

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА
УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

Учебное пособие

Изложены основные положения теории расчета стержневых систем со сжатыми элементами на устойчивость методом перемещений. Особое внимание уделено вопросам, недостаточно отраженным в учебной литературе – анализу предпосылок линейной теории устойчивости, физическому смыслу возможных решений уравнения устойчивости, понятиям общей и локальной потери устойчивости. Описывается методика и общий алгоритм определения критического параметра нагрузки и выявления формы потери устойчивости.

Приведены примеры расчета плоских рам на устойчивость, в том числе с применением ЭВМ, раскрывающие основные особенности и трудности, встречающиеся в такого рода задачах.

Приложением даны необходимые справочные материалы – таблицы типовых эпюр и матриц для элементов плоских стержневых систем и значений специальных функций метода перемещений для расчета на устойчивость.

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	5
1.1. Исходные предпосылки	5
1.2. Основная система и канонические уравнения метода перемещений в расчетах на устойчивость	9
1.3. Уравнение устойчивости и определение критического параметра нагрузки	15
1.4. Определение формы потери устойчивости	26
1.5. Общий алгоритм расчета стержневых систем на устойчивость методом перемещений	28
2. ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ В РАСЧЕТАХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ	29
2.1. Описание и возможности программы STELF	29
2.2. Подготовка исходных данных для расчета на ЭВМ	31
2.3. Расшифровка информации, выданной компьютером	33
3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ	35
3.1. Расчет плоской рамы	35
3.2. Компьютерный расчет рамы	46
3.3. Расчет рамы на устойчивость с учетом симметрии	49
4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	54
5. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ «РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ РАМЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ»	57
5.1. Содержание расчетно-графического задания	57
5.2. Варианты исходных данных	57
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	63
ПРИЛОЖЕНИЕ	64
Основные понятия и определения теории устойчивости сооружений	64
Таблица 1. Реакции и эпюры внутренних силовых факторов от смещений концевых сечений и матрицы жесткости одно-пролетных сжато-изогнутых стержней постоянного сечения (типовых элементов плоских ОСМП)	77
Таблица 2. Значения специальных функций метода перемещений для сжато-изогнутых стержней	79

В В Е Д Е Н И Е

Обеспечение устойчивости нужной формы равновесия сооружения при заданных воздействиях, наряду с необходимостью удовлетворения условиям прочности и жесткости, относится к важнейшим требованиям, которые обязательно учитываются при расчете и конструировании. Проблема устойчивости становится особенно актуальной при проектировании сложных современных инженерных сооружений. Объясняется это тем, что экономически обоснованное стремление к снижению материалаомкости конструкции (за счет применения эффективных материалов и рациональных конструктивных форм, использования резервов несущей способности и т.п.) приводит к повышению тонкостенности конструкций и к увеличению гибкости их элементов. В результате сооружение становится более чувствительным к эксплуатационным возмущениям проектной формы равновесия.

Расчет сооружения или его отдельного элемента на устойчивость предусматривает, в конечном счете, независимо от постановки (проектная, поверочная или определение расчетной нагрузки), вычисление *критического параметра нагрузки*^{*)} или *критического усилия* в элементе, с которым далее сопоставляется значение заданной нагрузки (или соответствующего усилия) с целью оценки запаса устойчивости.

Критическим называется значение параметра нагрузки (а также усилия или напряжения), при достижении или превышении которого рассматриваемая форма равновесия перестает быть устойчивой.

Существуют три основных метода определения критических нагрузок – статический (или метод Эйлера), энергетический и динамический. Общим для них является принцип малого возмущения исследуемого равновесного состояния системы с последующим описанием и анализом ее поведения после устранения возмущающего фактора.

^{*)} Воздействия на сооружение могут быть не только силовыми (нагрузки), но и иными – температурными, кинематическими и др. В этих случаях следует использовать понятие «критический параметр воздействия» (например, критическая осадка опоры или критическое изменение температуры).

Так как в дальнейшем рассматриваются только задачи устойчивости при силовых воздействиях, то применяются термины «критический параметр нагрузки» или просто «критическая нагрузка».

В рамках статического метода, в зависимости от конкретной формы записи уравнений, характеризующих возмущенное состояние системы, различают частные методы: начальных параметров, сил, перемещений, смешанный, конечных элементов и другие. Для решения задач устойчивости деформируемых систем наиболее удобен метод перемещений, отличающийся наибольшей алгоритмичностью и легко поддающийся реализации в программах для ЭВМ.

I. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1.1. Исходные предпосылки

При построении теории расчета на устойчивость стержневых систем со сжатыми элементами методом перемещений принимаются следующие допущения и рабочие гипотезы:

- 1) рассматриваются системы физически и геометрически линейные;
- 2) расчетная схема системы – идеализированная по геометрии и воздействиям (нагрузкам)^{*)};
- 3) стержни считаются несжимаемыми и нерастяжимыми (за исключением элементов типа затяжек, подвесок и т.п., продольные деформации которых могут быть соизмеримыми с перемещениями, возникающими за счет изгиба других элементов);
- 4) сближением концов стержня, вызванным его изгибом, пренебрегают (иными словами, считается, что длина l'_j хорды, соединяющей концы изогнутого j -го стержня, равна его первоначальной длине l_j), т.е. $l'_j \approx l_j$.
- 5) растягивающие продольные силы, возникающие в исходном состоянии, в расчет не принимаются (в запас устойчивости);
- 6) деформации сдвига не учитываются.

^{*)} Понятие идеализированной системы раскрыто в «Приложении», где кратко представлены основные положения и определения теории устойчивости сооружений.

Раскроем смысл и значение сформулированных предпосылок.

Первая из них означает, что

а) элементы считаются изготовленными из материалов, обладающих свойством линейной упругости; внутренние и внешние связи – идеальные (абсолютно жесткие или линейно упругоподатливые, шарниры – без трения) – таким образом обеспечивается *физическая линейность*;

б) перемещения системы при переходе из теряющего устойчивость исходного равновесного состояния в новую форму равновесия, характеризующуюся искривлением и изгибом стержней (а в пространственных системах – также и кручением), предполагаются **малыми** (линейные перемещения – в сравнении с длинами элементов, а угловые – в сравнении с единицей) – это дает *геометрическую линейность*. Отсюда вытекают следствия:

- при аналитическом описании напряженно-деформированного состояния элементов системы после потери устойчивости используется приближенное (линеаризованное) выражение кривизны оси вместо точного (нелинейного) – см. «Приложение»;
- изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы и приращения продольных сил, возникающие в элементах при отклонениях от исходной формы равновесия, малы (в частности, $\Delta N_j \ll N_j^0$, где $\Delta N_j = N_j - N_j^0$; N_j – продольная сила в j -ом стержне после потери устойчивости), поэтому отношение продольных сил в новой (изгибно-крутильной) форме равновесия считается таким же, как в исходной форме:

$$N_1 : \dots : N_j : \dots : N_m = (N_1^0 + \Delta N_1) : \dots : (N_j^0 + \Delta N_j) : \dots : (N_m^0 + \Delta N_m) \approx N_1^0 : \dots : N_j^0 : \dots : N_m^0 = \xi_1 : \dots : \xi_j : \dots : \xi_m.$$

Вторая предпосылка об идеальном характере системы применительно к расчету методом перемещений дает:

а) в отношении геометрии – стержневые элементы не имеют несовершенств, то есть:

- оси стержней идеально прямолинейны*) (для армированных или многослойных стержней следует рассматривать оси приведенных центров тяжести сечений, при этом материалы, из которых изготовлены элементы, однородны и обладают совершенной структу-

*) Для решения методом перемещений задач устойчивости арок и других систем с криволинейными элементами используется способ заменяющей рамы – с аппроксимацией криволинейной оси вписанным многоугольником.

рой – нет трещин, пустот и других дефектов);

– отсутствуют отклонения от заданной формы сечений;

б) в отношении силовых воздействий – нагрузки сосредоточенные узловые, консервативные^{*)},

т.е. сохраняющие первоначальное направление при отклонениях системы от исходного равновесного состояния.

