ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА
ПРОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ЧАСТЬ 1
РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ
НАГРУЖЕНИИ
Методические указания

Вероятностные методы расчета прочности и надежности механических систем

1. Расчет на прочность при статическом нагружении

1.1. Введение

Надежностью называется свойство объекта выполнять заданные функции, сохраняя во времени значения установленных эксплуатационных показателей в заданных пределах, соответствующих заданным режимам и условиям использования, технического обслуживания, ремонта, хранения и транспортирования. Количественно надежность определяется вероятностью безотказной работы. Вероятностью безотказной работы называется вероятность того, что при работе в заданных условиях система будет удовлетворительно функционировать в течение установленного промежутка времени. Таким образом, надежность имеет вероятностный характер. Вероятность отказа как функция времени определяется следующим образом:

$$P\{t < T\} = F(T), \quad t > 0, \qquad (1.1)$$

где t - случайная величина, обозначающая наработку до отказа;

$F(T)$ - вероятность того, что система выйдет из строя к моменту времени T. $F(T)$ представляет собой функцию распределения наработки до отказа.

Вероятность безотказной работы или вероятность того, что невосстанавливаемая система будет выполнять требуемую функцию в заданный момент времени $t=T$, можно записать в виде:

$$R(T) = 1 - F(T) = P\{t > T\}, \qquad (1.2)$$

где $R(T)$ - вероятность безотказной работы.

Если случайная величина t имеет плотность распределения $f(t)$, то

$$R(T) = 1 - F(T) = 1 - \int_0^T f(t)dt = \int_T^\infty f(t)dt \qquad (1.3)$$

Так, например, если наработка до отказа имеет распределение Вейбулла

$$F(T) = 1 - exp(-((T-T_o)/c)^b), \qquad (1.4)$$

то вероятность безотказной работы равна:

$$R(T) = exp(-((T-T_o)/c)^b), \qquad (1.5.)$$

где $T > T_o$, $b > 0$, $c > 0$.

Среднее время безотказной работы $M\{t\}$ определяется из следующего выражения:

$$M(t) = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty R(t)dt \qquad (1.6)$$

Частота, с которой происходят отказы и неисправности, используется как параметр для математического определения надежности. Этот параметр называется интенсивностью отказов и измеряется обычно числом отказов за 1 час работы. Обратная величина называется средней наработкой на отказ и измеряется в часах. Вероятность безотказной работы в интервале $t;\ t+\Delta t$ равна $R(t) - R(t+\Delta t)$. Интенсивность отказов равна

$$\Delta h = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} \qquad (1.7)$$

Мгновенное значение интенсивности отказов определяется как предел интенсивности отказов, когда длина интервала стремится к нулю:

$$h(t) = \frac{1}{R(t)}\left[-\frac{dR(t)}{dt}\right] = \frac{f(t)}{R(t)} \qquad (1.8)$$

Для экспоненциального, Вейбулла и нормального распределений плотность вероятности, вероятность безотказной работы и интенсивность отказов имеют следующий вид:

экспоненциальное распределение:

$$f(t) = \frac{1}{c} \cdot \exp(-t/c);\ R(t) = \exp(-t/c);\ h(t) = 1/c = const \ , \qquad (1.9)$$

распределение Вейбулла – Гнеденко:

$$f(t) = \frac{b}{c} \cdot \exp(-((t-t_0)/c)^b) \cdot (t-t_0)^{b-1};$$

$$R(t) = \exp(-((t-t_0)/c)^b);\ h(t) = \frac{b}{c} \cdot (t-t_0)^{b-1} \qquad (1.10)$$

нормальное распределение:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \exp(-((t-a)^2/2 \cdot \sigma^2));\ R(t) = 1 - \int_{-\infty}^{t} f(x) \cdot dx;\ h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}, \qquad (1.11)$$

где b, c, t_0, a, σ - параметры распределений.

