

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ  
ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА  
ПРОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ  
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ЧАСТЬ 2**

**РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ НАПРЯЖЕНИЯХ**  
Методические указания

## Вероятностный расчет на прочность при переменных во времени напряжениях

### 2.1. Определение коэффициента запаса прочности детали при регулярном асимметричном нагружении

Коэффициент запаса усталостной прочности  $n_\sigma$  для базовой долговечности, как правило  $10^7$  циклов, при регулярном нагружении в машиностроении обычно определяется по известной формуле Серенсена-Кинасошвили [7]:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \cdot \sigma_a + \Psi_\sigma \cdot \sigma_m}, \quad (2.1)$$

полученной на основании развития идей работы [9]. В формуле (2.1) приняты следующие обозначения:

$\sigma_{-1}$  - предел выносливости гладкого лабораторного образца при симметричном цикле для базовой долговечности;

$\sigma_a$ ,  $\sigma_m$  - характеристики рабочего цикла изменения напряжений;

$\Psi_\sigma$  - коэффициент чувствительности к асимметрии цикла;

$K_{\sigma D}$  - суммарный коэффициент, учитывающий влияние концентрации напряжений, масштабного и технологических факторов определяется из следующего уравнения [5]:

$$K_{\sigma D} = \left( \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma} + \frac{1}{K_F} + \frac{1}{\beta} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V}, \quad (2.2)$$

где коэффициент, учитывающий влияние концентрации напряжений и масштабного эффекта определяется как отношение предела выносливости лабораторного образца  $\sigma_{-1}$  к пределу выносливости детали  $\sigma_{-1\partial}$  при симметричном цикле изменения напряжений из

следующего уравнения в соответствии с теорией подобия усталостного разрушения [5]:

$$\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1\partial}} = \frac{2 \cdot \alpha_{\sigma}}{1 + 10^{v_{\sigma} \cdot (1,946 - \lg \frac{L}{G})}}, \quad (2.3)$$

$K_F$  - коэффициент состояния поверхности,  $K_V$  - коэффициент упрочнения,  $\beta$  - коэффициент, учитывающий состояния среды или коэффициент коррозионного воздействия,  $\alpha_{\sigma}$  - теоретический коэффициент концентрации для первого главного напряжения в зоне концентрации рассчитываемой детали,  $v_{\sigma}$  - параметр наклона уравнения подобия,  $\lg \frac{L}{G}$  - параметр подобия для детали.

Детальное исследование методов определения запасов прочности при асимметричном нагружении содержится в работе [10].

Формула (2.1) выведена в предположении линейной зависимости между предельной амплитудой и средним напряжением цикла как для образцов, так и для детали, приближенно схематизирующей действительную диаграмму предельных амплитуд, а также при пропорциональном возрастании амплитуды и среднего напряжения рабочего цикла вплоть до наступления предельного состояния. Вывод формулы (2.1) иллюстрируется рисунком 2.1.

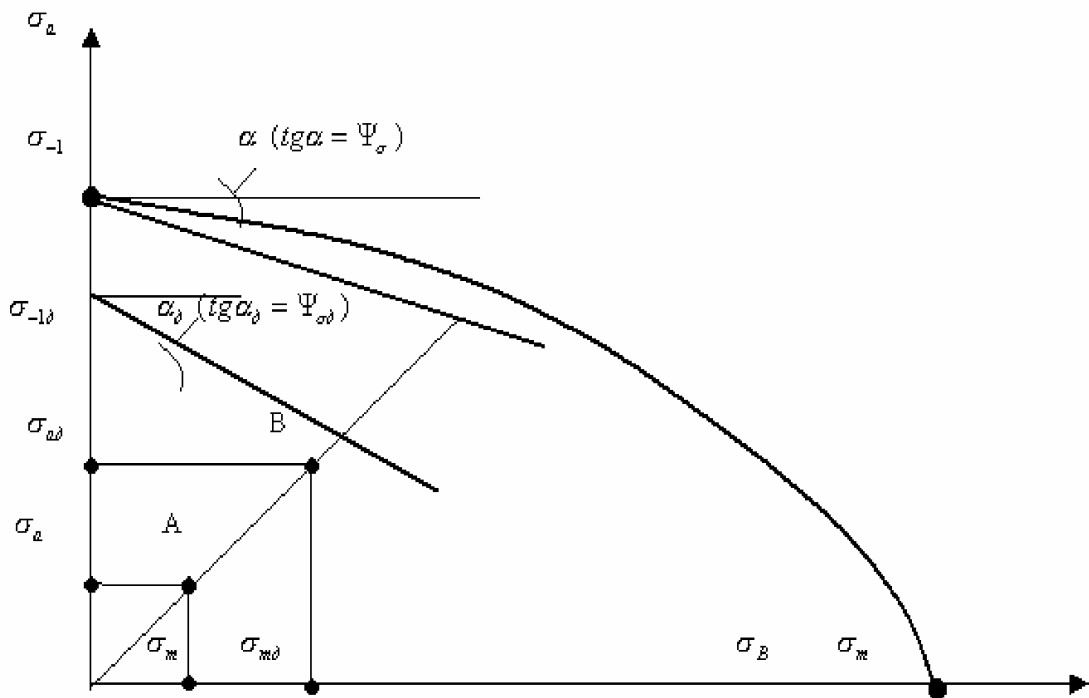


Рис.2.1. К выводу формулы коэффициента запаса

На рисунке 2.1 кривая линия представляет собой действительную диаграмму предельных амплитуд. Верхняя прямая линия аппроксимирует кривую диаграммы предельных амплитуд для лабораторных образцов, нижняя прямая – для детали. Точка А ( $\sigma_m, \sigma_a$ ) на рисунке 2.1 характеризует рабочий цикл действующих на деталь напряжений, в то время как точка В ( $\sigma_{m\delta}, \sigma_{a\delta}$ ) определяет предельную амплитуду для детали. Эти точки в соответствии с принятым допущением лежат на одном луче. Коэффициент запаса определяется из следующего уравнения:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{a\delta}}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{m\delta}}{\sigma_m} . \tag{2.4}$$

В соответствии с принятой схематизацией диаграммы предельных амплитуд прямыми линиями, имеем:

$$\sigma_{a0} = \sigma_{-10} - \Psi_{\sigma 0} \cdot \sigma_{m0}, \quad \sigma_{-10} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}}, \quad \Psi_{\sigma 0} = \frac{\Psi_{\sigma}}{K_{\sigma D}}. \quad (2.5)$$

Подставляя соотношения (2.5) в (2.4), получим:

$$n_{\sigma} \cdot \sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}} - \frac{\Psi_{\sigma}}{K_{\sigma D}} \cdot n_{\sigma} \cdot \sigma_m \quad (2.6)$$

откуда после несложных преобразований получается формула (2.1).

Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что форма диаграммы предельных амплитуд существенно отличается от прямой линии. В работе [11] на основании анализа известных уравнений диаграмм предельных амплитуд с привлечением большого числа опытных данных установлено, что наименьшей погрешностью обладает следующее корреляционное уравнение:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} = \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_B} \right)^{\alpha}, \quad (2.7)$$

где  $\sigma_B$  - временное сопротивление;

$\alpha = 0,63$  - для алюминиевых сплавов;

$\alpha = 0,831$  - для титановых сплавов;

$\alpha = 0,82$  - для сталей.

Несколько большую погрешность имеет модель Хейвуда [12], полученная на основе детального анализа влияния средних напряжений цикла на предел выносливости сталей и алюминиевых сплавов при осевом нагружении:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_B} = \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_B} \right) \left[ F + \gamma(1 - F) \right], \quad (2.8)$$

где  $F$  и  $\gamma$  - параметры ( $\sigma_B$  в МПа).