Нагружение – простое (пропорциональное), при котором все нагрузки задаются с точностью до общего параметра F : $F_t = \alpha_t F$, $t = 1, 2, \dots, u$ (α_t – известные числовые коэффициенты, u – число узловых нагрузок), следовательно, в любой момент нагружения, вплоть до критического состояния ($0 < F \leq F_{cr}$), отношение нагрузок остается неизменным: $F_1 : F_2 : \dots : F_t : \dots : F_u = \alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_t : \dots : \alpha_u$. Значения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u$ таковы, что в исходном состоянии стержни не испытывают изгиба и кручения – имеет место лишь осевое сжатие или растяжение, причем продольные силы в элементах из условий равновесия узлов выражаются через параметр нагрузки: $N_j^0 = \xi_j F$, $j = 1, 2, \dots, m$ (m – число стержней, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ – числовые коэффициенты, определяемые как линейные комбинации известных коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u$).

^{*)} Такие нагрузки иногда также называют «мертвыми», см. например:

Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В.В. Болотин. – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с.

Если состояние реальной системы при заданных нагрузках не является безмоментным, как, например, в раме (рис. 1.1, а), то для перехода к идеализированным нагрузкам выполняется обычный расчет системы (результат – эпюры M и N , представленные на рис. 1.1, б, в), после чего в узлы рамы прикладываются сосре-

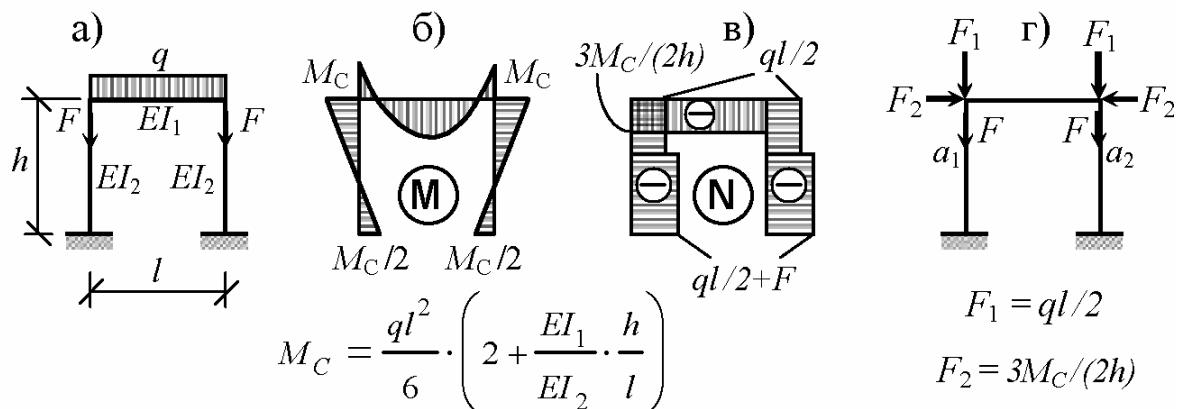


Рис. 1.1

доточенные силы, равные найденным продольным силам в стержнях, примыкающих к соответствующим узлам (рис. 1.1, г). Направления узловых нагрузок назначаются согласно знакам продольных сил. Соотношение q и F должно быть известно, тогда определению подлежит критическое значение одного из них – q_{cr} или F_{cr} . Заметим, что точки a_1 и a_2 , где приложены силы F , следует включить в число расчетных узлов при формировании основной системы метода перемещений.

Допущения 3 и 4 – обычные для метода перемещений. Так же как в расчетах на прочность, они вносят весьма малые погрешности в результаты исследования устойчивости, обеспечивая в то же время значительное упрощение решения задачи. Введение условия $l'_j \approx l_j$ означает пренебрежение сближением концов изгибающего стержня как величиной столь же малой в сравнении с прогибами, как прогибы по отношению к длине стержня.

Рабочие гипотезы 5 и 6 не носят принципиального характера – следствием их является некоторое упрощение математической стороны решения. При необходимости от них отказываются (например, в тех случаях, когда нельзя пренебречь деформацией сдвига – для элементов сквозного сечения, тонкостенных или изготовленных из материалов с низким модулем сдвига; или при наличии в системе растянутых стержней целесообразно учесть их благоприятное влияние на устойчивость сооружения). Отказ от этих предпосылок не изменяет, в основном, ни последовательности расчета, ни структуры основных уравнений.

Самыми сильными из всех допущений являются первые два, представляющие собой общие предпосылки *линейной теории устойчивости*. Свойства, которыми они наделяют расчетную схему, могут заметно отличаться от свойств реального сооружения. Но зато радикально упрощается процедура расчета, который выполняется в бифуркационной постановке.

В заключение отметим, что из всех допущений только отрицание сближения концов стержня при его изгибе и требование узлового загружения являются специфическими для решения задач устойчивости методом перемещений.

1.2. Основная система и канонические уравнения метода перемещений в расчетах на устойчивость

Для отыскания критического состояния системы, исходное равновесие которой обозначено штриховыми линиями на рис. 1.2, а, в соответствии с принципом малых возмущений задается отклонение некоторым малым воздействием (на рис. 1.2, а – силой T). Возмущенное состояние системы характеризуется искривлением первоначально прямых стержней и возникновением в общем случае поворотов и линейных смещений узлов (рис. 1.2, а). Эти линейные и угловые перемещения узлов принимаются за основные неизвестные в расчете на устойчивость методом перемещений.

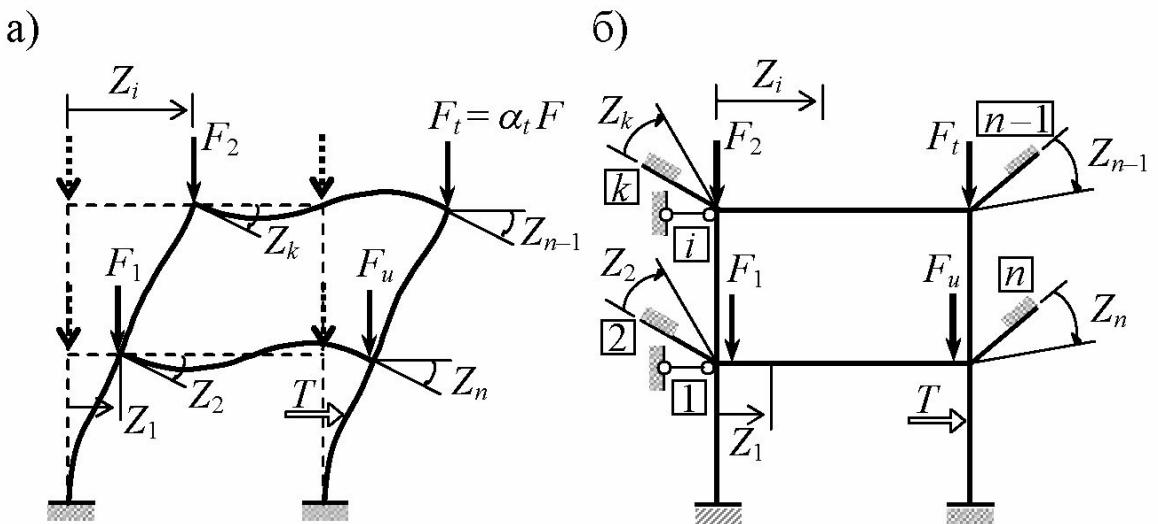


Рис. 1.2

Основная система метода перемещений (ОСМП) получается путем наложения на узлы заданной системы линейных и угловых связей, устраниющих возможность перемещений узлов (рис. 1.2, б). Полученная таким образом основная система кинематически определима и имеет минимально необходимое число введенных связей. Количество связей может быть больше минимально необходимого, если в число основных неизвестных дополнительно включать перемещения некоторых промежуточных сечений элементов.

Особенностью основной системы метода перемещений в расчете на устойчивость является то, что связи накладываются на

загруженную систему, когда нагрузка уравновешена силами упругости исходной формы равновесия – продольными силами $N_j^0 = \xi_j F$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Следовательно, введенные связи не участвуют в восприятии заданных воздействий, и поэтому **нагрузка является неотъемлемым компонентом основной системы**. В теории устойчивости такую нагрузку называют *параметрической*, то есть входящей в число параметров, характеризующих рассматриваемую систему, наряду с такими привычными исходными данными, как геометрические размеры, жесткости сечений элементов, типы связей.