Пример 1.1. Применительно к нормальному закону распределения с параметрами $a = 2 \cdot 10^4$ циклов, $\sigma = 2000$ циклов найти вероятность безотказной работы элемента и интенсивность отказов при наработке 19000 циклов.

$$R(19000) = 1 - \Phi(\frac{19000 - 20000}{2000}) = 0{,}691 \ ,$$

$$h(19000) = \frac{f(\frac{19000 - 20000}{2000})}{0{,}691 \cdot 2000} = \frac{0{,}3521}{0{,}691 \cdot 2000} = 0{,}000254 \text{ отказов/цикл.}$$

1.2. Классификация отказов

Приработочные отказы происходят в течение раннего периода эксплуатации элемента конструкции. Они происходят вследствие плохой технологии производства и плохого контроля качества. Приработочные отказы могут быть исключены процессами отбраковки - приработки. Для этого обычно элемент конструкции испытывают в условиях близких к эксплуатационным в течение некоторого времени. Износовые отказы возникают в конструкциях, которые неправильно обслуживаются или совсем не обслуживаются. Причиной износовых отказов является старение элементов конструкций. Износовые отказы в большинстве случаев могут быть предотвращены за счет своевременной замены изношенных элементов конструкций. Внезапные отказы не могут быть устранены ни при отладке и при лучшем обслуживании. Они возникают вследствие внезапной концентрации перегрузок, превышающих расчетную нагрузку. Внезапные отказы иногда называют катастрофическими, что не совсем точно, так как приработочные и износовые отказы также могут быть катастрофическими по своим последствиям. Характеристики надежности элементов конструкций определяются частотой внезапных отказов. Им уделяется главное внимание при удалении причин, вызывающих приработочные и износовые отказы. На основании вышеизложенного изменение интенсивности отказов с течением времени имеет вид представленный на рис.1.1.

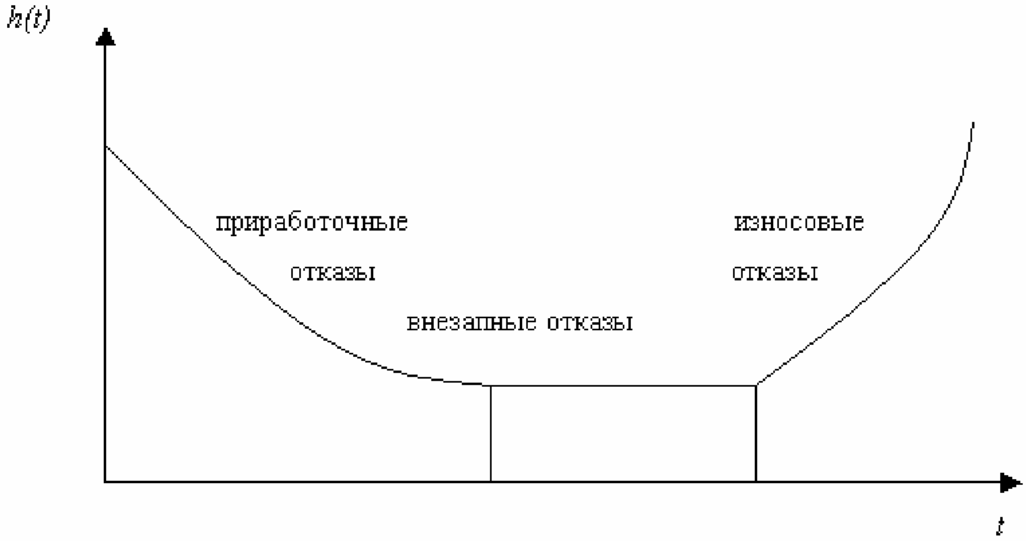


рис.1.1. Изменение интенсивности отказов за срок службы

1.3. Определение вероятности безотказной работы

Чтобы оценить надежность, то есть определить вероятность безотказной работы, необходимо знать распределения действующих σ_0 и предельных напряжений S [1]. Обозначим через $f(\sigma)$ и $\varphi(S)$ – соответствующие плотности распределения. Тогда вероятность безотказной работы (см. рис. 1.2.) имеет вид:

$$R = P(\sigma > S) = P(S - \sigma > 0) \ . \tag{1.12}$$

Вероятность того, что предельное напряжение S превышает действующее напряжение σ_0 равна:

$$P(S > \sigma_0) = \int_{\sigma_0}^{\infty} f(S)dS \ . \tag{1.13}$$

Вероятность того, что действующее напряжение заключено в малом интервале $d\sigma$, а предельное напряжение превышает напряжение, задаваемое этим интервалом, при условии независимости случайных величин S и σ, имеет вид:

$$\Omega = f(\sigma_0) \cdot d\sigma \cdot \int_{\sigma_0}^{\infty} \varphi(S) dS \,. \qquad (1.14)$$