Для стальных гладких образцов:

$$F = \frac{1 + 0,0038(\lg N)^4}{1 + 0,008(\lg N)^4}. \quad (2.9)$$

$$\gamma = \frac{\sigma_m (2 + \sigma_m / \sigma_B)}{3\sigma_B}. \quad (2.10)$$

Для образцов из алюминиевых сплавов:

$$F = \frac{1 + \frac{0,0031(\lg N)^4}{1 + 0,0064 \cdot \sigma_B}}{1 + 0,0031(\lg N)^4}. \quad (2.11)$$

$$\gamma = \frac{\sigma_m}{\sigma_B \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_B \cdot \lg N}{2250} \right)^4 \right]}. \quad (2.12)$$

Следует обратить внимание на ошибку в формуле для  $\gamma$  в русском переводе работы [12].

Другие известные модели в ряде случаев не удовлетворяют граничным условиям, обладают большой погрешностью по отношению к имеющимся результатам экспериментов и поэтому в настоящей работе не рассматриваются.

Очевидно, что коэффициент запаса усталостной прочности является функцией долговечности. При этом все технологические и эксплуатационные факторы, входящие в формулу для  $K_{\sigma D}$  (см. уравнение (2.2)) также, строго говоря, являются функциями долговечности. Обоснование этих зависимостей производится, как правило, по данным экспериментов. В работах [6,8,13], например, обоснованы следующие формулы для учета зависимости наклона

уравнения подобия усталостного разрушения  $V_{\sigma N}$  и коэффициента чувствительности к асимметрии цикла  $\Psi_{\sigma N}$  от величины долговечности  $N$  применительно к легким сплавам:

$$V_{\sigma N} = V_{\sigma} \cdot \frac{\sigma_{-1N}}{\sigma_{-1_{10^7}}}, \quad (2.13)$$

$$\Psi_{\sigma N} = \Psi_{\sigma} \cdot \frac{\sigma_{-1N}}{\sigma_{-1_{10^7}}}, \quad (2.14)$$

где  $\sigma_{-1N}$  - предел выносливости при симметричном цикле нагружения для данной базы  $N$ ;

$\sigma_{-1_{10^7}}$  - предел выносливости при симметричном цикле нагружения для базовой долговечности  $N = 10^7$  циклов;

$V_{\sigma}, \Psi_{\sigma}$  - справочные значения характеристик для базовой долговечности  $N = 10^7$  циклов.

Для установления зависимости предела выносливости от долговечности  $\sigma_{-1N}$  необходимо располагать параметрами априорной кривой усталости материала при симметричном цикле действия переменных напряжений.

Для деформируемых алюминиевых сплавов применительно к гладким лабораторным образцам диаметром 7,5-10 мм априорная кривая усталости может быть построена на основании следующих уравнений в общем случае асимметричного нагружения с  $\sigma_m = const$  [14,15]:

$$\sigma_a = (\sigma_B - \sigma_m)^{0,63} \cdot [1,57 + 94,1 \cdot (\lg N)^{-2}] \quad (2.15)$$

для переменного изгиба;

$$\sigma_a = (\sigma_B - \sigma_m)^{0,63} \cdot [1,43 + 85,7 \cdot (\lg N)^{-2}] \quad (2.16)$$

для переменного растяжения-сжатия.

В формулах (2.15), (2.16)  $\sigma_a$  представляет собой ординату точек медианной кривой усталости, выраженную в мегапаскалях;  $\sigma_B$  - условный предел прочности в той же размерности.

Для титановых сплавов, предел прочности которых находится в диапазоне 700-1300 МПа, априорные кривые усталости определяются по следующим уравнениям [16]:

$$\sigma_a = (\sigma_B - \sigma_m)^{0,831} \cdot [1,40 + 370 \cdot (\lg N)^{-4}] , \quad (2.17)$$

$$\sigma_a = (\sigma_B - \sigma_m)^{0,831} \cdot [1,43 + 26 \cdot (N)^{-1/3}] \quad (2.18)$$

для переменного изгиба;

$$\sigma_a = (\sigma_B - \sigma_m)^{0,831} \cdot [1,16 + 310 \cdot (\lg N)^{-4}] , \quad (2.19)$$

$$\sigma_a = (\sigma_B - \sigma_m)^{0,831} \cdot [1,19 + 22 \cdot (N)^{-1/3}] \quad (2.20)$$

для переменного растяжения-сжатия.

В работе [8] для большой группы алюминиевых и магниевых литых и деформируемых сплавов обосновано уравнение обобщенной кривой усталости, справедливое как для образцов, так и для элементов конструкций при симметричном нагружении:

$$\sigma_{-1N} = \sigma_{-1_{10^7}} \cdot [0,45 + 26,95 \cdot (\lg N)^{-2}] \quad (2.21)$$

Для уравнений диаграмм предельных амплитуд (2.7), (2.8) с учетом уравнений (2.13)-(2.21), устанавливающих зависимость параметров диаграммы от долговечности, можно уточнить формулу



(2.1) для коэффициента запаса. Рассмотрим эту методику на примере модели Степнова (2.7) с уточнением [11] на наличие концентрации напряжений (см. рис.2.2):

$$\sigma_{a\partial} = \frac{\sigma_{-1N}}{K_{\sigma D}} \left( 1 - \frac{k_m \cdot \sigma_{m\partial}}{\sigma_B} \right)^\alpha, \quad (2.22)$$

где коэффициент  $k_m$  определяется из следующих уравнений:

$$k_m = \begin{cases} \alpha_\sigma \text{ при } \sigma_{m\partial} \leq \frac{\sigma_m^*}{\alpha_\sigma}, \\ 1 + \alpha_\sigma \cdot (\alpha_\sigma - 1) \cdot \frac{\sigma_{0,2} - \sigma_m^*}{\alpha_\sigma \cdot \sigma_{0,2} - \sigma_m^*} \text{ при } \sigma_{m\partial} > \frac{\sigma_m^*}{\alpha_\sigma}, \\ 1 \text{ при } \sigma_{m\partial} > \sigma_{0,2} \end{cases}, \quad (2.23)$$

а напряжение  $\sigma_m^*$  определяется из следующего уравнения:

$$\sigma_m^* + \sigma_{-1N} \cdot \left( 1 - \frac{\sigma_m^*}{\sigma_B} \right)^\alpha = \sigma_{0,2}. \quad (2.24)$$

Предположим далее, что переход в предельное состояние происходит по степенной зависимости:

$$\sigma_a = a \cdot (\sigma_m)^\lambda, \quad (2.25)$$

а коэффициент запаса усталостной прочности определяется как отношение предельной амплитуды детали к амплитуде рабочего цикла:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{a\partial}}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{-1N}}{K_{\sigma D} \cdot \sigma_a} \left( 1 - \frac{k_m \cdot \sigma_{m\partial}}{\sigma_B} \right)^\alpha. \quad (2.26)$$

В соответствии с уравнением (2.25) для предельной амплитуды имеем:

$$\sigma_{a\partial} = a \cdot (\sigma_{m\partial})^\lambda. \quad (2.27)$$

Выражая параметр  $a$  из уравнения (2.25) и подставляя (2.27) в (2.26), получим:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1N}}{K_{\sigma D} \cdot \sigma_a} \left( 1 - \frac{k_m \cdot \sigma_m \cdot (n_{\sigma})^{\frac{1}{\chi}}}{\sigma_B} \right)^{\alpha} \quad (2.28)$$

Аналогичная методика, примененная к уравнению Хейвуда, приводит к следующему уравнению для определения коэффициента запаса:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_B}{K_{\sigma D} \cdot \sigma_a} \left( 1 - \frac{\sigma_m \cdot (n_{\sigma})^{\frac{1}{\chi}}}{\sigma_B} \right) \cdot [F + (1 - F) \cdot \gamma], \quad (2.29)$$