Если введенным связям основной системы задать смещения, равные соответствующим угловым и линейным перемещениям узлов заданной системы в возмущенном состоянии (с учетом T), то напряженно-деформированные состояния обеих систем окажутся одинаковыми. При этом реакции введенных связей в основной системе должны быть равны нулю, поскольку в заданной системе эти связи отсутствуют:

$$R_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

В процессе перехода системы от первоначальной формы равновесия к новой (изгибной) форме элементы системы испытывают продольно-поперечный изгиб. Продольные силы в стержнях остаются при этом практически неизменными, что является следствием одного из принятых выше допущений ($\Delta N_j \ll N_j^0$). Из курса сопротивления материалов известно, что сжато- или растянуто-изогнутый элемент, деформируемый в поперечном направлении при фиксированной продольной силе, работает как линейно упругий, если перемещения малы и напряжения в материале не превышают предела пропорциональности. Для системы, целиком состоящей из линейно деформируемых элементов, справедлив принцип суперпозиции (независимости воздействий), поэтому полная реакция i -ой связи может рассматриваться как сумма реакций, возникающих в этой связи от смещений Z_1, Z_2, \dots, Z_n (каждого в отдельности), а также от *возмущающего воздействия T* :

$$R_i = R_{iZ} + R_{iT} = \sum_{k=1}^n R_{ik} + R_{iT} = R_{i1} + R_{i2} + \dots + R_{ik} + \dots + R_{in} + R_{iT}. \quad (1.2)$$

Следует обратить внимание на то, что в выражение R_i не вошло слагаемое R_{iT} (реакция i -ой связи от заданной нагрузки), поскольку, как уже отмечалось, введенные связи не участвуют в восприятии нагрузки при отсутствии смещений узлов. Последний член в (1.2) отражает влияние возмущения T , роль которого состоит в том, чтобы отклонить систему от исходного равновесия, после чего воздействие T «снимается», и далее изучается поведение загруженной силами $F_1, F_2, \dots, F_t, \dots, F_u$ системы уже без фактора T . Формально устранение T описывается как $T = 0$, тогда и $R_{iT} = 0$.

Еще раз используя свойство линейности системы, реакцию R_{ik} от перемещения Z_k можно записать в следующем виде:

$$R_{ik} = r_{ik} Z_k, \quad (1.3)$$

где r_{ik} – реакция i -ой связи от единичного смещения k -ой связи (от $Z_k = 1$).

Объединяя выражения (1.1), (1.2) и (1.3) и учитывая, что $R_{iT} = 0$, получаем систему канонических уравнений метода перемещений для расчета на устойчивость:

$$\sum_{k=1}^n r_{ik} Z_k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

или в развернутом виде:

Матричная форма записи канонических уравнений:

$$r \cdot Z = 0, \quad (1.6)$$

$$\text{где } \mathbf{R}_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{r}_{12} & \dots & \mathbf{r}_{1k} & \dots & \mathbf{r}_{1n} \\ \mathbf{r}_{21} & \mathbf{r}_{22} & \dots & \mathbf{r}_{2k} & \dots & \mathbf{r}_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ \mathbf{r}_{i1} & \mathbf{r}_{i2} & \dots & \mathbf{r}_{ik} & \dots & \mathbf{r}_{in} \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ \mathbf{r}_{n1} & \mathbf{r}_{n2} & \dots & \mathbf{r}_{nk} & \dots & \mathbf{r}_{nn} \end{bmatrix} - \text{матрица внешней жесткости основной системы; } \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_k \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_n \end{bmatrix}.$$

Канонические уравнения описывают возмущенное состояние системы, качественно альтернативное исходному. Они *линейны* относительно основных неизвестных Z и *однородны* (не имеют свободных членов) – это следствие использования предпосылок линейной теории устойчивости.

Компоненты r_{ik} матрицы внешней жесткости представляют собой реакции введенных связей в единичных состояниях основной системы (от единичных смещений этих связей). Для определения r_{ik} можно использовать те же способы, что при расчетах на прочность:

- *статический* – с составлением уравнений равновесия узлов и отсеченных частей основной системы;
- *перемножением эпюров*:

$$r_{ik} = \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{M_i M_k}{EI} ds + \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} \frac{N_i N_k}{EA} ds + \\ + \sum_{j=1}^{m_Q} \int_{l_j} k_{\tau} \frac{Q_i Q_k}{GA} ds + \sum_{j=1}^{m_R} \frac{R_{j,i} R_{j,k}}{C_j}, \quad (1.7)$$

где второй член относится только к элементам типа затяжек, вант и т.п., работающим в основном на растяжение или сжатие; третий позволяет учитывать деформации сдвига (отсюда видно, что от одной из рабочих гипотез метода – см. п. 1.1 – можно отказаться); последнее слагаемое учитывает влияние упругоподатливых связей системы (C_j – жесткость j -ой связи);

- *кинематический* – по теореме об определении реакций связей через возможную работу W_{ki}^K концевых усилий в единичных состояниях:

$$r_{ik} = W_{ki}^K = a_i^T \cdot S_k, \quad (1.8)$$

где a_i и S_k – векторы смещений концевых сечений элементов и концевых усилий соответственно в i -ом (от $Z_i = 1$) и k -ом (от $Z_k = 1$) единичных состояниях основной системы (S_k можно определять через матрицу K внутренней жесткости основной системы и вектор концевых смещений a_k в k -ом состоянии: $S_k = K \cdot a_k$).

Используя матрицы смещений концевых сечений и концевых усилий во всех единичных состояниях (матрицы $a = [a_1 \dots a_i \dots a_n]$

и $S_0 = K \cdot a = [S_1 \dots S_k \dots S_n]$), можно вычислять матрицу внешней жесткости:

$$r = a^T \cdot S_0 = a^T \cdot K \cdot a. \quad (1.9)$$

Способ перемножения эпюор в практических расчетах нерационален из-за трудоемкости вычисления интегралов для элементов, испытывающих изгиб со сжатием, поскольку единичные эпюры моментов в сжато-изогнутых стержнях описываются трансцендентными функциями. В «Приложении» дана таблица эпюор внутренних силовых факторов и реакций концевых связей типовых сжато-изогнутых элементов основной системы метода перемещений от смещений концевых сечений. Все эпюры изгибающих моментов и поперечных сил имеют криволинейное очертание. Характерные ординаты эпюор выражены через специальные функции $\varphi_1(v_j)$, $\varphi_2(v_j)$ и т. д., аргументом которых является коэффициент продольной силы данного элемента

$$v_j = l_j \sqrt{\frac{-N_j}{EI_j}}, \quad (1.10)$$

где j – номер элемента; l_j – длина стержня; EI_j – жесткость поперечного сечения при изгибе; N_j – продольная сила (положительная – *растягивающая*).

Специальные функции характеризуют влияние продольной силы на распределение внутренних усилий M и Q . Легко заметить, что постоянные множители в выражениях характерных ординат эпюор для сжато-изогнутых элементов точно такие же, как в стандартных эпюрах метода перемещений при расчетах на прочность. Если элемент не испытывает сжатия или растяжения от заданной нагрузки ($N_j = 0$), то $v_j = 0$, при этом $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \dots = \eta_3(0) = 1$, и эпюры, приведенные в табл. 1 «Приложения», вырождаются в прямолинейные, фигурирующие в расчетах на прочность.

Обратим внимание на то, что в матрицах жесткости элементов 1-го, 2-го и 4-го типов (табл. 1) в качестве концевых усилий, соответствующих концевым смещениям, перпендикулярным к продольной оси стержня в исходном состоянии, выступают *реакции концевых связей* (в общем случае они не равны концевым по-

Сведения о продольно деформируемом элементе 5-го типа приведены в п. 2.1.

перечным силам – это следствие расчета по деформированному состоянию; указанные силы совпадают, только если концевое сечение не поворачивается).

Аналитические выражения функций $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$ и др., данные в «Приложении», получены с учётом только деформаций изгиба при условии постоянства сечения элемента – для этого использовано решение *методом начальных параметров* дифференциального уравнения продольно-поперечного изгиба первоначально прямолинейного сжатого стержня. Если нужно учесть влияние деформации сдвига, то вместо изгибной жесткости сечения элемента EI_j в расчет вводится *приведенная жесткость при изгибе со сдвигом* $\tilde{EI}_j = EI_j(1 + \tilde{\gamma}_j N_j)$, где $\tilde{\gamma}_j$ – «единичный» сдвиг (обобщенный угол сдвига на уровне продольной оси j -го стержня от поперечной силы $Q_j = 1$). В отличие от EI_j , являющейся характеристикой только самого элемента, \tilde{EI}_j зависит также от продольной силы в стержне и, следовательно, в конечном счете – от заданной нагрузки. Это вызывает некоторое усложнение расчета – подробнее об этом сказано в [9].