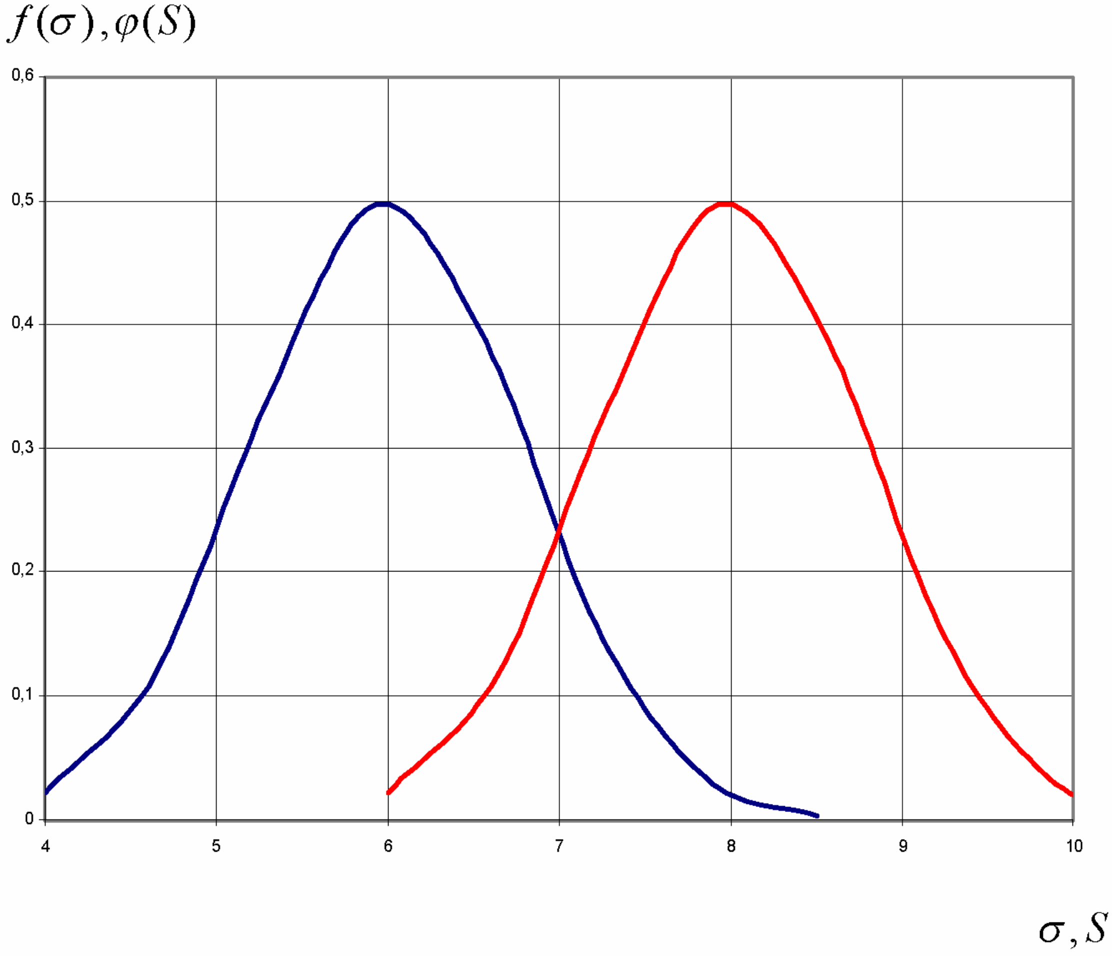


Рис.1.2. Плотности распределения действующих и предельных напряжений

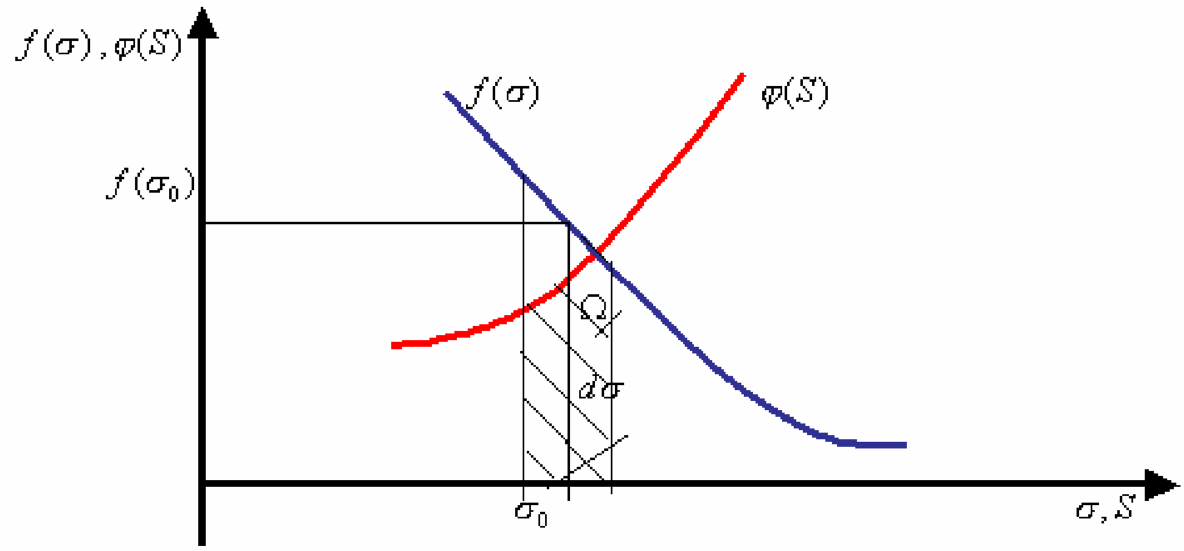


Рис. 1.3. К выводу формулы вероятности безотказной работы

Это есть площадь Ω заштрихованного участка на рис. 1.3. Вероятность безотказной работы есть вероятность того, что предельное напряжение превышает действующее напряжение для всех возможных значений действующих напряжений:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\cdot d\sigma \cdot \int_{\sigma}^{\infty} \varphi(S)dS \quad . \tag{1.15}$$

или на основании свойств определенного интеграла:

$$R = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(S)\cdot dS \cdot \int_{S}^{\infty} f(\sigma)d\sigma \quad . \tag{1.16}$$

В нижеприведенных примерах все расчеты выполнены в среде *Mathcad*.

Пример 1.2. Вывести формулу для вероятности безотказной работы при нормальном распределение действующих $N(a_\sigma, g_\sigma)$ и предельных $N(a_s, g_s)$ напряжений.

Случайная величина $y = S - \sigma$ имеет нормальное распределение с параметрами $N(a_y, g_y)$, где $a_y = a_s - a_\sigma$, $g_y^2 = g_\sigma^2 + g_s^2$. Вероятность безотказной работы равна:

$$R = P(y > 0) = \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{(y-a_y)^2}{2\cdot g_y^2}\right)}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot g_y}\cdot dy\ . \tag{1.17}$$

Если ввести нормированную величину $z = (y - a_y)/g_y$, то уравнение (1.17) будет иметь следующий вид:

$$R = \Phi(z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{z_0}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz\ , \tag{1.18}$$

где

$$z_0 = z(y=0) = \frac{a_s - a_\sigma}{\sqrt{g_\sigma^2 + g_s^2}}\ . \tag{1.19}$$

Уравнение (1.19) называется уравнением связи.