где параметр  $F$  определяется по уравнениям (2.9), (2.11), а параметр  $\gamma$  с учетом уравнений (2.10), (2.12) определяется из следующих уравнений:

$$\gamma = \frac{\sigma_m \cdot (n_{\sigma})^{\frac{1}{\chi}} [2 + \sigma_m \cdot (n_{\sigma})^{\frac{1}{\chi}} / \sigma_B]}{3\sigma_B} \quad \text{- для сталей,} \quad (2.30)$$

$$\gamma = \frac{\sigma_m \cdot (n_{\sigma})^{\frac{1}{\chi}}}{\sigma_B \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_B \cdot \lg N}{2250} \right)^4 \right]} \quad \text{- для алюминиевых сплавов.} \quad (2.31)$$

Из уравнений (2.28)-(2.31) численным методом нетрудно определить коэффициент запаса  $n_{\sigma}$  для заданных напряжений рабочего цикла, характеристик механических свойств материала детали, параметров диаграммы предельных амплитуд и коэффициента  $\chi$ , определяющего интенсивность перехода в предельное состояние в соответствии с уравнением (2.25). Соответствующие кривые предельных амплитуд для образцов (кривая  $a$ ), детали без учета изменения коэффициента  $k_m$  ( $k_m = 1$ ) (кривая  $b$ ) и для детали с учетом  $k_m$  (кривая  $c$ ),

представлены на рисунке 2.2. Там же показана кривая перехода в предельное состояние (кривая  $d$ ).

На основании полученных уравнений формулы для расчета коэффициента запаса с учетом влияния долговечности будут иметь следующий вид:

$$n_{\sigma N} = \frac{\sigma_{-1N}}{K_{\sigma DN} \cdot \sigma_a + \Psi_{\sigma N} \cdot \sigma_m}, \quad (2.32)$$

$$n_{\sigma N} = \frac{\sigma_{-1N}}{K_{\sigma DN} \cdot \sigma_a} \left( 1 - \frac{k_m \cdot \sigma_m \cdot [n_{\sigma N}]^{\frac{1}{\chi}}}{\sigma_B} \right)^{\alpha}, \quad (2.33)$$

$$n_{\sigma N} = \frac{\sigma_B}{K_{\sigma DN} \cdot \sigma_a} \left( 1 - \frac{\sigma_m \cdot [n_{\sigma N}]^{\frac{1}{\chi}}}{\sigma_B} \right) \cdot [F + (1 - F) \cdot \gamma], \quad (2.34)$$

$$K_{\sigma DN} = \left( \frac{2 \cdot \alpha_{\sigma}}{1 + 10^{\nu_{\sigma N} \cdot (1,946 - \lg \frac{L}{G})}} + \frac{1}{K_F} + \frac{1}{\beta} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V} \quad (2.35)$$

для моделей Серенсена-Кинасовшвили (2.32), Степнова (2.33) и Хейвуда (2.34).

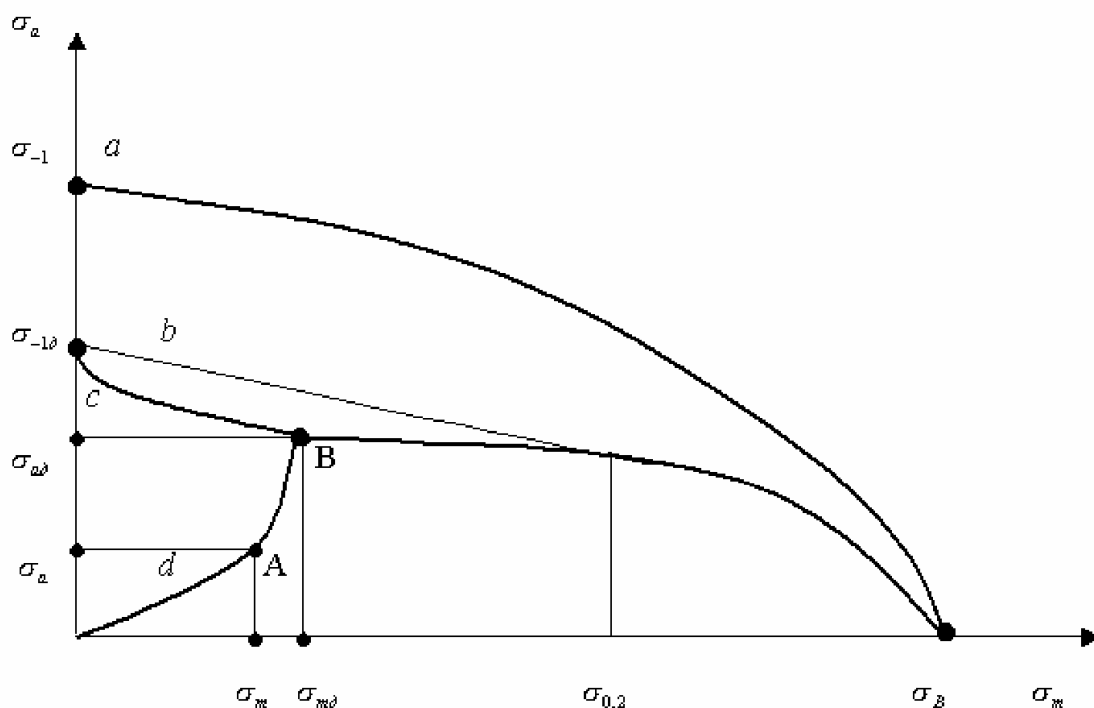


Рис.2.2. К выводу уточненной формулы коэффициента запаса

Вид уравнений, определяющих зависимость конструктивных и эксплуатационных факторов усталостного разрушения от долговечности для деталей из алюминиевых, титановых сплавов и сталей в уравнениях (2.32)-(2.35) может уточняться по мере накопления экспериментальных данных и разработки теоретических моделей.

Пример 2.1. В качестве примера рассмотрим расчет коэффициентов запаса для элемента конструкции из алюминиевого сплава в диапазоне долговечностей  $10^5 - 5 \cdot 10^7$  циклов. Расчеты выполнены для трех моделей (2.32), (2.33) и (2.34) при следующих значениях характеристик:  $\sigma_{-1_{10^7}} = 150$  МПа;  $\sigma_B = 550$  МПа;  $\sigma_{0,2} = 300$  МПа;  $\sigma_m = 50$  МПа;  $\Psi_\sigma = 0,3$ ;  $\nu_\sigma = 0,2$ ;  $\alpha = 0,63$ ;  $\chi = 2$ , для двух значений теоретического коэффициента концентрации

напряжений детали  $\alpha_\sigma = 2,3$  и  $1,5$ . Параметр подобия принят равным -  $\lg \frac{L}{G} = 4$ . Коэффициенты состояния поверхности, упрочнения, коррозии примем равными единице. Расчетное значение напряжения  $\sigma_m^*$  для разных базовых долговечностей в модели Степнова (2.33) определяется на основании уравнения (2.24) с учетом уравнения кривой усталости (2.21):

$$\sigma_m^*(N) + \sigma_{-1 \cdot 10^7} \cdot [0,45 + 26,95 \cdot (\lg N)^{-2}] \cdot \left[ 1 - \frac{\sigma_m^*(N)}{\sigma_B} \right]^\alpha = \sigma_{0,2} \quad (2.36)$$

