёт балки при косом (неплоском) изгибе, внецентренное сжатие короткого стержня и изгиб с кручением статически определимого вала.

6.1. Неплоский изгиб балки

Задача №14

Для деревянной балки ($E = 0,15 \cdot 10^5$ МПа) прямоугольного сечения и нагруженной так, как показано на рис. 6.1 требуется:

- 1) построить эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях;
- 2) подобрать размеры поперечного сечения балки при условии, что $[\sigma] = 20$ МПа, $h/b = k$ (задано);
- 3) определить положение нейтральной линии в опасном сечении балки и построить для этого сечения эпюру нормальных напряжений в аксонометрии;
- 4) вычислить полное перемещение центра тяжести сечения 1-1.

Данные взять из таблицы 6.1.

Порядок выполнения задачи №14 аналогичен решению примера №14.

Пример 14. Выполнить расчёт по плану, приведенному в задаче №14, для балки, изображённой на рис. 6.2, а, при условии, что $a = 0,5$ м, $q = 4$ кН/м, $P = 10$ кН, $M = 12$ кНм, $\gamma = 30^\circ$, $h/b = 2$.

Решение.

1. Разложим силу P на вертикальную и горизонтальную составляющие:
 $P_y = P \cos \gamma = 8,66$ кН, $P_z = P \sin \gamma = 5$ кН.

2. Изображаем балку в вертикальной плоскости вместе с нагрузками, действующими на неё (рис. 6.2, б). Определяем опорные реакции и строим эпюру изгибающих моментов M_z (рис. 6.2, в).

Таблица 6.1.

Буквы алфавита	Схема по рис. 6.1	$a, м$	$q, кН/м$	$P, кН$	$M, кНм$	$\gamma, град$	k
а, б, в	I	0,70	4,0	14	12	30	2,0
г, д, е	II	0,25	4,5	13	10	45	2,5
ё, ж, з	III	0,30	5	12	9	60	2,9
и, й, к	IV	0,35	5,5	11	8	30	2,2
л, м, н	V	0,40	6,0	10	7	45	2,4
о, п, р	VI	0,45	6,5	9	6	60	2,8
с, т, у	VII	0,50	7,0	8	14	30	2,3
ф, х, ц	VIII	0,55	7,5	7	13	45	2,6
ч, ш, щ	IX	0,60	8	6	11	60	2,1
ы, э, ю,я	X	0,65	8,5	5	15	30	2,7
	1	2	3	4	5	6	7

3. Изображаем балку в горизонтальной плоскости (вид снизу), совмещая её с плоскостью чертежа, вместе с нагрузками, действующими на неё (рис. 6.2, з). Определяем опорные реакции и строим эпюру изгибающих моментов M_y (рис. 6.2, д).

4. Определяем опасное сечение в балке, для которого результирующий изгибающий момент $M_u = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ будет иметь наибольшее значение. В рассматриваемом примере опасным является сечение, где $M_z = 8,93 \text{ кНм}$, $M_y = 0,8 \text{ кНм}$.

5. Из условия прочности балки при косом изгибе $\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]$

подбираем размеры поперечного сечения балки.

Здесь M_z, M_y – абсолютные значения изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях для опасного сечения балки.

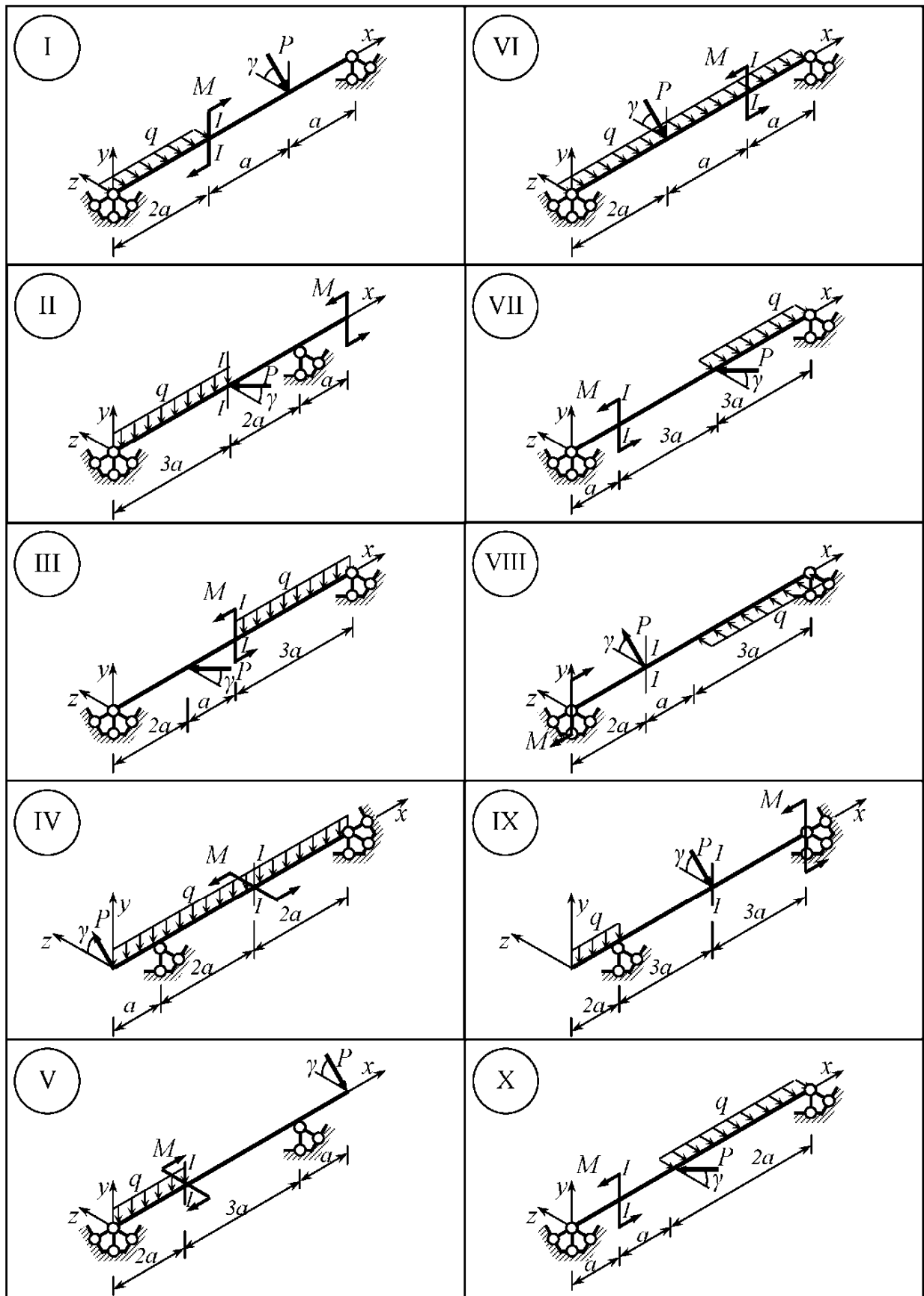


Рис. 6.1

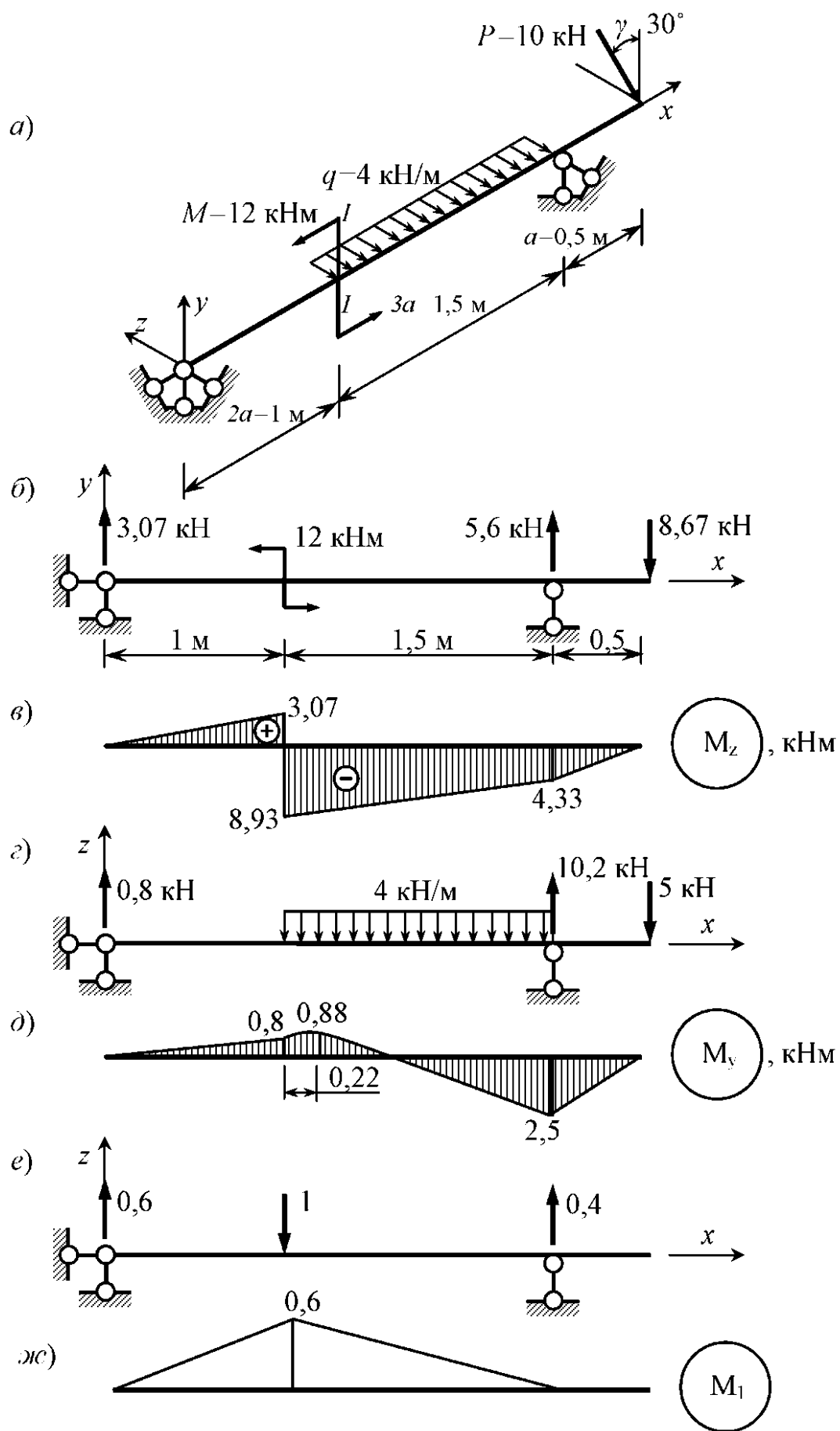


Рис. 6.2

Моменты сопротивления $W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}$, $W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$.