Принимая в качестве коэффициента запаса статической прочности величину $n = a_s / a_\sigma$, получим:

$$z_0 = \frac{n-1}{\sqrt{\gamma_\sigma^2 + \gamma_s^2\cdot n^2}}, \tag{1.20}$$

где $\gamma_\sigma = \dfrac{g_\sigma}{a_\sigma}$,$\gamma_s = \dfrac{g_s}{a_s}$ - коэффициенты вариации действующих и предельных напряжений соответственно.

Пусть известно, что напряжение, возникающее в элементе двигателя имеет нормальное распределение с параметрами $a_\sigma = 350\ МПа$, $g_\sigma = 40\ МПа$. Вследствие воздействия температуры предельное напряжение имеет случайные колебания. Оно имеет нормальное распределение с параметрами $a_s = 820\,МПа,\ g_s = 80\,МПа$. Определить вероятность безотказной работы.

По уравнению (1.19) имеем:

$$z_0 = \frac{820 - 350}{\sqrt{40^2 + 80^2}} = 5{,}25; \quad R = \Phi(5{,}25) = 0{,}9999999 .$$

Пример 1.3. Вывести зависимость коэффициента запаса статической прочности от вероятности безотказной работы.

Решая уравнение (1.20) относительно величины *n*, получим следующее уравнение для расчета зависимости коэффициента запаса статической прочности от вероятности безотказной работы:

$$n(R) = \frac{1 + \sqrt{1 - \left[1 - \left[z(R)\cdot\gamma_s\right]^2\right]\cdot\left[1 - \left[z(R)\cdot\gamma_\sigma\right]^2\right]}}{1 - \left[z(R)\cdot\gamma_s\right]^2} \;, \qquad (1.21)$$

где $z(R)$ - квантиль нормированного нормального закона распределения уровня *R*, то есть соответствующая вероятности безотказной работы *R*.

В таблице 1.1. представлены результаты расчета по формуле (1.21) при $\gamma_\sigma = 0{,}1; \gamma_s = 0{,}07$.

Таблица 1.1.

R	0,5	0,99	0,995	0,99865	0,999	0,9999	0,99999	0,999999	0,9999999
$z(R)$	0	2,32635	2,57583	2,99998	3,09023	3,71902	4,26489	4,74342	5,19934
$n(R)$	1	1,31634	1,35502	1,42351	1,43855	1,54846	1,65203	1,75226	1,85098

Пример 1.4. Вывести формулу для вероятности безотказной работы при распределении Вейбулла-Гнеденко для действующих и предельных напряжений.

При интегрировании по уравнениям (1.15), (1.16) несимметричных функций типа функции плотности распределения

Вейбулла-Гнеденко:

$$f(\sigma)=\frac{b_\sigma}{c_\sigma}e^{-\left[\frac{\sigma-\sigma_0}{c_\sigma}\right]^{b_\sigma}}\cdot(\sigma-\sigma_0)^{b_\sigma-1},\varphi(S)=\frac{b_s}{c_s}e^{-\left[\frac{S-S_0}{c_s}\right]^{b_s}}\cdot(S-S_0)^{b_s-1}. \qquad (1.22)$$

следует исходить из того, какое из пороговых значений σ_0 или S_0 больше. Если $\sigma_0 > S_0$, то интегрировать следует по уравнению (1.15) с тем чтобы внешний интеграл без учета внутреннего давал граничную величину равную единице. В этом случае имеем:

$$R=\int_{\sigma_0}^{\infty}\frac{b_\sigma}{c_\sigma}e^{-\left[\frac{\sigma-\sigma_0}{c_\sigma}\right]^{b_\sigma}}\cdot(\sigma-\sigma_0)^{b_\sigma-1}\cdot e^{-\left[\frac{\sigma-S_0}{c_s}\right]^{b_s}}\cdot d\sigma\ . \qquad (1.23)$$

Так, например, при

$b_\sigma=1{,}5$; $c_\sigma=100\,МПа$; $\sigma_0=60\ МПа$; $b_S=2{,}5$; $c_S=450\,МПа$, $S_0=50\,МПа$,

вероятность безотказной работы по формуле (1.23) составляет 0,9616.