В таблицах 2.1, 2.2 представлены результаты расчета коэффициента запаса усталостной прочности. Как видно из таблицы 2.1, рассчитанной для значения теоретического коэффициента концентрации напряжений  $\alpha_\sigma = 2,3$ , модель Серенсена-Кинасошвили (2.32) дает большие значения коэффициента запаса по сравнению с формулой (2.33), полученной на основании модели Степнова с учетом изменения коэффициента  $k_m$ , в среднем на 3-5% во всем диапазоне исследованных долговечностей и амплитуд напряжений от 20 до 100 МПа. Исключение составляют лишь значения при малой амплитуде 20 МПа и низких базовых долговечностях  $10^5$  и  $10^6$  циклов, для которых коэффициент запаса по формуле (32) меньше на 1-3%. Если в формуле (2.33) не учитывать значения  $k_m$ , то есть принять  $k_m = 1$ , то коэффициент запаса в модели Степнова оказывается выше, чем в формуле Серенсена-Кинасошвили. Причем это отличие достигает 10-18% при малых амплитудах и долговечностях и снижается до 1-8% при возрастании рабочей амплитуды и увеличении базовой долговечности до  $5 \cdot 10^7$  циклов. Формула (2.34), полученная на

основании модели Хейвуда дает большие значения коэффициента запаса по сравнению с другими моделями во всем рассмотренном диапазоне амплитуд и долговечностей. Это отличие по сравнению с формулой (2.32) тем больше, чем меньше амплитуда и ниже базовая долговечность, и находится в среднем в диапазоне 15-35%.

Таблица 2.1. Результаты расчета коэффициента запаса усталостной прочности

$$\alpha_{\sigma} = 2,3$$

$n_{\sigma}$	$N$	$\sigma_a$ , МПа								
		20	30	40	50	60	70	80	90	100
(2.32)	$10^5$	2,354	1,703	1,334	1,096	0,931	0,808	0,715	0,640	0,580
	$10^6$	2,053	1,469	1,144	0,937	0,793	0,687	0,607	0,543	0,491
	$10^7$	1,846	1,311	1,017	0,830	0,702	0,607	0,536	0,479	0,433
	$5 \cdot 10^7$	1,737	1,229	0,951	0,776	0,655	0,567	0,499	0,446	0,403
(2.33)	$10^5$	2,416	1,688	1,301	1,060	0,895	0,776	0,684	0,612	0,554
	$10^6$	2,063	1,436	1,105	0,899	0,759	0,657	0,579	0,518	0,469
	$10^7$	1,835	1,274	0,978	0,795	0,670	0,580	0,511	0,457	0,413
	$5 \cdot 10^7$	1,718	1,190	0,913	0,742	0,625	0,541	0,476	0,425	0,385
(2.33) $k_m = 1$	$10^5$	2,776	1,887	1,432	1,154	0,967	0,833	0,731	0,652	0,588
	$10^6$	2,350	1,595	1,209	0,974	0,816	0,702	0,616	0,549	0,496
	$10^7$	2,072	1,405	1,064	0,857	0,717	0,617	0,542	0,483	0,435
	$5 \cdot 10^7$	1,930	1,308	0,990	0,797	0,667	0,574	0,504	0,449	0,405
(2.34)	$10^5$	3,171	2,166	1,647	1,331	1,117	0,962	0,846	0,754	0,681
	$10^6$	2,645	1,804	1,371	1,106	0,928	0,800	0,702	0,626	0,565
	$10^7$	2,313	1,577	1,198	0,967	0,811	0,699	0,614	0,548	0,494
	$5 \cdot 10^7$	2,168	1,478	1,123	0,907	0,761	0,655	0,576	0,513	0,463

Таблица 2.2. Результаты расчета коэффициента запаса усталостной прочности  
 $\alpha_\sigma = 1,5$

$n_\sigma$	$N$	$\sigma_a$ , МПа								
		20	30	40	50	60	70	80	90	100
(2.32)	$10^5$	3,207	2,394	1,909	1,588	1,360	1,188	1,056	0,949	0,863
	$10^6$	2,837	2,089	1,653	1,368	1,166	1,017	0,901	0,809	0,734
	$10^7$	2,577	1,879	1,479	1,219	1,037	0,902	0,798	0,716	0,649
	$5 \cdot 10^7$	2,437	1,769	1,388	1,142	0,970	0,843	0,746	0,668	0,606
(2.33)	$10^5$	3,877	2,684	2,058	1,671	1,408	1,217	1,072	0,958	0,867
	$10^6$	3,311	2,283	1,748	1,417	1,193	1,030	0,907	0,810	0,733
	$10^7$	2,936	2,020	1,544	1,251	1,052	0,908	0,800	0,714	0,645
	$5 \cdot 10^7$	2,743	1,886	1,440	1,166	0,981	0,846	0,745	0,665	0,601
(2.33) $k_m = 1$	$10^5$	4,150	2,834	2,156	1,742	1,462	1,260	1,108	0,988	0,892
	$10^6$	3,521	2,401	1,824	1,472	1,235	1,064	0,934	0,834	0,752
	$10^7$	3,109	2,116	1,607	1,296	1,087	0,936	0,822	0,733	0,661
	$5 \cdot 10^7$	2,899	1,971	1,496	1,206	1,011	0,871	0,765	0,682	0,615
(2.34)	$10^5$	4,709	3,237	2,471	2,001	1,682	1,452	1,277	1,140	1,030
	$10^6$	3,938	2,701	2,059	1,666	1,400	1,208	1,062	0,948	0,856
	$10^7$	3,445	2,361	1,800	1,457	1,224	1,055	0,928	0,829	0,748
	$5 \cdot 10^7$	3,228	2,213	1,687	1,365	1,147	0,990	0,870	0,777	0,702

При снижении степени концентрации напряжений в детали (см. таблицу 2.2,  $\alpha_\sigma = 1,5$ ) и том же значении параметра подобия

$\lg \frac{L}{G} = 4$ , рассмотренные сравнительные закономерности

изменяются. Формула (2.33) дает большие значения коэффициента запаса по сравнению с (2.32) практически во всем диапазоне амплитуд и долговечностей, но это отличие достигает 13-20% при малых, 2-5% при средних амплитудах и фактически равно нулю при возрастании

амплитуды до 100 МПа. Как и в таблице 2.1 формула (2.34) дает большие значения коэффициента запаса по сравнению с (2.32) и (2.33). Как показали расчеты, изменение рабочего среднего напряжения не влияет существенно на рассмотренные сравнительные закономерности.

Таким образом, на основании существующих уравнений диаграмм предельных амплитуд получены формулы для расчета коэффициента запаса усталостной прочности при регулярном нагружении, позволяющие производить расчеты коэффициента запаса в широком диапазоне рабочих амплитуд, средних напряжений и базовых значений долговечности до разрушения. Установлено, что наилучшее соответствие опытным данным имеет формула (2.33), полученная на основании уравнения диаграммы предельных амплитуд Степнова (2.22), хорошо апробированного для алюминиевых, титановых сплавов и конструкционных сталей.

Как показывают расчеты для деталей из алюминиевых сплавов, формула Серенсена-Кинасошвили (2.32) при значениях теоретического коэффициента концентрации напряжений в детали  $\alpha_\sigma > 2$  дает завышенный запас усталостной прочности по сравнению с более точной формулой (2.33), полученной на основании модели Степнова. При  $\alpha_\sigma < 2$  несколько больший запас при малых рабочих амплитудах дает формула (2.33), но при амплитудах, составляющих 50-70% от предела выносливости на базе  $10^7$  циклов отличие коэффициентов запаса, рассчитанных по формулам (2.32) и (2.33) незначительно.

Во всех случаях формула (2.34), полученная на основании модели Хейвуда, дает существенно завышенный запас усталостной



прочности по сравнению с другими моделями и ее применение для целей расчета коэффициента запаса не рекомендуется.

