

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4
Указания к задаче 1 5
Указания к задаче 2 7
Указания к задаче 3 9
Указания к задаче 4 15
Указания к задаче 5 18
Указания к задаче 6 24
Указания к задаче 7 34
Указания к задаче 8 37
Указания к задаче 9 41
Указания к задаче 10 48
Указания к задаче 11 56
Указания к задаче 12 58
Задания для контрольных работ 62
Задача 1 62
Задача 2 65
Задача 3 66
Задача 4 68
Задача 5 69
Задача 6 71
Задача 7 73
Задача 8 75
Задача 9 75
Задача 10 77
Задача 11 80
Задача 12 81
Библиографический список 83

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Методические указания к решению задач и выполнению расчетно-графических работ

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов – это наука об инженерных методах расчетов элементов машин и конструкций на прочность, жесткость и устойчивость. В сопротивлении материалов широко применяются методы теоретической механики и математики, а также используются данные из разделов физики, в которых изучаются различные свойства материалов. Изучение дисциплины сопротивление материалов следует начать с основных понятий, таких как: расчетная схема и составляющие ее элементы: стержни, оболочки, пластины и массивные тела. При расчетах стержневых конструкций следует вспомнить сведения, изучаемые в курсе статики, а именно виды опор: шарнирные подвижные и неподвижные, глухая заделка, а также вспомнить какие реакции возникают в каждом виде этих опор. Необходимо усвоить, что сопротивление материалов решает три основных задачи: проверочный расчет, проектный расчет, определение грузоподъемности. При решении этих задач основным методом сопротивления материалов является метод сечений, когда проводится сечение тела некоторой поверхностью, и после ввода внутренних сил между разрезанными частями, рассматривается равновесие одной из частей. Необходимо запомнить, что в общем случае нагружения в поперечном сечении стержня может возникнуть шесть внутренних силовых факторов: нормальная сила, две поперечных силы, два изгибающих момента и крутящий момент. Следует обратить внимание на то, что конструкции могут быть как статически определимые (решаемые при помощи статики), так и статически неопределимые (решаемые при помощи уравнений совместности деформаций).

Указания к задаче 1

Для исследования прочности любого тела необходимо знать величину внутренних сил, возникающих в данном теле под действием на него внешних сил. Для определения внутренних сил в сопротивлении материалов используют метод сечений. В общем случае произвольного нагружения стержня в его поперечных сечениях могут возникнуть шесть внутренних силовых факторов:

- усилие вдоль оси z — продольная сила N ;
- усилия вдоль осей x и y — поперечные силы Q_x и Q_y соответственно;
- момент относительно продольной оси z — крутящий момент $M_z = T_{кр}$;
- моменты относительно осей x и y — изгибающие моменты M_x и M_y соответственно.

Так как существует шесть внутренних силовых факторов, то при решении пространственных задач необходимо составлять шесть уравнений равновесия:

$$\sum_{отс.ч} X = 0, \quad \sum_{отс.ч} Y = 0, \quad \sum_{отс.ч} Z = 0;$$
$$\sum_{отс.ч} M_x = 0, \quad \sum_{отс.ч} M_y = 0, \quad \sum_{отс.ч} M_z = 0.$$

Для определения *опасного сечения*, то есть сечения, в котором внутренние силы имеют наибольшую по абсолютному значению величину, необходимо строить эпюры.

Эпюрой внутренней силы называется график, отображающий изменение внутренней силы по длине бруса, при переходе от одного поперечного сечения к другому.

ПРИМЕР 1: Для стержня изображенного на рис. 1а определить внутренние силовые факторы в произвольном поперечном сечении и их построить эпюры. $F_1 = 100$ Н, $F_2 = 300$ Н, $q = 75$ Н/м, $a = 0,3$ м, $b = 0,2$ м, $l = 2$ м.

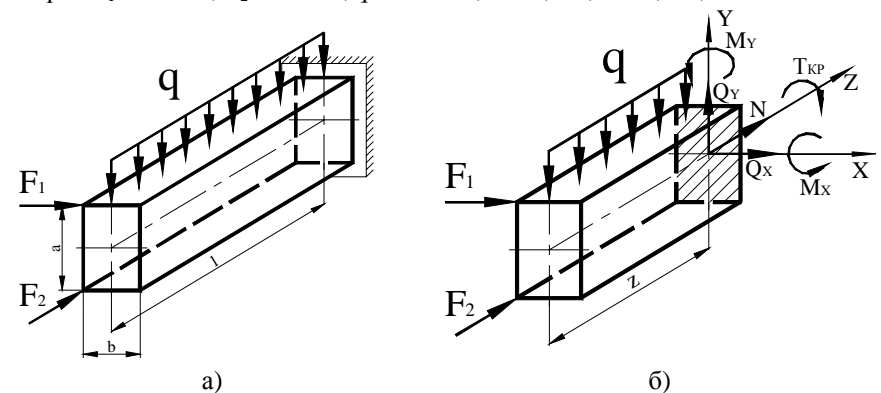


Рисунок 1. К примеру 1.

Решение: Рассекаем брус на произвольном расстоянии z от его свободно-го конца. Отбрасываем правую часть. Располагаем оси координат в центре тяжести сечения. Действие правой части бруса на его левую часть заменяем внутренними силами: N , Q_x , Q_y , M_x , M_y , $T_{кр}$ (рис. 1 б).

Уравновешиваем, то есть, записываем уравнения равновесия и определяем значения внутренних силовых факторов.

$$Q_x = \sum_{л.ч.} X = -F_1 = -100H.$$

$$Q_y = \sum_{л.ч.} Y = -q \cdot z;$$

при $z = 0$: $Q_y = 0$; при $z = l$: $Q_y = -150 H$.

$$N = \sum_{л.ч.} Z = -F_2 = -300H.$$

$$M_x = \sum m_x = -F_2 \cdot \frac{a}{2} - q \frac{z^2}{2};$$

при $z = 0$: $M_x = -45 H \cdot м$; при $z = l$: $M_x = -195 H \cdot м$.

$$M_y = \sum_{л.ч.} m_y = -F_1 \cdot z + F_2 \cdot \frac{b}{2};$$

при $z = 0$: $M_y = 30 H \cdot м$; при $z = l$: $M_y = -170 H \cdot м$.

$$T_{кр} = \sum_{л.ч.} m_z = F_1 \cdot \frac{a}{2}; T_{кр} = 15 H \cdot м.$$

Строим эпюры внутренних силовых факторов (рис. 2). Опасное сечение в данном брус будет находиться в заделке, так как в этом сечении значения всех В.С.Ф. имеют наибольшие величины.

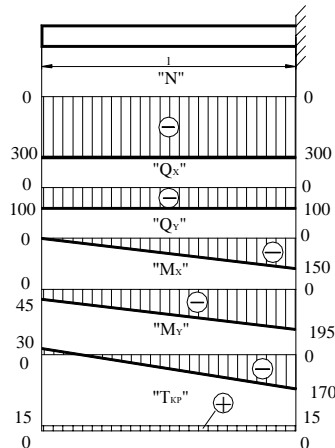


Рисунок 2. Эпюры внутренних силовых факторов.

Указания к задаче 2

Растяжением называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса, возникает единственный внутренний силовой фактор – продольная сила.

Для правильного составления уравнений равновесия, при действии на стержень продольной силы, необходимо знать правило знаков, представленное на рис. 3.

Нормальные напряжения при растяжении-сжатии определяются по формуле: $\sigma = \frac{N}{S}$,

где S – площадь поперечного сечения стержня.

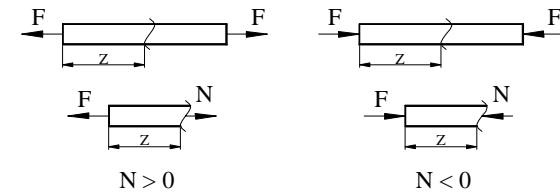


Рисунок 3. Правило знаков при растяжении-сжатии

Условие прочности выглядит следующим образом: $\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{S} \leq |\sigma|$.

Деформации при растяжении-сжатии (абсолютное удлинение) определяются по формуле: $\Delta l = \frac{N \cdot l}{ES}$,

где l – длина стержня; E – модуль упругости первого рода.

Условие жесткости определяется неравенством вида: $\Delta l_{max} = \frac{N_{max} \cdot l}{ES} \leq |\Delta l|$.

ПРИМЕР 2: Для схемы, изображенной на рис. 4, построить эпюру нормальной силы и определить удлинение стержня, если $F_1 = 100$ кН, $F_2 = 50$ кН, $q = 40$ кН/м, $a = 1$ м, $b = 2$ м, $c = 1,5$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = 0,2$ м².

Решение:

- 1) Разбиваем брус на участки АВ, ВС, CD
- 2) Определяем значение нормальной силы на каждом участке

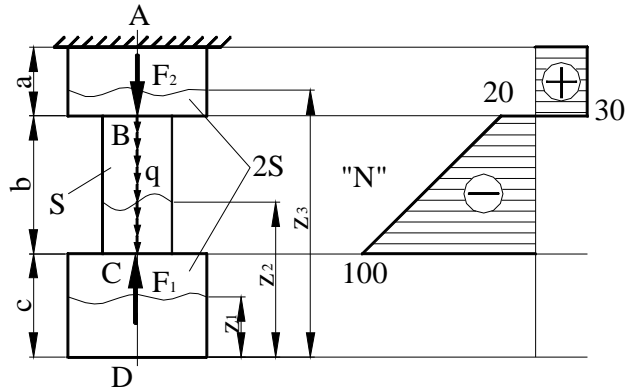


Рисунок 4. К примеру 2.

Указания к задаче 3

Стержневая система, рассматриваемая в данной задаче, относится к статически неопределимым системам, в которых невозможно определить усилия в стержнях только при помощи уравнений статики, так как число неизвестных усилий превышает число уравнений статики. При решении задач со статически неопределимыми системами приходится составлять дополнительные уравнения, которые называются уравнениями совместности деформаций. После того, как дополнительные уравнения будут составлены, их решают вместе с имеющимися уравнениями статики, то есть проводят синтез.

Последовательность расчета статически неопределимых систем

Чтобы решить статически неопределимую систему необходимо раскрыть статическую неопределимость.

1. Найти степень статической неопределимости.

$$S = m - n,$$

где m – число неизвестных усилий; n – число уравнений статики.

2. Статическая сторона задачи.

Рассматривает все возможные уравнения статики.

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum m = 0.$$

3. Геометрическая сторона задачи.

Рассматривает деформированное состояние системы и связывает между собой деформации или перемещения отдельных точек. Эти уравнения называются *уравнениями совместности деформаций*.

4. Физическая сторона задачи.

Через закон Гука связывает между собой неизвестные усилия и деформации, вызванные этими усилиями.

5. Синтез.

Решая совместно полученные в пунктах 2,3,4 уравнения, раскрываем статическую неопределимость и решаем поставленную задачу.

Примечание. При изменении температуры, рассматривая физическую сторону задачи, кроме деформаций, вызванных нагрузками, нужно учитывать деформации, вызванные изменением температуры.

ПРИМЕР 3: Для схемы, изображенной на рис. 5 необходимо:

1) Определить площадь поперечного сечения стержней при действии силы F и подобрать угловую равнополочную или неравнополочную сталь, при условии, что поперечное сечение одного из стержней в два раза больше, чем другого.

2) Определить напряжения в стержнях:

- от действия силы F ;
- от неточности монтажа, если считать, что один из стержней выполнен короче на величину Δ ;
- от изменения температуры.

3) Определить суммарные напряжения от действия внешних сил, от неточности монтажа и от изменения температуры.

CD $0 \leq z_1 \leq 1,5$

$$N_1 = \sum_{н.с.} Z = 0$$

CB $1,5 \leq z_2 \leq 3,5$

$$N_2 = \sum_{н.с.} Z = -F_1 + q(z_2 - 1,5)$$

при $z_2 = 1,5 \text{ м}$, $N_2 = -100 \text{ кН}$, при $z_2 = 3,5 \text{ м}$, $N_2 = -20 \text{ кН}$

BA $3,5 \leq z_3 \leq 4,5$

$$N_3 = \sum_{н.с.} Z = -F_1 + 2q + F_2 = 30 \text{ кН}$$

3) Строим эпюру нормальной силы (рис. 4)

4) Определяем удлинение стержня

$$\Delta l = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD}$$

$$\Delta l_{AB} = -\frac{F_1 l_{AB}}{ES_{AB}} + \frac{ql_{BC} l_{AB}}{ES_{AB}} + \frac{F_2 l_{AB}}{ES_{AB}} = -\frac{F_1 a}{E2S} + \frac{qba}{E2S} + \frac{F_2 a}{E2S} =$$

$$= -\frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 0,2} + \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 0,2} + \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 0,2} = 3,75 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$\Delta l_{BC} = -\frac{F_1 l_{BC}}{ES_{BC}} + \frac{ql_{BC}^2}{2ES_{BC}} = -\frac{F_1 b}{ES} + \frac{qb^2}{2ES} = -\frac{100 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,2} + \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,2} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\Delta l = 3,75 \cdot 10^{-7} - 3 \cdot 10^{-6} = -2,625 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

4) Подсчитать недонапряжения или перенапряжения в стержнях.
 Дано: $F=100\text{кН}$, $a = 1,2\text{м}$, $b = 0,8\text{м}$, $\Delta = 0,2\text{мм}$, $\Delta t = 20^\circ\text{C}$, $E = 2 \cdot 10^5\text{МПа}$,
 $\alpha = 125 \cdot 10^{-7} 1/\text{гр}$, $[\sigma] = 100\text{МПа}$.

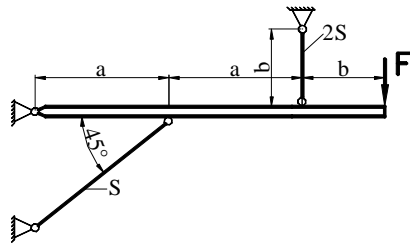


Рисунок 5. К примеру 3.

Решение: Для определения необходимой по условию прочности площади поперечного сечения стержней обратимся к рис. 6.

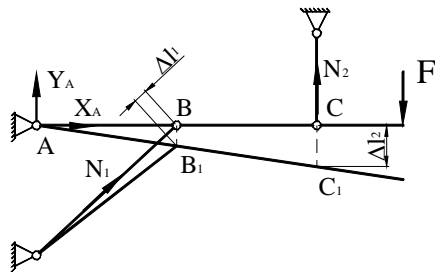


Рисунок 6. Деформированное состояние системы

1) Находим степень статической неопределимости.

$$S = m - n = 4 - 3 = 1$$

2.1) Статическая сторона задачи

$$\sum X = 0; \quad N_1 \cdot \cos 45^\circ + X_A = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad N_1 \cdot \sin 45^\circ + Y_A + N_2 - F = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad N_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot a + N_2 \cdot 2a - F \cdot (2a + b) = 0.$$

2.2) Геометрическая сторона задачи

$$\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1 \Rightarrow \frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}$$

$$BB_1 = \frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ}; \quad CC_1 = \Delta l_2; \quad AB = a; \quad AC = 2a$$

$$\frac{\Delta l_1}{a \cdot \cos 45^\circ} = \frac{\Delta l_2}{2a} \Rightarrow \frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ} = \frac{\Delta l_2}{2}$$

2.3) Физическая сторона задачи

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES_1} = \frac{N_1 \cdot a}{ES \cdot \cos 45^\circ}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES_2} = \frac{N_2 \cdot b}{E2S}$$

2.4) Синтез

Подставим выражения, полученные в физической стороне задачи, в выражения из геометрической стороны задачи и приведем подобные.

$$\frac{N_1 \cdot a}{(\cos 45^\circ)^2 ES} = \frac{N_2 \cdot b}{4ES}$$

$$8N_1 a = N_2 b$$

$$N_1 = \frac{N_2 b}{8a}$$

Решим совместно систему уравнений, составленную из полученного выражения для N_1 и уравнения моментов из статической стороны задачи.

$$\begin{cases} N_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot a + N_2 \cdot 2a - F \cdot (2a + b) = 0 \\ N_1 = \frac{N_2 b}{8a} \end{cases}$$

$$\frac{N_2 b}{8a} \sin 45^\circ \cdot a + N_2 \cdot 2a - F \cdot (2a + b) = 0$$

$$2,471N_2 = 320$$

$$N_2 = 129,5\text{кН}$$

$$N_1 = \frac{129,5 \cdot 0,8}{8 \cdot 1,2} = 10,8\text{кН}$$

2.5) Определяем площадь поперечного сечения стержней

Определим, какой из стержней нагружен сильнее.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S} = \frac{10,8}{S}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{2S} = \frac{129,5}{2S} = \frac{64,8}{S}$$

Второй стержень является более нагруженным, так как $\sigma_2 > \sigma_1$, поэтому запишем для него условие прочности и определим площадь поперечного сечения.

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2S} \leq [\sigma] \Rightarrow S \geq \frac{N_2}{2[\sigma]} = \frac{129,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 100 \cdot 10^6} = 6,48 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 6,48 \text{ см}^2$$

Подбираем по справочнику угловую равнополочную сталь № 70×5 ГОСТ8509-86 ($S_T = 6,86 \text{ см}^2$).

2.6) Определяем напряжения в стержнях от внешних сил

$$\sigma_{1(F)} = \frac{N_1}{S_T} = \frac{10,8 \cdot 10^3}{6,86 \cdot 10^{-4}} = 1,57 \cdot 10^7 \text{ Па} = 15,7 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{2(F)} = \frac{N_2}{2S_T} = \frac{129,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 6,86 \cdot 10^{-4}} = 9,44 \cdot 10^7 \text{ Па} = 94,4 \text{ МПа}$$

Первый стержень работает на сжатие, а второй – на растяжение.

3) Определим напряжения в стержнях от неточности монтажа

Будем считать, что короткий стержень выполнен короче на величину Δ (рис. 7).

3.1) Статическая сторона задачи

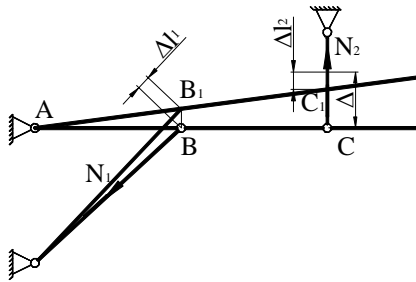


Рисунок 7.

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad -N_1 \cdot \cos 45^\circ + X_A = 0; \\ \sum Y = 0; \quad -N_1 \cdot \sin 45^\circ + Y_A + N_2 = 0; \\ \sum M_A = 0; \quad -N_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot a + N_2 \cdot 2a = 0. \end{aligned}$$

3.2) Геометрическая сторона задачи

$$\begin{aligned} \Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1 \Rightarrow \frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC} \\ BB_1 = \frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ}; \quad CC_1 = \Delta - \Delta l_2; \quad AB = a; \quad AC = 2a \\ \frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ} = \frac{\Delta - \Delta l_2}{2} \end{aligned}$$

3.3) Физическая сторона задачи

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES} = \frac{N_1 \cdot a}{ES_r \cdot \cos 45^\circ}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES} = \frac{N_2 \cdot 2b}{2ES_r}$$

3.4) Синтез

$$\begin{aligned} \frac{N_1 \cdot a}{(\cos 45^\circ)^2 ES_r} = \frac{\Delta - \frac{N_2 \cdot 2b}{2ES_r}}{2} \\ N_1 = \frac{\Delta ES_r}{4a} - \frac{N_2 b}{8a} \end{aligned}$$

Подставим в полученное выражение данные из условия задачи и получим:

$$N_1 = \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 6,86 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 1,2} - \frac{N_2 \cdot 0,8}{8 \cdot 1,2} = 5716,7 - 0,083N_2$$

$$\begin{cases} -N_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot a + N_2 \cdot 2a = 0 \\ N_1 = 5716,7 - 0,083N_2 \\ -(5716,7 - 0,083N_2) \cdot 0,71 \cdot 1,2 + 2 \cdot 1,2 \cdot N_2 = 0 \\ 2,471N_2 = 4850,8 \\ N_2 = 1963H \\ N_1 = 5716,7 - 0,083 \cdot 1963 = 5554H \end{cases}$$

3.5) Определим напряжения в стержнях

$$\sigma_{1(A)} = \frac{N_1}{S_r} = \frac{5254}{6,86 \cdot 10^{-4}} = 8,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 8,1 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{2(A)} = \frac{N_2}{2S_r} = \frac{1963}{2 \cdot 6,86 \cdot 10^{-4}} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,4 \text{ МПа}$$

Оба стержня работают на растяжение.

4) Определим напряжения в стержнях от изменения температуры (рис. 8).

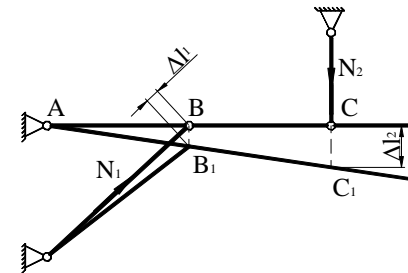


Рисунок 8.

Будем считать, что температура системы повышается. Тогда оба стержня будут удлиняться от повышения температуры. При удлинении стержней, они будут воздействовать друг на друга через недеформируемый стержень AC. Вследствие этого, в обоих стержнях будут возникать дополнительные силы сжатия.

4.1) Статическая сторона задачи

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad N_1 \cdot \cos 45^\circ + X_A = 0; \\ \sum Y = 0; \quad N_1 \cdot \sin 45^\circ + Y_A - N_2 = 0; \\ \sum M_A = 0; \quad N_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot a - N_2 \cdot 2a = 0. \end{aligned}$$

4.2) Геометрическая сторона задачи

$$\begin{aligned} \Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1 \Rightarrow \frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC} \\ BB_1 = \frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ}; \quad CC_1 = \Delta l_2; \quad AB = a; \quad AC = 2a \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta l_1}{a \cdot \cos 45^\circ} = \frac{\Delta l_2}{2a}$$

4.3) Физическая сторона задачи

$$\Delta l_{1(\Delta)} = \alpha l_1 \Delta t - \frac{N_1 l_1}{ES_1} = \frac{\alpha a \Delta t}{\cos 45^\circ} - \frac{N_1 a}{\cos 45^\circ ES};$$

$$\Delta l_{2(\Delta)} = \alpha l_2 \Delta t - \frac{N_2 l_2}{ES_2} = \alpha b \Delta t - \frac{N_2 b}{E2S}.$$

4.4) Синтез

$$\frac{\alpha \Delta t a}{(\cos 45^\circ)^2} - \frac{N_1 a}{(\cos 45^\circ)^2 ES} = \frac{\alpha \Delta t b}{2} - \frac{N_2 b}{4ES}$$

$$2\alpha \Delta t a ES - 2N_1 a = \frac{2\alpha \Delta t b ES - N_2 b}{4}$$

$$\begin{cases} N_1 = \alpha \Delta t ES \left(1 - \frac{b}{4a}\right) + \frac{N_2 b}{8a} \\ N_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot a - N_2 \cdot 2a = 0 \end{cases}$$

$$\alpha \Delta t a ES \left(1 - \frac{b}{4a}\right) \sin 45^\circ + \frac{N_2 b \sin 45^\circ}{8a} - 2N_2 = 0$$

Решив уравнение, получим $N_2 = 10412 \text{ Н}$.

$$N_1 = \frac{2N_2}{\sin 45^\circ} = \frac{2 \cdot 10412}{0,71} = 29450 \text{ Н}$$

4.5) Определим напряжения в стержнях

$$\sigma_{1(\Delta)} = \frac{N_1}{S_T} = \frac{29450}{6,86 \cdot 10^{-4}} = 42,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 42,9 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{2(\Delta)} = \frac{N_2}{2S_T} = \frac{10412}{2 \cdot 6,86 \cdot 10^{-4}} = 7,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 7,6 \text{ МПа}$$

Оба стержня работают на сжатие.