Если $S_0 > \sigma_0$, то следует пользоваться формулой (1.16):

$$R=1-\int_{S_0}^{\infty}\frac{b_s}{c_s}e^{-\left[\frac{S-S_0}{c_s}\right]^{b_s}}\cdot(S-S_0)^{b_s-1}\cdot e^{-\left[\frac{S-\sigma_0}{c_\sigma}\right]^{b\sigma}}\cdot dS\ . \qquad (1.24)$$

Так, например, при

$b_\sigma=1{,}5; c_\sigma=100МПа, \sigma_0=60МПа, b_S=2{,}5; c_S=450МПа, S_0=80МПа,$

вероятность безотказной работы по формуле (1.24.) составляет 0,9766.

Пример 1.5. Вывести формулу для вероятности безотказной работы при нормальном распределении действующих и Вейбулла-Гнеденко для предельных напряжений.

$$\varphi(\sigma)=\frac{e^{-\frac{(\sigma-a_\sigma)^2}{g_\sigma^2}}}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot g_\sigma}, \qquad \varphi(S)=\frac{b_s}{c_s}e^{-\left[\frac{S-S_0}{c_s}\right]^{b_s}}\cdot(S-S_0)^{b_s-1}.$$

В этом случае, чтобы получить однократный интеграл необходимо пользоваться формулой (1.15.), но поскольку внутренний интеграл, при ограничении снизу нормального закона отличным от нуля пороговым значением S_0 закона Вейбулла-Гнеденко, не будет достигать единицы формулу (1.15) следует преобразовать следующим образом:

$$R = 1 - \int_{S_0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\sigma - a_\sigma)^2}{g_\sigma^2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot g_\sigma} \cdot \left\{ 1 - e^{-\left[\frac{\sigma - S_0}{c_s}\right]^{b_s}} \right\} \cdot d\sigma . \qquad (1.25)$$

Так, например, при

$a_\sigma = 60\,МПа;\ g_\sigma = 10\,МПа;\ b_s = 1{,}5; c_s = 50\,МПа, S_0 = 60\,МПа$,

вероятность безотказной работы по формуле (1.25) составляет 0,9645. Аналогично производятся расчеты при Вейбулла-Гнеденко распределении для действующих и нормальном распределении для предельных напряжений.

$$f(\sigma) = \frac{b_\sigma}{c_\sigma} e^{-\left[\frac{\sigma - \sigma_0}{c_\sigma}\right]^{b_\sigma}} \cdot (\sigma - \sigma_0)^{b_\sigma - 1}, \qquad \varphi(S) = \frac{e^{-\frac{(S - a_s)^2}{g_s^2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot g_s} .$$

Пример 1.6. Определить допустимое значение внешней силы P при растяжении полого стержня круглого поперечного сечения (α=0,8) внешнего диаметра d=5 см, если математическое ожидание предельного напряжения a_S=200 МПа, вероятность безотказной работы равна R=0,999, коэффициент вариации предельного и действующего напряжения соответственно равны: γ_S=0,07; γ_σ=0,1.

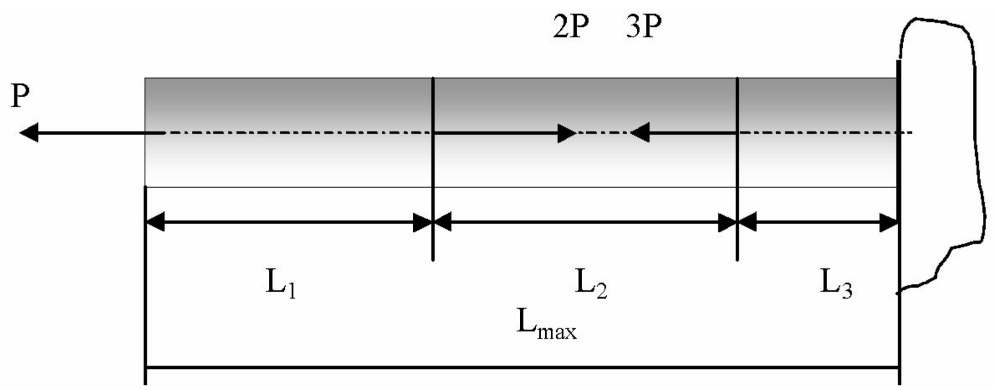
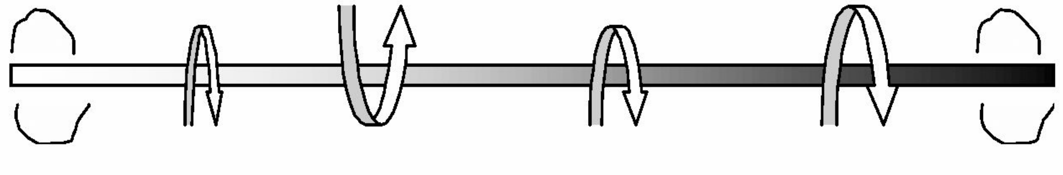