## 2.2. Расчет на прочность при регулярной переменной нагруженности

Вероятностная трактовка условий прочности деталей машин и элементов конструкций при регулярной переменной нагруженности основывается на статистической оценке возможных случайных отклонений амплитуд переменных напряжений и величины предела выносливости или его значений, ограниченных по числу циклов, если рассматриваются условия прочности для данного ресурса по числу циклов. Случайные отклонения амплитуды регулярной переменной нагруженности деталей порождаются как случайными нарушениями режима работы, связанными с воздействием регулирующих и управляющих данной машиной систем, так и случайными отклонениями вследствие производственных и эксплуатационных влияний. Вероятность безотказной работы определяется также как и при статическом действии нагрузки. При этом в качестве предельного напряжения берется предел выносливости детали  $S = \sigma_{rd}$ , а в качестве действующего напряжения - амплитуда действующего напряжения  $\sigma = \sigma_a$ . Также как и ранее считается, что эти величины статистически независимы. Предел выносливости определяется по кривой усталости для заданной (базовой) долговечности. При расчете следует учитывать, что характеристики рассеяния предела выносливости существенно зависят от базовой долговечности. В качестве первого приближения можно считать постоянным коэффициент вариации предела выносливости [1].

Пример 2.2. Определить вероятность безотказной работы

элемента конструкции при симметричном цикле, соответствующую базовой долговечности  $10^7$  циклов (вероятность неразрушения до базовой долговечности) при действии амплитуды переменных напряжений  $\sigma_a = 90$  МПа. Коэффициент вариации действующих амплитуд составляет  $\gamma_{\sigma_a} = 0,01$ . Предел выносливости при симметричном цикле для указанной базы составляет 100 МПа. Коэффициент вариации предела выносливости составляет  $\gamma_{\sigma_{-1}} = 0,03$ . Примем нормальным закон распределения предельных и действующих амплитуд переменных напряжений. По уравнению связи имеем:

$$z(R) = \frac{n-1}{\sqrt{\gamma_{\sigma_{-1}}^2 \cdot n^2 + \gamma_{\sigma_a}^2}} = \frac{10/9-1}{\sqrt{0,03^2 \cdot (10/9)^2 + 0,01^2}} = 3,19; R = 0,99929$$

### **2.3. Расчет на прочность при нерегулярной переменной нагруженности**

Определение долговечности при нерегулярном нагружении производится обычно по следующей схеме. На первом этапе устанавливаются характеристики уровня нагруженности детали или элемента конструкции в виде функции распределения амплитуд эксплуатационных напряжений. В наиболее общем случае широкополосного процесса схематизацию случайного процесса с целью построения функции распределения амплитуд напряжений, эквивалентных случайному процессу по степени усталостного повреждения, производят одним из известных методов: максимумов, экстремумов, размахов, полных циклов, «дождя» и др. [4]. Метод полных циклов, например, дает, как принято считать, наряду с методом «дождя» наиболее приемлемые результаты для оценки

долговечности при нерегулярном нагружении. Полученные величины амплитуд напряжений располагают в возрастающем порядке, образуя вариационный ряд амплитуд. По величинам амплитуд напряжений и соответствующим ординатам наносят точки на график и проводят через эти точки линию. На основании анализа опытных данных, обработка осциллограмм случайного процесса весьма часто приводит к эмпирическим функциям распределения амплитуд напряжений существенно отличающихся от нормального или какого-либо другого из известных законов распределения. Теоретический закон распределения амплитуд напряжений зависит от метода схематизации эксплуатационных нагрузок и во многих случаях оказывается трудно определяемым. С целью практического использования полученных эмпирических функций распределения при аналитическом расчете ресурса предлагается [6] полиномиальная аппроксимация функции распределения амплитуд напряжений, которую нетрудно выполнить, например, в среде *Mathcad*.

#### 2.4. Расчет долговечности при нерегулярном нагружении

Расчет на прочность при нерегулярной переменной нагруженности предполагает использование той или иной гипотезы накопления повреждений. Например, скорректированная линейная гипотеза накопления усталостных повреждений [1] имеет следующий вид:

$$a_p = \int_{\sigma_a} \frac{dn(\sigma_a)}{N(\sigma_a)}, \quad (2.37)$$

где  $dn(\sigma_a)$  - количество циклов действия данной амплитуды переменных напряжений  $\sigma_a$  за срок службы  $N_{0,5}$ ;

$N(\sigma_a)$  - долговечность до разрушения или до образования трещины заданного размера при действии амплитуды  $\sigma_a$  (определяется по кривой усталости детали);

$a_p$  - скорректированная сумма повреждений при действии всех повреждающих амплитуд переменных напряжений.

Значение  $dn(\sigma_a)$  определяется в зависимости от вида функции распределения действующих напряжений по следующей формуле:

$$dn(\sigma_a) = N_{0,5} \cdot dF(\sigma_a) , \quad (2.38)$$

где  $dF(\sigma_a)$  - элементарная вероятность попадания амплитуд в бесконечно малый диапазон;

$$dF(\sigma_a) = f(\sigma_a) \cdot d\sigma_a . \quad (2.39)$$

$F(\sigma_a), f(\sigma_a)$  - функции распределения и плотности распределения действующих переменных амплитуд соответственно.

В работе [1] получена формула для определения величины  $a_p$ , которая зависит от особенностей спектра эксплуатационной переменной нагрузки:

$$a_p = \frac{\xi - u}{\sigma_{a\max} - u} , \quad (2.40)$$

где  $\sigma_{a\max}$  - максимальная амплитуда действующих напряжений;

$u$  – предел выносливости образца бесконечно большого диаметра или предельное повреждающее напряжение, принимаемое по данным [1] равным приблизительно половине предела неограниченной выносливости гладких лабораторных образцов стандартного размера:

$$u = 0,5 \cdot \sigma_{-1\infty}, \quad (2.41)$$

$$\xi = \frac{\int_{\sigma_{a\max}}^{\sigma_{a\max}} f(\sigma_a) \cdot \sigma_a \cdot d\sigma_a}{\int_{\sigma_{a\max}}^{\sigma_{a\max}} f(\sigma_a) \cdot d\sigma_a} \cdot \frac{u}{\sigma_{a\max}}. \quad (2.42)$$

Интегрирование в формуле (2.37) ведется по всем амплитудам вплоть до максимальной амплитуды действующего спектра или блока нагружения, превышающим предел неограниченной выносливости материала детали или элемента конструкции  $\sigma_{-1\infty}$ . Интегрирование в формуле (2.42) ведется по амплитудам превышающим предельное повреждающее напряжение  $u$ . Схема расчета долговечности до разрушения иллюстрируется рисунком 2.3.

Окончательная формула для определения оценки среднего срока службы детали или долговечности до разрушения (образования трещины заданного размера) имеет на основании уравнений (2.37)-(2.42) следующий вид:

$$N_{0,5} = \frac{a_p}{\int_{\sigma_{-1\infty}}^{\sigma_{a\max}} \frac{f(\sigma_a) \cdot d\sigma_a}{N(\sigma_a)}} \quad (2.43)$$

Таким образом для определения оценки средней долговечности при нерегулярном переменном нагружении необходимо во-первых, знать функцию распределения действующих напряжений, которая оценивается по результатам анализа спектра эксплуатационной переменной нагрузки одним из известных методов схематизации (метод размаха, максимумов, полных циклов и т.п.), во-вторых, иметь кривую усталости детали при регулярном переменном

нагрузении для определения долговечности, стоящей в знаменателе формулы (2.43).