5) Определим суммарные напряжения в стержнях

$$\sigma_1 = \sigma_{1(F)} + \sigma_{1(\Delta)} + \sigma_{1(M)} = -15,7 + 8,1 - 42,9 = -50,5 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{2(F)} + \sigma_{2(\Delta)} + \sigma_{2(M)} = 94,4 + 1,4 - 7,6 = 88,2 \text{ МПа}$$

6) Найдем недонапряжения или перенапряжения в стержнях

$$\delta_1 = \frac{|[\sigma] - \sigma_1|}{[\sigma]} = \frac{|100 - 50,5|}{100} 100\% = 49,5\% \text{ – недонапряжение}$$

$$\delta_2 = \frac{|[\sigma] - \sigma_2|}{[\sigma]} = \frac{|100 - 88,2|}{100} 100\% = 11,8\% \text{ – недонапряжение.}$$

Указания к задаче 4

Кручение – это такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный внутренний силовой фактор – крутящий момент.

Внешние моменты, воздействующие на вал, называются скручивающими.

Расчет вала на прочность начинается с построения эпюры крутящего момента и отыскания опасного сечения.

Касательные напряжения при кручении определяются по формуле:

$$\tau = \frac{T_{KP}}{I_p} \rho,$$

где T_{KP} – крутящий момент, действующий в сечении;

ρ – радиус той точки поперечного сечения, в которой определяются напряжения;

I_p – полярный момент инерции сечения.

Условие прочности при кручении записывается следующим образом:

$$\tau_{max} = \frac{T_{KPmax}}{W_p} \leq [\tau].$$

где W_p – полярный момент сопротивления сечения.

Угол закручивания вала определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{T_{KP} \cdot l}{GI_p},$$

где l – длина вала;

G – модуль упругости второго рода.

Условие жесткости при кручении записывается следующим образом:

$$\varphi = \frac{T_{KP} \cdot l}{GI_p} \leq [\varphi].$$

Полярный момент инерции и полярный момент сопротивления круглого сечения определяются по формулам соответственно:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4, \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3,$$

где d – диаметр вала.

Полярный момент инерции и полярный момент сопротивления кольцевого сечения определяются по формулам соответственно:

$$I_p = 0,1D^4(1 - \xi^4), \quad W_p = 0,2D^3(1 - \xi^4),$$

где D – внешний диаметр вала;

$$\xi = \frac{d}{D};$$

d – внутренний диаметр вала.

ПРИМЕР 4: Для вала, изображенного на рис. 9, подобрать поперечное сечение круглой, кольцевой и прямоугольной форм, если $T_1 = 600$ Нм, $T_2 = 1000$ Нм, $T_3 = 800$ Нм, $T_4 = 1300$ Нм, $T_5 = 1600$ Нм, $\xi = 0,7$, $h/b = 2$, $[\tau] = 100$ МПа. Построить эпюру углов закручивания для вала круглого поперечного сечения.

Решение:

1) Строим эпюру крутящего момента со свободного конца вала и определяем опасное сечение

АС

$$T_{кр1} = \sum_{л.ч.} m_z = T_1 = 600 \text{ Нм}$$

СД

$$T_{кр2} = \sum_{л.ч.} m_z = T_1 - T_2 = 600 - 1000 = -400 \text{ Нм}$$

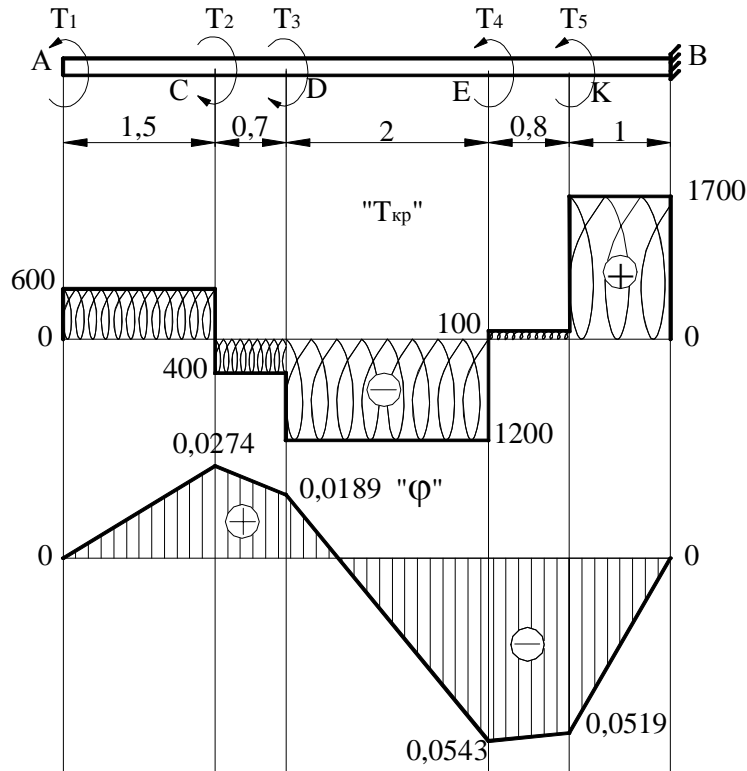


Рисунок 9. К примеру 4.

ДЕ

$$T_{кр3} = \sum_{л.ч.} m_z = T_1 - T_2 - T_3 = 600 - 1000 - 800 = -1200 \text{ Нм}$$

ЕК

$$T_{кр4} = \sum_{л.ч.} m_z = T_4 - T_1 - T_2 + T_3 = 600 - 1000 - 800 + 1300 = 100 \text{ Нм}$$

КВ

$$T_{кр5} = \sum_{л.ч.} m_z = T_1 - T_2 - T_3 + T_4 + T_5 = 600 - 1000 - 800 + 1300 + 1600 = 1700 \text{ Нм}$$

Из эпюры крутящих моментов (рис. 9) видно, что опасным, является участок КВ, максимальное значение крутящего момента $T_{кр max} = 1700$ Нм.

2) Подбираем поперечное сечение вала

7.1) Круглое сечение

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{max} = \frac{T_{кр max}}{W_p} \leq [\tau]$$

$$W_p = 0,2d^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{T_{кр max}}{0,2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{1700}{0,2 \cdot 10^8}} = 0,044 \text{ м}$$

Принимаем $d = 45$ мм.

7.2) Кольцевое сечение

$$W_p = 0,2D^3(1 - \xi^4)$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{T_{кр max}}{0,2(1 - \xi^4)[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{1700}{0,2(1 - 0,7^4)10^8}} = 0,0482 \text{ м}$$

Принимаем $D = 50$ мм, тогда $d = 0,7D = 0,7 \cdot 50 = 35$ мм.

7.3) Прямоугольное сечение

$$W_k = \beta \cdot b^3$$

Для прямоугольного сечения с отношением $h/b = 2$ $\beta = 0,493$.

$$b = \sqrt[3]{\frac{T_{кр max}}{\beta[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{1700}{0,493 \cdot 10^8}} = 0,0325 \text{ м}$$

Тогда $h = 2b = 2 \cdot 0,0325 = 0,065$ м.

3) Строим эпюру углов закручивания

Найдем момент инерции для круглого сечения:

$$I_p = 0,1d^4 = 0,1 \cdot 0,045^4 = 4,1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4.$$

$$\varphi_{AC} = \frac{T_{AC} I_{AC}}{G \cdot I_p} = \frac{600 \cdot 1,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 4,1 \cdot 10^{-7}} = 0,0274 \quad \varphi_{CD} = \frac{T_{CD} I_{CD}}{G \cdot I_p} = \frac{400 \cdot 0,7}{8 \cdot 10^{10} \cdot 4,1 \cdot 10^{-7}} = 0,0085$$

$$\varphi_{DE} = \frac{T_{DE} I_{DE}}{G \cdot I_p} = \frac{1200 \cdot 2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 4,1 \cdot 10^{-7}} = 0,0732 \quad \varphi_{EK} = \frac{T_{EK} I_{EK}}{G \cdot I_p} = \frac{100 \cdot 0,8}{8 \cdot 10^{10} \cdot 4,1 \cdot 10^{-7}} = 0,0024$$

$$\varphi_{KB} = \frac{T_{KB} I_{KB}}{G \cdot I_p} = \frac{1700 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 4,1 \cdot 10^{-7}} = 0,0518$$

4) Сравним веса валов

Найдем площадь поперечного сечения для каждого из валов: круглого, кольцевого, прямоугольного.

$$S_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,045^2}{4} = 1,590 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$$

$$S_2 = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{3,14}{4} (0,05^2 - 0,035^2) = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$$

$$S_3 = b \cdot h = 0,0325 \cdot 0,065 = 2,145 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$$

$$S_1 \div S_2 \div S_3 = 1 \div 1,590 \div 0,741$$

Указания к задаче 5

Определение положения центра тяжести сложного сечения

Координаты центра тяжести любой сложной фигуры можно определить по формулам:

$$x_c = \frac{\sum S_y}{S}, \quad y_c = \frac{\sum S_x}{S},$$

где S_x, S_y – статические моменты площади сечений простых фигур, составляющих сложную фигуру; S – площадь фигуры.

Сумма статических площадей простых фигур определяется по формуле:

$$\sum S_x = S_1 y_1 + S_2 y_2 + \dots + S_n y_n, \quad \sum S_y = S_1 x_1 + S_2 x_2 + \dots + S_n x_n,$$

где S_i – площадь i -той простой фигуры; x_i, y_i – координаты центра тяжести i -той простой фигуры.

ПРИМЕР 5: Определить положение центра тяжести фигуры, показанной на рис. 10.

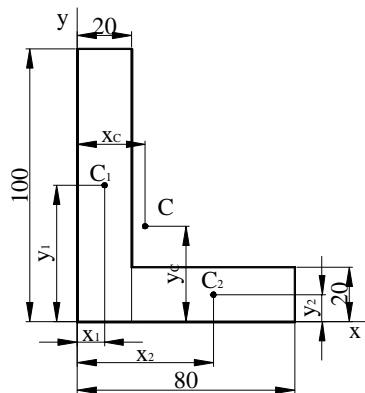


Рисунок 10. К примеру 5.

- 1) Выбираем произвольные оси координат
- 2) Разбиваем сечение на простейшие фигуры
- 3) Находим площадь каждой из фигур

$$S_1 = 20 \cdot 100 = 2000 \text{ мм}^2;$$

$$S_2 = 20 \cdot 60 = 1200 \text{ мм}^2.$$

- 4) Определяем статические моменты площади

$$S_x = \sum S_x = S_1 y_1 + S_2 y_2 = 2000 \cdot 50 + 1200 \cdot 10 = 11,2 \cdot 10^4 \text{ мм}^3$$

$$S_y = \sum S_y = S_1 x_1 + S_2 x_2 = 2000 \cdot 10 + 1200 \cdot 50 = 8 \cdot 10^4 \text{ мм}^3$$

- 5) Находим координаты центра тяжести

$$x_c = \frac{S_y}{S} = \frac{8 \cdot 10^4}{3200} = 25 \text{ мм};$$

$$y_c = \frac{S_x}{S} = \frac{11,2 \cdot 10^4}{3200} = 35 \text{ мм}.$$

Определение моментов инерции сечения при параллельном переносе осей

Пусть известны все геометрические характеристики сечения относительно исходных осей x, y (рис. 11). Определим моменты инерции относительно параллельных им осей x_c, y_c , проходящих через центр тяжести сечения.

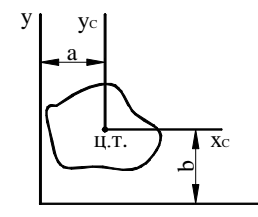


Рисунок 11.

$$I_{x_c} = I_x + S \cdot b^2,$$

$$I_{y_c} = I_y + S \cdot a^2,$$

$$I_{x_c y_c} = I_{xy} + S \cdot ab,$$

где I_x, I_y – осевые моменты инерции относительно исходных осей;

I_{xy} – центробежный момент инерции относительно исходных осей;

I_{x_c}, I_{y_c} – осевые моменты инерции относительно центральных осей;

$I_{x_c y_c}$ – центробежный момент инерции относительно центральных осей;

a, b – расстояние между осями.

Определение моментов инерции сечения при повороте осей

Известны все геометрические характеристики сечения относительно цен-

тральных осей x_c, y_c (рис. 12). Определим моменты инерции относительно осей x_l, y_l , повернутых относительно центральных на некоторый угол α .

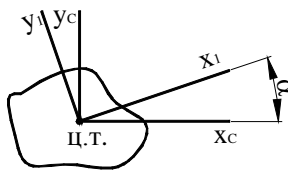


Рисунок 12.

$$I_{x_l} = I_{x_c} \cos^2 \alpha + I_{y_c} \sin^2 \alpha - I_{x_c y_c} \sin 2\alpha,$$

$$I_{y_l} = I_{x_c} \sin^2 \alpha + I_{y_c} \cos^2 \alpha + I_{x_c y_c} \sin 2\alpha,$$

$$I_{x_l y_l} = \frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2} \sin 2\alpha + I_{x_c y_c} \cos 2\alpha,$$

где I_{x_l}, I_{y_l} – осевые моменты инерции относительно осей x_l, y_l ;
 $I_{x_l y_l}$ – центробежный момент инерции относительно осей x_l, y_l .

Определение положения главных центральных осей инерции

Положение главных центральных осей инерции сечения определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}},$$

где α_0 – угол между центральными и главными осями инерции.

Определение главных моментов инерции

Главные моменты инерции сечения определяются по формуле:

$$I_{\max} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2}$$

Последовательность расчета сложного сечения

- 1) Разбить сложное сечение на простейшие геометрические фигуры $[S_1, S_2, \dots; x_l, y_l; x_2, y_2, \dots]$
- 2) Выбрать произвольные оси XOY .
- 3) Определить положение центра тяжести сечения $[x_c, y_c]$.
- 4) Провести центральные оси $X_c O Y_c$.
- 5) Вычислить моменты инерции I_{x_c}, I_{y_c} , используя теорему параллельного переноса осей.
- 6) Вычислить центробежный момент инерции $I_{x_c y_c}$.
- 7) Определить положение главных осей инерции $\operatorname{tg} 2\alpha_0$.
- 8) Вычислить главные моменты инерции I_{\max}, I_{\min} .

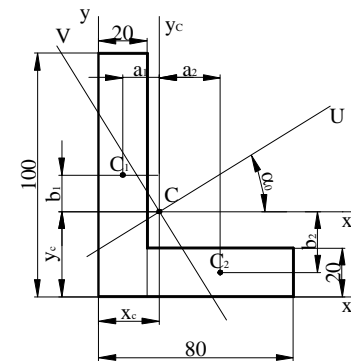


Рисунок 13. К примеру 6.

ПРИМЕР 6: Для фигуры, показанной на рис. 13 определить главные моменты инерции и положение главных осей инерции.

Решение:

- 1) Разбиваем сложное сечение на простейшие геометрические фигуры $S_1 = 2000 \text{ мм}^2, S_2 = 1200 \text{ мм}^2, S = 3200 \text{ мм}^2$.
- 2) Выбираем произвольные оси XOY .
- 3) Определяем положение центра тяжести сечения $x_c = 25 \text{ мм}, y_c = 35 \text{ мм}$.
- 4) Проводим центральные оси $X_c O Y_c$
 $a_1 = 10 - x_c = 10 - 25 = -15 \text{ мм},$
 $a_2 = 50 - x_c = 50 - 25 = 25 \text{ мм},$
 $b_1 = 50 - y_c = 50 - 35 = 15 \text{ мм},$
 $b_2 = 10 - y_c = 10 - 35 = -25 \text{ мм}.$
- 5) Вычисляем моменты инерции I_{x_c}, I_{y_c}

$$I_{x_c} = I_{x_c}^1 + I_{x_c}^2 = \frac{b_1^3 h_1^3}{12} + S_1 b_1^2 + \frac{b_2^3 h_2^3}{12} + S_2 b_2^2 =$$

$$= \frac{20 \cdot 100^3}{12} + 2000 \cdot 15^2 + \frac{60 \cdot 20^3}{12} +$$

$$+ 1200 \cdot (-15)^2 = 290,4 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^1 + I_{y_c}^2 = \frac{b_1^3 h_1}{12} + S_1 a_1^2 + \frac{b_2^3 h_2}{12} + S_2 a_2^2 = \frac{100 \cdot 20^3}{12} + 2000 \cdot (-15)^2 + \frac{20 \cdot 60^3}{12} +$$

$$+ 1200 \cdot 25^2 = 162,6 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$$

- 6) Вычисляем центробежный момент инерции $I_{x_c y_c}$

$$I_{x_c y_c} = I_{x_c y_c}^1 + I_{x_c y_c}^2 = I_{x_c y_c}^0 + S_1 a_1 b_1 + I_{x_c y_c}^0 + S_2 a_2 b_2 = 2000 \cdot (-15) \cdot 25 + 1200 \cdot 25 \cdot (-25) =$$

$$= -120 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$$

- 7) Определяем положение главных осей инерции

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = -\frac{2(-120 \cdot 10^4)}{290,4 \cdot 10^4 - 162,6 \cdot 10^4} = 1,87 \quad 2\alpha_0 = 61^\circ \Rightarrow \alpha_0 = 31,5^\circ$$

Если $I_x > I_y$ и $\alpha_0 > 0$, то угол α_0 откладывается от оси X_c против часовой стрелки.

8) Вычисляем главные моменты инерции I_{max}, I_{min}

$$I_{max} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} = \frac{290,4 \cdot 10^4 + 162,6 \cdot 10^4}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(290,4 \cdot 10^4 - 162,6 \cdot 10^4)^2 + 4(-120 \cdot 10^4)^2} = 362,4 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$$

$$I_{min} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} = \frac{290,4 \cdot 10^4 + 162,6 \cdot 10^4}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(290,4 \cdot 10^4 - 162,6 \cdot 10^4)^2 + 4(-120 \cdot 10^4)^2} = 90,6 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$$

ПРИМЕР 7: Для фигуры, показанной на рис. 14 определить положение

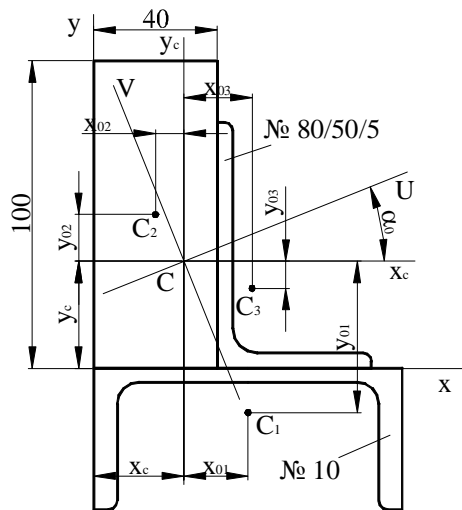
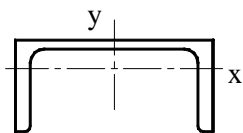


Рисунок 14. К примеру 7.

главных осей инерции и главные моменты инерции.

Решение:

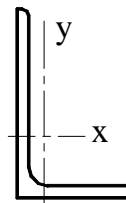


- 1) Выписываем основные исходные данные для каждой фигуры

Швеллер
 $S_I = 10,9 \text{ см}^2$
 $I_x = 20,4 \text{ см}^4$
 $I_y = 174 \text{ см}^4$

$$y_0 = 1,44 \text{ см}$$

$$h = 10 \text{ см}$$



Неравнополочный уголок

$$S_3 = 6,36 \text{ см}^2$$

$$I_x = 41,6 \text{ см}^4$$

$$I_y = 12,7 \text{ см}^4$$

$$I_{min} = 7,58 \text{ см}^4$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,387$$

$$x_0 = 1,13 \text{ см}$$

$$y_0 = 2,6 \text{ см}$$

Прямоугольник

$$S_2 = 40 \text{ см}^2$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \cdot 10^3}{12} = 333,3 \text{ см}^4$$

$$I_x = \frac{hb^3}{12} = \frac{10 \cdot 4^3}{12} = 53,3 \text{ см}^4$$

- 2) Вычерчиваем сечение в масштабе

- 3) Проводим произвольные оси координат

- 4) Определяем координаты центра тяжести сечения

$$x_c = \frac{S_y}{S} = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{10,9 \cdot 5 + 40 \cdot 2 + 6,36 \cdot 5,13}{10,9 + 40 + 6,36} = 2,92 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{S_x}{S} = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{10,9 \cdot (-1,44) + 40 \cdot 5 + 6,36 \cdot 2,6}{10,9 + 40 + 6,36} = 3,51 \text{ см}.$$

- 5) Проводим центральные оси

$$x_{01} = 5 - x_c = 5 - 2,92 = 2,08 \text{ см}, \quad x_{02} = 2 - x_c = 2 - 2,92 = 0,98 \text{ см},$$

$$x_{03} = 5,13 - x_c = 5,13 - 2,92 = 2,21 \text{ см},$$

$$y_{01} = -1,44 - y_c = -1,44 - 3,51 = -4,95 \text{ см}, \quad y_{02} = 5 - y_c = 5 - 3,51 = 1,49 \text{ см},$$

$$y_{03} = 2,6 - y_c = 2,6 - 3,51 = -0,91 \text{ см}.$$

- 6) Определяем осевые моменты инерции относительно центральных осей

$$I_{x_c} = I_{x_c}^1 + I_{x_c}^2 + I_{x_c}^3 = I_{x1} + S_1 y_{01}^2 + I_{x2} + S_2 y_{02}^2 + I_{x3} + S_3 y_{03}^2 = 20,4 + 10,9 \cdot (-4,95)^2 + 40 + 333,3 \cdot 1,49^2 + 41,6 + 6,36 \cdot (-0,91)^2 = 756,45 \text{ см}^4$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^1 + I_{y_c}^2 + I_{y_c}^3 = I_{y1} + S_1 x_{01}^2 + I_{y2} + S_2 x_{02}^2 + I_{y3} + S_3 x_{03}^2 = 174 + 10,9 \cdot 2,08^2 + 53,3 + 40 \cdot (-0,92)^2 + 12,7 + 6,36 \cdot 2,21^2 = 352,08 \text{ см}^4$$

- 7) Определяем центробежный момент инерции относительно центральных осей

Центробежный момент инерции для угловой прокатной стали относительно ее центра тяжести определяется по одной из следующих формул:

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_{max} - I_{min}}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{xy}^0 \cos 2\alpha_0 = \frac{I_x + I_y - 2I_{min}}{2} \sin 2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \Rightarrow I_{xy} = -\frac{(I_x - I_y) \operatorname{tg} 2\alpha_0}{2}$$

$$I_{xy,3} = \frac{I_x + I_y - 2I_{\min}}{2} \sin 2\alpha = \frac{41,6 + 12,7 - 2 \cdot 7,58}{2} \sin(2 \cdot 21,16) = 13,17 \text{ см}^4.$$

Знак центробежного момента инерции для угловой прокатной стали определяется согласно рис. 15, поэтому $I_{xy,3} = -13,17 \text{ см}^4$.

$$I_{y_c} = I_{x_c y_c}^1 + I_{x_c y_c}^2 + I_{x_c y_c}^3 = I_{xy1} + S_1 x_{01} y_{01} + I_{xy2} + S_2 x_{02} y_{02} + I_{xy3} + S_3 x_{03} y_{03} = 0 + 10,9 \cdot 2,08 \cdot (-4,95) + 0 + 40 \cdot (-0,92) \times 1,49 + (-13,17) + 6,36 \cdot 2,21 \cdot (-0,91) = -193,02 \text{ см}^4$$

8) Определяем положение главных осей инерции

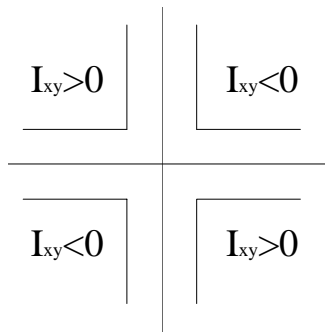


Рисунок 15. Знаки центробежного момента инерции для уголка

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = -\frac{2(-193,02)}{756,45 - 352,08} = 0,9547$$

$$\alpha_0 = 21,84^\circ$$

9) Определяем главные моменты инерции

$$I_{\max} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} = \frac{756,45 + 352,08}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{(756,45 - 352,08)^2 + 4(-193,02)^2} = 833,79 \text{ см}^4$$

$$I_{\min} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} = \frac{756,45 + 352,08}{2} -$$

$$- \frac{1}{2} \sqrt{(756,45 - 352,08)^2 + 4(-193,02)^2} = 274,73 \text{ см}^4$$

Указания к задаче 6

Изгибом называется такой вид деформации, при котором в поперечном

сечении стержня возникает В.С.Ф. – изгибающий момент.