С учётом того, что $h = 2b$, получим $W_z = \frac{2}{3}b^3$, $W_y = \frac{b^3}{3}$. Тогда условие прочности принимает вид:

$$\frac{8,93 \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot b^3} + \frac{0,8 \cdot 10^3 \cdot 3}{b^3} = 20 \cdot 10^6.$$

Отсюда находим: $b=9,24$ см, $h=18,5$ см.

6. Определяем положение нейтральной оси в опасном сечении балки из условия, что во всех точках этой оси напряжения равны нулю, т.е.

$$\sigma = -\frac{M_z}{J_z} y - \frac{M_y}{J_y} z = 0.$$

Отсюда $y = -\frac{M_y}{M_z} \frac{J_z}{J_y} z$ и $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y}$, α – угол наклона нейтральной

оси к оси z поперечного сечения балки.

Значения M_z и M_y берутся из эпюр для опасного сечения балки ($M_z = -8,93$ кНм, $M_y = 0,8$ кНм). Учтём, что $\frac{J_z}{J_y} = \left(\frac{h}{b}\right)^2 = k^2$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{0,8}{-8,93} \cdot 2^2 = 0,358$,

$\alpha = 19,7^\circ$. Угол α откладывается от оси z против хода часовой стрелки, т.к. он положителен (рис. 6.3,а).

Вычисляем напряжения в опасном сечении балки с моментами $M_z = -8,93$ кНм, $M_y = 0,8$ кНм в точках контура поперечного сечения (рис. 6.3, а, точки 1-4)

по формуле $\sigma = -\frac{M_z}{J_z} y - \frac{M_y}{J_y} z$.

Здесь z, y – координаты точек поперечного сечения балки (в данном случае точек 1 - 4).

Моменты инерции $J_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{9,24 \cdot 18,48^3}{12} = 4866,78 \text{ см}^4$,

$$J_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{18,48 \cdot 9,24^3}{12} = 1218,69 \text{ см}^4.$$

Напряжения в угловых точках балки:

$$\sigma_1 = -\frac{-8,93 \cdot 10^3}{466,78 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{0,185}{2} - \frac{-0,8 \cdot 10^3}{1216,69 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{0,0924}{2} =$$

$$= (16,96 - 3,04) \cdot 10^6 \text{ Па} = 13,92 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = (16,96 + 3,04) \cdot 10^6 \text{ Па} = 20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = (-16,96 + 3,04) \cdot 10^6 \text{ Па} = -13,92 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = (-16,96 - 3,04) \cdot 10^6 \text{ Па} = -20 \text{ МПа}.$$

По найденным значениям строим эпюру распределения напряжений по контуру опасного сечения балки (рис.6.3, б).

Вычислим перемещения центра тяжести сечения балки I-I отдельно в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Для этого разгрузим балку, приложим единичную силу в сечении I-I и построим эпюру изгибающих моментов от этой силы M_1 (рис. 6.2, е, ж). По правилу Верещагина вычислим прогиб балки в вертикальной плоскости.

$$f_y = \sum \frac{\omega_i m_{ei}}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3,07 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 - \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 8,93 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 4,33 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,6 \right) = -\frac{2,715}{EJ_z} = -\frac{2,715 \cdot 10^3}{0,15 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 4866,78 \cdot 10^{-8}} = \\ = -3,72 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -3,72 \text{ мм}.$$

Знак минус указывает, что вертикальное перемещение сечения I-I направлено противоположно приложенной единичной силе (рис. 6.2, е), т.е. сечение I-I переместилось вертикально вверх на $f_y = 3,72 \text{ мм}$.

Прогиб балки в горизонтальном направлении:

$$f_z = M_y \cdot M_1 = \sum \frac{\omega_i \cdot m_{ei}}{EJ_y} = \frac{1}{EJ_y} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 0,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{4 \cdot 1,5^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \times \right. \\ \left. \times 0,6 + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 2,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,6 \right) = \frac{0,362}{EJ_y} = \frac{0,362 \cdot 10^3}{0,15 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1216,69 \cdot 10^{-8}} = \\ = 1,98 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,98 \text{ мм}.$$

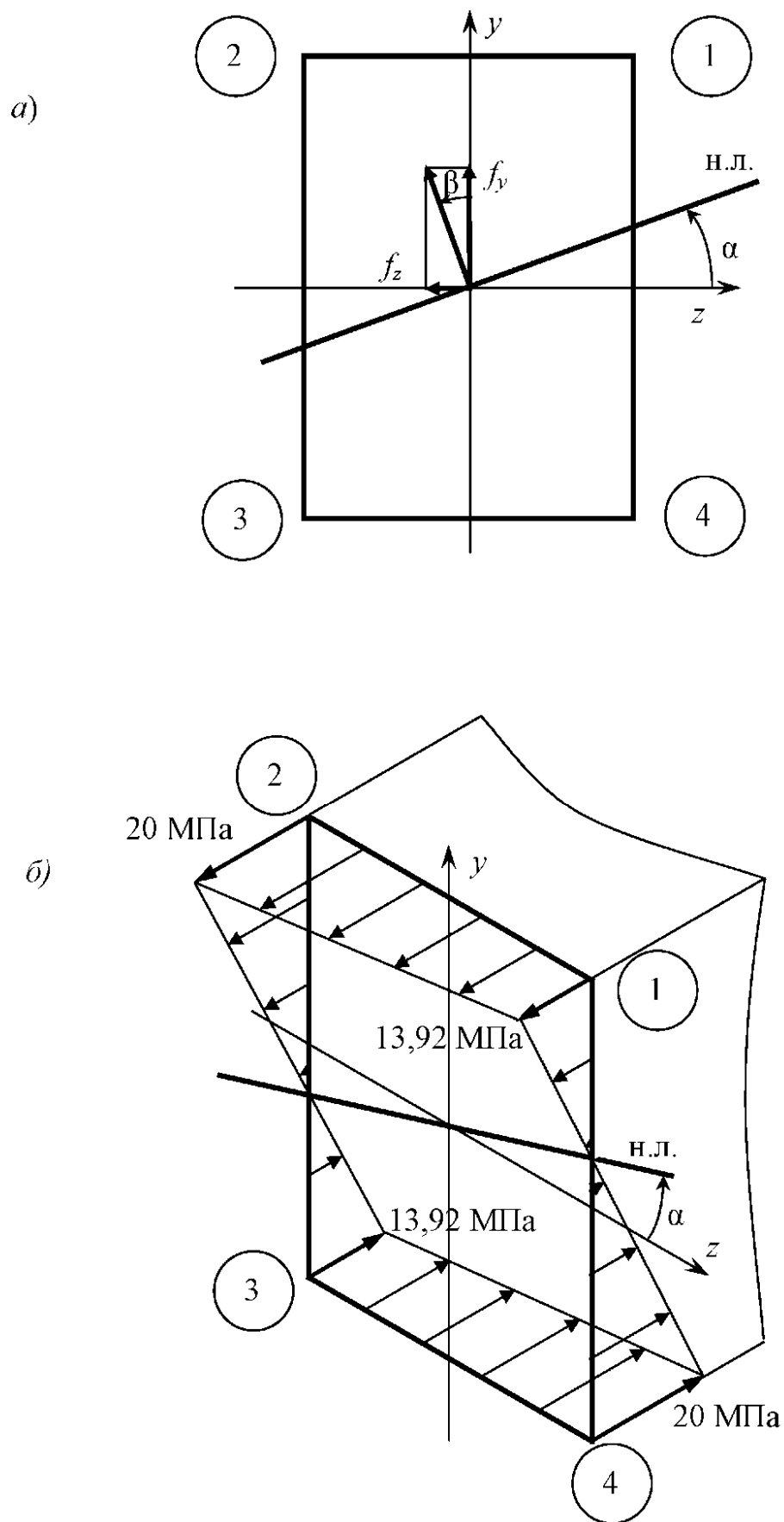


Рис. 6.3

Знак плюс показывает, что горизонтальное перемещение сечения I-I направлено по направлению приложенной единичной силы (рис. 6.2, *e*), т.е. сечение I - I переместилось против направления оси z на $f_z=1,98$ мм.

Вычисляем полное перемещение центра тяжести сечения I-I (рис. 6.3, *a*):

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{3,72^2 + 1,98^2} = 4,21 \text{ мм.}$$

Направление полного перемещения к оси y : $\text{tg}\beta = \frac{f_z}{f_y} = \frac{1,98}{3,72} = 0,532$

$$\beta = 28,02^\circ.$$

6.2. Внецентренное растяжение (сжатие)

Задача №15.

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 6.4, сжимается продольной силой P , приложенной в точке А. Требуется найти допускаемую нагрузку P при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие $[\sigma]_c$ и на растяжение $[\sigma]_p$ и построить в аксонометрии эпюру распределения напряжений по сечению стержня. Данные взять из таблицы 6.2.

Порядок выполнения задачи №15 аналогичен решению примера 15.