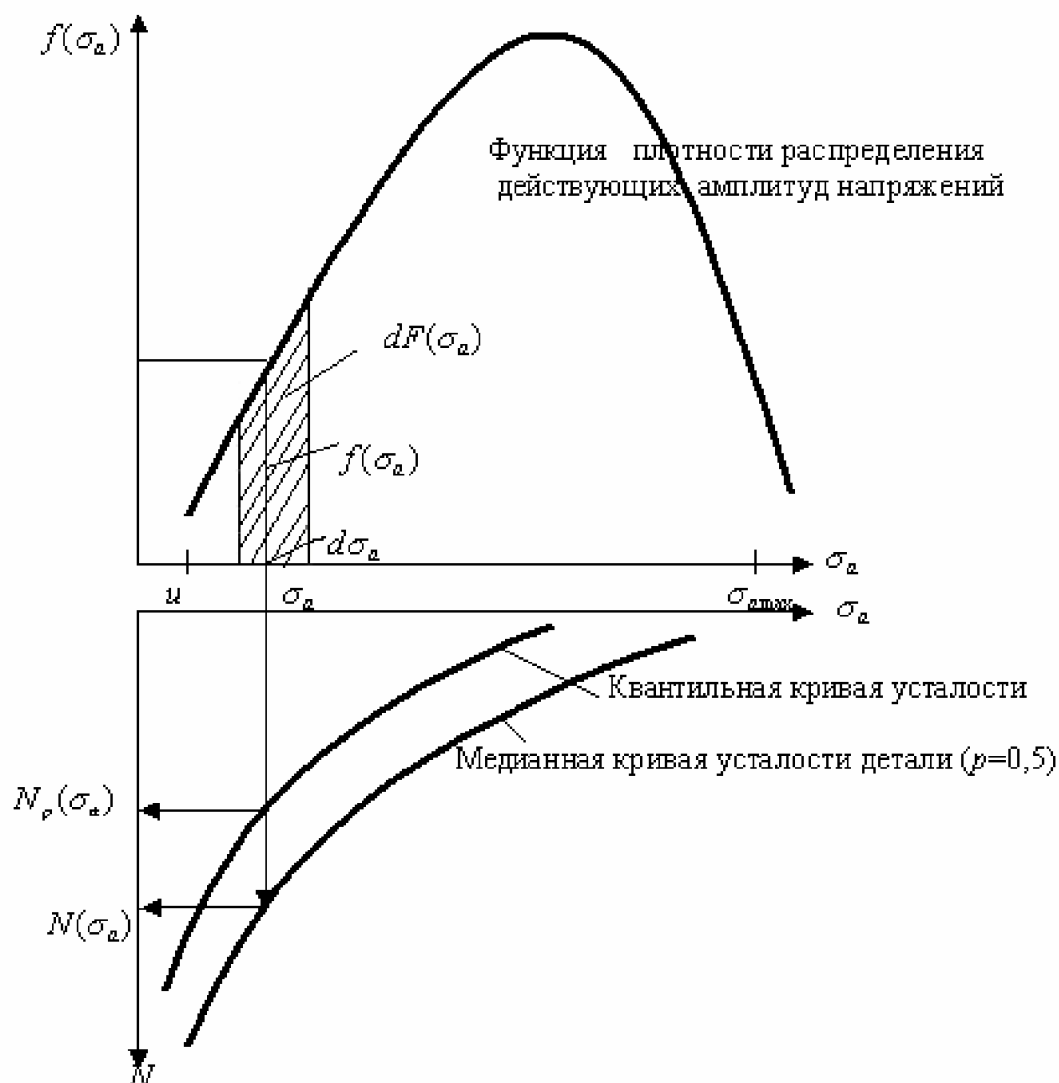


Рис. 2.3. Схема к расчету долговечности при нерегулярном переменном нагружении

Этого недостаточно для определения функции распределения долговечности при нерегулярном нагружении, которая представляет особый интерес в связи с необходимостью расчета гарантированного

ресурса для ответственных деталей и элементов конструкций авиационной техники. В работе [2] показано аналитически и подтверждено экспериментально, что для оценки долговечности при нерегулярном нагружении, соответствующей вероятности разрушения  $p$ , в формуле (2.43) вместо медианной ( $p=0,5$ ) долговечности  $N(\sigma_a)$  должна использоваться долговечность  $N_p(\sigma_a)$  (квантиль долговечности), соответствующая вероятности  $p$ , которая определяется по кривой усталости заданной вероятности разрушения (квантильной кривой усталости) (см. рисунок 2.3.).

$$N_p = \frac{a_p}{\int_{\sigma_{-1\infty}}^{\sigma_{a\max}} \frac{f(\sigma_a) \cdot d\sigma_a}{N_p(\sigma_a)}} \quad (2.44)$$

При варьировании величиной  $p$  получим функцию распределения долговечности до разрушения при нерегулярном переменном нагружении, общий вид которой представлен на рисунке 2.4.

Пример 2.3. Построить функцию распределения долговечности до разрушения детали из алюминиевого сплава при нерегулярном нагружении, заданном распределением амплитуд спектра эксплуатационной нагрузки в соответствии с законом Рэлея:

$$f(\sigma_a) = \frac{\sigma_a}{s^2} \cdot e^{\left(-\frac{\sigma_a^2}{2 \cdot s^2}\right)}, \quad (2.45)$$

где параметр  $s=30$  Мпа, максимальная амплитуда  $\sigma_{a\max} = 100$  Мпа. Эта функция представлена на рисунке 2.5.

Пусть медианная кривая усталости детали при симметричном цикле

имеет следующий вид:

$$\sigma_a = \sigma_{-1\infty} + A \cdot [\lg(N)]^{-2}, \quad (2.46)$$

где параметры  $\sigma_{-1\infty}$  и  $A$  равны соответственно 50 и 1000 МПа.

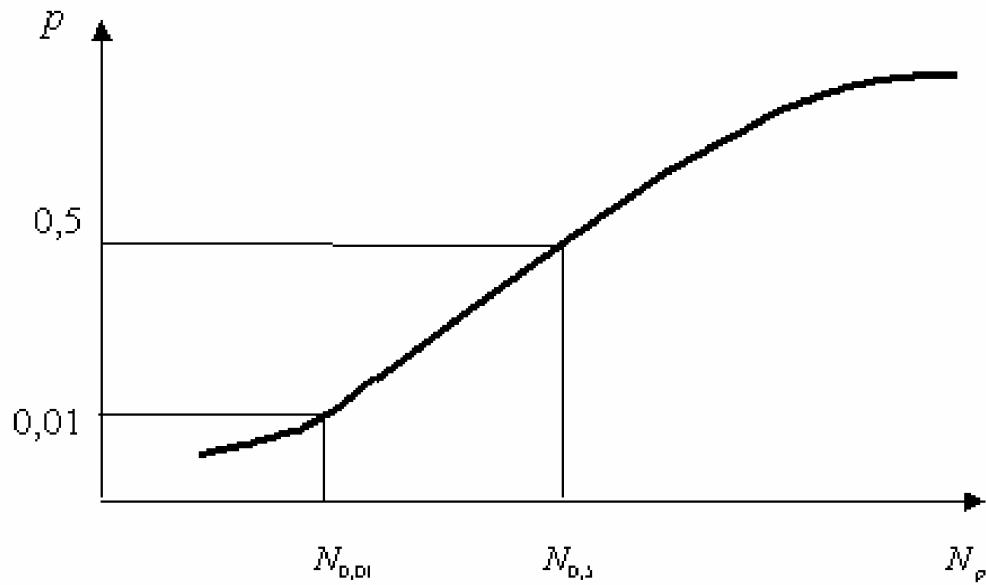


Рис. 2.4. График функции распределения долговечности до разрушения при нерегулярном переменном нагружении