Для того, чтобы произвести расчет балки на изгиб, необходимо знать величину наибольшего изгибающего момента M и положение сечения, в котором он возникает. Точно также, надо знать и наибольшую поперечную силу Q . Для этой цели строят эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. По эпюрам легко судить о том, где будет максимальное значение момента или поперечной силы. Для определения величин M и Q используют метод сечений. Рассмотрим схему, показанную на рис. 16. Составим сумму сил на ось Y , действующих на отрезанную часть балки.

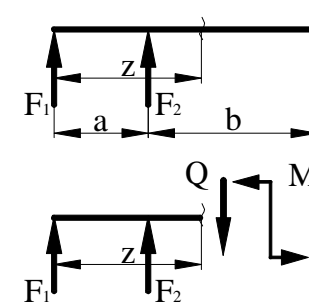


Рисунок 16. Метод сечений при изгибе

$$\sum Y = 0; F_1 + F_2 - Q = 0$$

$$Q = \sum_{\text{отс.ч.}} Y = F_1 + F_2$$

Поперечная сила равна алгебраической сумме всех сил, действующих по одну сторону от сечения.

$$Q = \sum_{\text{отс.ч.}} F_i$$

Составим сумму моментов, действующих на отрезанную часть балки, относительно сечения.

$$\sum m_x = 0; -F_1 z - F_2(z - a) + M = 0$$

$$M = \sum_{\text{отс.ч.}} m_x = F_1 z + F_2(z - a)$$

Изгибающий момент равен алгебраической сумме всех моментов, действующих на отсеченную часть бруса, относительно центра тяжести сечения.

$$M = \sum_{\text{отс.ч.}} M_i$$

Для того чтобы можно было вести расчет с любого конца балки, необходимо принять правило знаков для внутренних силовых факторов.

Для поперечной силы Q .

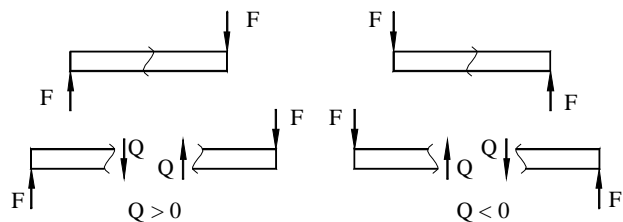


Рисунок 17. Правило знаков для поперечной силы Q .

Если внешняя сила вращает отрезанную часть балки по часовой стрелке, то сила является положительной, если внешняя сила вращает отрезанную часть балки против хода часовой стрелки, то сила является отрицательной.

Для изгибающего момента M .

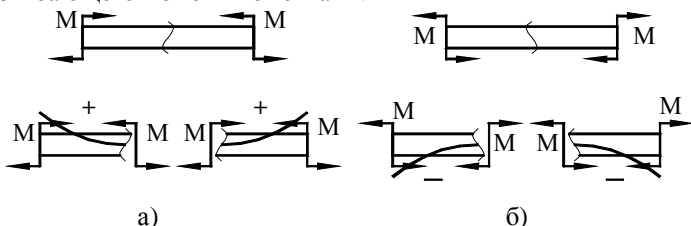


Рисунок 18. Правило знаков для изгибающего момента M .

Если под действием внешней силы изогнутая ось балки принимает вид вогнутой чаши, такой, что идущий сверху дождь будет наполнять ее водой, то изгибающий момент является положительным (рис. 18а). Если под действием внешней силы изогнутая ось балки принимает вид выпуклой чаши, такой, что идущий сверху дождь не будет наполнять ее водой, то изгибающий момент является отрицательным (рис. 18б).

Между интенсивностью распределенной нагрузки q , поперечной силой Q и изгибающим моментом M , действующим в некотором сечении, существуют следующие дифференциальные зависимости:

$$q = \frac{d^2M}{dz^2}, \quad Q = \frac{dM}{dz}, \quad q = \frac{dQ}{dz}.$$

Указанные дифференциальные зависимости при изгибе позволяют установить некоторые особенности эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

- 1) На тех участках, где нет распределенной нагрузки, эпюра Q ограничена прямыми, параллельными оси эпюры, а эпюра M , в общем случае, – наклонными прямыми (рис. 19).
- 2) На тех участках, где к балке приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра Q ограничена наклонными прямыми, а эпюра M – квадратичными параболой (рис. 20). При построении эпюры M на сжатых во-

локнах, выпуклость параболы обращена в сторону, противоположную действию распределенной нагрузки (рис. 21а, б).

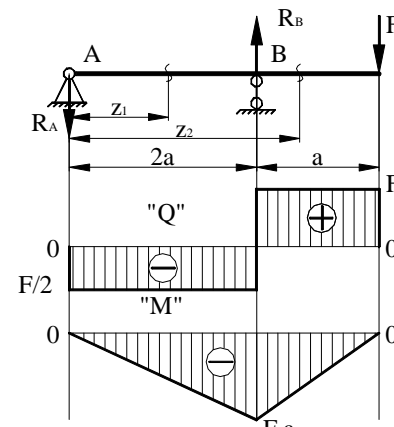


Рисунок 19.

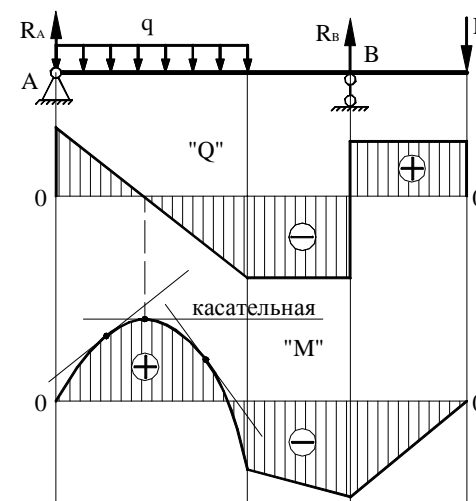


Рисунок 20.

- 3) В тех сечениях, где $Q = 0$, касательная к эпюре M параллельна оси эпюры (рис. 20, 21). Изгибающий момент в таких сечениях балки экстремален по величине (M_{max} , M_{min}).
- 4) На участках, где $Q > 0$, M возрастает, то есть слева на право положительные ординаты эпюры M увеличиваются, отрицательные – уменьшаются

(рис. 19, 20); на тех участках, где $Q < 0$, M убывает (рис. 19, 20).

- 5) В тех сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы:
 - а) на эпюре Q будут скачки на величину и в направлении приложенных сил (рис. 19, 20).
 - б) на эпюре M будут переломы (рис. 19, 20), острие перелома направлено против действия силы.
- 6) В тех, сечениях, где к балке приложены сосредоточенные моменты, на эпюре M будут скачки на величину этих моментов, на эпюре Q никаких изменений не будет (рис. 22).

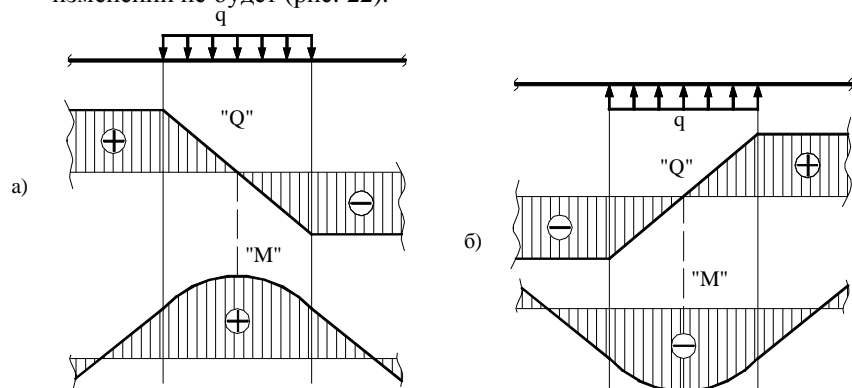


Рисунок 21.

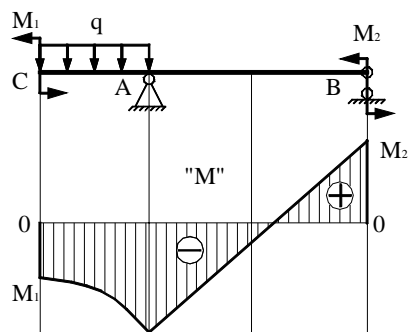


Рисунок 22.

- 7) Если на конце консоли или в концевой опоре приложен сосредоточенный момент, то в этом сечении изгибающий момент равен внешнему моменту (сечения C и B на рис. 22).
- 8) Эпюра Q представляет собой диаграмму производной от эпюры M . Значит, ординаты Q пропорциональны тангенсу угла наклона касательной к эпюре M (рис. 20).

Порядок построения эпюр Q и M :

- 1) Составляется расчетная схема балки (в виде оси) с изображением действующих на нее нагрузок.
- 2) Влияние опор на балку заменяется соответствующими реакциями; указываются обозначения реакций и их принятые направления.
- 3) Составляются уравнения равновесия балки, решением которых определяются значения опорных реакций.
- 4) Балка разбивается на участки, границами которых являются точки приложения внешних сосредоточенных сил и моментов, а также точки начала и окончания действия или изменения характера распределенных нагрузок.
- 5) Составляются выражения изгибающих моментов M и поперечных сил Q для каждого участка балки. На расчетной схеме указываются начало и направление отчета расстояний для каждого участка.
- 6) По полученным выражениям вычисляются ординаты эпюр для ряда сечений балки в количестве, достаточном для изображения этих эпюр.
- 7) Определяются сечения, в которых поперечные силы равны нулю и в которых, следовательно, действуют моменты M_{max} или M_{min} для данного участка балки; вычисляются значения этих моментов.
- 8) По полученным значениям ординат строятся эпюры.
- 9) Производится проверка построенных эпюр путем сопоставления их друг с другом.

Эпюры внутренних силовых факторов при изгибе строят для того, чтобы определить опасное сечение. После того, как опасное сечение будет найдено, балку рассчитывают на прочность. В общем случае поперечного изгиба, когда в сечениях стержня действуют изгибающий момент и поперечная сила, в сечении балки возникают нормальные и касательные напряжения. Поэтому, логично рассматривать два условия прочности:

а) по нормальным напряжениям

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

б) по касательным напряжениям

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x^*}{I_x \cdot b} \leq [\tau]$$

Поскольку основным разрушающим фактором для балок являются нормальные напряжения, то и размеры поперечного сечения балки принятой формы определяют из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}$$

Затем проверяют, удовлетворяет ли выбранное сечение балки условию прочности по касательным напряжениям.

Однако, такой подход к расчету балок еще не характеризует прочность балки. Во многих случаях в сечениях балок имеются точки, в которых одно-

временно действуют большие нормальные и касательные напряжения. В таких случаях возникает необходимость проверки балки на прочность по главным напряжениям. Наиболее применимы для такой проверки третья и четвертая теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad \sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

ПРИМЕР 8: Построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M для балки, показанной на рис. 23, если: $F_1 = 3 \text{ кН}$, $F_2 = 1,5 \text{ кН}$, $M = 5,1 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$, $a = 2 \text{ м}$, $b = 1 \text{ м}$, $c = 3 \text{ м}$.

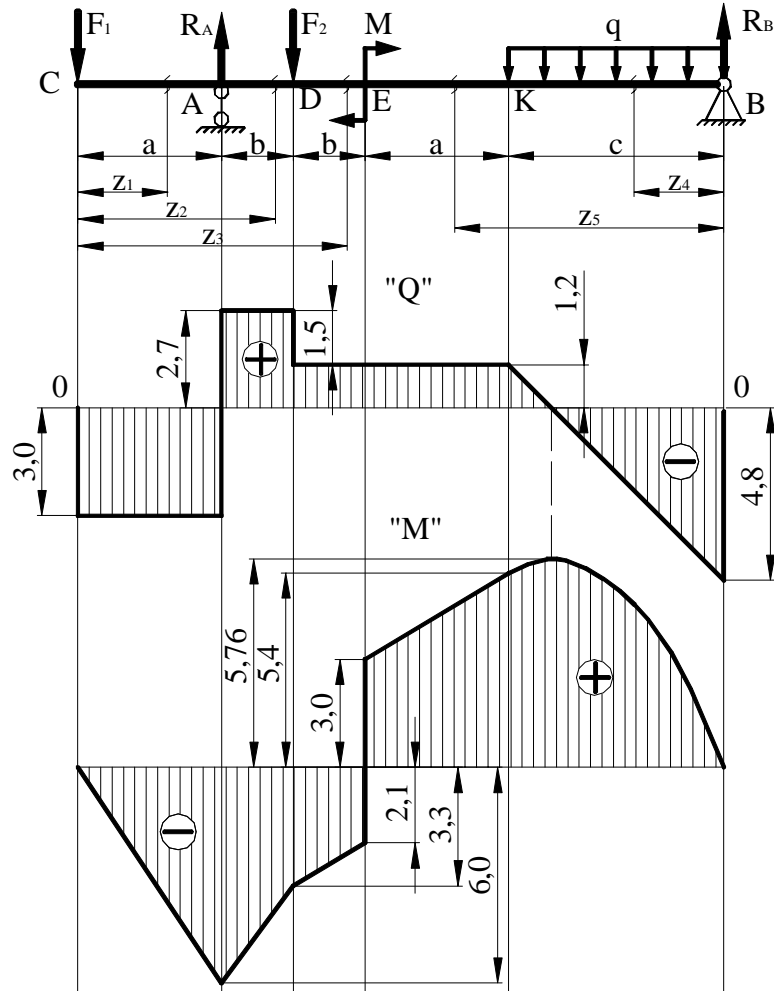


Рисунок 23. К примеру 8.

Решение:

1) Определяем опорные реакции.

$$\sum m_A = 0; \quad F_1 \cdot a - F_2 \cdot b - M - q \cdot c(2b + a + c/2) + R_B(2b + a + c) = 0;$$

$$R_B = \frac{-F_1 \cdot a + F_2 \cdot b + M + q \cdot c(2b + a + c/2)}{2b + a + c} = \frac{-3 \cdot 2 + 1,5 \cdot 1 + 5,1 - 2 \cdot 3(2 + 2 + 1,5)}{2 + 2 + 3} = 4,8 \text{ кН}$$

$$\sum m_B = 0; \quad F_1(2a + 2b + c) + F_2(a + b + c) - M + q \cdot c \cdot c/2 - R_A(2b + a + c) = 0;$$

$$R_A = \frac{F_1(2a + 2b + c) + F_2(a + b + c) - M + q \cdot c \cdot c/2}{2b + a + c} = \frac{3(4 + 2 + 3) + 1,5(2 + 1 + 3) - 5,1 + 2 \cdot 3^2/2}{2 + 2 + 3} = 5,7 \text{ кН}$$

Проверка:

$$\sum Y = 0; \quad -F_1 - F_2 - q \cdot c + R_A + R_B = 0;$$

$$-3 - 1,5 - 2 \cdot 3 + 5,7 + 4,8 = 0 \quad \text{— реакции найдены верно}$$

2) Разбиваем балку на участки CA , AD , DE , EK , KB .

3) Определяем значения Q и M на каждом участке.

$$\underline{CA} \quad 0 \leq z_1 \leq a$$

$$Q_1 = \sum_{\text{п.ч.}} Y = -F_1 = -3 \text{ кН}$$

$$M_1 = \sum_{\text{п.ч.}} m_X = -F_1 \cdot z_1$$

$$z_1 = 0, \quad M_1 = 0; \quad z_1 = a = 2 \text{ м}, \quad M_1 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\underline{AD} \quad a \leq z_2 \leq a + b$$

$$Q_2 = \sum_{\text{п.ч.}} Y = -F_1 + R_A = -3 + 5,7 = 2,7 \text{ кН}$$

$$M_2 = \sum_{\text{п.ч.}} m_X = -F_1 \cdot z_2 + R_A(z_2 - a)$$

$$z_2 = a = 2 \text{ м}, \quad M_2 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad z_2 = a + b = 3 \text{ м}, \quad M_2 = -3,3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\underline{DE} \quad a + b \leq z_3 \leq a + 2b$$

$$Q_3 = \sum_{\text{п.ч.}} Y = -F_1 + R_A - F_2 = -3 + 5,7 - 4,8 = -2,1 \text{ кН}$$

$$M_3 = \sum_{\text{п.ч.}} m_X = -F_1 \cdot z_3 + R_A(z_3 - a) - F_2(z_3 - a - b)$$

$$z_3 = a + b = 3 \text{ м}, \quad M_3 = -3,3 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad z_3 = a + 2b = 4 \text{ м}, \quad M_3 = 5,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\underline{KB} \quad 0 \leq z_4 \leq c$$

$$Q_4 = \sum_{\text{п.ч.}} Y = -R_B + q \cdot z_4$$

$$M_4 = \sum_{\text{п.ч.}} m_X = R_B \cdot z_4 - q \frac{z_4^2}{2}$$

$$z_4 = 0, \quad Q_4 = -4,8 \text{ кН}, \quad M_4 = 0; \quad z_4 = c = 3 \text{ м}, \quad Q_4 = 1,2 \text{ кН}, \quad M_4 = 5,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Найдем максимум изгибающего момента на участке KB .

Приравняем уравнение Q на этом участке к нулю и выразим координату z_{max} , при которой $Q = 0$, а момент имеет максимальное значение. Далее подставим z_{max} в уравнение момента на этом участке и найдем M_{max} .

$$-R_B + q \cdot z_{max} = 0 \Rightarrow z_{max} = \frac{R_B}{q} = \frac{4,8}{2} = 2,4 \text{ м}$$

$$M_{max} = R_B \cdot z_{max} - q \frac{z_{max}^2}{2} = 4,8 \cdot 2,4 - 2 \frac{2,4^2}{2} = 5,76 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

ЕК $c \leq z_5 \leq c + a$

$$Q_5 = \sum_{п.ч.} Y = -R_B + q \cdot c = -4,8 + 2 \cdot 3 = 1,2 \text{ кН}$$

$$M_5 = \sum_{п.ч.} m_x = R_B \cdot z_5 - q \cdot c(z_5 - c/2)$$

$$z_5 = c = 3 \text{ м}, \quad M_4 = 5,4 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad z_5 = c + a = 5 \text{ м}, \quad M_5 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4) Строим эпюры (рис. 23)

ПРИМЕР 9: Для балки, изображенной на рис. 23 определить размеры круглого, прямоугольного ($h/b = 2$) и двутаврового сечения. Проверить прочность двутавра по главным напряжениям, если $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$, $[\tau] = 150 \text{ МПа}$.

Решение:

1) Определяем из условия прочности необходимый момент сопротивления

$$W_x = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{6 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 40 \text{ см}^3$$

2) Определяем размеры круглого сечения

$$W_{x1} = 0,1d^3 \Rightarrow d = \sqrt[3]{10 \cdot W_x} = \sqrt[3]{10 \cdot 40} = 7,4 \text{ см}$$

3) Определяем размеры прямоугольного сечения

$$W_{x2} = \frac{bh^3}{6} = \frac{h^3}{12} \Rightarrow h = \sqrt[3]{12 \cdot W_x} = \sqrt[3]{12 \cdot 40} = 7,8 \text{ см}$$

$$b = \frac{h}{2} = \frac{7,8}{2} = 3,9 \text{ см}$$

4) Подбираем по сортаменту двутавровую балку № 10 (ГОСТ 8239-89)

$W_x = 39,7 \text{ см}^3$, $S_x^* = 23 \text{ см}^3$, $I_x = 198 \text{ см}^4$, $h = 100 \text{ мм}$, $b = 55 \text{ мм}$, $d = 4,5 \text{ мм}$, $t = 7,2 \text{ мм}$.

Для проверки прочности балки по главным напряжениям, необходимо построить эпюры нормальных и касательных напряжений в опасном сечении. Так как величина главных напряжений зависит и от нормальных и от касательных напряжений, то проверку прочности следует произвести в том сечении балки, где M и Q достаточно велики. На опоре B (рис. 23) поперечная сила Q имеет максимальное значение, однако здесь $M = 0$. поэтому считаем опасным сечение на опоре A , где изгибающий момент максимален и поперечная сила имеет сравнительно большое значение.

Нормальные напряжения, изменяясь по высоте сечения, подчиняются линейному закону:

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y,$$

где y – координата точки сечения (рис. 24).

при $y = 0$, $\sigma = 0$;

$$\text{при } y_{max}, \quad \sigma_{max} = \frac{M}{I_x} y_{max} = \frac{M}{W_x} \quad \sigma_{max} = \frac{6 \cdot 10^3}{39,7 \cdot 10^{-6}} = 151,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 151,1 \text{ МПа}$$

Закон изменения касательных напряжений определяются законом изменением статического момента S_x^* площади, который, в свою очередь изменяется по высоте сечения по параболическому закону. Вычислив значение для характерных точек сечения, построим эпюру касательных напряжений. При вычислении значений τ воспользуемся обозначениями размеров сечения, принятыми на рис. 24.