Пример 15. Для короткого чугунного стержня ($[\sigma]_p=40$ МПа, $[\sigma]_c=100$ МПа), сжатого силой P , приложенной в точке А (рис. 6.5, *a*), требуется определить допускаемую нагрузку P и построить в аксонометрии эпюру распределения напряжений ($a = 2$ см).

Решение.

1.-Определяем площадь поперечного сечения стержня (рис. 6.5, *б*).

$$F = \frac{2a \cdot 5a}{2} \cdot 2 + 4a(5a - 3a) = 18a^2 = 18 \cdot 2^2 = 72 \text{ см}^2.$$

Таблица 6.2

Буквы алфавита	Схема по рис. 6.4	$a, \text{ см}$	$[\sigma]_c$	$[\sigma]_p$
			МПа	
а, б, в	I	4	110	21
г, д, е	II	5	120	22
ё, ж, з	III	6	130	23
и, й, к	IV	5	140	24
л, м, н	V	6	150	25
о, п, р	VI	4	60	26
с, т, у	VII	5	70	27
ф, х, ц	VIII	4	80	28
ч, ш, щ	IX	6	90	29
ы, э, ю, я	X	5	100	30
	I	2	3	4

2.-Найдём положение центра тяжести поперечного сечения по формулам:

$$z_c = \frac{\sum F_i \cdot z_{ci}}{\sum F_i}, \quad y_c = \frac{\sum F_i \cdot y_{ci}}{\sum F_i}.$$

Так как сечение имеет вертикальную ось симметрии, являющуюся главной центральной осью, то достаточно вычислить лишь y_c .

Разобьём поперечное сечение на простые фигуры (рис. 6.5 б). Тогда

$$y_c = \frac{S_{z1}}{F} = \frac{F_1 \cdot y_{c1} \cdot 2 + F_2 \cdot y_{c2}}{F_1 \cdot 2 + F_2}, \text{ где } y_{c1} = \frac{5a}{3}, \quad y_{c2} = \frac{5a}{2};$$

$$y_c = \frac{\frac{2a \cdot 5a}{2} \cdot \frac{5a}{3} \cdot 2 + 4a(5a - 3a) \cdot \frac{5a}{2}}{2a \cdot 5a + 4a(5a - 3a)} = \frac{55}{27}a = \frac{55}{27} \cdot 2 = 4,07 \text{ см.}$$

На расстоянии $y_c = 4,074 \text{ см}$ проводим главную центральную ось z , параллельно вспомогательной оси z_1 (рис. 6.5 б). Расстояние центров тяжести треугольников и прямоугольника от оси z :

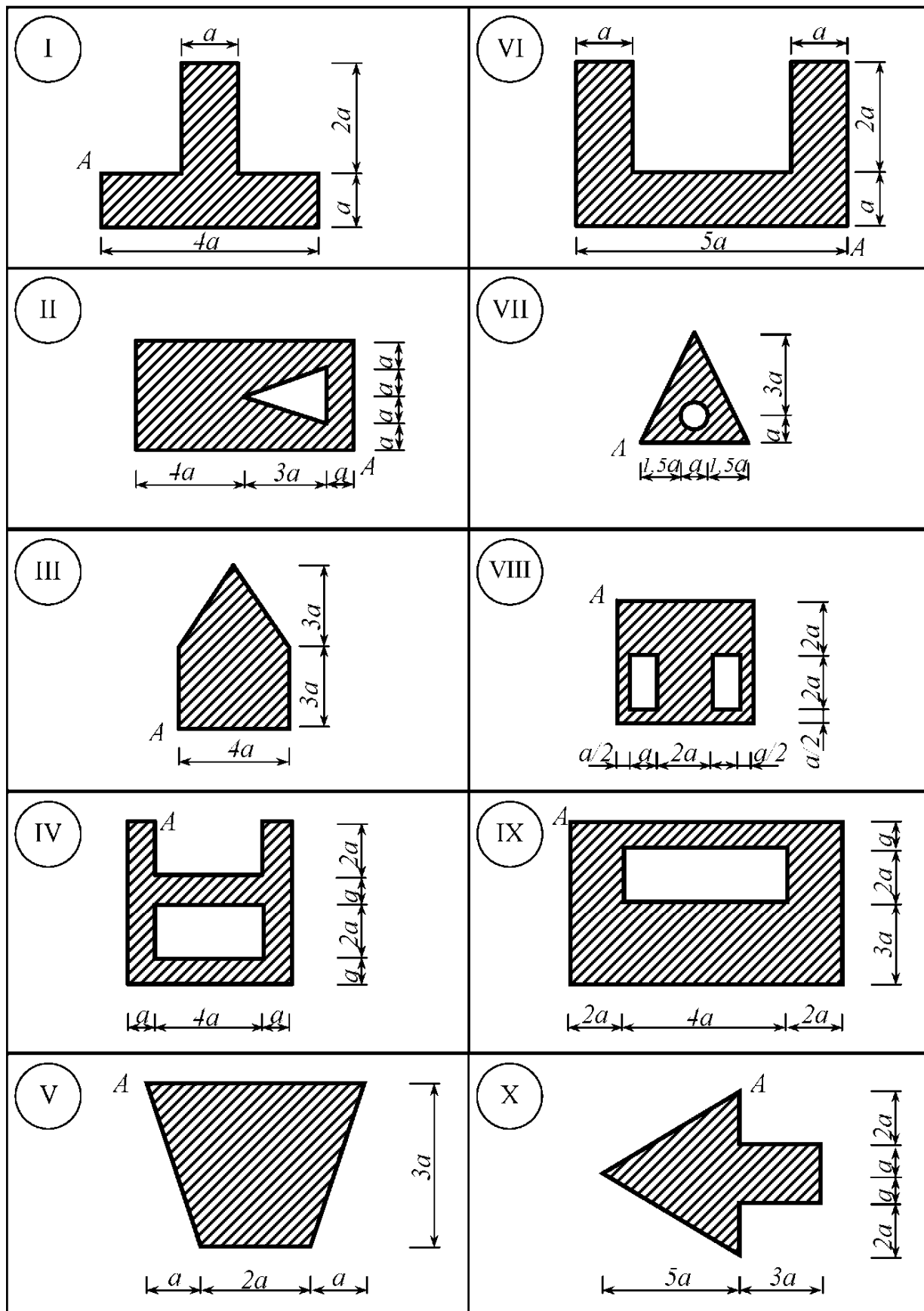


Рис. 6.4

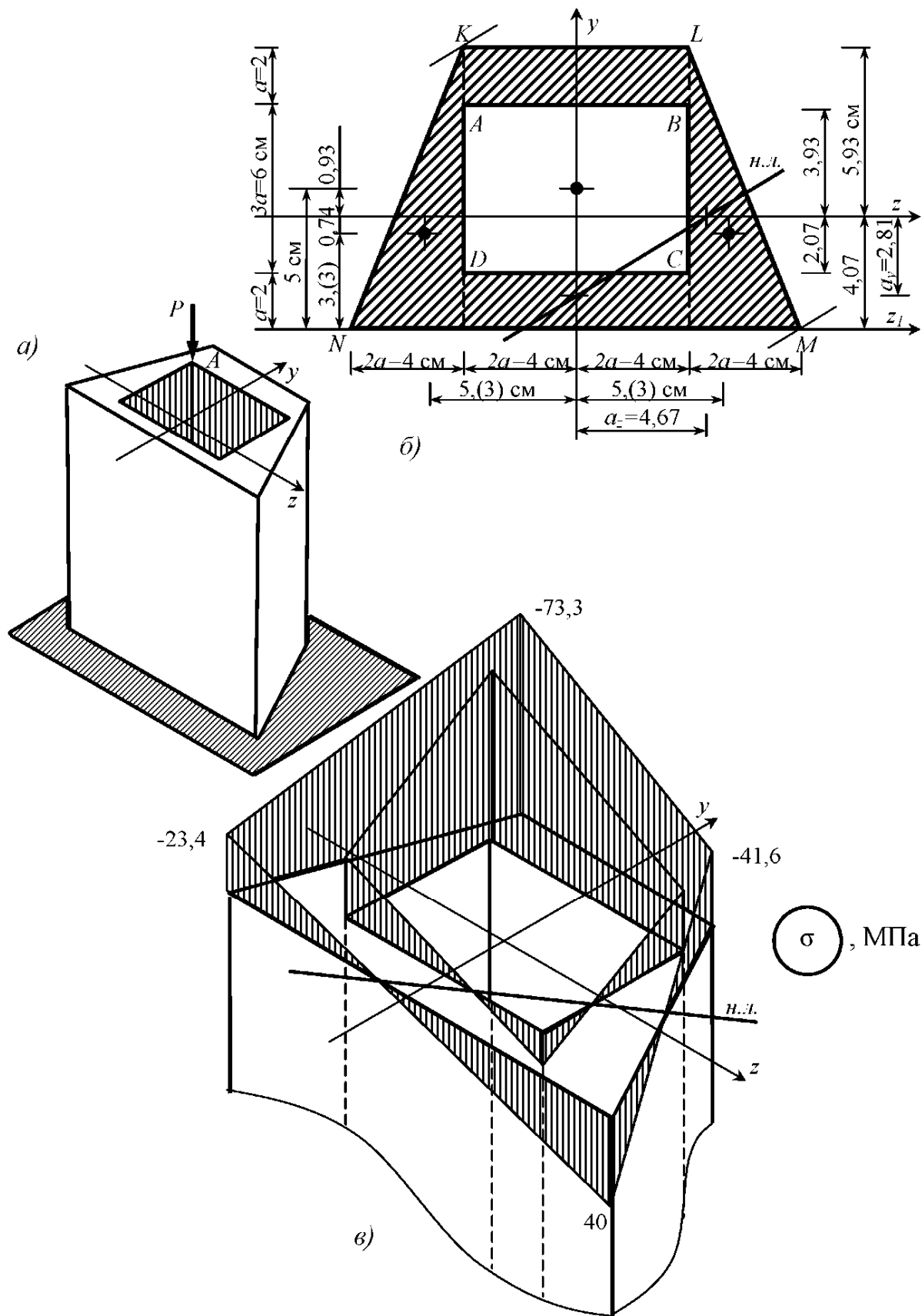


Рис. 6.5

$$a_1 = y_{c1} - y_c = \frac{5}{3}a - \frac{55}{27}a = -\frac{10}{27}a = -\frac{10}{27} \cdot 2 = -0,74 \text{ см},$$

$$a_2 = y_{c2} - y_c = \frac{5}{2}a - \frac{55}{27}a = -\frac{10}{27}a = \frac{25}{54} \cdot 2 = 0,93 \text{ см}.$$

3.-Определяем главные центральные моменты инерции поперечного сечения. Оси z и y (рис. 6.5, в) являются главными центральными осями инерции, т.е. проходят через центр тяжести сечения, которое имеет ось симметрии, следовательно центробежный момент инерции сечения относительно осей z и y равен нулю.