Заметим, что при *растягивающей* продольной силе тригонометрические функции в выражениях $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$ и др. должны быть заменены одноименными гиперболическими функциями (это дает возможность отказаться еще от одной рабочей гипотезы метода – см. п. 1.1).

Определяя реакции r_{ik} статическим способом, все уравнения равновесия следует записывать **обязательно для деформированного состояния системы**, с учетом перемещений, вызванных единичными смещениями связей, и заданных узловых нагрузок. При этом нужно иметь в виду особенность поведения шарнирно закрепленного по концам сжатого стержня (элемента 4-го типа): при взаимном смещении концов элемента по нормали к его оси он не испытывает изгиба, но возникают реакции, перпендикулярные к направлению оси стержня в исходном состоянии (см. «Приложение»).

Очевидно, что реакции r_{ik} в общем случае являются функциями с аргументами v_1, v_2, \dots, v_m , поскольку представляют собой линейные комбинации специальных функций указанных аргу-

ментов. Но коэффициенты ν_j не являются независимыми – их отношения выражаются через отношения длин, жесткостей сечений и продольных сил, известных из исходных данных:

$$\frac{\nu_j}{\nu_{j+1}} = \frac{l_j \sqrt{|N_j|/EI_j}}{l_{j+1} \sqrt{|N_{j+1}|/EI_{j+1}}} = \frac{l_j}{l_{j+1}} \cdot \sqrt{\frac{|\xi_j|}{|\xi_{j+1}|} \cdot \frac{EI_{j+1}}{EI_j}}. \quad (1.11)$$

Следовательно, все ν_j могут быть выражены через один общий (ведущий) параметр ν_0 :

$$\nu_j = \psi_j \cdot \nu_0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (1.12)$$

причем числовые коэффициенты ψ_j вычисляются по формуле

$$\psi_j = \frac{l_j}{l_d} \cdot \sqrt{\frac{|\xi_j|}{|\xi_d|} \cdot \frac{EI_d}{EI_j}}, \quad (1.13)$$

где d – номер элемента, принятого за «ведущий».

В качестве ведущего параметра ν_0 целесообразно принимать наибольший из коэффициентов ν_j :

$$\nu_0 = \max \nu_j = \nu_d = l_d \sqrt{\frac{|\xi_d| F}{EI_d}} \quad (1.14)$$

(объяснение этой рекомендации будет дано позднее).

С учетом (1.12) любую реакцию r_{ik} можно представить как функцию одного аргумента ν_0 , а поскольку ν_0 зависит от параметра нагрузки F , то в конечном счете F входит в матрицу внешней жесткости как одна из характеристик рассчитываемой системы (т.е. *параметрически*, как уже отмечалось выше).

1.3. Уравнение устойчивости и определение критического параметра нагрузки

Возможны два решения системы (1.6):

- 1) $Z \neq 0$ – нетривиальное;
- 2) $Z = 0$ – тривиальное.

Нетривиальное решение, когда все или хотя бы часть компонентов вектора узловых перемещений Z ненулевые, описывает изгибную форму равновесия (по сути, неравенство $Z \neq 0$ выражает условие существования альтернативной формы равновесия, качественно отличной от исходной).

Если основная система получена введением *только минимально необходимых связей*^{*)}, то нетривиальное решение характеризует **общую потерю устойчивости**, признаком которой является одновременное взаимозависимое искривление нескольких (двух и более) или всех элементов. Если же число введенных связей в основной системе превышает минимально необходимое, то нетривиальное решение может описывать либо общую потерю устойчивости (в случае, когда отличны от нуля перемещения по направлениям необходимых связей), либо **местную (локальную) потерю устойчивости** какого-либо элемента в отдельности (при этом не равны нулю перемещения по направлению избыточных, т.е. введенных сверх необходимых, связей, а перемещения узлов заданной системы нулевые). Заметим, что возможна местная потеря устойчивости одновременно нескольких стержней, но, в отличие от общей потери устойчивости, искривления элементов при этом будут независимыми. Математически это выражается в неопределенности отношения соответствующих перемещений.

Условием получения отличного от нуля решения системы линейных однородных алгебраических уравнений, как известно, является обращение в нуль определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных:

$$\text{Det}(r) = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2k} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{i1} & r_{i2} & \dots & r_{ik} & \dots & r_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nk} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.15)$$

Равенство (1.15), называемое **уравнением устойчивости**, выражает условие существования изгибной (альтернативной по отношению к исходной) формы равновесия системы. С математической точки зрения (1.15) является **характеристическим уравнением** задачи. Анализ уравнения и способов его решения будет дан ниже.

^{*)} Здесь и далее термин «необходимые связи» относится к связям, вводимым для обеспечения кинематической определимости основной системы только в «естественные» расчетные узлы, без назначения дополнительных узлов в произвольных сечениях элементов.

Нужно уточнить, что общепринятый термин «уравнение устойчивости» не согласуется с физическим смыслом характеризуемого им явления, так как это уравнение отнюдь не описывает условия, выполнение которых обеспечивает устойчивость равновесия системы. Напротив, оно обуславливает возможность существования новых (как минимум одного) равновесных состояний после того, как исходная форма равновесия становится неустойчивой. Следовательно, правильнее было бы название **уравнение потери устойчивости** или **уравнение бифуркации**. В дальнейшем указанный термин будет использоваться с учетом сделанной оговорки.

С помощью уравнения устойчивости находится критический параметр нагрузки, а затем определяется новая форма равновесия системы (о ней принято говорить также как о **форме потери устойчивости**). Форма потери устойчивости, выявляемая *нестривиальным решением задачи*, называется **явной**.

Тривиальное решение $Z = 0$ относится к такой форме равновесия системы, которая характеризуется отсутствием перемещений узлов. Первое и наиболее очевидное физическое истолкование тривиального решения: оно описывает исходную безызгибную форму равновесия системы. Этот случай не представляет интереса с точки зрения расчета на устойчивость. Но есть и второе объяснение, справедливое для ряда систем: тривиальному решению отвечает некоторая особая форма потери устойчивости.

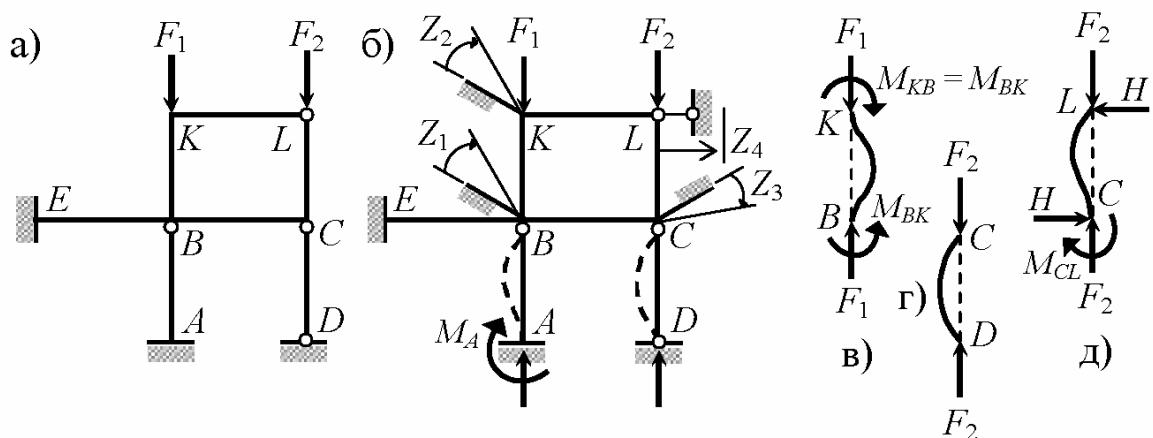


Рис. 1.3

Например, если для расчета системы, представленной на рис. 1.3, а, выбрать основную систему только с необходимыми связями (рис. 1.3, б), то возможное искривление стоек нижнего этажа не поддается описанию с помощью выбранных основных неизвестных Z_1, \dots, Z_4 .