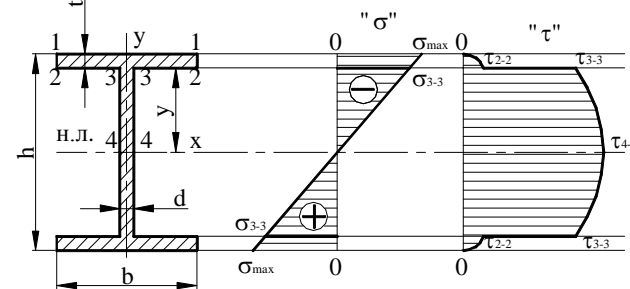


Рисунок 24. Распределение нормальных и касательных напряжений по высоте балки при изгибе

$$\tau_{(2-2)} = \frac{Q_{max} S_{x(2-2)}}{I_x \cdot b};$$

$$S_{x(2-2)}^* = S_{x(3-3)}^* = \frac{bt}{2}(h-t) = \frac{0,055 \cdot 0,0072}{2}(0,1 - 0,0072) = 1,837 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$$

$$\tau_{(2-2)} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 1,837 \cdot 10^{-5}}{198 \cdot 10^{-8} \cdot 0,055} = 0,5 \text{ МПа}$$

$$\tau_{(3-3)} = \frac{Q_{max} S_{x(3-3)}^*}{I_x \cdot b} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 1,837 \cdot 10^{-5}}{198 \cdot 10^{-8} \cdot 0,0045} = 6,2 \text{ МПа}$$

$$\tau_{(4-4)} = \frac{Q_{max} S_{x max}^*}{I_x \cdot d} \quad S_{x max}^* = 23 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3$$

$$\tau_{(4-4)} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 23 \cdot 10^{-6}}{198 \cdot 10^{-8} \cdot 0,0045} = 7,7 \text{ МПа}$$

Как видно из эпюр, опасным в сечении является слой 3–3, где нормальные и касательные напряжения имеют значения близкие к максимальным, в то время как в слое 1–1, где $\sigma = \sigma_{max}$, $\tau = 0$, а в слое 4–4, где $\tau = \tau_{max}$, $\sigma = 0$.

$$\sigma_{(3-3)} = \frac{M_{max}}{I_x} y_{(3-3)} = \frac{M_{max}}{I_x} \left(\frac{h}{2} - t \right)$$

$$\sigma_{(3-3)} = \frac{6 \cdot 10^3}{198 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{0,1}{2} - 0,0072 \right) = 130 \text{ МПа}$$

Определяем главные напряжения по третьей теории прочности

$$\sigma_{эKB}^{III} = \sqrt{130^2 + 4 \cdot 6,2^2} = 131 \text{ МПа}$$

$\sigma_{эKB}^{III} < [\sigma]$ – условие прочности для слоя 3–3 выполняется.

Указания к задаче 7

Совместному действию изгибающего и крутящего моментов подвергаются большинство деталей машин и механизмов, которые кроме скручивания, испытывают изгиб от собственного веса, от веса шкивов, зубчатых колес, от натяжения ремней, от сил зацепления колес и т.д. Расчет на прочность при изгибе с кручением обычно выполняют при расчете валов с учетом изгибающих усилий и при расчете пространственных стержней.

Если внешние силы, действующие на вал, не лежат в одной плоскости, то необходимо разложить их на составляющие: вертикальную и горизонтальную. Далее следует построить эпюру крутящего момента, эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а затем эпюру суммарного изгибающего момента.

При совместном действии крутящего и изгибающего моментов необходимо учитывать нормальные напряжения, возникающие от действия изгибающего момента, и касательные напряжения, возникающие от действия крутящего момента. Максимальные эквивалентные напряжения от кручения и изгиба возникающие на поверхности круглого вала определяют по третьей или четвертой теории прочности:

$$\sigma_{эKB}^{III} = \frac{\sqrt{M_{\Sigma}^2 + T_{KP}^2}}{W_{OC}} = \frac{M_{ПРНВ}^{III}}{W_{OC}}; \quad \sigma_{эKB}^{IV} = \frac{\sqrt{M_{\Sigma}^2 + 0,75T_{KP}^2}}{W_{OC}} = \frac{M_{ПРНВ}^{IV}}{W_{OC}},$$

где W_{OC} – осевой момент сопротивления сечения.

Условия прочности при изгибе с кручением соответственно по третьей и четвертой теориям прочности записываются:

$$\sigma_{эKB}^{III} = \frac{M_{ПРНВ}^{III}}{W_{OC}} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{эKB}^{IV} = \frac{M_{ПРНВ}^{IV}}{W_{OC}} \leq [\sigma].$$

ПРИМЕР 10: Подобрать круглое поперечное сечение вала, показанного на рис. 25, если диаметры шкивов $d_1 = d_2 = 200$ мм, $d_3 = 300$ мм; углы наклона ремней к горизонту $\alpha_1 = \alpha_2 = 30^\circ$, $\alpha_3 = 45^\circ$ (рис. 26); мощность на ведущем шкиве $3 N_3 = 5$ кВт; мощность на ведомых шкивах 1 и $2 N_1 = N_2 = N_3 / 2$; рас-

стояния $a = 0,25$ м, $b = 0,4$ м; допускаемые напряжения $[\sigma] = 80$ МПа. Расчет проводить по третьей теории прочности.

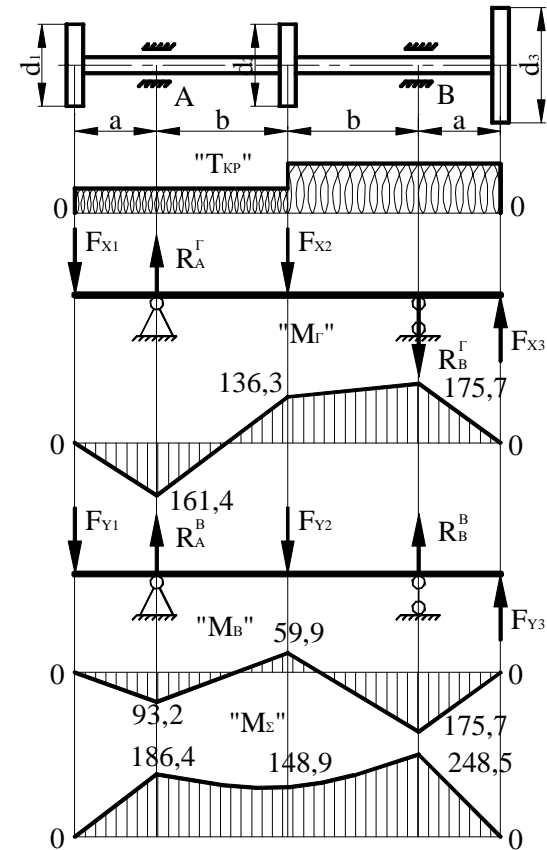


Рисунок 25. К примеру 10.

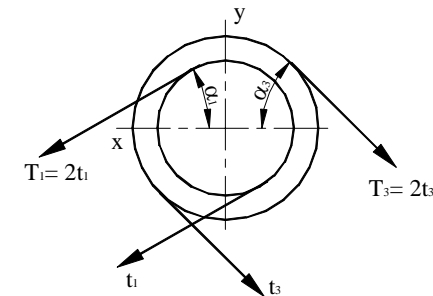


Рисунок 26. К примеру 10.

Решение:

- 1) Определяем крутящие моменты на валу и строим их эпюру

$$T_{KP1} = 9545 \frac{N}{n} = 9545 \frac{5}{960} = 49,7 \text{ H} \cdot \text{м}$$

$$T_{KP2} = T_{KP3} = \frac{T_{KP1}}{2} = \frac{49,7}{2} = 24,85 \text{ H} \cdot \text{м}$$

- 2) Определяем окружные усилия

$$T_{KP1} = (T_1 - t_1) \frac{d_1}{2}, \quad T_1 = 2t_1;$$

$$t_1 = t_2 = \frac{2T_{KP1}}{d_1} = \frac{2 \cdot 24,85}{0,2} = 248,5 \text{ H}$$

$$t_3 = \frac{2T_{KP3}}{d_3} = \frac{2 \cdot 49,7}{0,3} = 331,3 \text{ H}$$

- 3) Определяем горизонтальные и вертикальные проекции сил, действующих на вал.

Для определения проекций сил пользуемся направлениями осей, принятыми на рис. 26.

$$F_{X1} = F_{X2} = T_1 \cdot \cos \alpha_1 + t_1 \cdot \cos \alpha_1 = 3t_1 \cdot \cos \alpha_1 = 3 \cdot 248,5 \cdot 0,87 = 645,6 \text{ H}$$

$$F_{X3} = -3t_3 \cdot \cos \alpha_3 = 3 \cdot 331,3 \cdot 0,71 = -702,8 \text{ H}$$

$$F_{Y1} = F_{Y2} = -3t_1 \cdot \sin \alpha_1 = -3 \cdot 248,5 \cdot 0,5 = -372,8 \text{ H}$$

$$F_{Y3} = -3t_3 \cdot \sin \alpha_3 = -3 \cdot 331,3 \cdot 0,71 = -702,8 \text{ H}$$

- 4) Строим эпюру изгибающих моментов в горизонтальной плоскости
Определяем опорные реакции (рис. 25)

$$\sum M_A = 0; \quad F_{X1} \cdot a - F_{X2} \cdot b - R_B^r \cdot 2b + F_{X3} \cdot (2b + a) = 0$$

$$R_B^r = \frac{F_{X1} \cdot a - F_{X2} \cdot b + F_{X3} \cdot (2b + a)}{2b} = \frac{645,6 \cdot 0,25 - 645,6 \cdot 0,4 + 702,8(2 \cdot 0,4 + 0,25)}{2 \cdot 0,4} = 801,4 \text{ H}$$

$$\sum M_B = 0; \quad F_{X1} \cdot (2b + a) - R_A^r \cdot 2b + F_{X2} \cdot b + F_{X3} \cdot a = 0$$

$$R_A^r = \frac{F_{X1} \cdot (2b + a) + F_{X2} \cdot b + F_{X3} \cdot a}{2b} = \frac{645,6(2 \cdot 0,4 + 0,25) - 645,6 \cdot 0,4 + 702,8 \cdot 0,25}{2 \cdot 0,4} = 1389,8 \text{ H}$$

Проверка

$$\sum Y = 0; \quad F_{Y1} + R_A^r - F_{Y2} - R_B^r + F_{Y3} \cdot a = 0$$

$$-645,6 + 1389,8 - 645,6 - 801,4 + 702,8 = 0 - \text{верно}$$

Строим эпюру (пример на построение эпюр изгибающих моментов см. в указаниях к задаче № 4).

- 5) Строим эпюру изгибающих моментов в вертикальной плоскости
Определяем опорные реакции (рис. 25)

$$\sum M_A = 0; \quad F_{Y1} \cdot a - F_{Y2} \cdot b + R_B^B \cdot 2b - F_{Y3} \cdot (2b + a) = 0$$

$$R_B^B = \frac{-F_{Y1} \cdot a + F_{Y2} \cdot b + F_{Y3} \cdot (2b + a)}{2b} = \frac{-372,8 \cdot 0,25 - 372,8 \cdot 0,4 + 702,8(2 \cdot 0,4 + 0,25)}{2 \cdot 0,4} = 992,3 \text{ H}$$

$$\sum M_B = 0; \quad F_{Y1} \cdot (2b + a) - R_A^B \cdot 2b + F_{Y2} \cdot b - F_{Y3} \cdot a = 0$$

$$R_A^B = \frac{F_{Y1} \cdot (2b + a) + F_{Y2} \cdot b - F_{Y3} \cdot a}{2b} = \frac{372,8(2 \cdot 0,4 + 0,25) + 372,8 \cdot 0,4 - 702,8 \cdot 0,25}{2 \cdot 0,4} = 456,1 \text{ H}$$

Проверка

$$\sum Y = 0; \quad -F_{Y1} + R_A^B - F_{Y2} + R_B^B - F_{Y3} \cdot a = 0$$

$$-372,8 + 456,1 - 372,8 + 992,3 - 702,8 = 0 - \text{верно}$$

Строим эпюру (рис. 25).

- 6) Строим эпюру суммарного изгибающего момента

Для построения суммарной эпюры изгибающего момента значения ординат в характерных точках берем с эпюр моментов в горизонтальной и вертикальной плоскостях (рис. 25).

В точке А:

$$M_\Sigma = \sqrt{M_r^2 + M_B^2} = \sqrt{161,4^2 + 93,2^2} = 186,4 \text{ H} \cdot \text{м}$$

В точке В:

$$M_\Sigma = \sqrt{175,7^2 + 175,7^2} = 248,5 \text{ H} \cdot \text{м}$$

В точке С:

$$M_\Sigma = \sqrt{136,3^2 + 59,9^2} = 148,9 \text{ H} \cdot \text{м}$$

Строим эпюру (рис. 25).

- 7) Определяем приведенный момент в опасном сечении вала

Опасным сечением вала будет являться сечение в точке В, так как в ней крутящий и суммарный изгибающий моменты имеют наибольшие значения.

$$M_{\text{прив}}^{\text{III}} = \sqrt{T_{KP}^2 + M_\Sigma^2} = \sqrt{49,7^2 + 248,5^2} = 253,4 \text{ H} \cdot \text{м}$$

- 8) Подбираем безопасный диаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{10M_{\text{прив}}^{\text{III}}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 253,4}{80 \cdot 10^6}} = 0,0316 \text{ м} = 31,6 \text{ мм}$$

Принимаем $d = 35 \text{ мм}$.

Указания к задаче 8

В строительстве, наряду с проблемами прочности и жесткости существует и проблема устойчивости, когда центрально сжатый брус, достаточно большой длины, начинает искривляться под действием внешней силы.

Устойчивым равновесием называется такая форма равновесия сжатого стержня, когда слегка отклоненный от положения равновесия стержень стремится под действием сжимающей силы занять исходное положение.

Критической силой называется такое минимально возможное значение нагрузки, при котором слегка отклоненный стержень теряет свою устойчивость.

При потере устойчивости кроме сжимающей силы, действующей на стержень, возникает дополнительный изгибающий момент. Поэтому в поперечных сечениях стержня происходит значительный рост напряжений, а также значительно возрастают и деформации стержня.

Если в стержне возникают только упругие деформации, то расчет его на устойчивость можно вести по формуле Эйлера:

$$F_{кр}^э = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

где E – модуль упругости первого рода;

I_{min} – минимальный момент инерции поперечного сечения стержня;

μ – коэффициент приведения длины стержня;

l – длина стержня.

Коэффициент приведения длины стержня μ зависит от условий закрепления стержня, его величину можно определить по рис. 27.

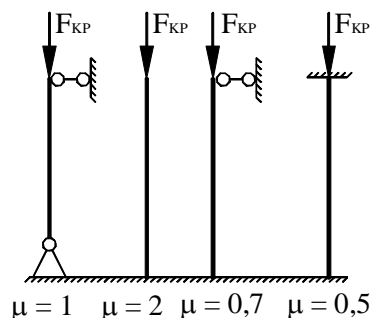


Рисунок 27. Значения коэффициента μ в зависимости от условий закрепления стержня.

Критические напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_{кр}^э = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

где λ – гибкость стержня.

Существует другой метод расчета стержней на устойчивость, сочетающий в себе и расчет на прочность. Этот метод известен как расчет по коэффициенту φ . При расчете сжатых стержней коэффициент запаса устойчивости принимается большим, чем коэффициент запаса прочности, поэтому можно выразить критическое напряжение в стержне формулой:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{S} \leq \varphi [\sigma_{сж.}]$$

где φ – коэффициент снижения допускаемого напряжения на сжатие.

Коэффициент зависит от материала стержня и от его гибкости и определяется по специальным таблицам, его величина всегда меньше единицы. При

проектном расчете стержня на устойчивость приходится использовать метод последовательных приближений, задаваясь несколькими значениями коэффициента φ .

ПРИМЕР 11: Подобрать сечение двутаврового стержня, показанного на рис. 28, если длина стержня $l = 4$ м, сжимающая сила $F = 500$ кН, допускаемые напряжения на сжатие $[\sigma] = 150$ МПа.

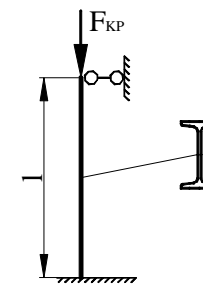


Рисунок 28.

Решение:

Принимаем первоначальный коэффициент снижения допускаемого напряжения $\varphi_1 = 0,5$. Тогда допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma_y]_1 = \varphi_1 [\sigma] = 0,5 \cdot 150 = 75 \text{ МПа}.$$

Определяем необходимую площадь поперечного сечения стержня:

$$S_1 = \frac{F}{[\sigma_y]_1} = \frac{500 \cdot 10^3}{75 \cdot 10^6} = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 66,7 \text{ см}^2$$

По таблицам сортамента подбираем двутавр № 40: $S = 72,6 \text{ см}^2$, $i_{min} = i_y = 3,03 \text{ см}$.

Находим гибкость стержня. По условию задачи коэффициент $\mu = 0,7$.

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{0,7 \cdot 400}{3,03} = 92,4$$

По известной гибкости стержня определяем из таблицы коэффициент φ_2 (Степин П.А. Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 1988. – 367 с.).

$$\varphi_2 = 0,6684$$

Определяем допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma_y]_2 = \varphi_2 [\sigma] = 0,6684 \cdot 150 = 100,3 \text{ МПа}.$$

Определяем рабочее напряжение стержня:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{500 \cdot 10^3}{66,7 \cdot 10^{-4}} = 75,0 \text{ МПа}$$

Сравним рабочее и допускаемое напряжение на устойчивость:

$$\frac{100,3 - 75,0}{100,3} 100\% = 25,2\% \text{ – недонапряжение}$$

При расчетах на устойчивость отклонение от допускаемого напряжения не должно превышать 5%, поэтому подобранное сечение слишком велико, и необходимо продолжить подбор сечения, используя метод последовательного приближения.

Определяем из двух величин напряжений среднее напряжение:

$$[\sigma_y]_{CP} = \frac{100,3 + 75,0}{2} = 87,63 \text{ МПа}$$

Определяем необходимую площадь поперечного сечения стержня:

$$S_2 = \frac{F}{[\sigma_y]_{CP}} = \frac{500 \cdot 10^3}{87,63 \cdot 10^6} = 5,71 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 57,1 \text{ см}^2$$

По таблицам сортамента подбираем двутавр № 36: $S = 61,9 \text{ см}^2$, $i_{min} = i_y = 2,89 \text{ см}$.

Находим гибкость стержня:

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{0,7 \cdot 400}{2,89} = 96,4$$

Определяем коэффициент φ_3 :

$$\varphi_3 = 0,6279$$

Определяем допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma_y]_3 = \varphi_3 [\sigma] = 0,6279 \cdot 150 = 94,2 \text{ МПа}.$$

Определяем рабочее напряжение стержня:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{500 \cdot 10^3}{61,9 \cdot 10^{-4}} = 80,8 \text{ МПа}$$

Сравним рабочее и допускаемое напряжение на устойчивость:

$$\frac{94,2 - 80,8}{94,2} 100\% = 14,2\% \text{ – недонапряжение}$$

Подобранное сечение слишком велико, и необходимо продолжить подбор сечения.

Определяем из двух величин напряжений среднее напряжение:

$$[\sigma_y]_{CP} = \frac{94,2 + 80,8}{2} = 87,5 \text{ МПа}$$

Определяем необходимую площадь поперечного сечения стержня:

$$S_3 = \frac{F}{[\sigma_y]_{CP}} = \frac{500 \cdot 10^3}{87,5 \cdot 10^6} = 5,71 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 57,1 \text{ см}^2$$

Среднее напряжение и площадь поперечного сечения стержня по сравнению с предыдущим приближением изменилась незначительно. Поэтому, выбирая по таблицам сортамента сечение стержня, мы снова получим двутавр №36. Но так как, по этому двутавру расчет уже производился, то примем двутавр № 33 и подсчитаем величину перенапряжения в стержне. Если перена-

пряжение не превысит 5%, то окончательно примем двутавр № 33.

По таблицам сортамента для двутавра № 33: $S = 53,8 \text{ см}^2$, $i_{min} = i_y = 2,79 \text{ см}$.

Находим гибкость стержня:

$$\lambda_3 = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{0,7 \cdot 400}{2,79} = 100,4.$$

Определяем коэффициент φ_4 :

$$\varphi_4 = 0,5968.$$

Определяем допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma_y]_4 = \varphi_4 [\sigma] = 0,5968 \cdot 150 = 89,5 \text{ МПа}.$$

Определяем рабочее напряжение стержня:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{500 \cdot 10^3}{53,8 \cdot 10^{-4}} = 92,9 \text{ МПа}.$$

Сравним рабочее и допускаемое напряжение на устойчивость:

$$\frac{92,9 - 89,5}{99,5} 100\% = 3,7\%$$

Перенапряжение стержня составило менее, чем 5%, поэтому окончательно принимаем двутавр № 33.

Указания к задаче 9

Часто в строительстве и машиностроении применяются конструкции, состоящие не из отдельных стержней, а из целых систем стержней соединенных между собой. Поэтому необходимо умение вести расчет и таких конструкций.

Система стержней, жестко соединенных между собой называется рамой.

В поперечных сечениях плоских (стержни и нагрузка лежат в одной плоскости) рам действуют три внутренних силовых фактора: нормальная сила N , поперечная сила Q и изгибающий момент M . Поэтому, при расчете рам, для определения опасного сечения, необходимо строить эпюры всех трех В.С.Ф.

Поперечное сечение при проектном расчете рамы подбирается по максимальному изгибающему моменту. Подобранное сечение проверяется по условию прочности:

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M}{W_x} \leq [\sigma].$$

Задачи расчета на жесткость требуют умения определять деформации и перемещения. Одним из методов определения перемещений в стержневых системах является интеграл Мора, формула которого выглядит следующим образом:

$$\delta = \frac{1}{EI} \int M_F \bar{M} dz,$$

где EI – жесткость сечения балки;

M_F – уравнение изгибающего момента от внешних сил;

\bar{M} – уравнение изгибающего момента от единичной силы.

Для определения перемещений по интегралу Мора нужно:

- 1) Составить уравнение изгибающего момента от внешних сил M_F .
- 2) В исследуемой точке приложить только единичную силу $F = 1$ или единичный момент $M = 1$.
- 3) Записать уравнения изгибающего момента только от единичной нагрузки \bar{M} .
- 4) Определить перемещения.

Примечание

- 1) Если при определении перемещений получили их со знаком «+», то угадали направление, если получили знак «-», то не угадали.
- 2) Интегрирование проводится по участкам.

Способ Верещагина является графическим решением интеграла Мора.

Дадим некоторые определения.

Единичной называется эпюра, построенная от действия единичной силы или единичного момента.

Грузовой называется эпюра, построенная от действия внешних сил.

Формула для определения перемещений по способу Верещагина:

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \omega_i \bar{M}_{ci},$$

где ω_i – площадь грузовой эпюры;

M_{ci} – ордината, взятая с единичной эпюры под центром тяжести грузовой.

Чтобы определить перемещения по способу Верещагина необходимо:

- 1) Построить грузовую эпюру.
- 2) В исследуемой точке приложить единичную нагрузку.
- 3) Построить единичную эпюру.
- 4) Определить прогиб или угол поворота.

Примечание.

- 1) Перемножение производится по участкам.
- 2) M_{ci} берется только с линейной эпюры.
- 3) Если обе эпюры линейные (ограниченные прямыми), то перемножение можно вести в обратном порядке.
- 4) Если значение перемещения получится со знаком «+», то угадали направление перемещения, если получится знак «-», то не угадали.

Площадь и координаты центра тяжести простейших фигур.

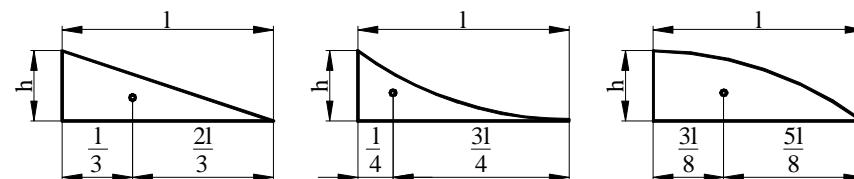


Рисунок 29. Площадь и координаты центра тяжести простейших фигур.

$$\omega = \frac{1}{2} hl$$

Площадь треугольной эпюры

$$\omega = \frac{1}{3} hl$$

Площадь эпюры с вогнутой параболой

$$\omega = \frac{2}{3} hl$$

Площадь эпюры с выпуклой параболой

ПРИМЕР 12: Определить перемещение точки К балки, показанной на рис. 30 при помощи интеграла Мора.