Вычисляем моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей z и y , применяя зависимость моментов инерции при параллельном переносе осей и формулы моментов инерции прямоугольника и треугольника относительно собственных центральных осей. Тогда

$$J_z = \left[\frac{2a(5a)^3}{36} + 5a^2 \left(\frac{10}{27}a \right)^2 \right] \cdot 2 + \frac{4a((5a)^3 - (3a)^3)}{12} + 4a(5a - 3a) \left(\frac{25}{54}a \right)^2 =$$

$$= \frac{4,021}{81}a^4 = \frac{4,021}{81} \cdot 2^4 = 794,27 \text{ см}^4,$$

$$J_y = \left[\frac{5a(2a)^3}{36} + 5a^2 \left(\frac{8}{3}a \right)^2 \right] \cdot 2 + \frac{(5a - 3a)(4a)^3}{12} = 84a^4 = 84 \cdot 2^4 = 1344 \text{ см}^4.$$

4.-Вычисляем квадраты радиусов инерции относительно главных центральных осей

$$i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{4021a^4}{81 \cdot 18a^2} = \frac{4021}{1458}a^2 = \frac{4021}{1458} \cdot 2^2 = 11,03 \text{ см}^2,$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{84a^4}{18a^2} = \frac{14}{3}a^2 = \frac{14}{3} \cdot 2^2 = 18,6 \text{ см}^2.$$

5.-Определяем положение нейтральной линии, вычислив отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат $a_z = -\frac{i_y^2}{z_p}$, $a_y = -\frac{i_z^2}{y_p}$, где z_p и y_p –

координаты точки A – точки приложения нагрузки P (рис 6.5, б), $z_P = -4$ см, $y_P = 3,93$ см. Значит, $a_z = -\frac{18,6}{-4} = 4,6$ см, $a_y = -\frac{11,03}{3,93} = -2,81$ см.

Отложив на осях координат a_z и a_y и, соединяя полученные точки, получим нейтральную линию (рис. 6.5, б), которая делит сечение на сжатую и растянутую (с противоположной стороны) зоны (рис. 6.5, б).

6.-Подбор допускаемой нагрузки. Максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удалённых от нейтральной линии (в каждой зоне). В данном случае это точки K ($z_K = -4$ см, $y_K = 5,93$ см) в сжатой и точка M ($z_M = 8$ см, $y_M = -4,07$ см) в растянутой зоне (рис. 6.5, б). Для определения положения опасных точек проводим в каждой зоне касательные к контуру поперечного сечения, параллельные нейтральной линии.

Из условия прочности стержня на растяжение получим величину возможной допускаемой нагрузки.

$$\sigma_{\max}^+ = \sigma_M = -\frac{P}{F} \cdot \left(1 + \frac{z_P \cdot z_M}{i_y^2} + \frac{y_P \cdot y_M}{i_z^2} \right) \leq [\sigma]_p, \text{ откуда}$$

$$P \leq -\frac{F[\sigma]_p}{1 + \frac{z_P \cdot z_M}{i_y^2} + \frac{y_P \cdot y_M}{i_z^2}} = -\frac{72 \cdot 10^{-4} \cdot 40 \cdot 10^6}{1 - \frac{4 \cdot 8}{18,6} - \frac{3,93 \cdot 4,07}{11,03}} = 133,06 \cdot 10^3 \text{ Н} = 133,06 \text{ кН.}$$

Аналогично определяем величину допускаемой нагрузки из условия прочности на сжатие.

$$\sigma_{\max}^- = \sigma_K = -\frac{P}{F} \cdot \left(1 + \frac{z_P \cdot z_K}{i_y^2} + \frac{y_P \cdot y_K}{i_z^2} \right) \leq [\sigma]_c, \text{ откуда}$$

$$P \leq -\frac{F[\sigma]_c}{1 + \frac{z_P \cdot z_K}{i_y^2} + \frac{y_P \cdot y_K}{i_z^2}} = -\frac{72 \cdot 10^{-4} \cdot (-100) \cdot 10^6}{1 + \frac{4 \cdot 4}{18,6} + \frac{3,93 \cdot 5,93}{11,03}} = 181,52 \cdot 10^3 \text{ Н} = 181,52 \text{ кН.}$$

Принимаем в качестве допускаемой нагрузки меньшую из этих двух сил, т.е. $P = 133,06$ кН.

7.-Построение эпюры нормальных напряжений. Вычислим напряжения в точках A, B, C, D, K, L, M, N поперечного сечения стержня (рис. 6.5, в) по формуле

$$\sigma_i = -\frac{P}{I'} \cdot \left(1 + \frac{z_p \cdot z_i}{i_y^2} + \frac{y_p \cdot y_i}{i_z^2} \right) = -\frac{133,06 \cdot 10^3}{72 \cdot 10^{-4}} \cdot \left[1 + \frac{(-4) \cdot z_i}{18,6} + \frac{3,93 \cdot y_i}{11,03} \right] =$$

$$= -18,48(1 - 0,214 \cdot z_i + 0,356 \cdot y_i) \text{ МПа.}$$

Подставим в последнее выражение координаты точек А-М, получим соответствующие нормальные напряжения (табл. 6.3), по которым строим эпюру в аксонометрии (рис. 6.5, в).

Таблица 6.3

<i>i</i>	А	В	С	Д	К	Л	М	Н
<i>z_i, см</i>	-4	4	4	-4	-4	4	8	-8
<i>y_i, см</i>	3,93	3,93	-2,07	-2,07	5,93	5,93	-4,07	-4,07
<i>σ_i, МПа</i>	-60,1	-28,5	11	-20,7	-73,3	-41,6	40	-23,4

6.3. Изгиб с кручением

Задача 16

Определить диаметр вала (рис. 6.6) по третьей теории прочности при $[\sigma]=100 \text{ МПа}$.

Данные взять из табл.6.4.

Таблица 6.4

Буквы алфавита	Схема по рис. 6.6	<i>a, м</i>	<i>P₁, кН</i>	<i>D₁, м</i>	<i>D₂, м</i>	<i>α, град</i>
а, б, в	I	0,20	10	0,40	0,60	20
г, д, е	II	0,25	12	0,42	0,58	25
ё, ж, з	III	0,30	14	0,44	0,56	30
и, й, к	IV	0,35	16	0,46	0,54	35
л, м, н	V	0,40	18	0,48	0,52	40
о, п, р	VI	0,45	20	0,50	0,50	45
с, т, у	VII	0,50	22	0,52	0,48	50
ф, х, ц	VIII	0,55	24	0,54	0,46	55
ч, ш, щ	IX	0,60	26	0,56	0,44	60
ы, э, ю,я	X	0,65	28	0,58	0,42	65
	1	2	3	4	5	6

Порядок выполнения задачи №16 аналогичен решению примера 16.