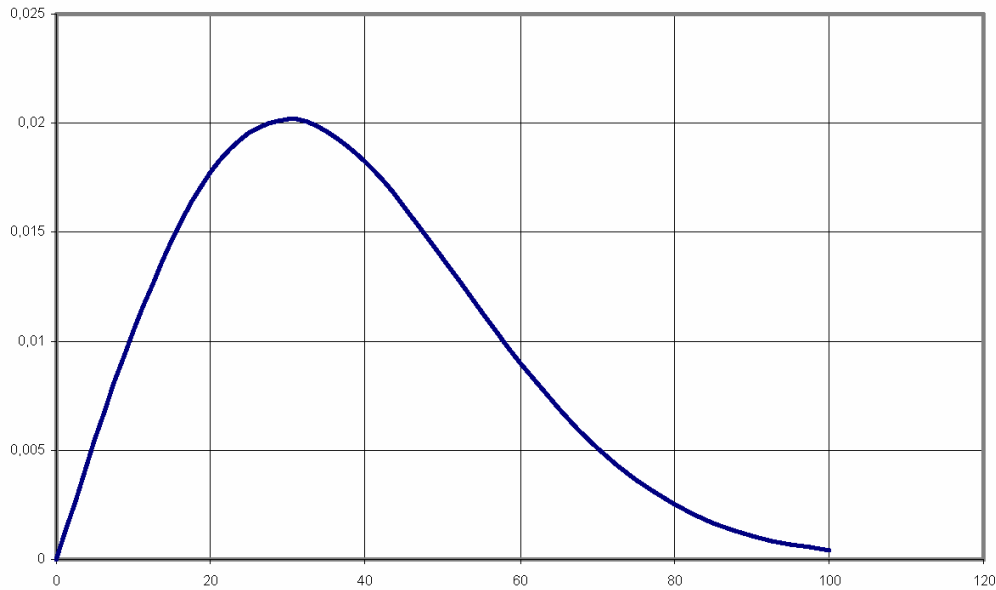
$f(\sigma_a)$  $\sigma_a$ 

Рис. 2.5. Функция плотности распределения амплитуд спектра эксплуатационной нагрузки.

Для расчета медианы долговечности достаточно этих данных. Для построения всей функции распределения необходимо располагать также параметрами квантильных кривых усталости, то есть кривых усталости, построенных по параметру вероятности разрушения. Так как построение семейства таких кривых требует большого числа экспериментальных данных, что не всегда возможно при длительных усталостных испытаниях, в первом приближении для вычисления квантили долговечности при регулярном нагружении воспользуемся известным приближением функции распределения логарифма долговечности на основании нормального закона:

$$\lg N_p = \lg N_{0,5} + s_{\lg N} \cdot z_p, \quad (2.47)$$

где  $\lg N_{0,5}$  определяется по уравнению медианной кривой усталости (2.46), а среднее квадратическое отклонение примем постоянным и равным  $s_{\lg N} = 0,15$ , что в первом приближении подтверждается большим числом экспериментальных данных [3] усталостных испытаний деталей, элементов авиаконструкций и конструктивно подобных образцов из алюминиевых сплавов. В формуле (2.47)  $z_p$  - квантиль нормированного нормального закона распределения, соответствующая вероятности  $p$ . Тогда уравнение (2.44) для определения функции распределения ресурса при нерегулярном нагружении примет следующий вид:

$$N_p = \frac{a_p}{\int_{50}^{100} \frac{\sigma_a \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_a^2}{1800}\right) \cdot d\sigma_a}{10 \left(\frac{\sigma_a - 50}{1000}\right)^{-0,5} + z_p \cdot 0,15}}, \quad (2.48)$$

$$a_p = \frac{\frac{\int_{25}^{100} \sigma_a \cdot f(\sigma_a) \cdot d\sigma}{\int_{25}^{100} f(\sigma_a) \cdot d\sigma} - 25}{100 - 25} \quad (2.49)$$

Расчет по формулам (2.48), (2.49), проведенный в среде *Mathcad* функции распределения долговечности при нерегулярном переменном нагружении представлен в таблице 2.3.

Таблица 2.3. Расчет функции распределения логарифма долговечности при нерегулярном нагружении

$p$	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
(2.48)	5,74	5,842	5,896	5,962	6,01	6,089	6,167	6,215	6,281	6,335	6,437
(2.51)	6,45	6,552	6,607	6,673	6,72	6,799	6,878	6,925	6,991	7,046	7,148

В таблице 2.3. для примера представлен также расчет логарифма долговечности при той же нагруженности, но по степенному уравнению кривой усталости с нулевым значением предела неограниченной выносливости:

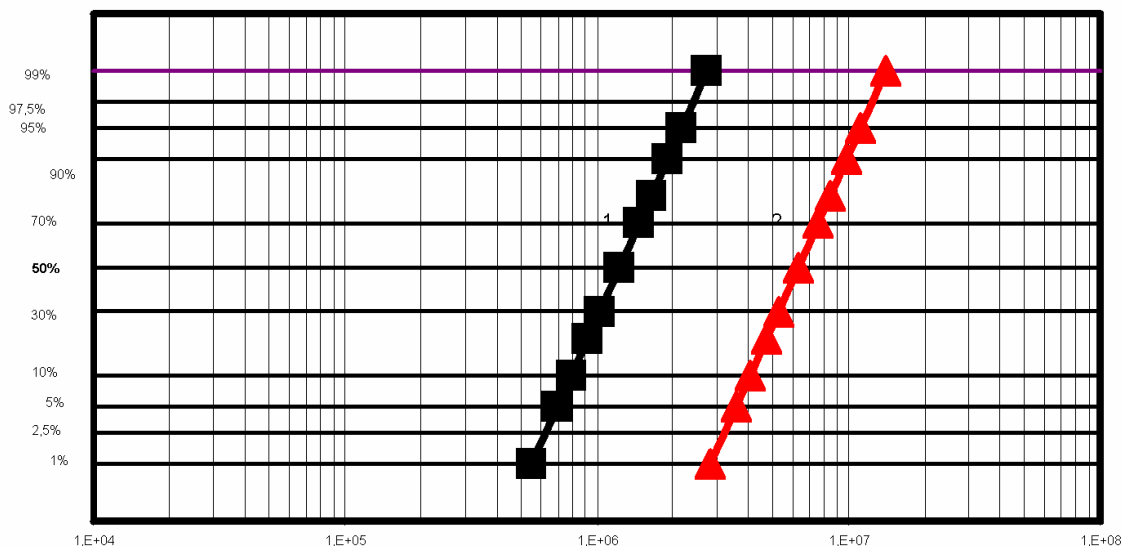
$$N = \left( \frac{C}{\sigma} \right)^m, \quad (2.50)$$

где параметр  $m=4$ ,  $C = 10^{3,5}$ . На рисунке 2.6 построены графики этих функций на нормальной вероятностной бумаге.

$$N_p = \frac{a_p}{\int_0^{100} \frac{\sigma_a}{900} \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_a^2}{1800}\right) \cdot d\sigma_a}{\left(\frac{10^{3,5}}{\sigma_a}\right)^4 \cdot 10^{z_p \cdot 0,15}}, \quad (2.51)$$

$$a_p = \frac{\int_0^{100} \sigma_a \cdot f(\sigma_a) \cdot d\sigma_a}{\int_0^{100} f(\sigma_a) \cdot d\sigma_a} \cdot 100 \quad (2.52)$$

$p\%$



$N$

Рис. 2.6. Расчетные функции распределения логарифма долговечности при нерегулярном нагружении по уравнениям(2.48) (линия 1), (2.51) (линия 2).