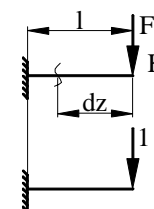


Рисунок 30. К примеру 12.

Решение:

- 1) Составляем уравнение изгибающего момента от внешней силы M_F .
 $M_F = -F \cdot z$
- 2) Прикладываем в точке К единичную силу $F = 1$.
- 3) Записываем уравнение изгибающего момента от единичной силы \bar{M} .
 $\bar{M} = -1 \cdot z$
- 4) Определяем перемещения

$$y_i = \frac{1}{EI} \int M_F \bar{M} dz = \frac{Fz^3}{3EI} \Big|_0^l = \frac{Fl^3}{3EI}$$

ПРИМЕР 13: Определить перемещение точки К балки, показанной на рис. 31 по способу Верещагина.

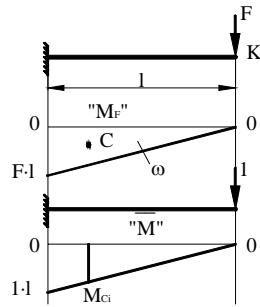


Рисунок 31. К примеру 13.

Решение:

- 1) Строим грузовую эпюру.

$$M_F = -F \cdot l$$

- 2) Прикладываем в точке К единичную силу.

- 3) Строим единичную эпюру.

$$\bar{M} = 1 \cdot l$$

- 4) Определяем прогиб

$$y_K = \frac{1}{EI} \sum \omega \cdot \bar{M}_C$$

$$\omega = \frac{1}{2} F \cdot l \cdot l; \quad \bar{M}_C = \frac{2}{3} l; \quad y_K = \frac{F \cdot l \cdot l \cdot 2l}{2 \cdot 3EI} = \frac{F \cdot l^3}{3EI}$$

ПРИМЕР 14: Для стальной рамы, показанной на рис. 32 построить эпюры В.С.Ф., подобрать двутавровое поперечное сечение, определить вертикальное перемещение и угол поворота сечения в точке С, если $F = 10$ кН, $q = 4$ кН/м, $a = 2$ м, $b = 1$ м, $[\sigma] = 120$ МПа.

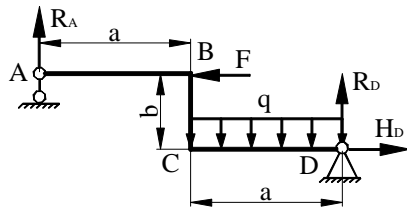


Рисунок 32. К примеру 14.

Решение:

- 1) Определяем опорные реакции

$$\sum M_D = 0; \quad -R_A \cdot 2a + q \cdot a \cdot \frac{2}{2} + F \cdot b = 0$$

$$R_A = \frac{q \cdot \frac{a^2}{2} + F \cdot b}{2a} = \frac{4 \cdot \frac{2^2}{2} + 10 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 4,5 \text{ кН}$$

$$\sum X = 0; \quad -F + H_D = 0$$

$$H_D = F = 10 \text{ кН}$$

$$\sum M_A = 0; \quad -q \cdot a \cdot 1,5a + R_D \cdot 2a + H_D \cdot b = 0$$

$$R_D = \frac{q \cdot 1,5a^2 - H_D \cdot b}{2a} = \frac{4 \cdot 1,5 \cdot 2^2 - 10 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 3,5 \text{ кН}$$

Проверка

$$\sum Y = 0; \quad R_A - q \cdot a + R_D = 0$$

$$4,5 - 4 \cdot 2 + 3,5 = 0 \text{ — верно}$$

- 2) Строим эпюры В.С.Ф.

- 2.1) Эпюра нормальной силы (рис. 33)

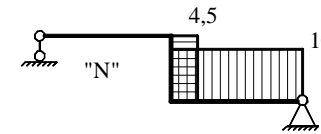


Рисунок 33. Эпюра нормальных сил N.

- 2.2) Эпюра поперечной силы (рис. 34)

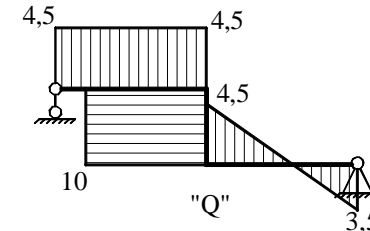


Рисунок 34. Эпюра поперечных сил Q.

- 2.3) Эпюра изгибающего момента

Составляем уравнения изгибающих моментов для каждого участка рамы.

AB

$$M_{AB} = R_A \cdot z_1$$

BC

$$M_{BC} = R_A \cdot a - F \cdot z_2$$

Найдем координату сечения, в котором эпюра изгибающего момента пересекает нулевую линию.

$$M_{BC} = R_A \cdot a - F \cdot z_2 = 0 \Rightarrow z_2^0 = \frac{R_A \cdot a}{F} = \frac{4,5 \cdot 2}{10} = 0,9 \text{ м}$$

CD

$$M_{CD} = R_D \cdot z_3 - q \frac{z_3^2}{2}$$

Найдем координату сечения, в котором эпюра изгибающего момента пересекает нулевую линию.

$$M_{CD} = R_D \cdot z_3 - q \frac{z_3^2}{2} = 0 \Rightarrow z_3^0 = \frac{2R_D}{q} = \frac{2 \cdot 3,5}{4} = 1,75 \text{ м}$$

Найдем координату сечения, в котором эпюра изгибающего момента имеет максимум. Для этого найдем производную от изгибающего момента и приравняв ее к нулю выразим z_{3max} .

$$M'_{CD} = R_D - q \cdot z_{3max} = 0 \Rightarrow z_{3max} = \frac{R_D}{q} = \frac{3,5}{4} = 0,875 \text{ м}$$

Найдем максимум изгибающего момента.

$$M_{CD}^{max} = R_D \cdot z_{3max} - q \frac{z_{3max}^2}{2} = 3,5 \cdot 0,875 - 4 \frac{0,875^2}{2} = 1,53 \text{ кНм}$$

Эпюра изгибающего момента показана на рис. 35.

Максимальный изгибающий момент возникает в т. B, его величина составляет $M_{max} = 9 \text{ кНм}$. Нормальная сила в этом сечении $N = 4,5 \text{ кН}$.

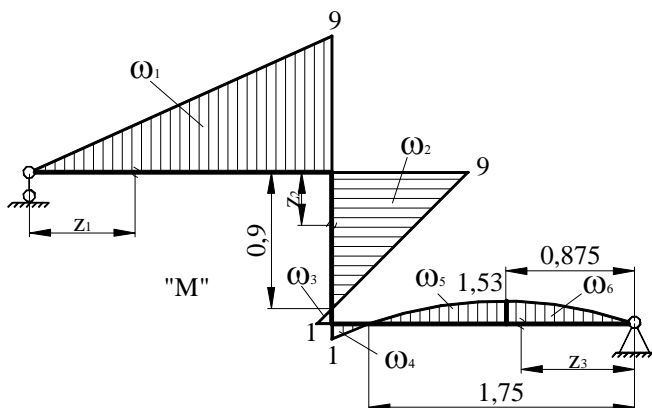


Рисунок 35. Эпюра изгибающих моментов M .

3) Подбираем поперечное сечение

Поперечное сечение подбираем из условия прочности на изгиб:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma] \Rightarrow W_x = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{9000}{120 \cdot 10^6} = 75 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 75 \text{ см}^3$$

По ГОСТ 8239 – 89 подбираем двутавр № 14: $W_x = 81,7 \text{ см}^3$, $I_x = 572 \text{ см}^4$.

4) Проверяем поперечное сечение по условию прочности

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_x}{W_x} = \frac{4500}{17,4 \cdot 10^{-4}} + \frac{9000}{81,7 \cdot 10^{-6}} = 112,7 \text{ МПа} < [\sigma]$$

Условие прочности выполняется.

5) Строим единичные эпюры

5.1) Эпюра от единичного момента

Определяем опорные реакции от действия единичного момента, схема рамы показана на рис. 36.

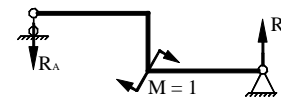


Рисунок 36.

$$\sum M_A = 0; \quad 2a \cdot R_D - M = 0$$

$$R_D = \frac{M}{2a} = \frac{1}{4};$$

$$\sum Y = 0; \quad -R_A + R_D = 0$$

$$R_A = R_D = \frac{1}{4}$$

Эпюра представлена на рис. 37.

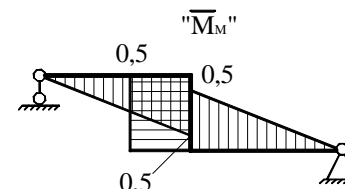


Рисунок 37. Эпюра изгибающих моментов от единичного момента.

5.2) Эпюра от единичной силы

Определяем опорные реакции от действия единичной силы, схема рамы показана на рис. 38.

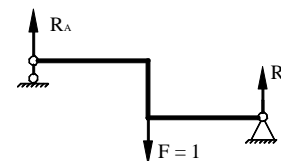


Рисунок 38.

$$R_A = R_D = \frac{F}{2} = 0,5$$

Эпора представлена на рис. 39.

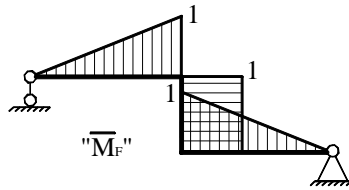


Рисунок 39. Эпора изгибающих моментов от единичной силы.

б) Определяем угол поворота т. С

Угол поворота определим по способу Верещагина, перемножив эпюры "M" и "M_F".

$$\delta = \frac{1}{EI} \left(\underbrace{-\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}}_{\omega_1} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 0,9 \cdot 0,5}_{\omega_2} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,1 \cdot 0,5}_{\omega_3} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 0,25 \cdot \frac{1}{4} \left(1,75 + \frac{3}{4} \cdot 0,25 \right)}_{\omega_4} \right) + \frac{2}{3} \cdot 1,53 \cdot (1,75 - 0,875) \cdot \frac{1}{4} \left(0,875 + \frac{3}{8} \cdot 0,875 \right) + \frac{2}{3} \cdot 1,53 \cdot 0,875 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot 0,875 = -\frac{4,65}{EI}$$

$$\varphi_C = -\frac{4,65 \cdot 10^3}{EI} = -\frac{4,65 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -4,06 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

7) Определяем вертикальное перемещение т. С

Перемещение определим, перемножив эпюры "M" и "M_F".

$$\delta = \frac{1}{EI} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 0,5}_{\omega_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 0,9 \cdot 1}_{\omega_2} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,1 \cdot 1}_{\omega_3} - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 0,25 \cdot 0,5 \left(1,75 + \frac{3}{4} \cdot 0,25 \right)}_{\omega_4} \right) + \frac{2}{3} \cdot 1,53 \cdot 0,875 \cdot 0,5 \left(0,875 + \frac{3}{8} \cdot 0,875 \right) + \frac{2}{3} \cdot 1,53 \cdot 0,875 \cdot 0,5 \cdot \frac{5}{8} \cdot 0,875 = \frac{10,71}{EI}$$

$$\Delta_C^B = \frac{10,71 \cdot 10^3}{EI} = \frac{10,71 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 9,36 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 9,36 \text{ мм}$$

Указания к задаче 10

Статически неопределимой системой тел называется такая конструкция, в которой число неизвестных реакций связей превышает число независимых уравнений равновесия статики.

Для расчета такой системы на прочность или на жесткость необходимо составить дополнительные уравнения, основанные на законе, не входящем в статику твердого тела.

Таким законом, как правило, является закон упругих деформаций (закон Гука).

Но прежде следует превратить статически неопределимую систему в статически определимую, устранив из нее лишние связи. Полученная в результате этих действий система называется основной системой.

Основная система нагруженная всеми внешними заданными нагрузками и неизвестными силовыми факторами (реакциями связей), называется эквивалентной (заданной статически неопределимой системой).

Устранение каких-либо связей не изменяет внутренних усилий, возникающих в системе, и ее деформаций, если к ней прикладываются дополнительные силы и моменты, представляющие собой реакции отброшенных связей. Поэтому, если к основной системе, кроме заданной нагрузки, приложить реакции устраненных связей, то ее деформации и возникающие в ней внутренние усилия будут такими же, как и в заданной системе, т.е. обе эти системы станут совершенно эквивалентными.

В заданной системе в направлениях имеющихся связей (в том числе и тех, которые отброшены при переходе к основной системе) перемещений быть не может. Они равны нулю. Следовательно, реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения по их направлениям равнялись бы нулю.

Условие равенства нулю перемещения по направлению любой из отброшенных связей, например X₁, на основании принципа независимости действие сил может быть записано в следующем виде:

$$\Delta i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in} + \Delta_{ip} = 0$$

Первый из каждого двойного индекса при Δ означает направление перемещения (и одновременно номер отброшенной связи), второй дает указание на причину, вызвавшую перемещение. Таким образом, слагаемое Δ_{ik} представляет собой перемещение по направлению реакции связи i вызванное действием реакции связи k. Слагаемое Δ_{ip} означает перемещение по направлению реакции связи i, вызванное действием заданной нагрузки.

Уравнение перемещений удобнее всего составить, воспользовавшись методом сил.

Перемещение вызываемое любой лишней неизвестной, можно представить как произведение перемещения δ от единичной силы, действующей по направлению этой неизвестной.

Обозначив величину реакции связи K через X_k и выразив перемещение Δ_{ik} через единичные перемещения с помощью равенства $\Delta_{ik} = X_k \delta_{ik}$, запишем уравнение перемещения в следующем виде:

$$\Delta_i = X_1 \delta_{i1} + X_2 \delta_{i2} + \dots + X_n \delta_{in} + \Delta_{ip} = 0$$

Таким образом, условие эквивалентности основной и заданной систем математически сводится к удовлетворению следующей системы n линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots + X_n \delta_{1n} + \Delta_{1p} &= 0 \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \dots + X_n \delta_{2n} + \Delta_{2p} &= 0 \\ \dots \\ X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + \dots + X_n \delta_{nn} + \Delta_{np} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения, называемые каноническими уравнениями метода сил и, являются теми дополнительными уравнениями деформаций (перемещений), которые позволяют раскрыть статическую неопределимость заданной системы. Первое из них выражает мысль о равенстве нулю перемещения в основной системе по направлению первой отброшенной связи (по направлению усилия X_1), второе – по направлению второй отброшенной связи (X_2) и т.д. Число этих уравнений равно числу отброшенных связей, т.е. равно системе статической неопределимости заданной системы.

Коэффициенты $\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{nn}$ и свободные члены $\Delta_{1p}, \Delta_{2p}, \dots, \Delta_{np}$ уравнений перемещений при изгибе определяются интегрированием

$$\Delta_{ip} = \sum_{\ell} \int \frac{M_i \times M_p \times dx}{EI}$$

Причем решение такого интеграла может быть выполнено или непосредственным интегрированием, или перемножением эпюр. Общий порядок расчета любой статически неопределимой системы следующий:

- 1) устанавливаются неизвестные опорные реакции и показываются на схеме;
- 2) составляются для заданной системы уравнения статики и устанавливается степень ее статической неопределимости. Определяются из уравнений статики, какие возможно, неизвестные;
- 3) выбираются лишние неизвестные, и изображается эквивалентная система;
- 4) записываются уравнения перемещений для данного случая;
- 5) загружают основную систему только заданной нагрузкой, составляют аналитические выражения моментов по участкам и строят эпюры;
- 6) принимают лишнюю неизвестную $X_1=1$, изображают основную систему и, загрузив ее только этой единичной силой, составляют аналитические вы-

ражения моментов по участкам и по ним строят эпюры. Аналогично поступают и со всеми остальными лишними неизвестными;

7) определяют коэффициенты и свободные члены уравнений перемещений непосредственным интегрированием или перемножением эпюр и, решив эти уравнения перемещений, определяют лишние неизвестные;

8) изображают эквивалентную систему и, загрузив основную систему заданной нагрузкой и всеми найденными лишними неизвестными, поступают как при обычной статически определяемой системе (определяют реакции, строят эпюры всех действующих силовых факторов и проверяют прочность и жесткость элементов конструкции или соответственно подбирают их сечения).

Окончательная эпюра изгибающих моментов может быть построена и на основании принципа независимости действия сил и уже имеющихся эпюр от заданной нагрузки и единичных силовых факторов.

Для подсчета коэффициентов δ рекомендуется вычертить единичные эпюры \bar{M} изгибающих моментов в основной системе (т.е. эпюры от действия каждого неизвестного $X = 1$), снабдив каждую неизвестную из них номером соответствующего неизвестного. Отдельно вычерчивают грузовую эпюру M_p . Единичное перемещение δ_{ik} вычисляется умножением эпюры \bar{M}_i на эпюру \bar{M}_k , а грузовое перемещение Δ_{ip} - умножением эпюры \bar{M}_i на грузовую эпюру M_p .

После вычисления коэффициентов при неизвестных в уравнениях перемещений и свободных (грузовых) членов, определяют значения неизвестных, решая эти уравнения. Затем строят для основной системы эпюры изгибающих моментов от каждого из найденных усилий X_1, X_2, \dots, X_n .

Для этого могут быть использованы построенные ранее единичные эпюры, ординаты которых необходимо теперь умножить на найденные значения соответствующих неизвестных.

Просуммировав по характерным точкам (на протяжении всей рассчитываемой конструкции) ординаты эпюр от действия всех сил X с ординатами грузовой эпюры, получают окончательную (суммарную) эпюру изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе.

Расчет статически неопределимых конструкций на практике осуществляется на ЭВМ. Для этого имеется множество программ.

Поясним изложенное примером.

ПРИМЕР 15: Стойки и ригель стальной рамы (рис.40) выполнены из одинаковых стержней двутаврового профиля. Размер $l = 5$ м, интенсивность распределенной нагрузки $q = 10$ кН/м, допусаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа. Подобрать профиль двутавра по условию прочности.

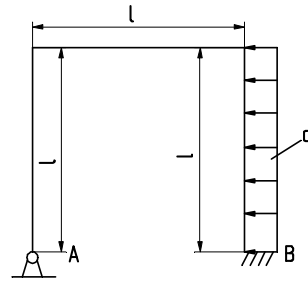


Рисунок 40. К примеру 15.

Решение:

Степень статической неопределенности

$$m = 5 - 3 = 2$$

Основную систему (рис.41) получим, убрав «лишнюю» шарнирно-неподвижную опору А.

Каноническое уравнение для заданной рамы имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1q} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2q} = 0 \end{cases}$$

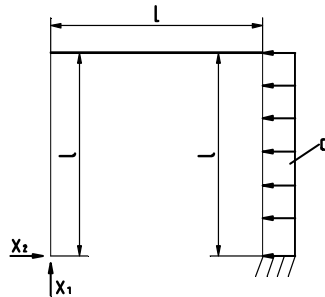


Рисунок 41. Основная система.

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений определяем по способу Верещагина (перемножение эпюр). Для этого построим две единичные (рис.42 и 43) и грузовую (рис.44) эпюры моментов.

Коэффициенты при неизвестных $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}$ и грузовые коэффициенты Δ_{1q}, Δ_{2q} определяются способом Верещагина (рис.42; 43; 44) перемножая эпюру \bar{M}_1 саму на себя

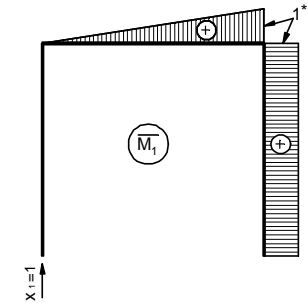


Рисунок 42. Единичная эпюра моментов от $X_1=1$.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \times \left(\frac{1}{2} l \times l \times \frac{2}{3} l + l \times l \times l \right) = \frac{4l^3}{3EI_x};$$

перемножая эпюры \bar{M}_1 на \bar{M}_2

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI_x} \times \left(\frac{1}{2} l \times l \times (-l) + l \times l \times \left(-\frac{l}{2} \right) \right) = -\frac{l^3}{EI_x};$$

перемножая эпюры \bar{M}_1 на M_q

$$\Delta_{1q} = \frac{1}{EI_x} \times \left(-\frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} \times l \times l \right) = -\frac{ql^4}{6EI_x};$$

перемножая эпюры \bar{M}_2 на \bar{M}_1

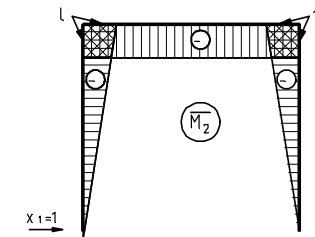


Рисунок 43. Единичная эпюра моментов от $X_2=1$.

$$\delta_{21} = \frac{1}{EI_x} \times \left(\frac{1}{2} l \times l \times (-l) + l \times l \times \left(-\frac{l}{2} \right) \right) = -\frac{l^3}{EI_x};$$

перемножая эпюру \bar{M}_2 саму на себя

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_x} \times \left(\frac{1}{2} l \times l \times \frac{2}{3} l + l \times l \times l + \frac{1}{2} l \times l \times \frac{2}{3} l \right) = \frac{5l^3}{3EI_x}.$$

перемножая эпюры \overline{M}_2 на M_q

$$\Delta_{2q} = \frac{1}{EI_x} \times \frac{1}{3} \times \frac{q\ell^2}{2} \times \ell \times \frac{\ell}{4} = \frac{q\ell^4}{24EI_x}$$

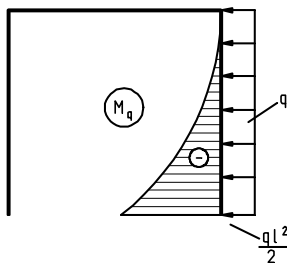


Рисунок 44. Грузовая эпюра моментов от распределенной нагрузки q .

Подставляем найденные значения коэффициентов и грузовых перемещений в канонические уравнения, получаем расчетные уравнения:

$$\begin{cases} \frac{4\ell^3}{3EI_x} X_1 - \frac{\ell^3}{EI_x} X_2 - \frac{q\ell^4}{6EI_x} = 0 \\ -\frac{\ell^3}{EI_x} X_1 + \frac{5\ell^3}{3EI_x} X_2 + \frac{q\ell^4}{24EI_x} = 0 \end{cases}$$

Решая эти уравнения, находим значения X_1 и X_2 .

Для упрощения расчетов сократим все члены канонических уравнений на

EI_x

$$\begin{cases} \frac{4\ell^3}{3} X_1 - \ell^3 X_2 - \frac{q\ell^4}{6} = 0 \\ -\ell^3 X_1 + \frac{5\ell^3}{3} X_2 + \frac{q\ell^4}{24} = 0 \end{cases}$$

Контрольное уравнение (сумма двух):

$$\frac{\ell^3}{3} X_1 + \frac{2\ell^3}{3} X_2 - \frac{q\ell^4}{8} = 0$$

Выражаем X_2 через X_1 из 1-ого уравнения:

$$X_2 = \frac{4}{3} X_1 - \frac{q\ell}{6}$$

Подставляем во второе;

$$-\ell^3 X_1 + \frac{5\ell^3}{3} \times \left(\frac{4}{3} X_1 - \frac{q\ell}{6} \right) + \frac{q\ell^4}{24} = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{17}{88} q\ell \approx 9,66 \text{ кН}$$

Подставляя в контрольное уравнение, получим X_2

$$\frac{\ell^3}{3} \times \frac{17q\ell}{88} + \frac{2\ell^3}{3} X_2 - \frac{q\ell^4}{8} = 0 \Rightarrow X_2 = \frac{q\ell}{11} \approx 4,55 \text{ кН}$$

Подставляя полученные значения X_1 и X_2 , как значения неизвестных реакций, в основную систему (рис.41), построим эпюры Q , N и M_x для основной системы (рис.45; 46; 47).