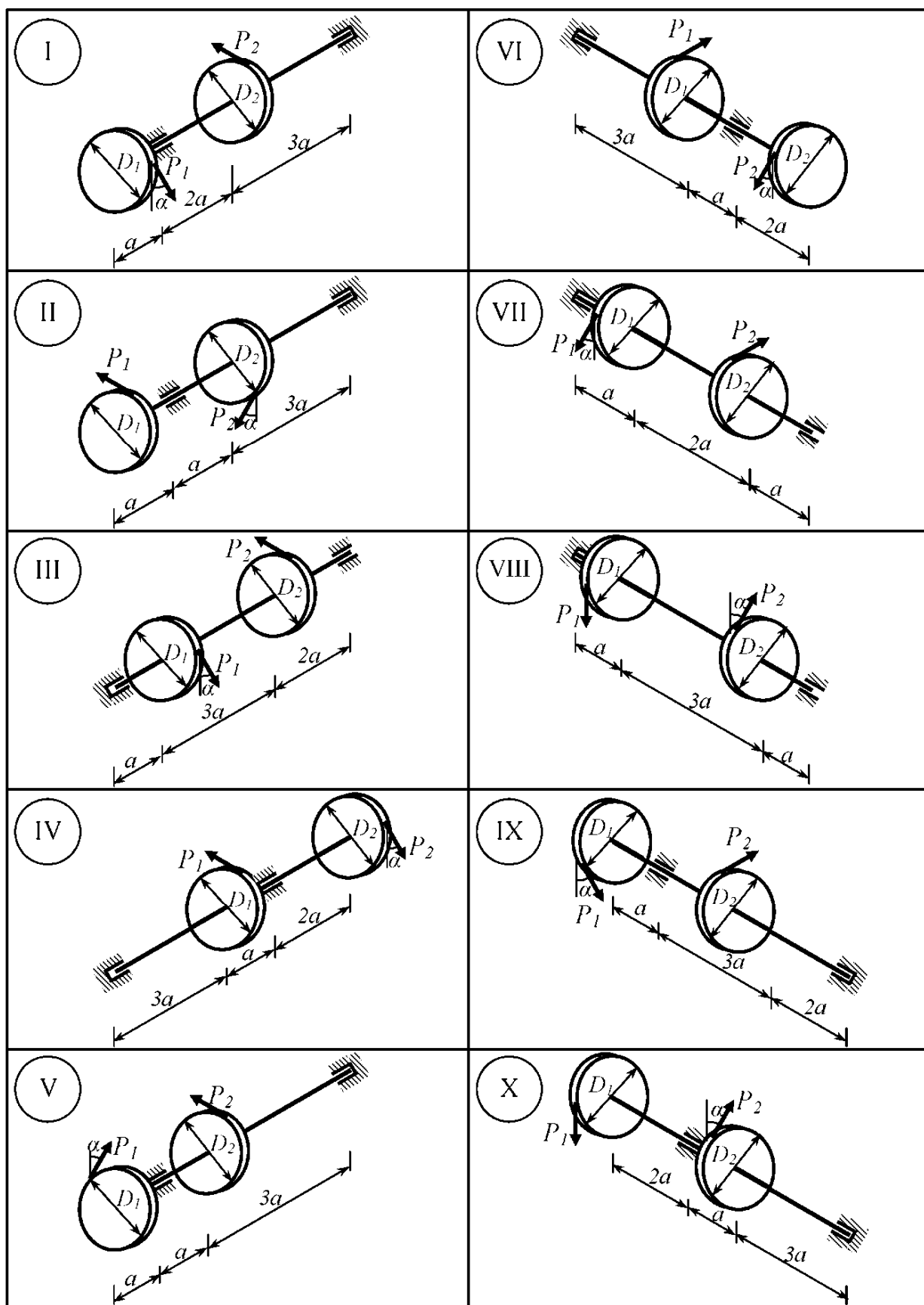


Рис. 6.6

Пример 16. Определить диаметр вала (рис. 6.7, а) по третьей теории прочности при $[\sigma]=100 \text{ МПа}$.

Дано: $P_1=15 \text{ кН}$, $D_1=0,4 \text{ м}$, $D_2=0,6 \text{ м}$, $\alpha=30^\circ$, $a=0,25 \text{ м}$.

Решение.

1. Определяем нагрузки, действующие на вал. Приведём силу P_2 к центру тяжести поперечного сечения вала, получим крутящий момент $M_{к2} = \frac{P_2 D_2}{2}$ и горизонтальную силу P_2 , изгибающую вал в горизонтальной плоскости. Аналогично приведём силу P_1 к центру тяжести поперечного сечения вала, получим крутящий момент $M_{к1} = \frac{P_1 D_1}{2}$ и силу P_1 , проекции которой $V_1=P_1 \cos\alpha$ и $H_1=P_1 \sin\alpha$ изгибают вал соответственно в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Из условия равновесия вала при кручении ($\sum M_x=0$) очевидно, что $M_{к1}=M_{к2}$.

Тогда $P_2 = \frac{P_1 D_1}{D_2} = \frac{15 \cdot 0,4}{0,6} = 10 \text{ кН}$.

2. Изображаем вал с действующими на него крутящими моментами (рис. 6.7, б). В данном случае кручение испытывает часть вала, расположенная между шкивами. Применим метод сечений и получим, рассматривая левую отсечённую часть вала, $M_x = M_{к1} = \frac{P_1 D_1}{2} = \frac{15 \cdot 0,4}{2} = 3 \text{ кНм}$ ($M_2 = \frac{P_2 D_2}{2} = \frac{10 \cdot 0,6}{2} = 3 \text{ кНм}$). Строим эпюру крутящих моментов (рис. 6.7, в).

3. Рассматриваем изгиб вала как двухопорной балки в вертикальной плоскости под действием вертикальной нагрузки $V_1=P_1 \cos\alpha=15 \cdot \cos 30^\circ=13 \text{ кН}$ (рис. 6.7, г). Определяем опорные реакции и строим эпюру изгибающих моментов M_y (рис. 6.7, ж).

4. Рассматриваем изгиб вала в горизонтальной плоскости (рис. 6.7, е) под действием нагрузок $P_2=10 \text{ кН}$ и $H_1=P_1 \sin\alpha=15 \cdot \sin 30^\circ=7,5 \text{ кН}$ и строим эпюру изгибающих моментов M_z (рис. 6.7, д).

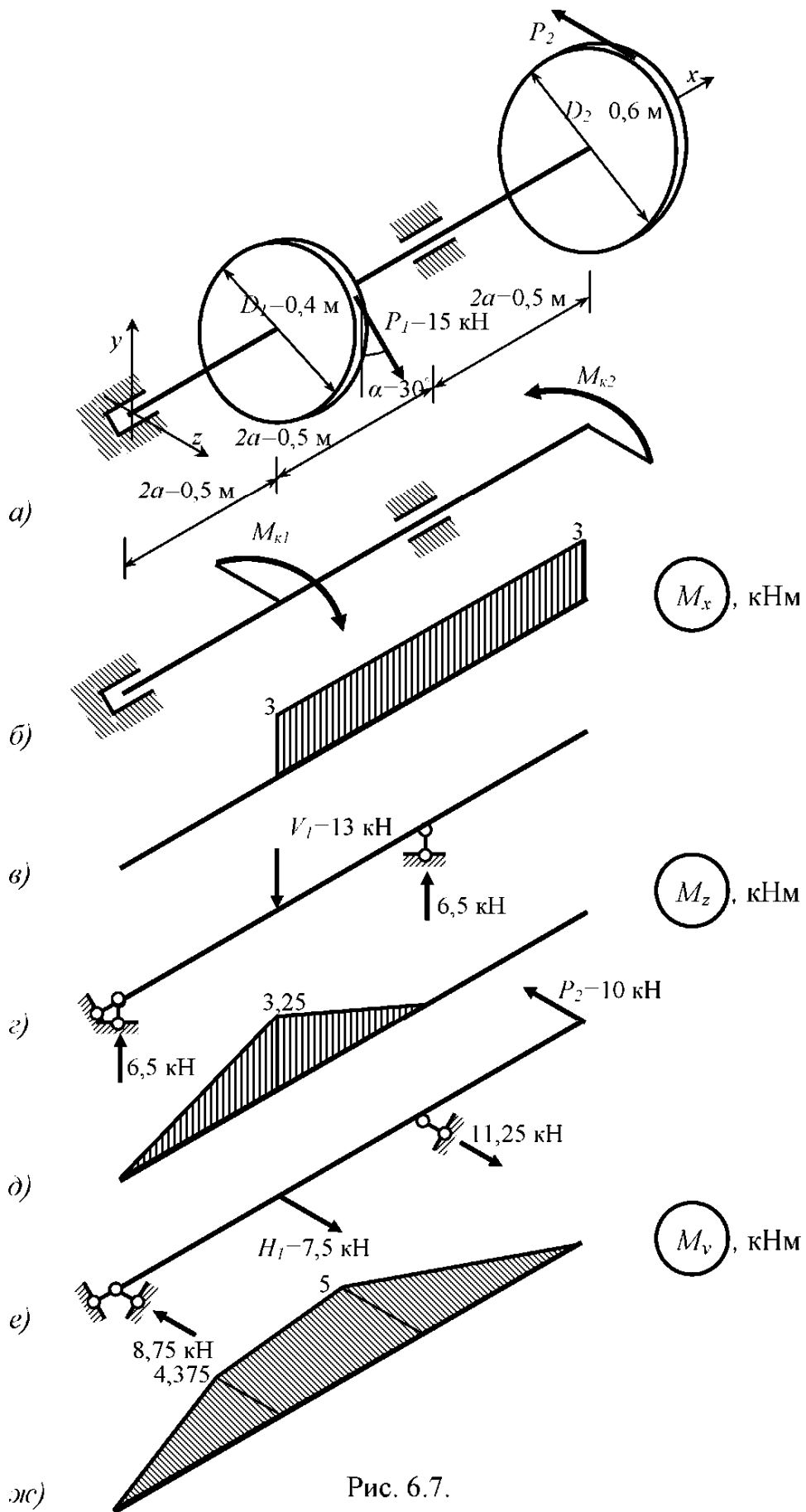


Рис. 6.7.

Определяем расчётный момент по третьей теории прочности в опасном сечении вала. Опасное сечение находится там, где расчётный момент $M_{расч}^{III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$ будет наибольшим.

Из рассмотрения эпюр M_x, M_y, M_z (рис. 6.7, в, д, ж) определяем, что опасное сечение в данном случае находится в месте посадки первого шкива, где $M_x = 3$ кНм, $M_y = 4,375$ кНм, $M_z = 3,25$ кНм.

$$\text{Тогда } M_{расч}^{III} = \sqrt{3^2 + 4,375^2 + 3,25^2} = 6,22 \text{ кНм.}$$

6. Из условия прочности вычисляем диаметр вала

$$\sigma_{расч} = \frac{M_{расч}}{W_z} \leq [\sigma], \text{ где } W_z = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Тогда $d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{расч}}{\pi [\sigma]}}$ При $[\sigma] = 100$ МПа находим

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6,22 \cdot 10^3}{\pi \cdot 100 \cdot 10^6}} = 8,59 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 85,9 \text{ мм.}$$

Окончательный диаметр вала принимаем в соответствии с ГОСТ 1654: $d = 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180, 200$ мм.

Итак, диаметр вала $d = 90$ мм.

7. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Рассматривается подбор рационально расположенного сечения сжатого стержня с учётом его устойчивости при различных способах закрепления стержня в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях.

7.1. Расчёт сжатой стойки на устойчивость

Задача 17

Стальной стержень длиной l , схема закрепления которого в двух плоскостях показана на рис. 7.1, сжимается силой P . Поперечное сечение стержня в двух вариантах представлено на рис. 7.2. Требуется для каждого варианта поперечного сечения стержня подобрать размера поперечного сечения и определить коэффициенты запаса устойчивости стержня при допуске напряжении на сжатие $[\sigma]=160$ МПа. Данные взять из табл. 7.1.