Если локальная потеря устойчивости стержней реализуется раньше общей (при меньшем значении параметра нагрузки), например, при «слабых» – очень гибких – стойках нижнего этажа (см. рис. 1.3), то в этом случае $Z = 0$, что соответствует тривиальному решению. Таким образом, нулевому вектору Z отвечает не только исходная форма равновесия системы, но и **скрытые** (т.е. не обнаруживаемые решением при $Z \neq 0$) формы потери устойчивости. Принципиально важно то, что *скрытыми могут быть только локальные формы*.

Возможность существования скрытых форм обусловлена, во-первых, структурой заданной системы, и, во-вторых, выбором основной системы. В системах, где невозможна местная потеря устойчивости, скрытые формы отсутствуют. Не может быть местной, а следовательно, и скрытой потери устойчивости у тех элементов, которые, искривляясь, передают в узлы воздействия (силы и моменты), вызывающие искривление других стержней. Например, в раме, изображенной на рис. 1.3, а, невозможна местная потеря устойчивости стойки CL , так как при ее продольном изгибе (рис. 1.3, д) в узел C передается момент M_{CL} , а в узел L – горизонтальное усилие H , которые не могут быть восприняты другими стержнями системы без их изгиба. При этом обязательно возникают смещения узлов ($Z \neq 0$), а это – признак общей потери устойчивости. Заметим, что для стойки AB , имеющей, подобно стойке CL , шарнир на одном конце и защемление на другом, локальная потеря устойчивости может иметь место, поскольку возникающий при искривлении стержня AB момент M_A воспринимается опорным защемлением, а в узел B со стойки AB передается только горизонтальная сила, заставляющая элемент BE работать на сжатие. Изгиба же других стержней, а значит и смещения узлов при этом не возникает ($Z = 0$). Если бы шарнир стойки AB был расположен не вверху, а внизу, то местной потери устойчивости быть не могло бы, так как изгиб стойки в этом случае невозможен без поворота узла B . При продольном изгибе элементов, имеющих шарниры на обоих концах (например, стойка CD (рис. 1.3, г), в узлы системы на передается никаких возмущений, поэтому местная потеря устойчивости таких стержней всегда возможна.

И, напротив, за редким исключением, не существует опасности локальной потери устойчивости стержней с двумя защемленными концами (рис. 1.3, в).

Выполняя при составлении расчетной схемы сооружения предварительный анализ структуры, можно выявить стержни, для которых не исключена опасность местной потери устойчивости. Однако даже при наличии таких элементов можно избавиться от скрытых форм. Для этого, очевидно, нужно перевести локальные формы в категорию *явных*, поддающихся определению с помощью нетривиального решения. Цель будет достигнута, если в число основных неизвестных, кроме перемещений основных узлов системы, включить также перемещения, характеризующие искривление стержней при их локальной потере устойчивости (целесообразно в качестве характерного перемещения принимать угол поворота шарнирно закрепленного конца элемента). При этом увеличивается порядок системы канонических уравнений (1.6) и усложняется уравнение устойчивости (1.15), но зато с помощью последнего удается получить полное решение задачи.

Введение дополнительных неизвестных приводит к появлению в основной системе избыточных связей (то есть связей, накладенных в дополнение к необходимым).

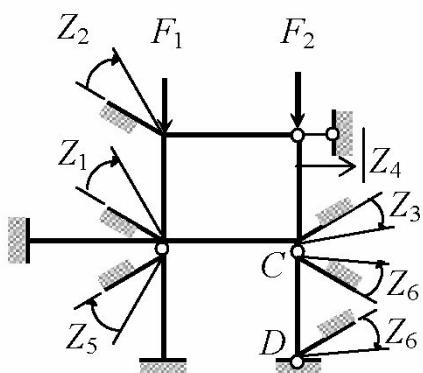


Рис. 1.4

Основная система, не допускающая возникновения скрытых форм потери устойчивости, называется **совершенной**. Заметим, что если в заданной системе невозможна местная потеря устойчивости всех стержней, то для получения совершенной основной системы достаточно ввести лишь необходимые связи.

Основная система, не устраняющая всех скрытых форм потери устойчивости, называется **несовершенной**.

Пример несовершенной основной системы для рамы, изображенной на рис. 1.3, а, приведен на рис. 1.3, б, а совершенная основная система для той же рамы показана на рис. 1.4.

Следует обратить внимание на то, что при продольном изгибе стойки CD с шарнирами на обоих концах перемещение Z_6 – групповое.

Использование рассмотренных выше понятий позволяет дать корректное истолкование ряда вопросов теории и избежать некоторых ошибок, в том числе и такой опасной по практическим последствиям, как неполное выявление форм потери устойчивости. В частности, становится очевидным, что фермы не поддаются расчету на устойчивость методом перемещений, если применять шарнирно-стержневую расчетную схему и при этом основную систему выбирать так же, как в расчете на прочность, то есть вводя лишь необходимые связи (по две линейных связи в каждом узле плоской фермы). Ведь для фермы с идеальными шарнирами характерна местная потеря устойчивости отдельных стержней. Но поскольку полученная указанным способом основная система является несовершенной, то все локальные формы остаются неисследованными, а общая потеря устойчивости невозможна (случай бокового выпучивания фермы здесь не рассматривается). Следовательно, критическую нагрузку определить не удается. Для получения правильного результата нужно либо устранить несовершенство основной системы путем введения избыточных связей, либо выполнить дополнительный анализ скрытых форм потери устойчивости (подробно об этом будет сказано ниже), либо, наконец, расчетную схему фермы составлять с учетом реального (жесткого или упругоподатливого) соединения в узлах.

Обратимся теперь к вопросу решения уравнения устойчивости (1.15). В п. 1.2 было показано, что все компоненты r_{ik} определяются в левой части (1.15) могут быть представлены как функции одного аргумента v_0 . В эти функции входят трансцендентные выражения (через коэффициенты $v_j = \psi_j \cdot v_0$) усилий в концевых сечениях элементов ОСМП (см. табл. 1 «Приложения»).

Если раскрыть определитель $\text{Det}(r)$, то получается функция $\Phi(v_0)$, которая также является трансцендентной и может быть достаточно сложной.

При $n > 3$ получение аналитического выражения $\Phi(v_0)$ становится весьма трудоемкой задачей, но в этом нет необходимости, так как для решения уравнения устойчивости обычно применяются численные методы.

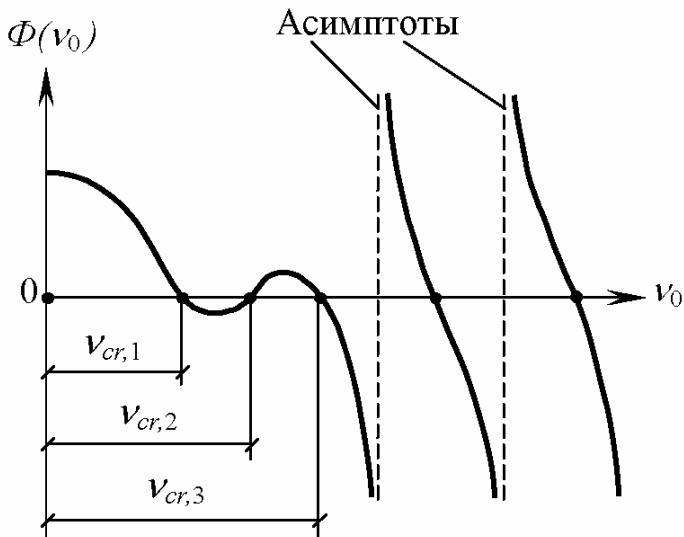


Рис.1.5

Примерный вид графика этой функции показан на рис. 1.5. Характерным является то, что $\Phi(0) > 0$. Точкам пересечения графика с осью $0\nu_0$ отвечают значения параметра ν_0 являющиеся корнями уравнения устойчивости $\text{Det}(r) = \Phi(\nu_0) = 0$. Их называют *критическими значениями параметра ν_0* и обозначают $\nu_{cr,1}, \nu_{cr,2}$ и т.д.