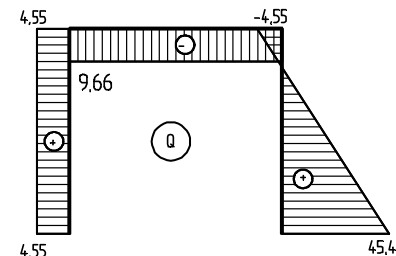


Рисунок 45. Эпюра поперечных сил Q , кН

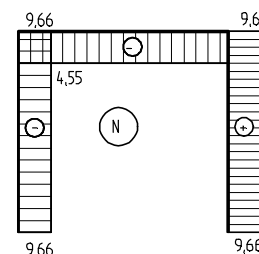


Рисунок 46. Эпюра продольных сил N , кН.

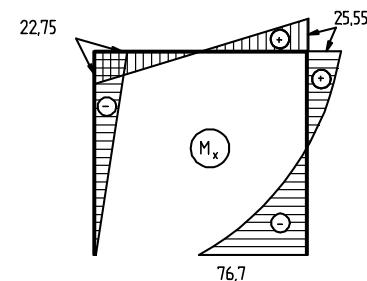


Рисунок 47. Эпюра изгибающих моментов M_x , кН·м

Опасное сечение в защемлении

$$N_{\max} = 9,66 \text{ кН}; Q_{\max} = 45,45 \text{ кН}; |M_{x\max}| = 76,7 \text{ кН·м}$$

Условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} + \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

Для прикидки принимаем (по пониженному допускаемому напряжению)

$$W_x > \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{76,7 \times 10^3}{150 \times 10^6} \approx 511 \times 10^{-6} \text{ м}^3 = 511 \text{ см}^3.$$

Для двутавра №30а (ГОСТ 8239-89): $W_x = 518 \text{ см}^3$, $A = 49,9 \text{ см}^2$,

$$\sigma_{\max} = \frac{9,66 \times 10^3}{49,9 \times 10^{-4}} + \frac{76,7 \times 10^3}{518 \times 10^{-6}} \approx 150 \times 10^6 \text{ Па} [\sigma]$$

Проверяем прочность двутавровой рамы №30а по эквивалентным напряжениям в точке поперечного сечения стенки в месте примыкания ее к полке (точка в)

$$\sigma_B = \frac{M}{I_x} Y_B = \frac{76,7 \times 10^3}{7788 \times 10^{-8}} \times 139,3 \times 10^{-3} = 137,3 \times 10^6 \text{ Па},$$

$$\tau_B = \frac{Q \times S_x}{I_x \times s} = \frac{45,45 \times 10^3 \times 292 \times 10^{-6}}{7780 \times 10^{-8} \times 6,5 \times 10^{-3}} = 26,2 \times 10^6 \text{ Па}.$$

Выполняем проверку прочности рамы в точке в по третьей гипотезе прочности, сложив нормальные напряжения в этой точке от изгиба и растяжения – сжатия

$$\sigma_p = \frac{N}{A} = \frac{9,66 \times 10^3}{49,9 \times 10^{-4}} = 1,9 \times 10^6 \text{ Па} (1,9 \text{ МПа})$$

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_b + \sigma_p = 137,3 + 1,9 = 139,2 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\sigma_{\Sigma}^2 + 4\tau_b^2} = \sqrt{139,2^2 + 4 \times 26,2^2} \approx 149 \text{ МПа}, [\sigma].$$

Окончательно принимаем двутавр №30а.

Указания к задаче 11

Под ударом понимается взаимодействие двух движущихся тел в результате их соприкосновения, связанное с резким изменением скоростей этих тел, за весьма малый промежуток времени. При ударе нагрузки и напряжения резко возрастают $\sigma_{y\delta} \gg \sigma_{ст}$. Теория удара опирается на некоторые допущения: форма изогнутой оси балки при ударе подобна изогнутой оси балки при статическом ее нагружении; считают, что удар является неупругим, то есть ударяющее тело не отскакивает от конструкции, а продолжает двигаться вместе с ней; считают, что деформации, вызванные ударом, являются упругими, то есть $\sigma_{\max y\delta} < \sigma_{ли}$; массой балки пренебрегают, то есть считают балку невесомой. При расчетах на удар определяют максимальные напряжения и максимальные деформации по формулам:

$$\sigma_{y\delta} = k_{y\delta} \sigma_{ст}, \quad \Delta_{y\delta} = k_{y\delta} \Delta_{ст},$$

где $\sigma_{y\delta}$, $\sigma_{ст}$ – напряжения при ударном и статическом нагружении;

$k_{y\delta}$ – ударный коэффициент;

$\Delta_{y\delta}$, $\Delta_{ст}$ – прогибы при ударном и статическом нагружении.

Ударный коэффициент определяется по формуле:

$$k_{y\delta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}},$$

где h – высота падения груза.

ПРИМЕР 16: Для схемы, показанной на рис. 48, определить максимальные ударные напряжения и максимальный прогиб, если масса падающего груза $m = 50$ кг, высота падения $h = 40$ мм, сечение балки – двутавр № 14: $W_x = 81,7 \text{ см}^3$, $I_x = 572 \text{ см}^4$, материал балки – сталь.

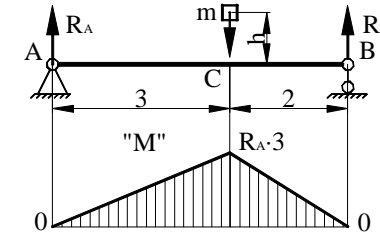


Рисунок 48. К примеру 16.

Решение:

1) Определяем опорные реакции

$$\sum M_A = 0; \quad -3F + 5R_B = 0$$

$$R_B = \frac{3F}{5} = \frac{3 \cdot 500}{5} = 300 \text{ Н}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -5R_A + 2F = 0$$

$$R_A = \frac{2F}{5} = \frac{2 \cdot 500}{5} = 200 \text{ Н}$$

Проверка

$$\sum Y = 0; \quad R_A - F + R_B = 0$$

$$200 - 500 + 300 = 0 \text{ – верно}$$

2) Определяем статический прогиб балки

Прогиб балки определим по методу начальных параметров.

2.1) Составляем уравнение прогибов для точки C

$$EIy_C = EIy_A + EI\varphi_A z_C + R_A \frac{(z_C - l_{R_A})^3}{6}$$

2.2) Определяем начальные параметры

$EIy_A = 0$. Для нахождения $EI\varphi_A$ составим уравнение прогибов для точки

В, приравняв его к нулю, найдем искомую величину.

$$EIy_B = EIy_A + EI\varphi_A z_B + R_A \frac{(z_B - l_{R_A})^3}{6} - F \frac{(z_B - l_F)^3}{6} = 0$$

$$EI\varphi_A = \frac{-EIy_A - R_A \frac{(z_B - l_{R_A})^3}{6} + F \frac{(z_B - l_F)^3}{6}}{z_B} = \frac{0 - 200 \frac{(5-0)^3}{6} + 500 \frac{(5-3)^3}{6}}{5} = -700$$

2.3) Находим прогиб в точке C

$$EIy_C = 0 - 700 \cdot 3 + 200 \frac{(3-0)^3}{6} = -1200$$

$$\Delta_{CT} = \frac{EIy_C}{EI} = \frac{1200}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,05 \text{ мм}$$

3) Определяем ударный коэффициент

$$k_{yo} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 40}{1,05}} = 9,79$$

4) Определяем напряжения в балке от статического действия нагрузки
Изгибающий момент будет иметь максимальное значение в точке C, а его величина определится по формуле (рис. 48):

$$M = R_A \cdot 3 = 200 \cdot 3 = 600 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Тогда напряжения в точке C:

$$\sigma = \frac{M}{W_x} = \frac{600}{81,7 \cdot 10^{-6}} = 7,3 \text{ МПа}$$

5) Определяем динамический прогиб и напряжения

$$\Delta_{yo} = k_{yo} \Delta_{cm} = 9,79 \cdot 1,05 = 10,3 \text{ мм}$$

$$\sigma_{yo} = k_{yo} \sigma_{cm} = 9,79 \cdot 7,3 = 71,5 \text{ МПа}$$

Указания к задаче 12

Если упругую балку вывести из положения равновесия, а затем резко снять нагрузку, то под действием сил упругости, балка начнет совершать колебания из крайнего нижнего в крайнее верхнее положение (рис. 49). Такие колебания называются свободными колебаниями. Если же колебания системы вызываются действием периодической внешней силы, то такие колебания называются вынужденными.

Балку, к которой прикреплен груз, намного превышающий вес самой

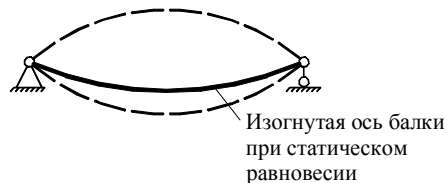


Рисунок 49.



Рисунок 50.

балки, можно рассматривать как невесомую, пренебрегая ее собственным весом (рис. 50). В балке, показанной на рис. 50, положение любого поперечного сечения в любой момент времени можно определить, зная положение хотя бы одного поперечного сечения в начальный момент времени. Такая балка представляет собой систему с одной степенью свободы.

Уравнение свободных (собственных) колебаний системы с одной степенью свободы записывается следующим образом:

$$\Delta = a \cdot \sin(\omega t + \beta),$$

где Δ – прогиб балки под грузом;

a – амплитуда свободных колебаний;

ω – частота свободных колебаний системы, совершаемых за 2π сек;

t – время;

β – начальная фаза колебаний.

Частота свободных колебаний системы определяется по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{G \cdot \delta}},$$

где g – ускорение свободного падения;

G – вес груза;

δ – перемещение от единичной силы.

Промежуток времени, за который система совершает одно свободное колебание, называется периодом свободных колебаний, который определяется по формуле:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{G\delta}{g}}.$$

Если на балку действует внешняя сила, изменяющаяся по закону $F(t) = F \cdot \cos \varphi t$, то система совершает вынужденные колебания, уравнение которых записывается в виде:

$$\Delta = a \cdot \sin(\omega t + \beta) + \frac{gF}{G(\omega^2 - \varphi^2)} \cos \varphi t,$$

где φ – круговая частота возмущающей силы.

Амплитуда вынужденных колебаний системы определяется по формуле:

$$a_s = \Delta_{CT}^F k_\delta,$$

где Δ_{CT}^F – статический прогиб балки под действием возмущающей силы;

k_δ – динамический коэффициент.

Статический прогиб балки от действия возмущающей силы определяется

по формуле:

$$\Delta_{CT}^F = F\delta.$$

Динамический коэффициент определяется по формуле:

$$k_\delta = \frac{1}{1 - \frac{\varphi^2}{\omega^2}}.$$

Динамические напряжения, вызванные периодической возмущающей силой, определяются по формуле:

$$\sigma_\delta^F = \sigma_{CT}^F k_\delta,$$

где σ_{CT}^F – напряжения, вызванные статическим действием силы F .

ПРИМЕР 17: На стальной балке, показанной на рис.51, установлен электродвигатель весом $G = 20$ кН, совершающий $n = 500$ об/мин. Центробежная сила, возникающая вследствие неуравновешенности частей двигателя составляет $F = 0,2G$. Подобрать двутавровое поперечное сечение балки из условия отстройки от резонанса $\omega = 1,4\varphi$, определить максимальный прогиб и максимальные напряжения. Собственный вес балки не учитывается $l = 1$ м.

1) Находим частоту вынужденных колебаний.

$$\varphi = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 500}{30} = 52,36 \text{ c}^{-1}$$

2) Определяем частоту свободных колебаний из условия отстройки от резонанса.

$$\omega = 1,4\varphi = 1,4 \cdot 52,36 = 73,30 \text{ c}^{-1}$$

3) Определяем прогиб от единичной силы по способу Верещагина

Эпюра момента от действия единичной силы показана на рис. 51. Для нахождения прогиба перемножаем эту эпюру саму на себя.

$$\delta = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot l \cdot 3l \cdot \frac{2}{3} \cdot 3l \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot l \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l \cdot \frac{3}{5} \right) = \frac{60l^3}{25EI} = \frac{2,4l^3}{EI}$$

4) Подбираем поперечное сечение

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{G \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{gEI}{2,4l^3 G}} \Rightarrow I = \frac{2,4l^3 G \omega^2}{Eg} = \frac{2,4 \cdot 1^3 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 73,3^2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 9,81} = 1,314 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$$

По ГОСТ 8239 – 89 подбираем двутавр № 36: $I_X = 13380 \text{ см}^4$, $W_X = 743 \text{ см}^3$.

5) Определяем частоту свободных колебаний системы

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{G \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{gEI}{2,4l^3 G}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}}{2,4 \cdot 1^3 \cdot 20 \cdot 10^3}} = 73,95 \text{ c}^{-1}$$

6) Определяем динамический коэффициент

$$k_\delta = \frac{1}{1 - \frac{\varphi^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \frac{52,36^2}{73,95^2}} = 3,43$$

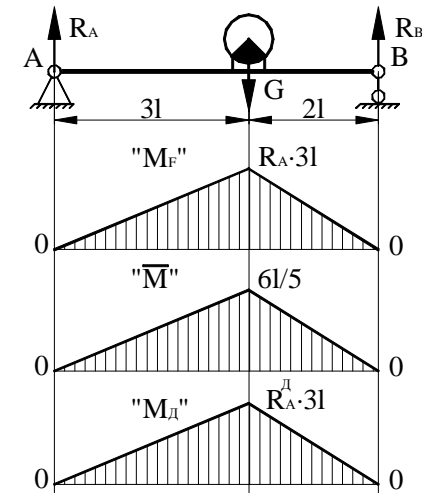


Рисунок 51. К примеру 16.

7) Определяем наибольшие напряжения в балке

7.1) Определяем напряжения от веса двигателя

$$\sigma = \frac{M_{Fmax}}{W_X} = \frac{R_A \cdot 3l}{W_X} = \frac{2G \cdot 3l}{5 \cdot W_X} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 1}{5 \cdot 743 \cdot 10^{-6}} = 32,3 \text{ МПа}$$

7.2) Определяем напряжения от статического действия центробежной силы

Так как $F = 0,2G$, то статические напряжения от F найдем по формуле:

$$\sigma_{CT}^F = 0,2\sigma = 0,2 \cdot 32,3 = 6,46 \text{ МПа}$$

7.3) Определяем динамические напряжения от центробежной силы

$$\sigma_\delta^F = \sigma_{CT}^F k_\delta = 6,46 \cdot 3,43 = 22,2 \text{ МПа}$$

7.4) Определяем полные напряжения

$$\sigma_{II} = \sigma + \sigma_\delta^F = 32,3 + 22,2 = 54,5 \text{ МПа}$$

8) Определяем наибольший прогиб балки

8.1) Определяем статический прогиб от действия центробежной силы

$$\Delta_{CT}^F = F\delta = \frac{2,4 \cdot 0,2G l^3}{EI} = \frac{2,4 \cdot 0,2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 1^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 3,58 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

8.2) Определяем динамический прогиб от действия центробежной силы

$$a_\delta = \Delta_{CT}^F k_\delta = 3,58 \cdot 10^{-4} \cdot 3,43 = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

8.3) Определяем статический прогиб балки от веса двигателя

$$\Delta_{CT} = G\delta = \frac{2,4Gl^3}{EI} = \frac{2,4 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 1^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 1,79 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

8.4) Определяем полный прогиб

$$\Delta_{max} = \Delta_{CT} + a_\delta = (1,79 + 1,23) \cdot 10^{-3} = 3,02 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Выполняя контрольную работу, необходимо соблюдать следующие требования:

- 1) контрольная работа выполняется в ученической тетради синими чернилами, четким почерком с полями в 4 см для возможных замечаний рецензента;
- 2) на обложке тетради указать фамилию, имя, отчество, шифр, наименование предмета, номер контрольной работы, почтовый адрес с индексом отделения связи;
- 3) данные из таблиц для выполнения контрольной работы нужно брать в соответствии с личным шифром студента и первыми пятью буквами русского алфавита, которые следует расположить под шифром. Например, Ваш шифр 12345, тогда

| | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|
| шифр | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| буквы | а | б | в | г | д |

К каждой задаче контрольной работы дается таблица с исходными данными. Вертикальные столбцы этой таблицы обозначены буквами, а крайний левый столбец обозначает номер строки. Из каждого вертикального столбца таблицы (обозначен буквой) необходимо взять только одно значение, стоящее в горизонтальной строке, номер которой соответствует цифре вашего шифра, стоящей над буквой.

- 4) перед решением каждой задачи надо выписать ее условия с числовыми данными, а также выполнить соответствующий чертеж с указанием всех необходимых размеров и величин;
- 5) решение должно сопровождаться краткими последовательными и грамотными пояснениями, с указанием размерности всех получаемых величин;
- 6) вычисления должны производиться с точностью до трех значащих цифр;
- 7) каждую задачу необходимо решать с новой страницы;
- 8) по получении проверенной контрольной работы студент должен исправить в ней все ошибки, сохраняя предыдущие неверные записи.

ЗАДАЧА 1: Для схемы, показанной на рисунке (табл. 2) необходимо:

- 1) Вычертить ее в произвольном масштабе.
- 2) Для произвольного поперечного сечения стержня записать уравнения внутренних силовых факторов.
- 3) Построить эпюры внутренних силовых факторов.

Таблица 1

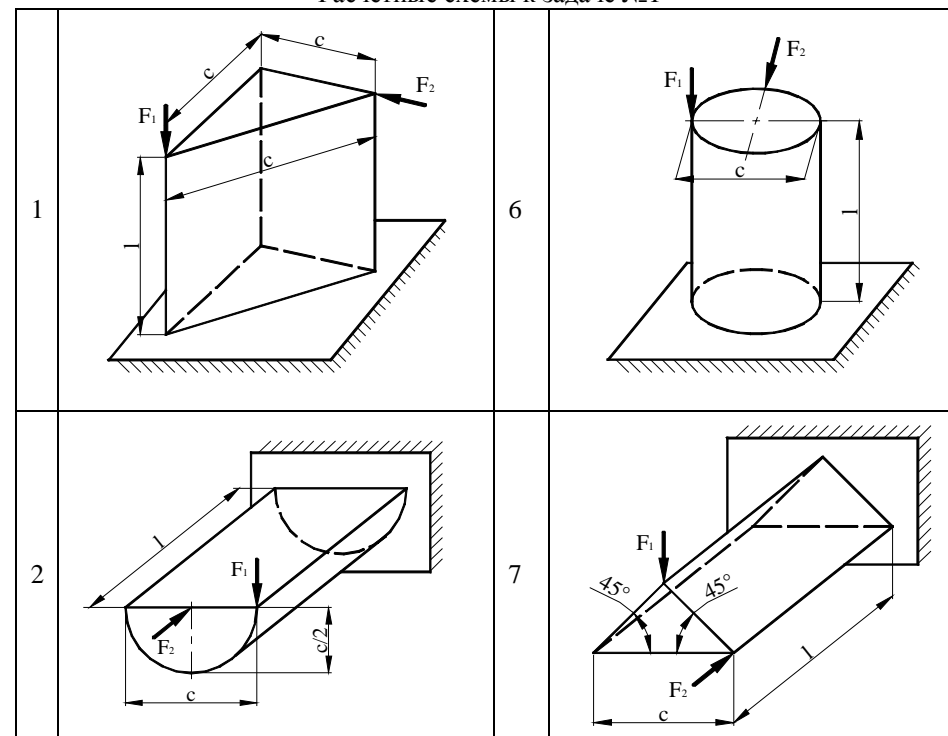
Исходные данные к задаче № 1

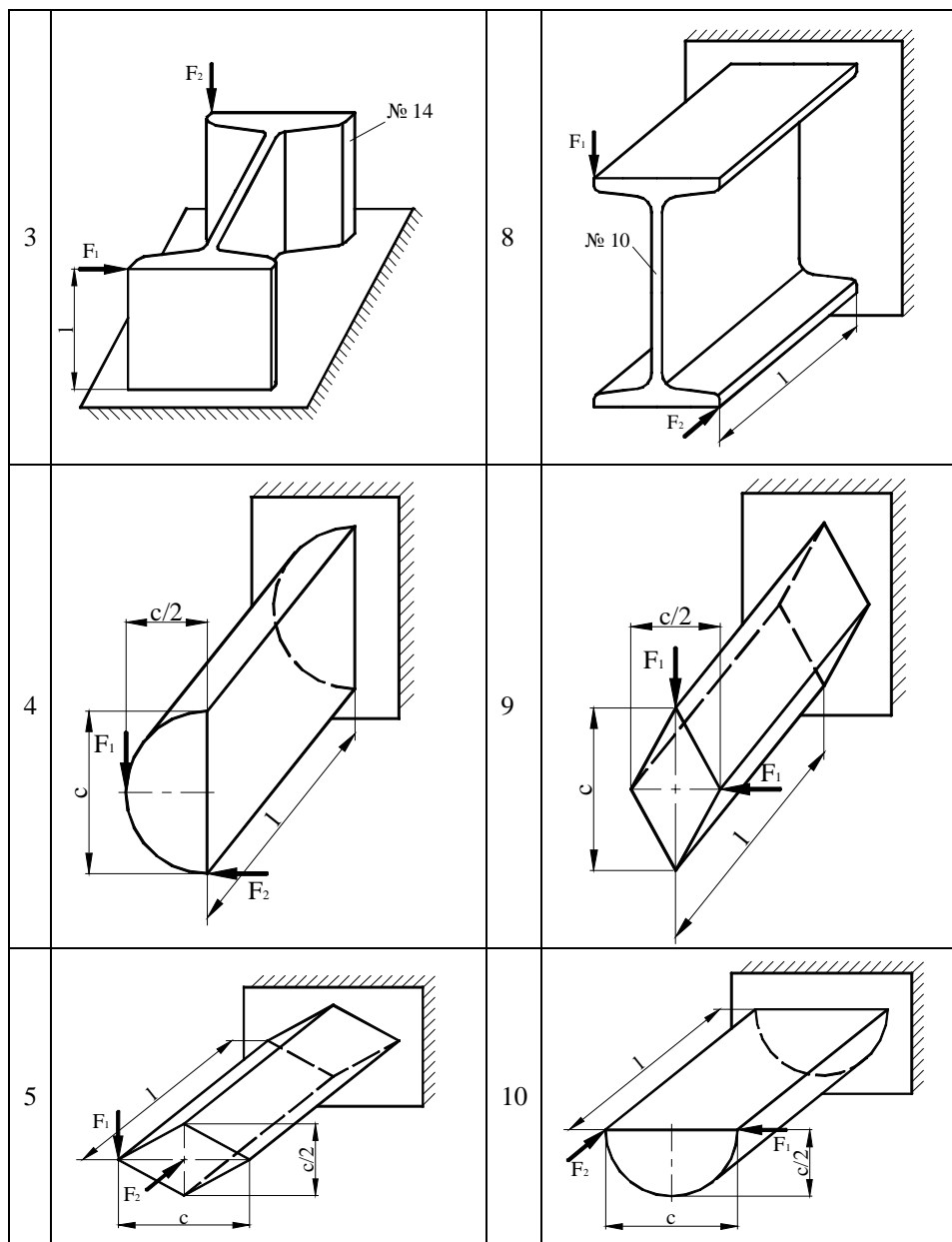
| № п/п | l, м | c, м | F ₁ , кН | F ₂ , кН | номер схемы |
|-------|------|------|---------------------|---------------------|-------------|
| 1 | 1,1 | 0,2 | 10 | 25 | 1 |

| № п/п | l, м | c, м | F ₁ , кН | F ₂ , кН | номер схемы |
|-------|------|------|---------------------|---------------------|-------------|
| 2 | 1,2 | 0,3 | 15 | 30 | 2 |
| 3 | 1,3 | 0,4 | 20 | 15 | 3 |
| 4 | 1,4 | 0,5 | 25 | 20 | 4 |
| 5 | 1,5 | 0,6 | 30 | 25 | 5 |
| 6 | 1,6 | 0,7 | 10 | 15 | 6 |
| 7 | 1,7 | 0,8 | 15 | 20 | 7 |
| 8 | 1,8 | 0,9 | 20 | 30 | 8 |
| 9 | 1,9 | 0,4 | 25 | 10 | 9 |
| 0 | 2,0 | 0,7 | 30 | 20 | 10 |
| | а | б | в | г | д |

Таблица 2

Расчетные схемы к задаче №1





ЗАДАЧА 2: Для вертикального стержня, имеющего жесткую заделку на одном из концов, изображенного на рисунке (табл. 4) необходимо:

- 1) Вычертить схему в произвольном масштабе.
- 2) Определить значения нормальной силы на каждом участке стержня.
- 3) Построить эпюру нормальной силы.
- 4) Определить удлинение стержня.