Таблица 7.1

Буквы алфавита	Схема закрепления стержня по рис.7.1	Поперечное сечение стержня по рис. 7.2	P , кН	l , м
а, б, в	I	I	400	2,0
г, д, е	II	II	450	2,2
ё, ж, з	III	III	500	2,4
и, й, к	IV	IV	550	2,6
л, м, н	V	V	600	2,8
о, п, р	VI	VI	650	3,0
с, т, у	VII	VII	700	3,2
ф, х, ц	VIII	VIII	750	3,4
ч, ш, щ	IX	IX	800	3,6
ы, э, ю,я	X	X	850	3,8
	1	2	3	4

Порядок выполнения задачи №17 аналогичен решению примеров 17 а, б.

Пример 17.а. Стальной стержень ($\sigma =160$ МПа) длиной $l =2$ м сжимается силой $P =100$ кН. Схема закрепления стержня и его поперечное сечение

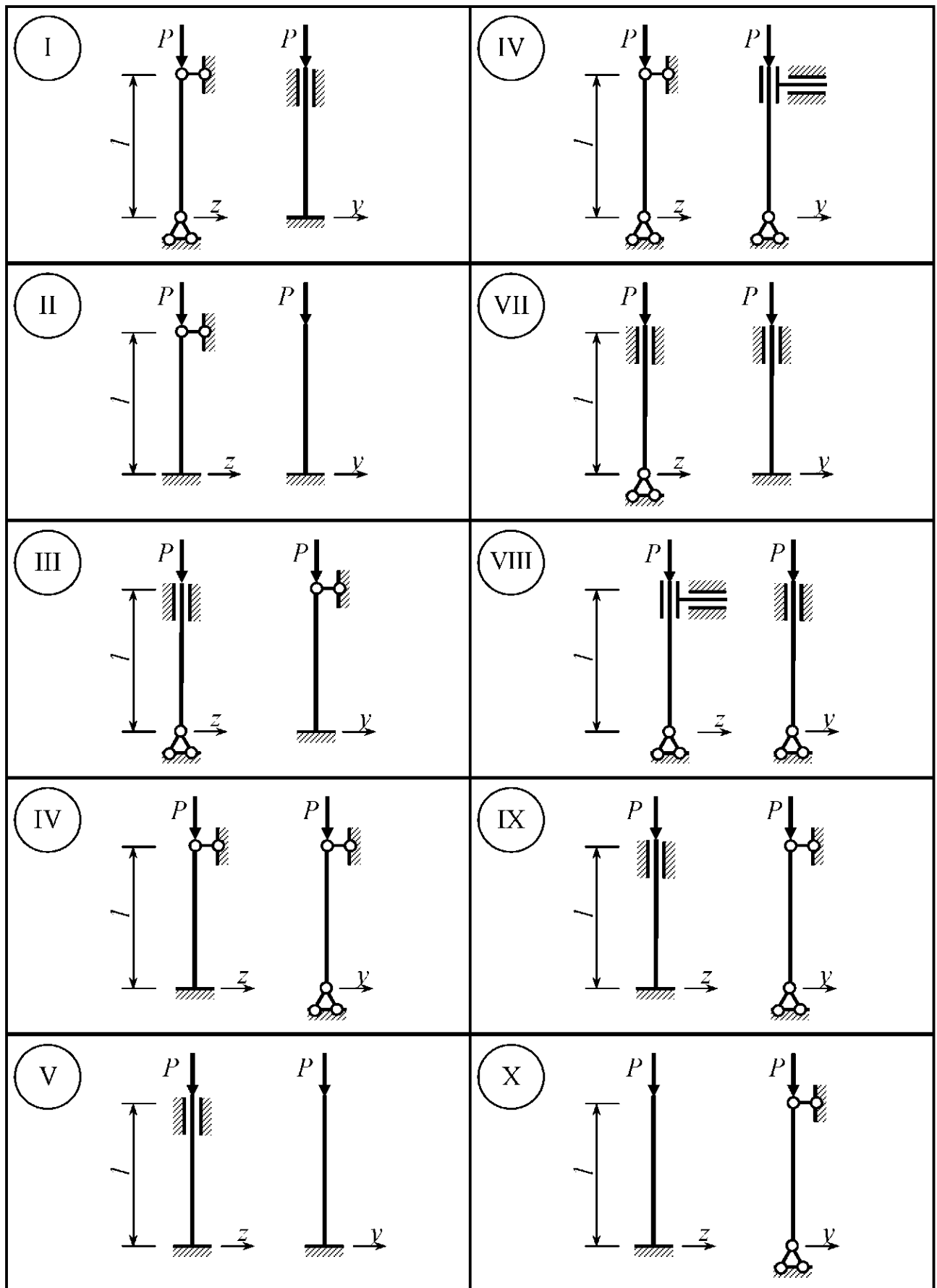


Рис. 7.1

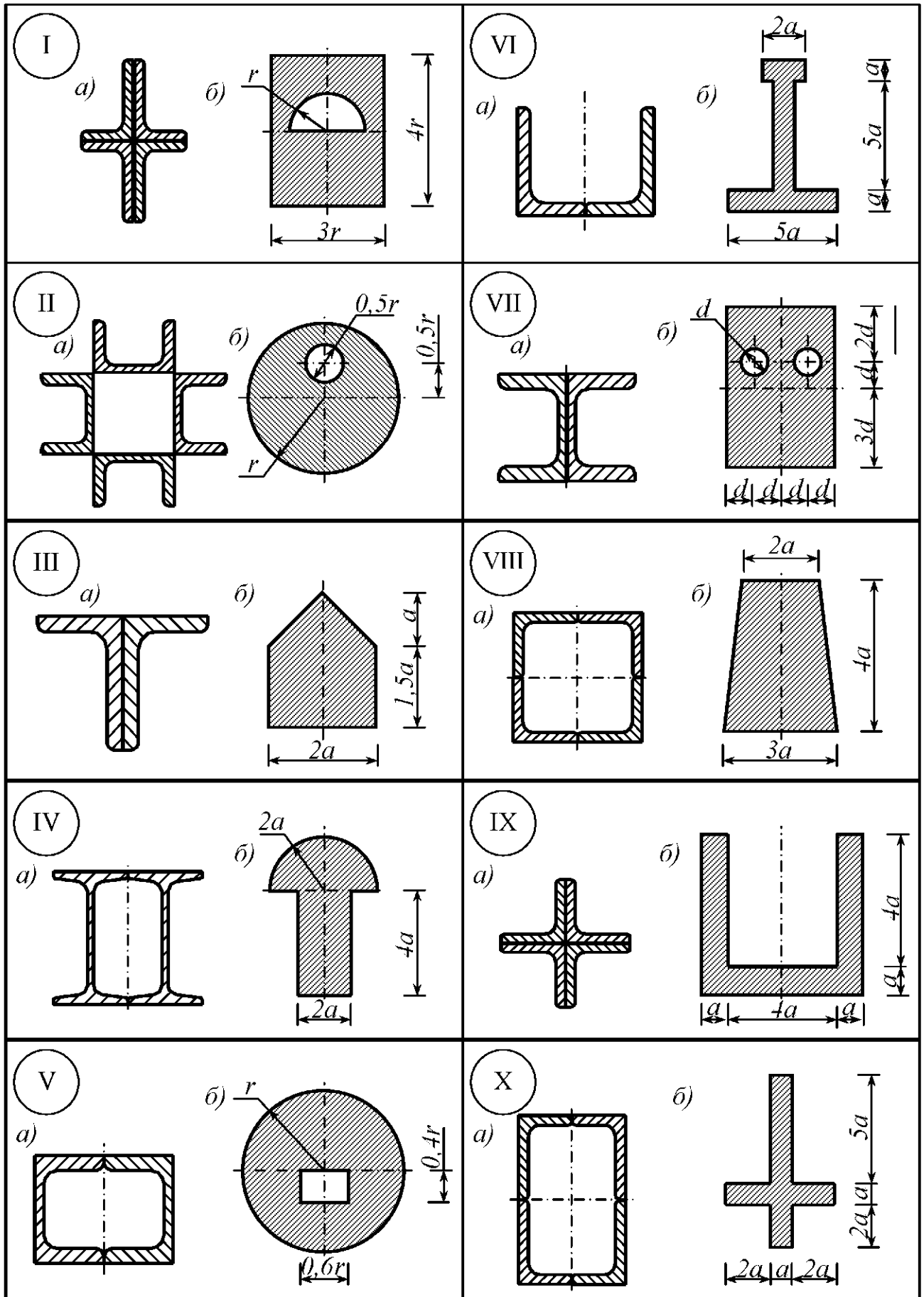


Рис. 7.2

показаны на рис. 7.3, а, б. Подобрать размеры поперечного сечения стержня, найти критическую силу и вычислить коэффициент запаса устойчивости.

Решение.

Главные центральные оси рассматриваемого сечения – это оси z , y (рис. 7.3, в).

Подбор сечения стержня производим методом последовательных приближений.