– в порядке увеличения. Из формулы (1.14) видно, что параметр нагрузки пропорционален квадрату параметра ν_0 . Тогда ряду значений $\nu_{cr,1}, \nu_{cr,2}, \dots$ соответствует совокупность $F_{cr,1}, F_{cr,2}, \dots$, называемая **спектром критических значений параметра нагрузки**. Поскольку трансцендентное уравнение устойчивости содержит периодические тригонометрические функции и вследствие этого имеет бесчисленное множество корней, спектр критических нагрузок бесконечен. Но практическое значение имеет только низшая критическая нагрузка $F_{cr,1}$, отвечающая наименьшему корню уравнения устойчивости $\nu_{cr,1}$. Обозначим их \bar{F}_{cr} и $\bar{\nu}_{cr}$, тогда

$$\bar{F}_{cr} = \frac{\bar{\nu}_{cr}^2 EI_d}{|\xi_d| l_d^2}. \quad (1.16)$$

Точное решение уравнения устойчивости удается получить лишь в редких случаях для систем с достаточно простой структурой, поэтому обычно минимальный корень уравнения (1.15) определяют с помощью численных методов, легко поддающихся алгоритмизации и эффективно реализуемых на ЭВМ. Построение процедуры поиска критического значения параметра ν_0 облегчается тем, что область существования $\bar{\nu}_{cr}$ заведомо известна:

$$0 < \bar{\nu}_{cr} \leq 2\pi$$

(объяснение этому будет дано в конце параграфа).

В случае использования совершенной основной системы решение уравнения устойчивости дает истинное значение ν_{cr} , которому отвечает искомое критическое значение параметра нагрузки F_{cr} . При этом в результате расчета всегда верно определяется форма потери устойчивости, какой бы она ни была – общей или местной. Необходимо отметить, что если несовершенства основной системы устранины путем введения угловых связей на шарнирных концах элементов, *потенциально опасных по местной устойчивости*, то единичное смещение некоторой из этих избыточных связей (или группы связей при групповом неизвестном Z_i) не вызывает реакций во всех остальных связях. Это означает, что $r_{ki} = 0$ ($k \neq i$, i – номер избыточной связи), поэтому в матрице r i -е строка и столбец содержат лишь один элемент r_{ii} , расположенный на главной диагонали. Удобно сначала пронумеровать необходимые введенные связи в основной системе метода перемещений (с 1 по n_0), а затем избыточные (с n_0+1 до $n = n_0 + n_d$, где n_d – число избыточных связей), тогда матрица r приобретает блочно-диагональную структуру:

$$r_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} r_0 & & & & & & & & \\ & r_{n_0+1, n_0+1} & & & & & & & 0 \\ & & r_{n_0+2, n_0+2} & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

где $r_0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} & \dots & r_{1n_0} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2k} & \dots & r_{2n_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n_0 1} & r_{n_0 2} & \dots & r_{n_0 k} & \dots & r_{n_0 n_0} \end{bmatrix}$ – матрица единичных реакций необходимых связей.

Определитель матрицы r (1.17) записывается в виде

$$\text{Det}(r) = \text{Det}(r_0) \cdot \prod_{i=n_0+1}^n r_{ii}. \quad (1.18)$$

Очевидно, что результат определения $\bar{\nu}_{cr}$ из уравнения (1.17) будет таким же, как при решении независимых уравнений $\text{Det}(r_0) = 0$ и $r_{ii} = 0$ ($i = n_0 + 1, n$) с последующим выбором меньшего из найденных корней.

Если скрытые формы в выбранной основной системе отсутствуют, то выражение (1.18) называется **спектральной функцией** $S(\nu_0)$, и уравнение устойчивости принимает вид $S(\nu_0) = 0$. Его минимальный корень $\bar{\nu}_{cr} = \nu_{cr}$ дает по (1.16) иско-мую величину F_{cr} .

В случае несовершенной основной системы значение \bar{F}_{cr} , соответствующее наименьшему корню уравнения $\text{Det}(r) = 0$, не обязательно является действительной критической нагрузкой, так как потеря устойчивости системы может произойти по какой-либо из скрытых форм при нагрузке, меньшей, чем \bar{F}_{cr} (в этом случае выбранная основная система называется **ложной**). По этой причине кроме решения уравнения (1.15) требуется дополнительное исследование, заключающееся в расчете на устойчивость тех стержней, для которых не исключена возможность существования скрытых форм. Поскольку, как отмечалось выше, скрытыми могут быть только локальные формы потери устойчивости, то при указанном дополнительном исследовании стержни рассматриваются как отдельные, *независимые друг от друга элементы* с соответствующим закреплением концов. Критическое значение продольной силы для некоторого j -го стержня вычисляется по *обобщенной формуле Эйлера*, которая при этом может рассматриваться как **уравнение устойчивости для соответствующей локальной формы**:

$$\left| N_{cr,j}^* \right| = \frac{\pi^2 EI_j}{(l_{0,j}^*)^2}, \quad (1.19)$$

где $l_{0,j}^* = \mu_j^* l_j$ – приведенная длина j -го стержня в ОСМП;

$\mu_j^* = \pi / \nu_j^*$ – коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления концов j -го элемента (для элемента 1-го типа $\mu_j^* = 0,5$, для 2-го типа – $\mu_j^* = 0,7$, для 3-го типа – $\mu_j^* = 2$, для 4-го типа – $\mu_j^* = 1$).

По найденному $|N_{cr,j}^*|$ определяется $|F_{cr,j}^*| = |N_{cr,j}^*| / |\xi_j|$ – значение параметра нагрузки при местной потере устойчивости j -го стержня. Истинное значение критической нагрузки F_{cr} для рассчитываемой системы отыскивается как

$$F_{cr} = \min (\bar{F}_{cr}, F_{cr,1}^*, \dots, F_{cr,j}^*, \dots, F_{cr,m_l}^*) \quad (1.20)$$

(здесь m_l – число стержней, потенциально опасных по локальной потере устойчивости; иногда m_l может совпадать с общим числом элементов – например, для фермы при основной системе без избыточных связей).

Таким образом, при использовании несовершенной основной системы:

$$F_{cr} = \min (\bar{F}_{cr}, \min F_{cr,j}^*); \quad \nu_{cr} = \min (\bar{\nu}_{cr}, \min \nu_j^* / \psi_j). \quad (1.21)$$

После отыскания ν_{cr} могут быть вычислены коэффициенты $\nu_{j,cr} = \psi_j \nu_{cr}$ для всех сжатых элементов системы, а по ним – коэффициенты приведения длины стержней $\mu_j = \pi / \nu_{j,cr}$, учитывающие их совместную работу в составе системы, и далее – приведенные длины стержней $l_{0,j} = \mu_j l_j$.

Следует отметить, что найденные бифуркационным расчетом на устойчивость в линейной постановке коэффициенты μ_j и приведенные (по терминологии СНиП – эффективные, расчетные) длины $l_{0,j}$ являются даже более важными с практической точки зрения результатами, чем значение критического параметра нагрузки. Объясняется это тем, что если реальное сооружение по конструктивному решению таково, что потеря устойчивости его сопровождается пластическими деформациями либо имеет место потеря устойчивости второго рода, то вычисленная критическая нагрузка F_{cr} может сильно отличаться от действительной, причем, к сожалению, в сторону завышения. Но при этом погрешность в определении μ_j и $l_{0,j}$ намного меньше, и их можно использовать для поэлементной проверки устойчивости по нормативной методике с помощью коэффициента продольного изгиба, значения которого в нормах проектирования строительных конструкций даны с учетом возможности потери устойчивости за пределом упругости.

В заключение вернемся к приведенной выше двухсторонней оценке области существования критического значения ведущего параметра $0 < \nu_{cr} \leq 2\pi$ как коэффициента продольной силы сжатого однопролетного стержня. Используем обобщенную модель элемента, работающего в составе деформируемой стержневой системы (рис. 1.6, а). Влияние на выделенный стержень других элементов смоделировано концевыми упругими линейными и угловыми связями, жесткости которых зависят от свойств смежных (а в общем случае и всех остальных) элементов системы. Предельными случаями по условиям закрепления концов, дающими соответственно максимальное и минимальное значения критической продольной силы, являются:

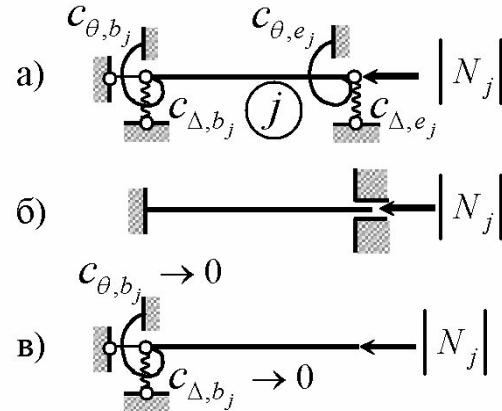


Рис. 1.6

1) самое жесткое – полное защемление обоих концов ($c_{\theta,b_j} = \infty, c_{\Delta,b_j} = \infty, c_{\theta,e_j} = \infty, c_{\Delta,e_j} = \infty$) – рис. 1.6, б;

2) самое податливое – упругое закрепление одного из концов (рис. 1.6, в) с исчезающими малыми жесткостями угловой и линейной связей ($c_{\theta,b_j} \rightarrow 0, c_{\Delta,b_j} \rightarrow 0, c_{\theta,e_j} = 0, c_{\Delta,e_j} = 0$).