Отметим, что при расчете по уравнению (2.48) значение  $a_p$  составило 0,283, а при расчете по уравнению (2.51)–0,373. Кривые усталости для двух рассматриваемых в примере вариантов представлены на рисунке 2.7.

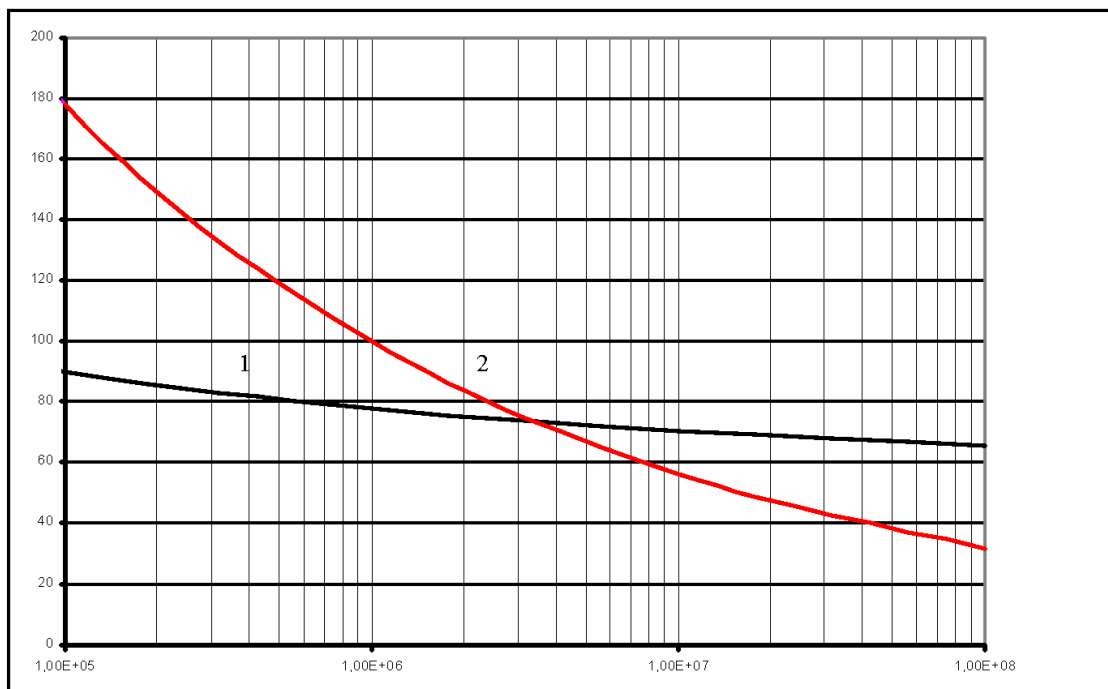
Основой расчета долговечности при нерегулярной нагрузке, как видно из рассмотренных выше примеров, является обоснование уравнения кривой усталости детали при регулярном нагружении. Наиболее надежным способом обоснования такой кривой усталости являются прямые усталостные испытания натуральных деталей с последующей статистической обработкой их результатов. Как показывают расчеты [6] для достижения достаточной точности оценивания характеристик усталостных свойств при усталостных испытаниях требуется порядка 30-50 объектов, что в условиях

натурных испытаний является практически нереальным. В практике авиационных расчетных подразделений сложился комбинированный способ обоснования кривой усталости натурных деталей, суть которого заключается в выявлении опасных зон элемента конструкции (ресурсоограничивающих зон), изучении конструктивных и технологических особенностей этих зон, их нагруженности и последующего создания моделей или так называемых конструктивно-подобных образцов, которые по основным конструктивным, масштабным и другим характеристикам были бы подобны деталям в опасных зонах элемента конструкции. Испытаниям подвергаются в дальнейшем эти модельные образцы, стоимость которых ненамного выше обычных лабораторных образцов. В основном в качестве таких моделей в авиации используются для целей обоснования кривой усталости плоские образцы с отверстием, моделирующие масштабный эффект и концентрацию напряжений натурной детали. Полученная таким образом кривая усталости лишь приближенно отражает действительную кривую усталости элемента конструкции. Для уточнения такой кривой усталости по возможности следует проводить хотя бы единичные испытания натурной детали на одном уровне регулярной нагрузки. При этом в первом приближении можно считать, что показатель степени кривой усталости натурной детали равен показателю степени кривой усталости модельных образцов (то есть кривые усталости являются эквидистантными), но значение второго параметра уравнения кривой усталости, определяющего сдвиг одной кривой относительно другой, может быть уточнено.

В последние годы активно развиваются вероятностно-статистические методы обоснования расчетных характеристик выносливости натурных деталей, целью которых является построение

кривых усталости натуральных деталей и элементов конструкций без предварительных испытаний этих деталей, а лишь на основе некоторых критериев подобия усталостного разрушения, постоянство которых у моделей и натурной детали, обеспечивает возможность прогнозирования расчетных характеристик выносливости натуральных деталей по результатам испытаний модельных образцов. Ниже рассматривается одна из таких теорий, получившая название статистической теории подобия усталостного разрушения профессора В.П. Когаева.

$\sigma_a$



$N$

Рис. 2.7. Кривые усталости детали при симметричном нагружении, построенные по уравнениям (2.46) (кривая 1), (2.50) (кривая 2).

## Литература

1. Афанасьев Н.Н. Статистическая теория усталостной прочности металлов. Киев, Изд. АН УССР, 1953, 123 с.
2. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965, 279 с.
3. Волков С.Д. Статистическая теория прочности. М.: Машгиз, 1960, 176 с.
4. Weibull W.A. A statistical theory of the strength of materials. Proc. Royal Swedish Institute for Engineering Research. Stockholm, 1939, N 151, p.45.
5. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М.: Машиностроение, 1977, 232 с.
6. Агамиров Л.В. Разработка статистических методов оценивания характеристик усталостных свойств материалов и показателей надежности элементов конструкций авиационной техники. Докт. дисс. М.: МАТИ, 1994.
7. Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М.: Машиностроение, 1975, с.488.
8. Степнов М.Н., Гиацинтов Е.В. Усталость легких конструкционных сплавов. М.: Машиностроение, 1976, с.230.

9. Soderberg C.R., Factor of Safety and Working Stresses. Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., vol. 52, part 1, 1930.
10. Киммельман Д.Н. Определение запасов прочности при переменных нагрузках асимметричных циклов, 1946.
11. Степнов М.Н. Расчетно-экспериментальный метод построения диаграмм предельных амплитуд для конструкционных деформируемых алюминиевых сплавов с учетом концентрации напряжений.// Вестник машиностроения.-1998.- № 9- с.11-17.
12. Хейвуд Р.Б. Проектирование с учетом усталости. М.: Машиностроение, 1969, с. 504.
13. Степнов М.Н., Мозалев В.В., Лисин А.Н., Агамиров Л.В., Евстратова С.П. Расчетный метод точечного и интервального оценивания квантильных кривых усталости деталей машин.// Проблемы машиностроения и надежности машин.- 1994.- № 4.- с. 38 - 43.
14. Степнов М.Н., Евстратова С.П. и др. Расчетно-экспериментальные методы оценки характеристик сопротивления усталости конструкционных алюминиевых сплавов при асимметричном нагружении.// Проблемы машиностроения и надежности машин.-1998.- № 2.- с. 117 - 122.



15. Степнов М.Н., Николаев А.В. Расчетно-экспериментальные методы оценки характеристик сопротивления усталости конструкционных алюминиевых сплавов при осевом нагружении.//Заводская лаборатория.-1998.- № 7.- с. 38 – 40.
16. Степнов М.Н. и др. Косвенная оценка пределов выносливости титановых сплавов при переменном изгибе, растяжении-сжатии и кручении.//Заводская лаборатория.-1999.- № 3.