В первом приближении принимаем $\varphi_1 = 0,5$. Тогда $F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]}$, т.е.

$$F_{сеч} \geq \frac{100 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} \geq 12,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \geq 12,5 \text{ см}^2. \text{ Так как сечение состоит из двух}$$

равнобоких уголков, то требуемая площадь одного уголка $F_L \geq 6,25 \text{ см}^2$. По таблице «Сталь прокатная угловая равнопрочная» (ГОСТ 8509-72) принимаем 2L 70×70×4,5 с $F = 6,2 \text{ см}^2$, $b = 7 \text{ см}$, $z_0 = 1,88 \text{ см}$, $J_{xT} = J_{yтабл} = 29 \text{ см}^4$, $i_{xтабл} = i_{yтабл} = 2,16 \text{ см}$, $J_{x1табл} = 51 \text{ см}^4$ (рис. 7.3, г). Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей инерции (рис. 7.3, в). $J_z = 2J_{xтабл} = 2 \cdot 29 = 58 \text{ см}^4$, $J_y = 2J_{x1табл} = 2 \cdot 51 = 102 \text{ см}^4$.

$$\text{Вычисляем радиусы инерции } i = \sqrt{\frac{J}{F}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{2J_{x1m}}{2F_m}} = \sqrt{\frac{102}{2 \cdot 6,2}} = 2,87 \text{ см},$$

$$i_z = \sqrt{\frac{58}{2 \cdot 6,2}} = 2,16 \text{ см} = i_{x(табл)}.$$

$$\text{Гибкость стержня } \lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}; \quad \lambda_y = \frac{1 \cdot 200}{2,87} = 69,7, \quad \lambda_z = \frac{0,7 \cdot 200}{2,16} = 64,8.$$

$$\text{Если повернуть сечение на } 90^0, \text{ то } \lambda_y = \frac{1 \cdot 200}{2,16} = 92,6; \quad \lambda_z = \frac{0,7 \cdot 200}{2,87} = 48,7,$$

т.е. во втором варианте разность между гибкостями больше. Значит, обозначения осей в первом варианте (рис. 7.3, в) нами выбрано правильно. Дальнейший расчёт ведём по максимальной гибкости $\lambda_{\max} = \lambda_y$. В первом приближении

$$\lambda_{\max} = \lambda_y = 69,7.$$

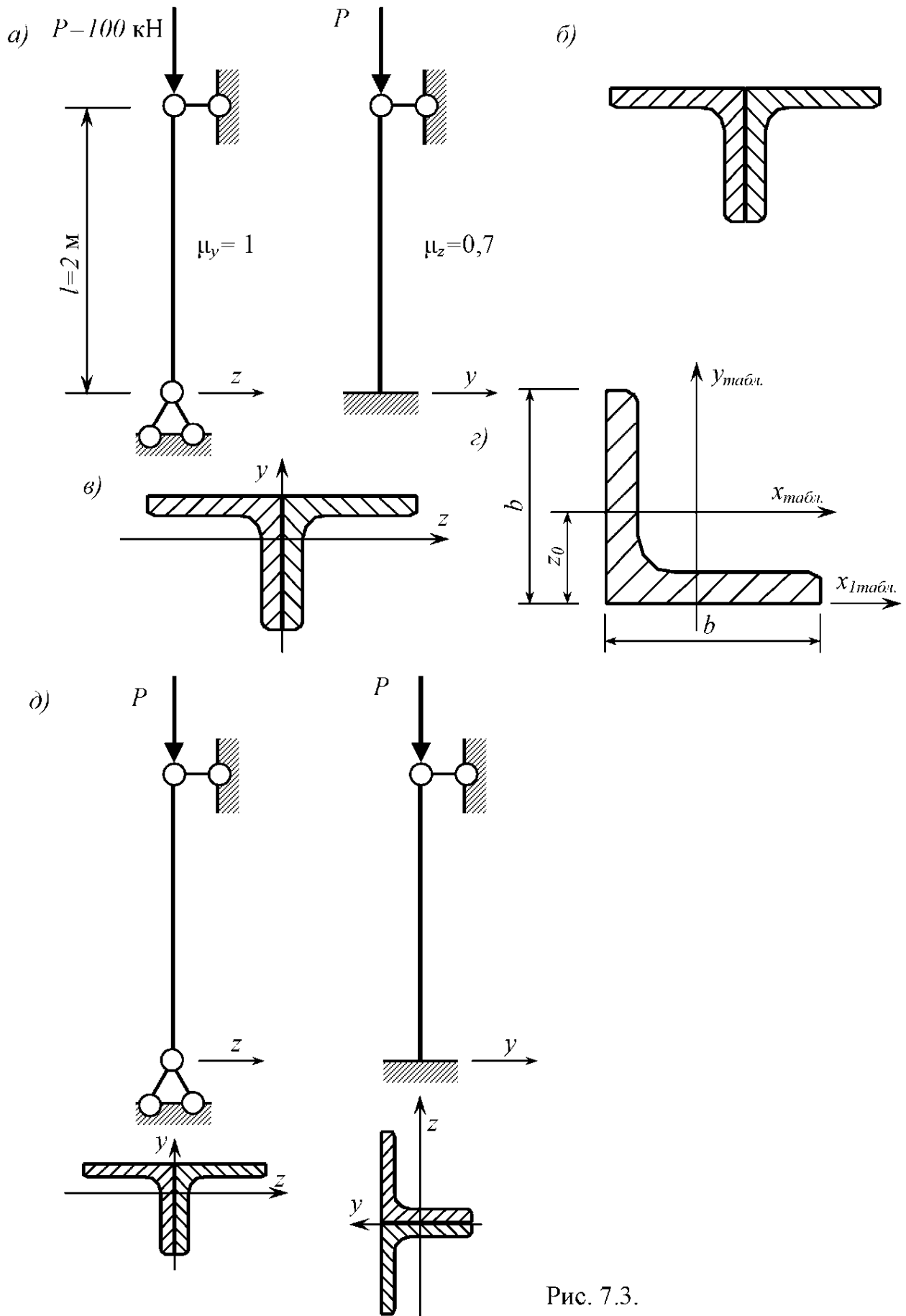


Рис. 7.3.

Значение коэффициента φ для этой гибкости определяем по табл. 7.2.

Таблица 7.2

λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ	1,00	0,99	0,97	0,95	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69	0,60

λ	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
φ	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19	0,17	0,16

При $\lambda=69,7$, $\varphi_{lm} \approx 0,81$, что значительно отличается от принятого $\varphi_1 = 0,5$. Поэтому производим второе приближение и в качестве φ принимаем среднее арифметическое значение между принятым φ_1 и полученным φ_{lm} значениями φ в первом приближении, т.е. $\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,81}{2} = 0,655$. Вычисляем требуемую пло-

щадь поперечного сечения стержня $F_2 \geq \frac{100 \cdot 10^3}{0,655 \cdot 160 \cdot 10^6} \geq 9,54 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \geq 9,54 \text{ см}^2$.

$F_2' = \frac{9,54}{2} = 4,77 \text{ см}^2$. Принимаем 2L 56×56×4 с $F_L=4,38 \text{ см}^2$, $J_{xlm} = 23,3 \text{ см}^4$. Ра-

диус инерции $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{2J_{xlm}}{2F_L}} = \sqrt{\frac{23,3}{4,38}} = 2,306 \text{ см}$, $\lambda_{\max} = \lambda_y = \frac{1 \cdot 200}{2,306} = 86,7$, что

соответствует $\varphi_{2m} = 0,71$.

При этом расчетное напряжение в стержне равно

$$\sigma = \frac{P}{\varphi_{2m} F} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,71 \cdot 2 \cdot 4,38 \cdot 10^{-4}} = 160,8 \text{ МПа.}$$

Расхождение с $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ составляет 0,5 %, что допустимо.

Итак, сечение стержня состоит из двух уголков L 56×56×4 с $F_L=4,38 \text{ см}^2$ каждый. Рациональное расположение поперечного стержня показано на рис. 7.3, д.

Вычисляем критическую силу. Так как в последнем приближении $\lambda_{\max} = \lambda_y = 86,7 < \lambda_{пред} = 100$ (для стали), то критическое напряжение вычисляем по формуле

$$\sigma_{кр} = \sigma_T - \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{пред}} \right)^2 \cdot (\sigma_T - \sigma_{II}),$$

где $\sigma_T = 240$ МПа, $\sigma_{II} = 200$ МПа, $\lambda_{пред} = 100$.

$$\text{Тогда } \sigma_{кр} = 240 - \left(\frac{86,7}{100} \right)^2 \cdot (240 - 200) = 210 \text{ МПа.}$$

Критическая сила $P_{кр} = \sigma_{кр} F_{сеч} = 210 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 4,38 \cdot 10^{-4} = 184 \cdot 10^3 \text{ Н} = 184 \text{ кН}$.

$$\text{Коэффициент запаса устойчивости стержня } k_{уст.} = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{184}{100} = 1,84.$$

Пример 17.б. Стальной стержень ($[\sigma] = 160$ МПа) длиной $l = 2$ м сжимается силой $P = 100$ кН. Схема закрепления стержня и его поперечное сечение показаны на рис. 7.4, а, б. Подобрать размеры поперечного сечения стержня, определить критическую силу и вычислить коэффициент запаса устойчивости.

Решение.