В случае 1 коэффициент приведения длины, как уже упоминалось выше, равен 0,5, тогда соответствующий $\nu_j^* = \pi / \mu_j^* = 2\pi$. В случае 2 элемент утрачивает геометрическую неизменяемость и не способен воспринимать нагрузки, поэтому для него $|N_{cr,j}^*| = 0$, тогда из (1.19) следует, что $l_{0,j}^* = \infty$ и $\nu_j^* = 0$. Следовательно, при произвольной комбинации условий закрепления концов элемента $0 < \nu_j^* \leq 2\pi$. Если, как рекомендовано выше, выбирать в качестве ведущего ν_0 какой-либо из коэффициентов ν_j элементов системы (даже не обязательно наибольший), то очевидно, что для ν_0 интервал возможных значений будет также $(0; 2\pi]$.

Теперь можно дать объяснение целесообразности принимать $\nu_0 = \max \nu_j$. Дело в том, что если наибольший и наименьший из коэффициентов ν_j сильно отличаются, и в качестве ν_0 назначен наименьший коэффициент, то уже на первом же шаге итерационного процесса поиска корня уравнения устойчивости может быть пропущено искомое значение ν_{cr} . Корень уравнения все же будет найден, но не наименьший, а относящийся к не имеющей практического значения форме потери устойчивости с более высокой (нереализуемой) критической нагрузкой. Например, если при $\max \nu_j / \min \nu_j = 15$ выбрать $\nu_0 = \min \nu_j$ и назначить шаг итерационной процедуры $\Delta \nu = 0,5$, то уже при первом отличном от нуля $\nu_0 = 0,5$ для $\max \nu_j$ будет получено $7,5 > 2\pi$ – больше верхнего предела возможных значений коэффициента продольной силы, и искомый корень уравнения устойчивости не будет определен. В случае $\nu_0 = \max \nu_j$ риск подобной ошибки минимален.

1.4. Определение формы потери устойчивости

При известном параметре F_{cr} все единичные реакции r_{ik} могут быть вычислены, но матрица r при этом получается вырожденной, что следует из уравнения (1.15). Поэтому числовые значения основных неизвестных определить невозможно. Физический смысл неопределенности Z состоит в том, что, согласно предпосылкам линейной теории устойчивости, равновесие системы в критическом изгибном состоянии считается безразличным, и критическому значению параметра нагрузки F_{cr} соответствует бесчисленное множество значений характерных перемещений (горизонтальный участок графика на рис. П.3 и П.6 «Приложения», где в качестве Δ может выступать любое из перемещений Z_1, \dots, Z_n).

Форма потери устойчивости выявляется с точностью до неопределенного параметра, то есть могут быть найдены отношения основных неизвестных. Для этого канонические уравнения делятся на некоторое $Z_k \neq 0$, в результате чего получается система уравнений

$$r \cdot \beta_Z = 0, \quad (1.22)$$

где $\beta_Z = \frac{1}{Z_k} \cdot Z = [\beta_{Z1} \ \beta_{Z2} \ \dots \ \beta_{Zi} \ \dots \ \beta_{Z,k-1} \ 1 \ \beta_{Z,k+1} \ \dots \ \beta_{Zn}]^T$ –

вектор отношений перемещений (по смысловой аналогии с соответствующей задачей линейной алгебры будем называть β_Z *собственным вектором перемещений*); $\beta_{Zi} = Z_i / Z_k$.

Поскольку $\beta_{Zk} = 1$, система (1.22) превращается в *неоднородную*:

$$\bar{r} \cdot \bar{\beta}_Z + r_k = 0, \quad (1.23)$$

$$\text{где } \bar{r}_{[n \times (n-1)]} = \begin{bmatrix} r_{11} \ r_{12} \ \dots \ r_{1,k-1} \ r_{1,k+1} \dots r_{1n} \\ r_{21} \ r_{22} \ \dots \ r_{2,k-1} \ r_{2,k+1} \dots r_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ r_{i1} \ r_{i2} \ \dots \ r_{i,k-1} \ r_{i,k+1} \dots r_{in} \\ \dots \dots \dots \\ r_{n1} \ r_{n2} \ \dots \ r_{n,k-1} \ r_{n,k+1} \dots r_{nn} \end{bmatrix}; \bar{\beta}_Z = \begin{bmatrix} \beta_{Z1} \\ \beta_{Z2} \\ \vdots \\ \beta_{Z,k-1} \\ \beta_{Z,k+1} \\ \vdots \\ \beta_{Zn} \end{bmatrix}; r_k = \begin{bmatrix} r_{1k} \\ r_{2k} \\ \vdots \\ r_{ik} \\ \vdots \\ r_{nk} \end{bmatrix}.$$

Вектор $\bar{\beta}_Z$ отличается от β_Z отсутствием $\beta_{Zk} = 1$.

Так как уравнений (1.23) на единицу больше, чем неизвестных $\bar{\beta}_Z$, то любое из уравнений может быть отброшено, после чего из оставшейся системы $(n-1)$ -го порядка определяется собственный вектор $\bar{\beta}_Z$, компоненты которого позволяют выразить все перемещения Z_1, \dots, Z_n через одно из них:

$$Z_i = \beta_{Zi} \cdot Z_k.$$

Если расчет на устойчивость выполнен с использованием совершенной основной системы, то по полученному собственному вектору перемещений можно оценить, какая форма потери устойчивости реализуется – общая или местная (в последнем случае отличным от нуля*) будет

* С точностью до погрешности расчета.

лишь один компонент вектора β_Z , соответствующий тому основному неизвестному, которое описывает выпучивание стержня, локально теряющего устойчивость).

При одновременной местной потере устойчивости нескольких элементов собственный вектор β_z вычислить невозможно, так как перемещения локальных форм независимы.

Выявление формы потери устойчивости имеет практическое значение: ее анализ позволяет принимать обоснованные инженерные решения по внесению эффективных изменений в проект конструкции или существующее сооружение с целью повышения устойчивости.

1.5. Общий алгоритм расчета стержневых систем на устойчивость методом перемещений

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 1.7.