Длины участков стержня и нагрузки, приложенные к нему, приведены в табл. 3, площадь поперечного сечения узкого участка $S = 0,2 \text{ м}^2$, широкого участка $2S$.

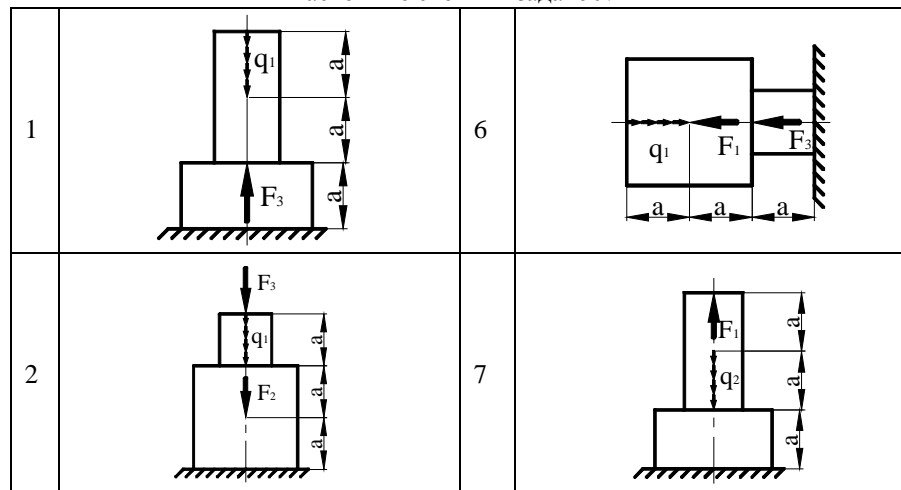
Таблица 3

Исходные данные к задаче № 2

| № п/п | a, м | $q_1=q_3$, кН/м | q_2 , кН/м | F_1 , кН | F_2 , кН | F_3 , кН | номер схемы |
|-------|------|------------------|--------------|------------|------------|------------|-------------|
| 1 | 0,8 | 5 | 30 | 10 | 35 | 10 | 1 |
| 2 | 1 | 10 | 25 | 15 | 30 | 20 | 2 |
| 3 | 1,2 | 15 | 20 | 20 | 25 | 30 | 3 |
| 4 | 1,4 | 20 | 15 | 25 | 20 | 40 | 4 |
| 5 | 1,6 | 25 | 10 | 30 | 15 | 10 | 5 |
| 6 | 1,8 | 30 | 5 | 35 | 10 | 20 | 6 |
| 7 | 2 | 5 | 30 | 40 | 5 | 30 | 7 |
| 8 | 0,8 | 10 | 25 | 10 | 35 | 40 | 8 |
| 9 | 1 | 15 | 20 | 15 | 30 | 10 | 9 |
| 0 | 1,2 | 20 | 15 | 20 | 25 | 20 | 10 |
| | a | д | в | г | б | в | д |

Таблица 4

Расчетные схемы к задаче №2



| | | | |
|---|--|----|--|
| 3 | | 8 | |
| 4 | | 9 | |
| 5 | | 10 | |

ЗАДАЧА 3: Жесткий брус, шарнирно закрепленный одним концом и подкрепленный двумя упругими стержнями, нагружен известной силой (табл. 6). Для заданной конструкции требуется:

- 1) Вычертить ее схему в произвольном масштабе.
- 2) Рассчитать безопасные размеры стержней и подобрать в таблицах ГОСТа необходимые размеры равнополочных или неравнополочных уголков.
- 3) Рассчитать напряжения в стержнях, допустив, что один из них изготовлен на величину Δ короче, то есть, найти монтажные напряжения.
- 4) Рассчитать напряжения в стержнях, возникающие от изменения температуры.
- 5) Найти суммарные напряжения в стержнях от внешней силы, от неточности монтажа, от изменения температуры.
- 6) Подсчитать недонапряжение или перенапряжение стержней.

Примечание: принять модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент линейного расширения $\alpha = 125 \cdot 10^{-7} 1/^\circ\text{C}$.

Числовые данные взять из таблицы 5.

Таблица 5

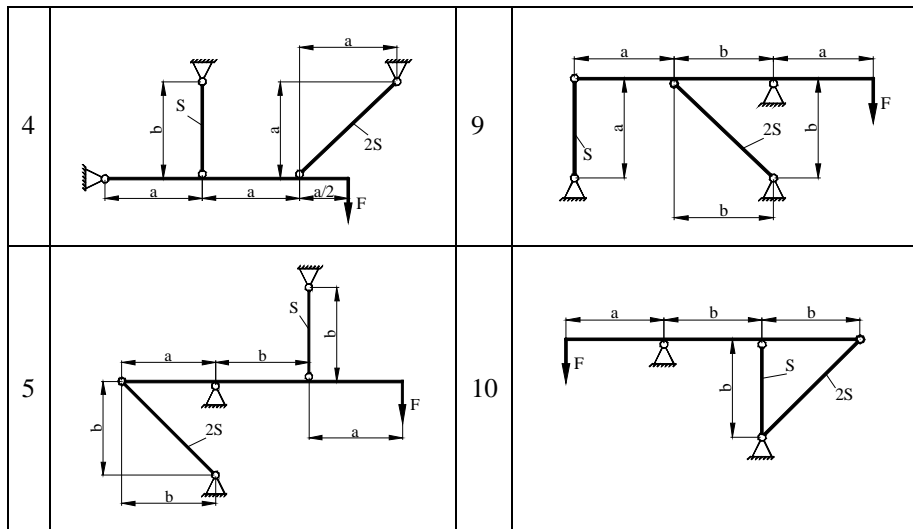
Исходные данные к задаче № 3

| № п/п | a, м | b, м | F, кН | Δ , мм | Δt , $^\circ\text{C}$ | $[\sigma]$, МПа | номер схемы |
|-------|------|------|-------|---------------|-------------------------------|------------------|-------------|
| 1 | 1,5 | 1,7 | 60 | 0,2 | 20 | 90 | 1 |
| 2 | 1,4 | 1,6 | 65 | 0,3 | 30 | 100 | 2 |
| 3 | 1,3 | 1,5 | 70 | 0,4 | 40 | 110 | 3 |
| 4 | 1,2 | 1,4 | 75 | 0,2 | 25 | 120 | 4 |
| 5 | 1,0 | 1,3 | 80 | 0,1 | 35 | 140 | 5 |
| 6 | 0,9 | 1,2 | 85 | 0,4 | 20 | 90 | 6 |
| 7 | 0,8 | 1,1 | 90 | 0,2 | 25 | 100 | 7 |
| 8 | 1,2 | 1,0 | 60 | 0,3 | 30 | 120 | 8 |
| 9 | 1,4 | 0,8 | 80 | 0,4 | 35 | 140 | 9 |
| 0 | 1,3 | 1,0 | 100 | 0,5 | 40 | 120 | 10 |
| | a | b | в | г | д | а | д |

Таблица 6

Расчетные схемы к задаче № 3

| | | | |
|---|--|---|--|
| 1 | | 6 | |
| 2 | | 7 | |
| 3 | | 8 | |



ЗАДАЧА 4: Для заданной расчетной схемы (табл. 8) необходимо:

- 1) Вычертить расчетную схему вала в произвольном масштабе.
- 2) Построить эпюру крутящих моментов.
- 3) Из условия прочности определить размеры поперечного сечения вала, приняв сечение вала круглым, кольцевым, прямоугольным.
- 4) Построить эпюру углов закручивания для круглого вала, приняв жесткость сечения постоянной.
- 5) Сравнить веса валов.

Числовые данные взять из таблицы 7.

Таблица 7

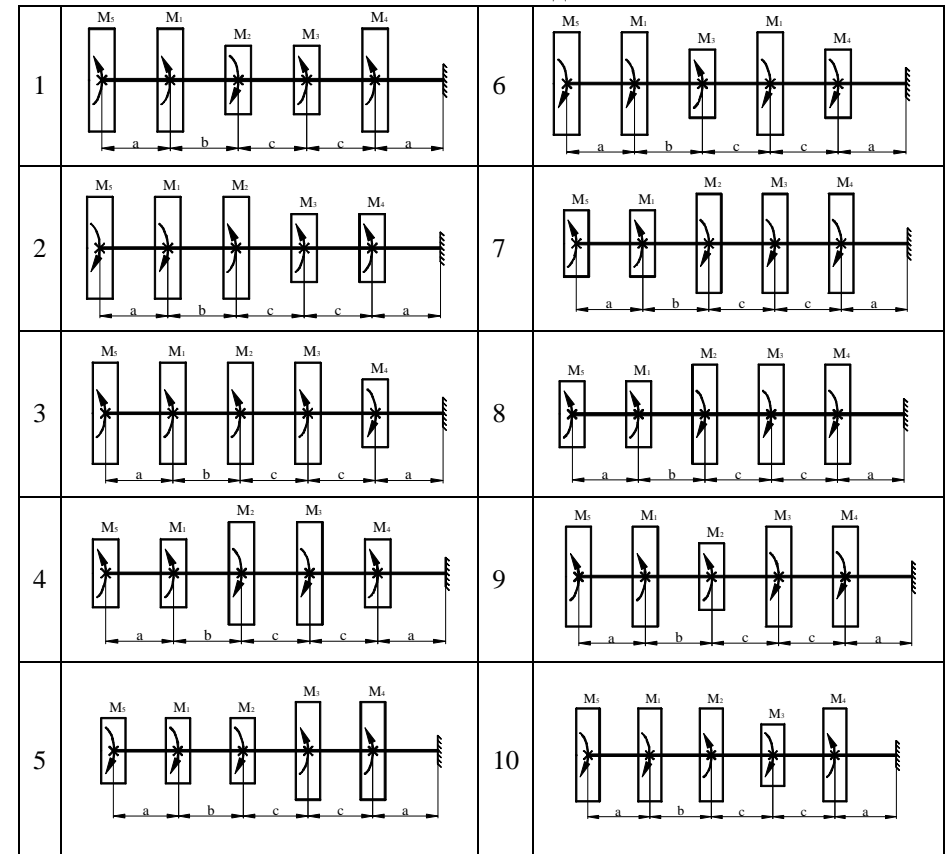
Исходные данные к задаче № 4

| № п/п | M_1 , Н·м | M_2 , Н·м | M_3 , Н·м | M_4 , Н·м | M_5 , Н·м | $[\tau]$, МПа | a, м | b, м | c, м | $\xi = \frac{d}{D}$ | $\frac{h}{b}$ | № схемы |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------|------|------|------|---------------------|---------------|---------|
| 1 | 100 | 500 | 800 | 400 | 600 | 50 | 0,2 | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 1,1 | 1 |
| 2 | 200 | 600 | 700 | 300 | 500 | 60 | 0,3 | 0,6 | 0,6 | 0,5 | 1,2 | 2 |
| 3 | 300 | 700 | 600 | 800 | 300 | 70 | 0,4 | 0,5 | 0,4 | 0,6 | 1,3 | 3 |
| 4 | 400 | 800 | 500 | 700 | 200 | 80 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,7 | 1,4 | 4 |
| 5 | 500 | 900 | 400 | 600 | 700 | 90 | 0,6 | 0,3 | 0,5 | 0,8 | 1,5 | 5 |
| 6 | 600 | 1000 | 300 | 500 | 800 | 50 | 0,7 | 0,2 | 0,8 | 0,9 | 1,6 | 6 |
| 7 | 700 | 900 | 200 | 600 | 900 | 60 | 0,8 | 0,3 | 0,7 | 0,8 | 1,7 | 7 |

| № п/п | M_1 , Н·м | M_2 , Н·м | M_3 , Н·м | M_4 , Н·м | M_5 , Н·м | $[\tau]$, МПа | a, м | b, м | c, м | $\xi = \frac{d}{D}$ | $\frac{h}{b}$ | № схемы |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------|------|------|------|---------------------|---------------|---------|
| 8 | 800 | 800 | 100 | 300 | 1000 | 70 | 0,7 | 0,4 | 0,3 | 0,7 | 1,8 | 8 |
| 9 | 900 | 700 | 1000 | 200 | 400 | 80 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,6 | 1,9 | 9 |
| 0 | 1000 | 100 | 900 | 300 | 100 | 90 | 0,5 | 0,6 | 0,2 | 0,5 | 2,0 | 10 |
| | д | г | в | б | г | а | д | г | в | б | а | д |

Таблица 8

Расчетные схемы к задаче № 4



ЗАДАЧА 5: Для заданных схем (табл. 9) необходимо:

- 1) Вычертить поперечное сечение в строгом масштабе.
- 2) Определить положение центра тяжести.

- 3) Найти величины осевых моментов инерции относительно центральных осей.
 - 4) Найти величину центробежного момента инерции относительно центральных осей.
 - 5) Определить положение главных осей инерции.
 - 6) Найти главные моменты инерции.
- Числовые данные взять из табл. 10.

Таблица 9

Расчетные схемы к задаче № 5

| | | | |
|---|--|---|--|
| 1 | | 6 | |
| 2 | | 7 | |
| 3 | | 8 | |
| 4 | | 9 | |

| | | | |
|---|--|----|--|
| 5 | | 10 | |
|---|--|----|--|

Таблица 10

Исходные данные к задаче № 5

| № | Уголок равнополочный | Уголок неравнополочный | Двутавр | Швеллер | Прямоугольник | № схемы |
|---|----------------------|------------------------|---------|---------|---------------|---------|
| 1 | 30×5 | 50×32×4 | 10 | 8 | 100×30 | 1 |
| 2 | 40×6 | 56×36×4 | 12 | 10 | 100×40 | 2 |
| 3 | 50×4 | 63×40×8 | 14 | 12 | 100×20 | 3 |
| 4 | 56×4 | 70×45×5 | 16 | 14 | 80×40 | 4 |
| 5 | 63×6 | 80×50×6 | 18 | 14a | 80×60 | 5 |
| 6 | 70×8 | 90×56×6 | 20 | 16 | 80×100 | 6 |
| 7 | 80×8 | 100×63×6 | 20a | 16a | 80×20 | 7 |
| 8 | 90×9 | 90×56×8 | 22 | 18 | 60×40 | 8 |
| 9 | 75×9 | 140×90×10 | 22a | 18a | 60×60 | 9 |
| 0 | 100×10 | 160×100×12 | 27 | 20 | 60×40 | 10 |
| | д | а | б | в | г | д |

ЗАДАЧА 6: Для заданных схем балок (табл. 12) построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M . Подобрать поперечное сечение для схемы а) круглое $[\sigma] = 10$ МПа; б) двутавровое $[\sigma] = 150$ МПа.

Числовые данные взять из табл. 11.

Таблица 11

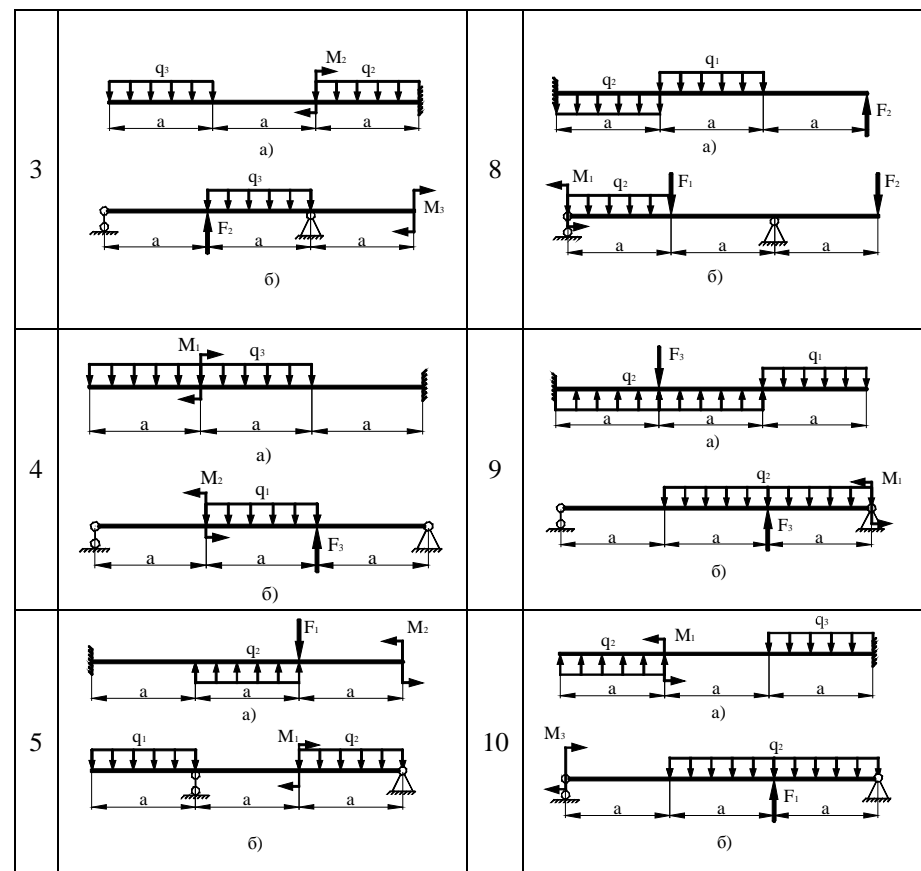
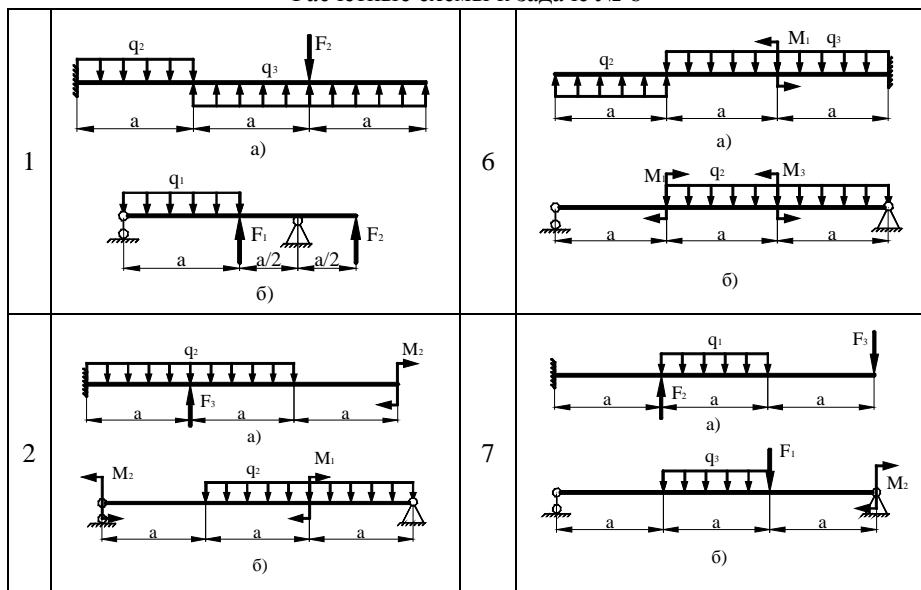
Исходные данные к задаче № 6

| № | а, м | $q_1=q_3$, кН/м | q_2 , кН/м | F_1 , кН | F_2 , кН | F_3 , кН | M_1 , кН·м | M_2 , кН·м | M_3 , кН·м | № схемы |
|---|------|------------------|--------------|------------|------------|------------|--------------|--------------|--------------|---------|
| 1 | 0,8 | 5 | 30 | 10 | 35 | 10 | 10 | 35 | 10 | 1 |
| 2 | 1 | 10 | 25 | 15 | 30 | 20 | 15 | 30 | 20 | 2 |
| 3 | 1,2 | 15 | 20 | 20 | 25 | 30 | 20 | 25 | 30 | 3 |
| 4 | 1,4 | 20 | 15 | 25 | 20 | 40 | 25 | 20 | 40 | 4 |
| 5 | 1,6 | 25 | 10 | 30 | 15 | 10 | 30 | 15 | 10 | 5 |

| № | a, м | $q_1=q_3$, кН/м | q_2 , кН/м | F_1 , кН | F_2 , кН | F_3 , кН | M_1 , кН·м | M_2 , кН·м | M_3 , кН·м | № схемы |
|---|------|------------------|--------------|------------|------------|------------|--------------|--------------|--------------|---------|
| 6 | 1,8 | 30 | 5 | 35 | 10 | 20 | 35 | 10 | 20 | 6 |
| 7 | 2 | 5 | 30 | 40 | 5 | 30 | 40 | 5 | 30 | 7 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 8 | 0,8 | 10 | 25 | 10 | 35 | 40 | 10 | 35 | 40 | 8 |
| 9 | 1 | 15 | 20 | 15 | 30 | 10 | 15 | 30 | 10 | 9 |
| 0 | 1,2 | 20 | 15 | 20 | 25 | 20 | 20 | 25 | 20 | 10 |
| | б | в | г | д | а | б | в | г | д | д |

Таблица 12

Расчетные схемы к задаче № 6



ЗАДАЧА 7: Вал, показанный на схеме (табл. 13) имеет три жестко насаженных шкива. Ведущий шкив диаметром d_1 с углом наклона ремня к горизонту α_1 (рис. 52) передает мощность N при n оборотах в минуту. Два ведомых шкива имеют одинаковые диаметры $d_2 = d_3$ и одинаковые углы наклона ремней к горизонту $\alpha_1 = \alpha_2$, каждый из них передает мощность $N/2$.

Необходимо:

- 1) Определить скручивающие моменты, приложенные к шкивам.
- 2) Построить эпюру крутящего момента.
- 3) Определить силы, действующие на вал со стороны ремней в горизонтальной и вертикальной плоскости.
- 4) Построить эпюры изгибающих моментов в горизонтальной и вертикальной плоскости.
- 5) Построить суммарную эпюру изгибающего момента.
- 6) Подобрать безопасное сечение вала.

Числовые данные взять из табл. 14.