Находим положение центра тяжести всего сечения относительно вспомогательных осей z_1 и y_1 (рис. 7.4, в), разбив сечение на два прямоугольника:

$$y_c = \frac{\sum F_i y_{ci}}{\sum F_i} = \frac{F_1 \cdot y_{c1} + F_2 \cdot y_{c2}}{F_1 + F_2} = \frac{3a \cdot a \cdot 2,5a + 3a \cdot a \cdot 0,5a}{3a \cdot a + 3a \cdot a} = 1,5a.$$

Через полученный центр тяжести C проводим центральные оси z , y всего сечения (рис. 7.3, в). Так как вертикальная центральная ось является осью симметрии сечения, то центральные оси будут одновременно и главными осями. Вычисляем моменты инерции относительно этих осей:

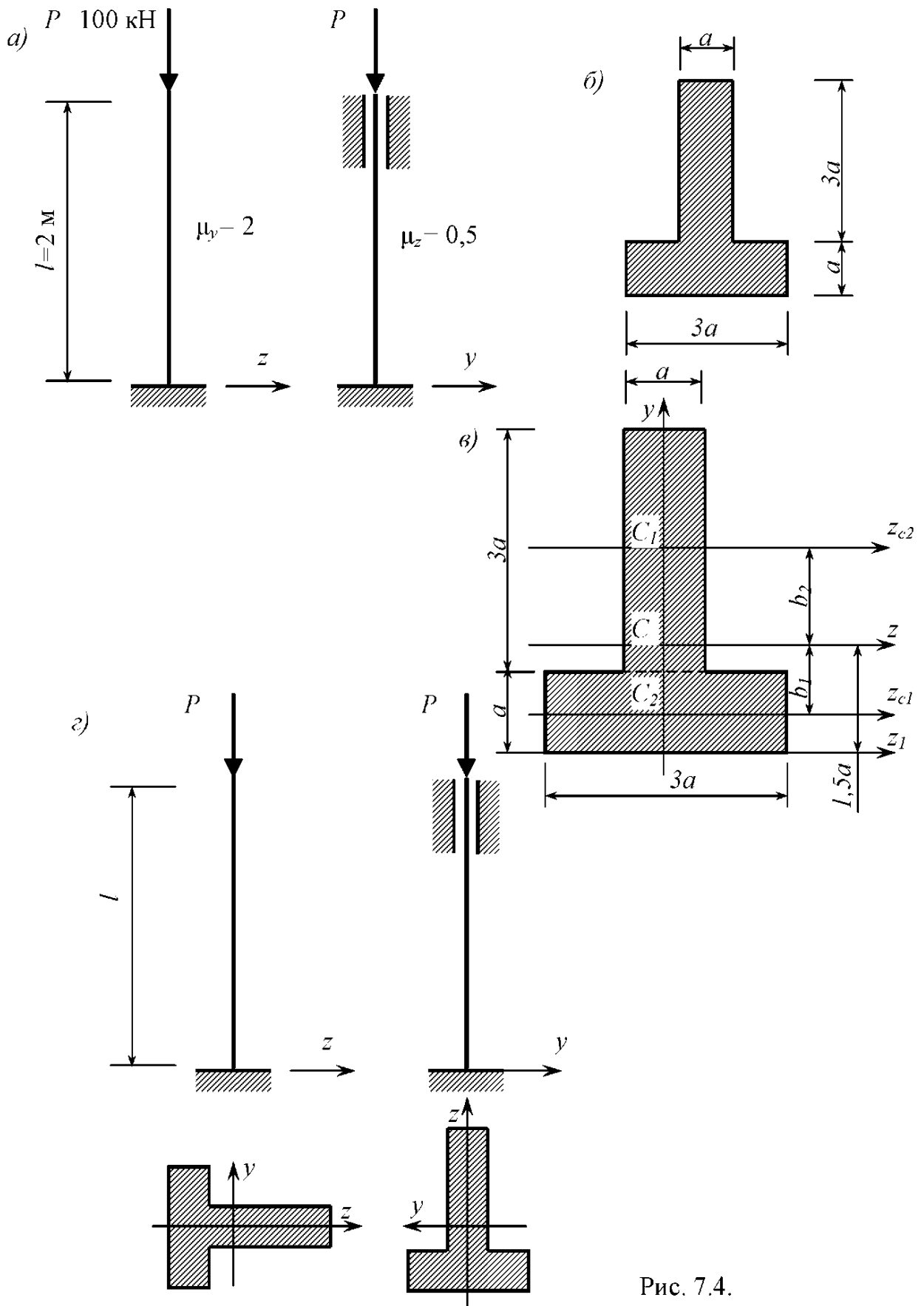


Рис. 7.4.

$$J_z = (J_{zc1} + b_1^2 \cdot F_1) + (J_{zc2} + b_2^2 \cdot F_2) =$$

$$= \left[\frac{a(3a)^3}{12} + a^2 \cdot 3a \cdot a \right] + \left[\frac{3a \cdot a^3}{12} + a^2 \cdot 3a \cdot a \right] = 8,5a^4;$$

$$J_y = \frac{3a \cdot a^3}{12} + \frac{a(3a)^3}{12} = 2,5a^4.$$

Площадь всего сечения $F = 3a \cdot a + 3a \cdot a = 6a^2$, $a = \sqrt{\frac{F}{6}}$.

Вычисляем радиусы инерции $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$, тогда

$$i_z = \sqrt{\frac{8,5a^4}{6a^2}} = 1,19a, \quad i_y = \sqrt{\frac{2,5a^4}{6a^2}} = 0,65a.$$

Гибкость стержня равна $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$, где μ - коэффициент зависящий от способа закрепления стержня. В рассматриваемом примере $\mu_y=2$, $\mu_z=0,5$ (рис. 7.4, а).

Гибкость стержня

$$\begin{cases} \lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_z} = \frac{0,5 \cdot 2}{1,19a} = \frac{0,84}{a}; \\ \lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{2 \cdot 2}{0,65a} = \frac{6,15}{a}. \end{cases}$$

Если поменять обозначения осей, то $\lambda_z = \frac{0,5 \cdot 2}{0,65a} = \frac{1,54}{a}$, $\lambda_y = \frac{2 \cdot 2}{1,19a} = \frac{3,36}{a}$.

Этот расчёт показывает, что во втором варианте обозначение осей стержней будет рациональнее, т.к. разность в гибкостях для первого варианта обозначения осей больше, чем для второго.

Итак, $\lambda_y = \frac{3,36}{a}$, $\lambda_z = \frac{1,55}{a}$, где a должно быть в м. Дальнейший расчёт про-

изводим по большей гибкости $\lambda_y = \frac{3,36}{a}$.

Определение размеров поперечного сечения стержня производим методом последовательных приближений, используя предварительные расчёты, из кото-

$$\text{рых } \lambda_{\max} = \frac{3,36}{a}, F = 6a^2, a = \sqrt{\frac{F}{6}}.$$

Первое приближение. Принимаем $\varphi_1 = 0,5$.

Площадь поперечного сечения стержня

$$F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]}; F \geq \frac{100 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} \geq 12,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, a = \sqrt{\frac{F}{6}} = \sqrt{\frac{12,5}{6}} = 1,44 \text{ см.}$$

Гибкость стержня $\lambda_{\max} = \frac{3,36}{a} = \frac{3,36}{1,44 \cdot 10^{-2}} = 232$. По таблице 7.3 при $\lambda > 220$,

$\varphi < 0,16$.

Поэтому для быстреего решения задачи во втором приближении принимаем $\varphi = 0,2$ и расчёт повторяем в том же порядке.

$$F \geq \frac{100 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 160 \cdot 10^6} \geq 31,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, a = \sqrt{\frac{31,25 \cdot 10^{-4}}{6}} = 2,28 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

$\lambda_{\max} = \frac{3,36}{2,28 \cdot 10^{-2}} = 147$. По таблице 7.3 при $\lambda = 140$, $\varphi = 0,36$, а при $\lambda = 150$, $\varphi =$

0,32. Производим линейную интерполяцию и получаем

$$\varphi_{2m} = 0,36 - \frac{(0,36 - 0,32) \cdot 7}{10} = 0,332. \text{ Сравниваем принятое значение } \varphi_2 = 0,2 \text{ во}$$

втором приближении и полученное по таблице. Расхождение составляет

$$\frac{|0,2 - 0,332|}{0,332} \cdot 100\% = 39,7\%, \text{ а допускается расхождение до } 5\%. \text{ Поэтому произ-}$$

водим третье приближение, в котором φ равно среднему арифметическому между принятым и полученным значениями φ во втором приближении, т.е.

$$\varphi_3 = \frac{0,2 + 0,332}{2} = 0,266. \text{ Расчёт повторяем в том же порядке}$$

$$F \geq \frac{100 \cdot 10^3}{0,266 \cdot 160 \cdot 10^6} \geq 23,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, a = \sqrt{\frac{F}{6}} = 1,98 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \lambda_{\max} = \frac{3,36}{1,98 \cdot 10^{-2}} = 170,$$

$\varphi_{3r} = 0,26$ (по табл. 7.3), что незначительно отличается от принятого $\varphi = 0,266$.

Вычисляем расчётное напряжение в стержне ($F = 6a^2$)

$$\sigma = \frac{P}{\varphi_m \cdot F} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,26 \cdot 6 \cdot (1,98 \cdot 10^{-2})^2} = 163,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 163,5 \text{ МПа} .$$

Расхождение с $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ составляет 2,19%, что допустимо. Итак, размер $a = 1,98 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Рациональное расположение поперечного сечения стержня показано на рис. 7.4, з.

Так как в последнем приближении максимальная гибкость равна $\lambda_{\max} = 170 > 100$ (для стали), то критическую силу вычисляем по формуле Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(\mu, l)^2} .$$

В рассматриваемом примере $J_z = 8,5a^4$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 8,5 \cdot (1,98 \cdot 10^{-2})^4}{(2 \cdot 2)^2} = 161 \cdot 10^3 \text{ Н} = 161 \text{ кН} .$$

Коэффициент запаса устойчивости равен $k_{уст} = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{161}{100} = 1,61$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методические указания к оформлению курсовых, дипломных проектов (работ) и отчетов по практикам и НИРС / В.П. Алиферов и др. - Донецк: ДПИ, 1986. - 48 с.
2. Сопротивление материалов. - 5-е изд., перераб. и доп. / Г.С. Писаренко и др. - К.: Вища школа. Головное изд-во, 1986. - 776 с.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1986. - 512 с.
4. Механика упругих деформируемых систем. Часть 1. Напряженно-деформированное состояние стержней: Учебное пособие / Ф.Л. Шевченко. - Донецк: ДонНТУ, 2006 - 293 с.
5. Механика упругих деформируемых систем. Часть 2. Сложное напряженное состояние: Учебное пособие / Ф.Л. Шевченко. - Донецк: РВВ ДонНТУ, 2007 - 306 с.

СОДЕРЖАНИЕ

5.3.	Расчёт статически неопределимых балок.	3
5.4.	Расчёт статически неопределимой рамы.	10
6.	Сложное сопротивление.	19
6.1.	Неплоский изгиб балки.	19
6.2.	Внецентренное растяжение (сжатие).	26
6.3.	Изгиб с кручением.	32
7.	Устойчивость сжатых стержней.	37
7.1.	Расчёт сжатой стойки на устойчивость.	37