Рис.1.4. Схема к примеру 1.6.

В соответствии с таблицей 1.1. коэффициент запаса статической прочности при заданной вероятности безотказной работы 0,999 равен 1,4385. Наибольшее значение продольной силы действует на третьем участке и равно *2P*. Величина неизвестной внешней силы определяется из следующего уравнения:

$$P = \frac{F \cdot a_S}{n(0{,}999) \cdot 2} = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot (1-\alpha^2) \cdot a_S}{n(0{,}999) \cdot 8} = \frac{3{,}1415 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot (1-0{,}64) \cdot 200 \cdot 10^6}{1{,}4385 \cdot 8} = 4{,}91 \cdot 10^4\ H.$$

Пример 1.7. Проверить прочность полого вала (α=0,8) внешнего диаметра d=3 см, если математическое ожидание предельного напряжения a_S=350 МПа, вероятность безотказной работы равна R=0,999, коэффициент вариации предельного и действующего напряжения соответственно равны: γ_S=0,07; γ_σ=0,1. Максимальный момент составляет 700 нм.



Фактическое значение коэффициента запаса статической прочности при кручении определяется по следующей формуле:

$$n_f = \frac{a_s \cdot W_p}{M_{\max}} = \frac{350 \cdot 10^6 \cdot \pi d^3 \cdot (1-\alpha^4)}{700 \cdot 16} = \frac{350 \cdot 10^6 \cdot 3{,}141593^3 \cdot 10^{-6} \cdot (1-0{,}8^4)}{700 \cdot 16} = 1{,}565$$

Расчетный коэффициент запаса для заданной вероятности безотказной работы 0,999 составляет 1,4385, то есть требуемый уровень надежности обеспечен.

Пример 1.8. Определить размеры прямоугольного поперечного сечения ($h=2*b$) балки при изгибе, если математическое ожидание предельного напряжения a_S=200 МПа, вероятность безотказной работы равна R=0,999, коэффициент вариации предельного и действующего напряжения соответственно равны: γ_S=0,07; γ_σ=0,1. Максимальный изгибающий момент составляет 1250 нм.

Действующие напряжения при изгибе определяются по следующей формуле:

$$a_\sigma = \frac{6 \cdot M}{b \cdot h^2} = \frac{3 \cdot M}{2 \cdot b^3} \quad .$$

Размеры прямоугольного поперееченого сечения определяются по следующей формуле:

$$b = \sqrt[3]{\frac{n(0{,}999) \cdot M_{\max} \cdot 3}{a_s \cdot 2}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}4385 \cdot 1250 \cdot 3}{200 \cdot 10^6 \cdot 2}} = 0{,}019 \text{ м.}$$

Пример 1.9. Пусть стержень круглого поперечного сечения диаметром d растягивается силой P. Предположим, что сила P является случайной величиной с нормальным законом распределения с параметрами $a_p = 17{,}8$ кН, $\sigma_p = 445$ Н. Временное сопротивление S материала стержня является также случайной величиной, подчиняющейся нормальному закону распределения с параметрами $a_s = 690$ МПа, $\sigma_s = 34{,}5$ МПа. Определить диаметр стержня при заданной вероятности безотказной работы R=0,9999, если ожидаемое значение коэффициента вариации диаметра γ_d составляет 0,06.