Таблица 13

Расчетные схемы к задаче № 7

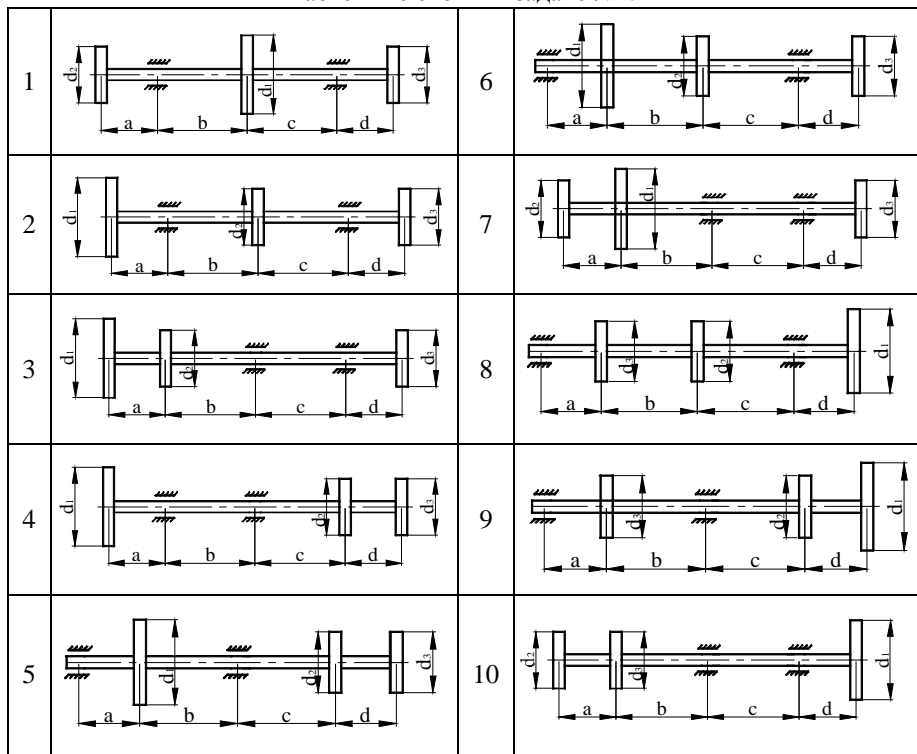


Таблица 14

Исходные данные к задаче № 7

| № | N, кВт | n, об/мин | a, мм | b, мм | c, мм | d, мм | d ₁ , мм | d ₂ , мм | α ₁ ° | α ₂ ° | № схемы |
|---|--------|-----------|-------|-------|-------|-------|---------------------|---------------------|------------------|------------------|---------|
| 1 | 5 | 100 | 150 | 600 | 150 | 500 | 400 | 200 | 10 | 10 | 1 |
| 2 | 10 | 200 | 200 | 550 | 600 | 450 | 420 | 220 | 20 | 20 | 2 |
| 3 | 15 | 300 | 250 | 500 | 200 | 400 | 440 | 240 | 30 | 30 | 3 |
| 4 | 20 | 400 | 300 | 450 | 550 | 350 | 460 | 260 | 40 | 40 | 4 |
| 5 | 25 | 500 | 350 | 400 | 250 | 300 | 480 | 280 | 50 | 50 | 5 |
| 6 | 30 | 600 | 400 | 350 | 300 | 250 | 500 | 300 | 60 | 60 | 6 |
| 7 | 35 | 700 | 450 | 300 | 350 | 550 | 520 | 320 | 70 | 70 | 7 |
| 8 | 40 | 800 | 500 | 250 | 400 | 200 | 540 | 340 | 80 | 80 | 8 |
| 9 | 45 | 900 | 550 | 200 | 450 | 600 | 560 | 360 | 90 | 90 | 9 |
| 0 | 50 | 1000 | 600 | 150 | 500 | 150 | 580 | 380 | 0 | 0 | 10 |
| | г | д | а | б | в | г | д | а | б | в | д |

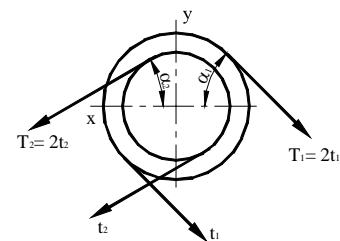


Рисунок 52. К задаче 7.

ЗАДАЧА 8: Подобрать поперечное сечение сжатого стержня большой длины при допуске напряжении на сжатие $[\sigma] = 150$ МПа. Вид закрепления стержня показан на рис. 53. Данные взять из табл. 15.

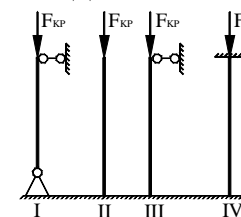


Рисунок 53. К задаче 8.

Таблица 15

Исходные данные к задаче № 8

| № | Вид закрепления | F, кН | l, м | Форма поперечного сечения |
|---|-----------------|-------|------|---|
| 1 | I | 50 | 6,5 | Двугавр |
| 2 | II | 60 | 6 | Швеллер |
| 3 | III | 70 | 5,5 | Квадрат |
| 4 | IV | 80 | 5 | Окружность |
| 5 | I | 90 | 4,5 | Прямоугольник с соотношением сторон 1/2 |
| 6 | II | 100 | 4 | Двугавр |
| 7 | III | 110 | 3,5 | Швеллер |
| 8 | IV | 120 | 3 | Квадрат |
| 9 | I | 130 | 2,5 | Окружность |
| 0 | II | 140 | 2 | Прямоугольник с соотношением сторон 1/2 |
| | в | д | б | г |

ЗАДАЧА 9: Для рамы, представленной на рисунке (табл. 17) необходимо:

- 1) Построить эпюры внутренних силовых факторов.
- 2) Определить горизонтальное и вертикальное перемещение заданного сечения.

3) Определить угол поворота заданного сечения.

Числовые данные взять из табл. 16. Жесткость сечения вертикальных и горизонтальных сечений рамы принять равной EI . Длина каждого из горизонтальных участков l , длина каждого из вертикальных участков h .

Таблица 16

Исходные данные к задаче № 9

| № | F, кН | h, м | l, м | сечение | № схемы |
|---|-------|------|------|---------|---------|
| 1 | 20 | 1 | 2 | b | 1 |
| 2 | 25 | 2 | 1 | c | 2 |
| 3 | 30 | 3 | 4 | b | 3 |
| 4 | 35 | 4 | 3 | c | 4 |
| 5 | 40 | 5 | 2 | b | 5 |
| 6 | 45 | 1 | 5 | c | 6 |
| 7 | 50 | 2 | 3 | b | 7 |
| 8 | 55 | 3 | 4 | c | 8 |
| 9 | 60 | 4 | 5 | b | 9 |
| 0 | 65 | 5 | 1 | c | 10 |
| | в | г | в | б | д |

Таблица 17

Расчетные схемы к задаче № 9

| | | | |
|---|--|---|--|
| 1 | | 6 | |
| 2 | | 7 | |

| | | | |
|---|--|----|--|
| 3 | | 8 | |
| 4 | | 9 | |
| 5 | | 10 | |

ЗАДАЧА 10: На рисунке (табл.19) изображена нагруженная в своей плоскости статически неопределимая рама, вертикальные элементы которой имеют моменты инерции I , а горизонтальные элементы $k \cdot I$. Требуется:

- 1) установить степень статической неопределимости и выбрать основную систему;
- 2) написать канонические уравнения;
- 3) построить эпюру M от единичных сил и от заданной нагрузки;
- 4) найти коэффициент канонических уравнений;
- 5) найти величины «лишних» неизвестных X ;
- 6) выполнить деформационную проверку правильности определения неизвестных;
- 7) построить окончательные эпюры внутренних силовых факторов N , Q_y , M_x .

Числовые данные взять из табл. 18.

Указание. При выполнении деформационной проверки следует установить, равняется ли нулю перемещение одной из опорных точек. Для этого необходимо выбрать новую основную систему, приложить в направлении отброшенной связи единичную силу, построить эпюру моментов. Перемножив эпюру моментов от внешней нагрузки и от найденной неизвестной силы X на эпюру моментов от единичной нагрузки, определить перемещение опорной точки. При правильно решенной задаче в результате перемножения должен получиться ноль.

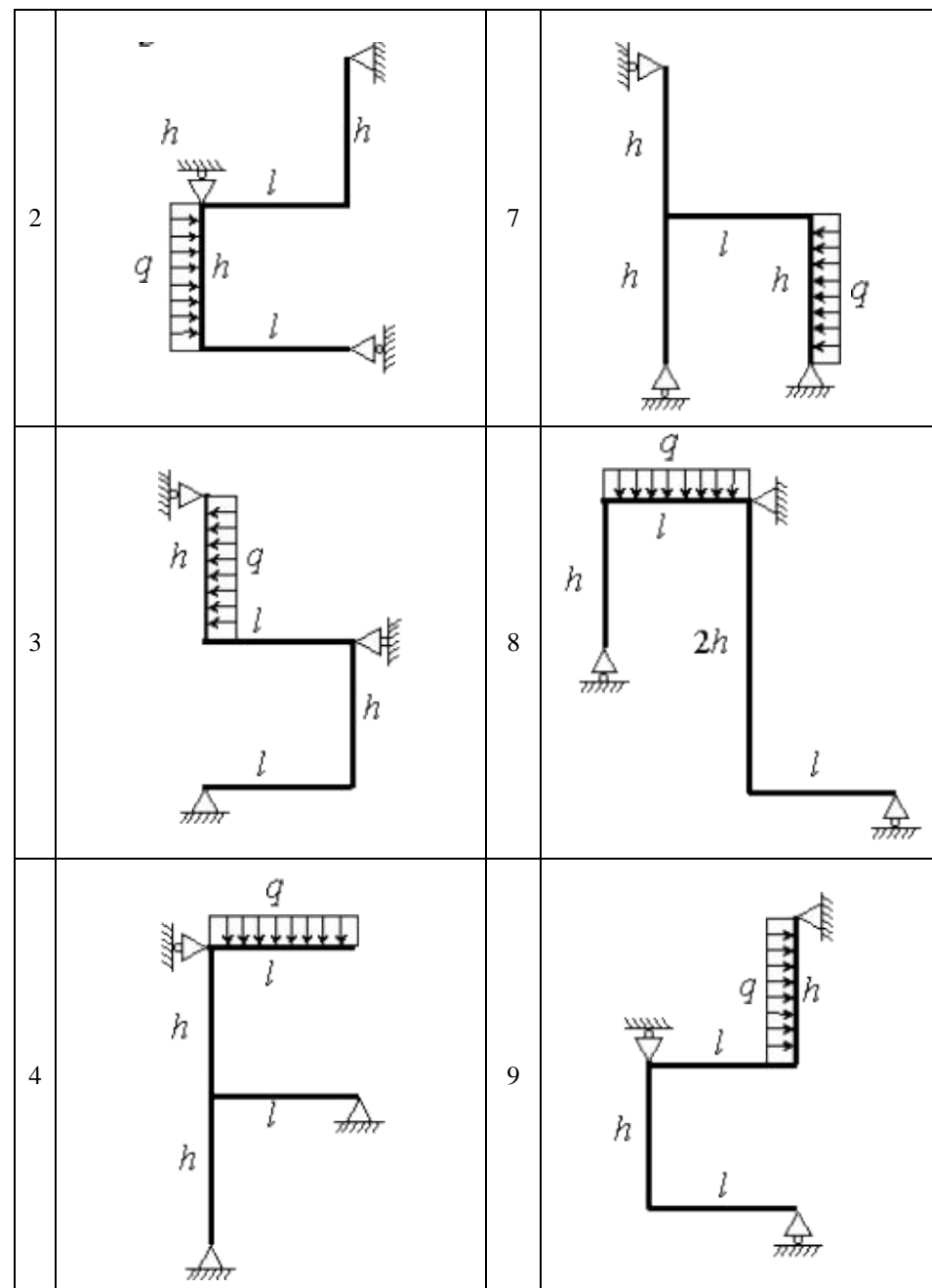
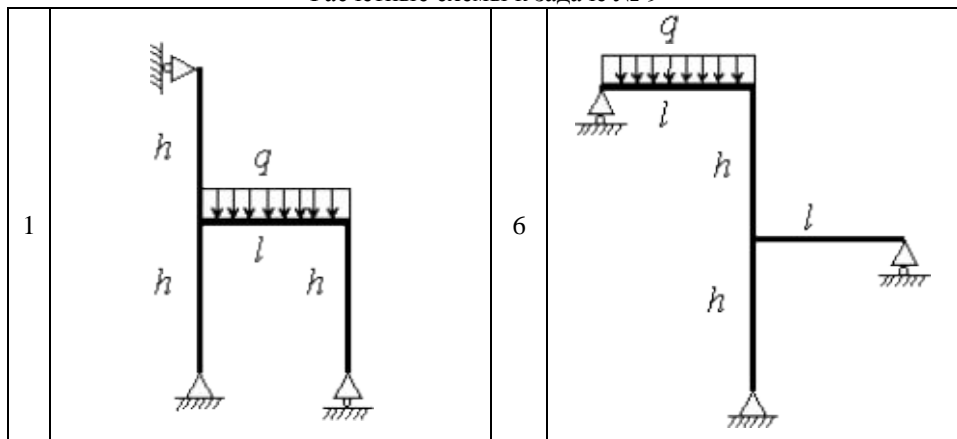
Таблица 18

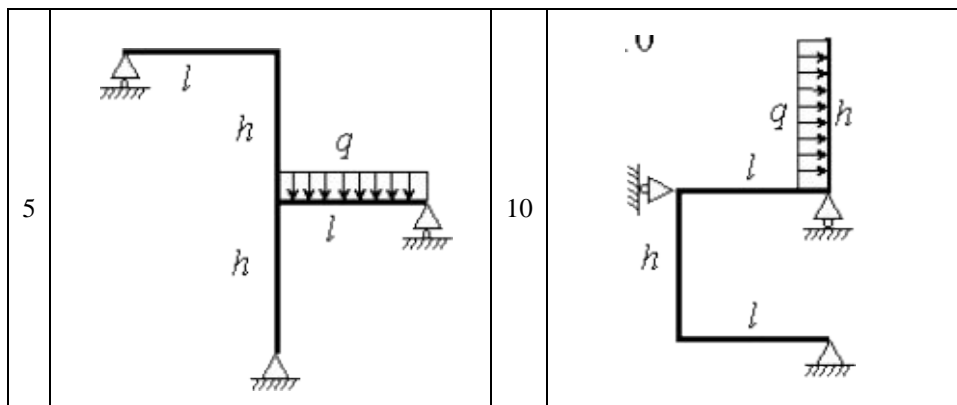
Исходные данные к задаче № 10

| № | q , кН/м | h , м | l , м | k | № схемы |
|---|------------|---------|---------|-----|---------|
| 1 | 15 | 2 | 11 | 1,1 | 1 |
| 2 | 20 | 3 | 12 | 1,2 | 2 |
| 3 | 30 | 4 | 3 | 1,3 | 3 |
| 4 | 4 | 5 | 4 | 1,4 | 4 |
| 5 | 5 | 6 | 5 | 1,5 | 5 |
| 6 | 6 | 2 | 6 | 1,6 | 6 |
| 7 | 7 | 3 | 7 | 1,7 | 7 |
| 8 | 8 | 4 | 8 | 1,8 | 8 |
| 9 | 9 | 5 | 9 | 1,9 | 9 |
| 0 | 10 | 6 | 10 | 2,0 | 10 |
| | а | в | г | б | д |

Таблица 19

Расчетные схемы к задаче № 9





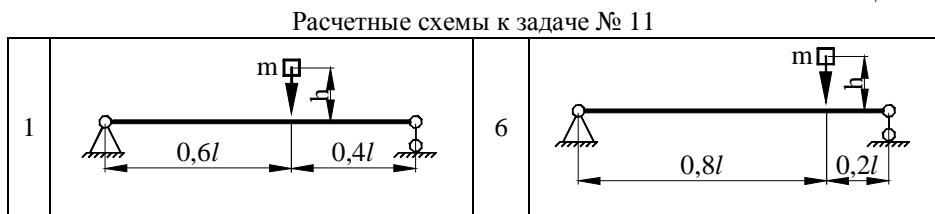
ЗАДАЧА 11: Для стальной двутавровой балки, изображенной на схеме (табл. 21), определить максимальные ударные напряжения и максимальный прогиб в месте падения груза. Числовые данные взять из табл. 20.

Таблица 20

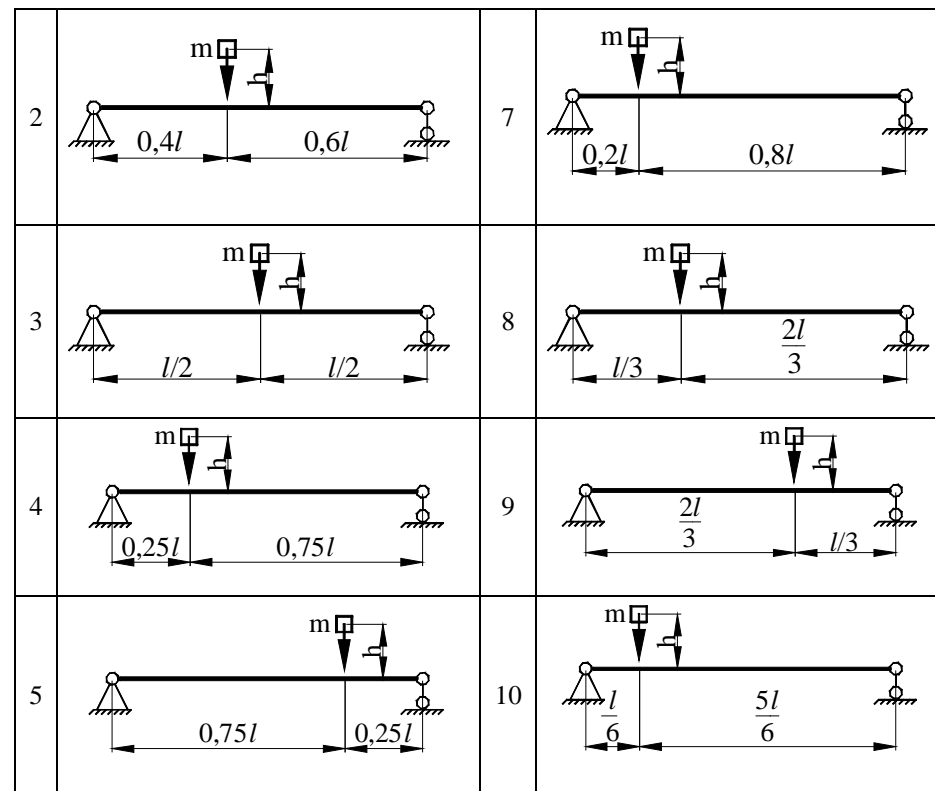
Исходные данные к задаче № 11

| № | m, кг | h, мм | l, м | № двутавра | № схемы |
|---|-------|-------|------|------------|---------|
| 1 | 20 | 85 | 4 | 10 | 1 |
| 2 | 25 | 80 | 4,2 | 12 | 2 |
| 3 | 30 | 75 | 4,6 | 14 | 3 |
| 4 | 35 | 70 | 4,8 | 16 | 4 |
| 5 | 40 | 65 | 5,0 | 18 | 5 |
| 6 | 45 | 60 | 5,2 | 20 | 6 |
| 7 | 50 | 55 | 5,4 | 22 | 7 |
| 8 | 55 | 50 | 5,6 | 24 | 8 |
| 9 | 60 | 45 | 5,8 | 27 | 9 |
| 0 | 65 | 40 | 6,0 | 30 | 10 |
| | в | г | в | б | д |

Таблица 21



Расчетные схемы к задаче № 11



ЗАДАЧА 12: На стальной балке, показанной на схеме (табл. 23), установлен электродвигатель весом G , совершающий n об/мин. Центробежная сила, возникающая вследствие неуравновешенности частей двигателя составляет $F=0,2G$. Подобрать двутавровое поперечное сечение балки из условия отстройки от резонанса $\omega = 1,4\varphi$, определить максимальный прогиб и максимальные напряжения. Собственный вес балки не учитывается. Числовые данные взять из табл. 22.

Таблица 22

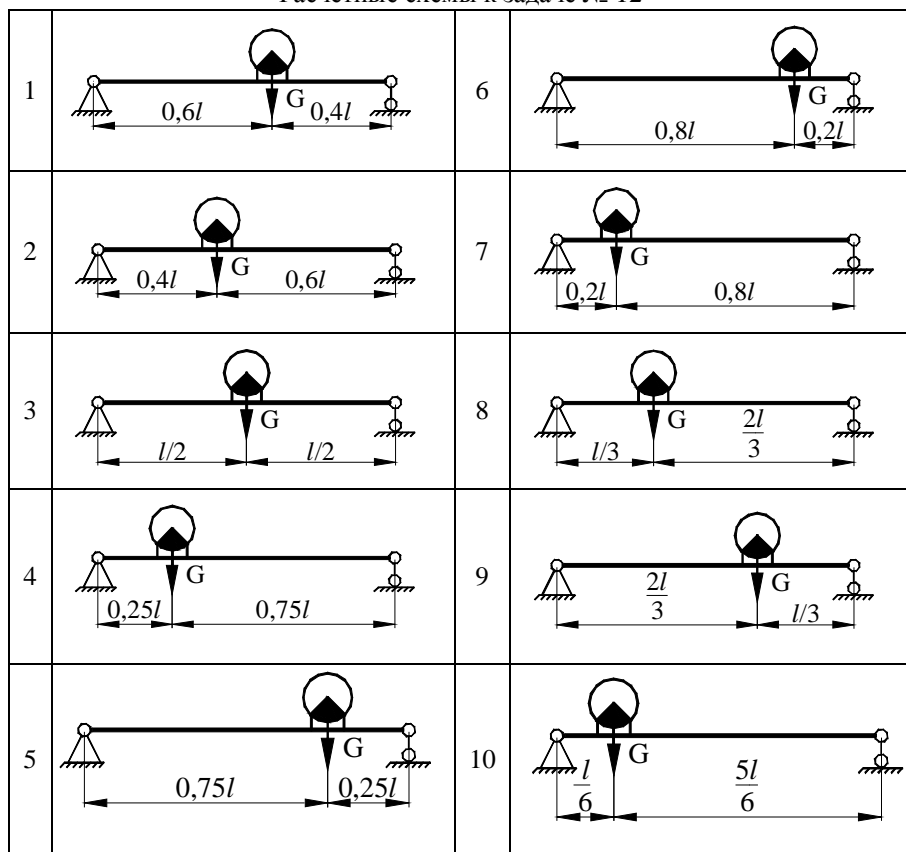
Исходные данные к задаче № 12

| № | G, кН | n, об/мин | l, м | № схемы |
|---|-------|-----------|------|---------|
| 1 | 60 | 200 | 4 | 1 |
| 2 | 55 | 250 | 4,2 | 2 |
| 3 | 40 | 300 | 4,6 | 3 |
| 4 | 35 | 350 | 4,8 | 4 |
| 5 | 30 | 400 | 5,0 | 5 |
| 6 | 25 | 450 | 5,2 | 6 |

| № | G, кН | n, об/мин | l, м | № схемы |
|---|-------|-----------|------|---------|
| 7 | 20 | 500 | 5,4 | 7 |
| 8 | 15 | 550 | 5,6 | 8 |
| 9 | 30 | 600 | 5,8 | 9 |
| 0 | 25 | 650 | 6,0 | 10 |
| | д | в | б | г |

Таблица 23

Расчетные схемы к задаче № 12



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. В.И. Феодосьев, "Сопротивление материалов", М.: Наука, 1974.
2. А.В. Дарков, Г.С. Шпиро, "Сопротивление материалов", М.: Высшая школа, 1975.
3. "Сборник задач по сопротивлению материалов", Под. ред. А.А. Уманского, М.: Наука, 1973.
4. Н.М. Беляев, "Сборник задач по сопротивлению материалов", М.: Наука, 1966.
5. П.А.Степин, Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 1988.