Нормальные напряжения при растяжении-сжатии определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F}.$$

Дисперсия действующих напряжений по теореме о дисперсии функции случайных величин приближенно равна:

$$D(y) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{dy}{dx})_i^2 \cdot D(x_i); \;\; D(\sigma) = \frac{\sigma_p^2}{a_F^2} + \frac{a_p^2 \cdot \sigma_F^2}{a_F^4}; \; \sigma_F^2 = 0.25 \cdot \pi^2 \cdot a_d^2 \cdot \sigma_d^2 \cdot$$

$$D(\sigma) = \frac{\sigma_p^2 \cdot 16}{\pi^2 \cdot a_d^4} + \frac{64 \cdot a_p^2 \cdot \sigma_d^2}{\pi^2 \cdot a_d^6} = \frac{\sigma_p^2 \cdot 16}{\pi^2 \cdot a_d^4} + \frac{64 \cdot a_p^2 \cdot \gamma_d^2}{\pi^2 \cdot a_d^4}.$$

По уравнению связи (1.19.) имеем:

$$3{,}71 = \frac{a_s - \dfrac{4 \cdot a_p}{\pi \cdot a_d^2}}{\sqrt{\sigma_s^2 + \dfrac{\sigma_p^2 \cdot 16 + 64 \cdot a_p^2 \cdot \gamma_d^2}{\pi^2 \cdot a_d^4}}}.$$

Решая это уравнение относительно a_d методом последовательных приближений получим $a_d = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ м.

Литература

1. Афанасьев Н.Н. Статистическая теория усталостной прочности металлов. Киев, Изд. АН УССР, 1953, 123 с.
2. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965, 279 с.
3. Волков С.Д. Статистическая теория прочности. М.: Машгиз, 1960, 176 с.
4. Weibull W.A. A statistical theory of the strength of materials. Proc. Royal Swedish Institute for Engineering Research. Stockholm,1939, N 151, p.45.
5. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М.: Машиностроение, 1977, 232 с.
6. Агамиров Л.В. Разработка статистических методов оценивания характеристик усталостных свойств материалов и показателей надежности элементов конструкций авиационной техники. Докт. дисс. М.: МАТИ, 1994.
7. Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М.: Машиностроение, 1975, с.488.
8. Степнов М.Н., Гиацинтов Е.В. Усталость легких конструкционных сплавов. М.: Машиностроение, 1976, с.230.
9. Soderberg C.R., Factor of Safety and Working Stresses. Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., vol. 52, part 1, 1930.
10. Киммельман Д.Н. Определение запасов прочности при переменных нагрузках асимметричных циклов, 1946.

11. Степнов М.Н. Расчетно-экспериментальный метод построения диаграмм предельных амплитуд для конструкционных деформируемых алюминиевых сплавов с учетом концентрации напряжений.// Вестник машиностроения.-1998.- № 9- с.11-17.
12. Хейвуд Р.Б. Проектирование с учетом усталости. М.: Машиностроение, 1969, с. 504.
13. Степнов М.Н., Мозалев В.В., Лисин А.Н., Агамиров Л.В., Евстратова С.П. Расчетный метод точечного и интервального оценивания квантильных кривых усталости деталей машин.// Проблемы машиностроения и надежности машин.-1994.- № 4.- с. 38 - 43.
14. Степнов М.Н., Евстратова С.П. и др. Расчетно-экспериментальные методы оценки характеристик сопротивления усталости конструкционных алюминиевых сплавов при асимметричном нагружении.// Проблемы машиностроения и надежности машин.-1998.- № 2.- с. 117 - 122.
15. Степнов М.Н., Николаев А.В. Расчетно-экспериментальные методы оценки характеристик сопротивления усталости конструкционных алюминиевых сплавов при осевом нагружении.//Заводская лаборатория.-1998.- № 7.- с. 38 – 40.
16. Степнов М.Н. и др. Косвенная оценка пределов выносливости титановых сплавов при переменном изгибе, растяжении-сжатии и кручении.//Заводская лаборатория.-1999.- № 3.