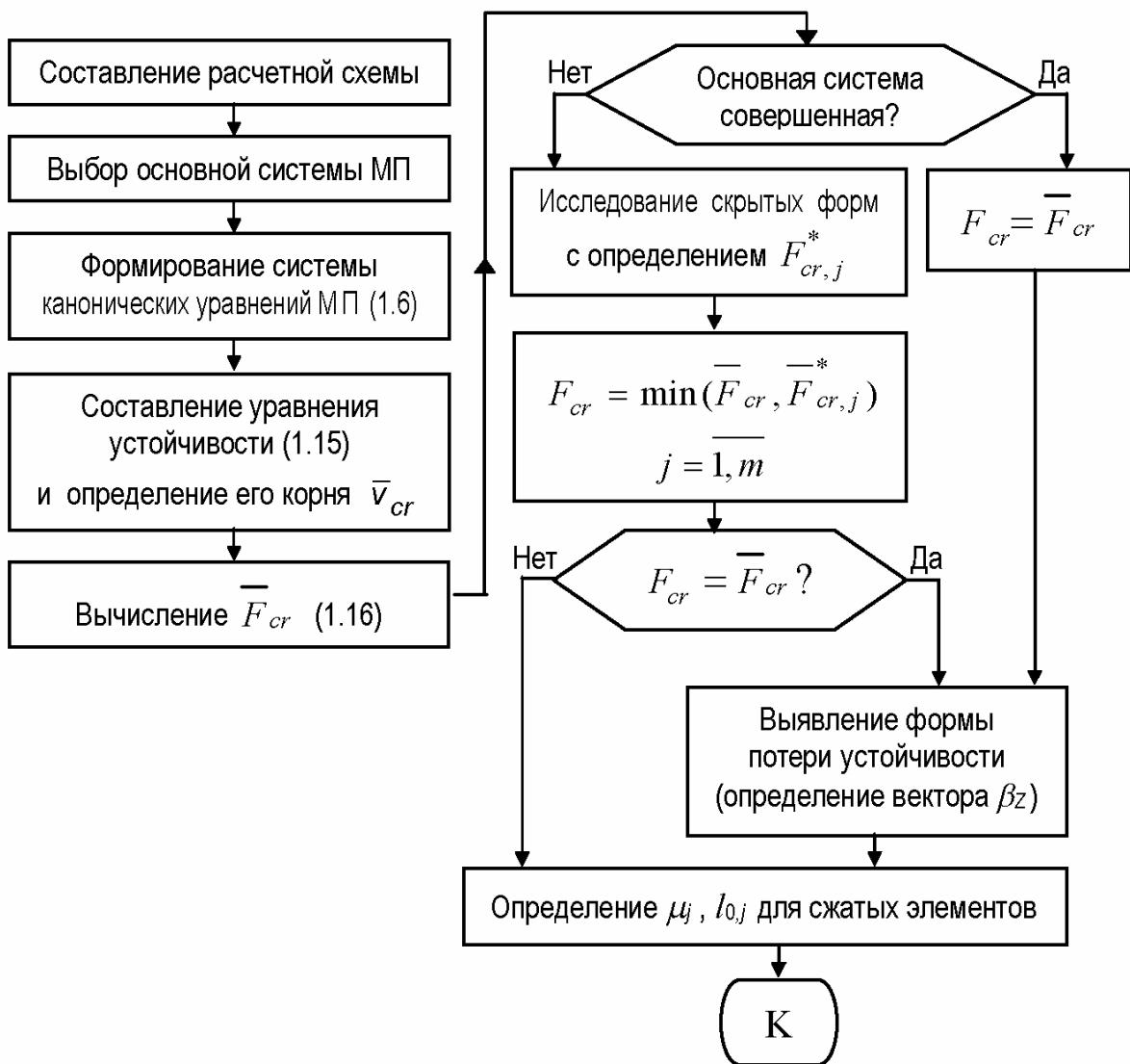


Рис. 1.7

3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

3.1. Расчет плоской рамы

Требуется выполнить расчет на устойчивость рамы, схема которой дана на рис. 3.1, а (в узле C – упругая линейная связь).

Разложив вертикальную силу $0,8F$ в узле C по направлениям примыкающих к узлу стержней CA и CD (рис. 3.1, б), можно убедиться в том, что заданные узловые нагрузки в докритической стадии не вызывают изгиба элементов, так как все нагрузки, равные F , направлены вдоль стержней AC , BD и DL , которые работают при этом на сжатие, а две противоположно направленные силы по $1,5F$ приложены по концам ригеля CD , также испытывающего сжатие. Строго доказать безызгибность исходного равновесного состояния можно предварительным расчетом системы на прочность, однако в данной задаче характер работы рамы до потери устойчивости очевиден.

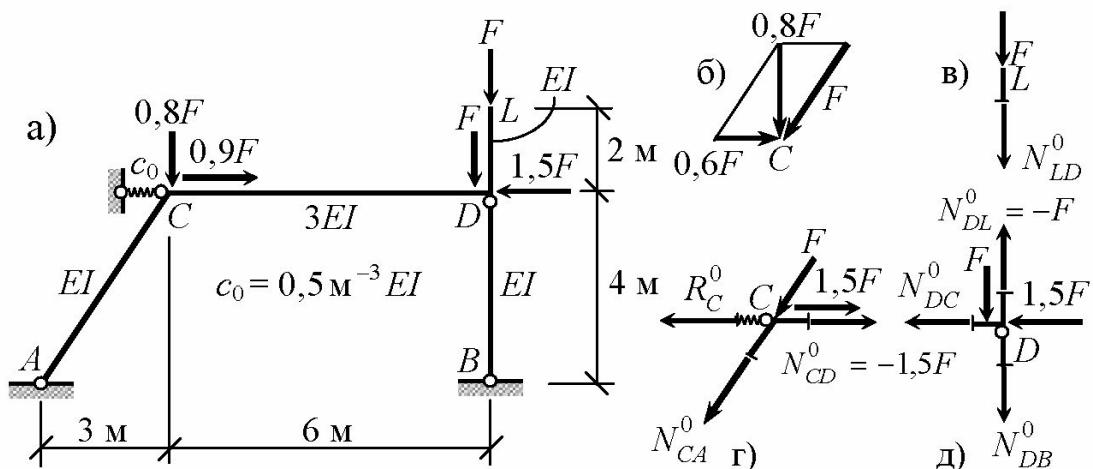


Рис. 3.1

Продольные силы в стержнях определяем, последовательно рассматривая равновесие узлов L , D и C (рис. 3.1, в – д):

$$N_{LD}^0 = -F; \quad N_{DC}^0 = -1,5F; \quad N_{DB}^0 = -2F; \quad N_{CA}^0 = -F; \quad R_C^0 = 0.$$

Минимально необходимое число связей, вводимых при составлении основной системы метода перемещений, определяется по формуле $n_0 = n_\theta + n_A$, (3.1)

$$n_0 = n_\theta + n_\Delta, \quad (3.1)$$

где n_θ и n_Δ – соответственно степени угловой и линейной подвижности узлов заданной системы.

В рассматриваемом примере $n_\theta = 2$ (по числу жестких узлов), $n_A = 1$ (учитывается горизонтальное перемещение узлов C и D). Линейное перемещение узла L можно не включать в число основных неизвестных, поскольку консоль DL относится к типовым элементам ОСМП. Основная система, полученная введением в узлы только необходимых связей (двух угловых и одной линейной), изображена на рис. 3.2, где обозначены основные неизвестные – углы поворота Z_1 и Z_2 и линейное перемещение Z_3 . На схеме указаны также номера элементов и их типы в соответствии с табл. 1 «Приложения». Выбранная основная система – несовершенная, так как основными неизвестными невозможно описать и, следовательно, выявить локальную потерю устойчивости стойки BD – это потребует в дальнейшем исследования скрытой формы.

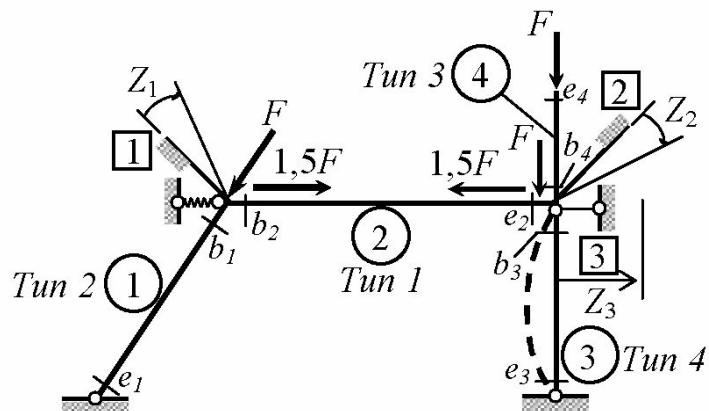


Рис. 3.2

Определяем характеристики элементов ОСМП – погонные жесткости $i_j = EI_j/l_j$ и коэффициенты продольных сил $\nu_j = l_j \sqrt{-N_j/(EI_j)}$ (те и другие – с точностью до общих параметров i_0 и ν соответственно (здесь ν имеет такой же смысл – ведущего параметра, – как и ν_0 в п.1.2, но индекс «0» опущен для краткости)):

$$i_1 = EI/(5 \text{ м}) = 0,8 i_0; \quad i_2 = 3EI/(6 \text{ м}) = 2 i_0; \\ i_3 = EI/(4 \text{ м}) = i_0; \quad i_4 = EI/(2 \text{ м}) = 2 i_0;$$

$$\nu_1 = 5 \text{ м} \cdot \sqrt{F/(EI)} = 0,8839 \nu; \quad \nu_2 = 6 \text{ м} \cdot \sqrt{1,5F/(3EI)} = 0,75 \nu; \\ \nu_3 = 4 \text{ м} \cdot \sqrt{2F/(EI)} = \nu; \quad \nu_4 = 2 \text{ м} \cdot \sqrt{F/(EI)} = 0,3535 \nu.$$

Согласно формуле (1.13) получаем $\psi_1 = 0,8839$; $\psi_2 = 0,75$; $\psi_3 = 1$; $\psi_4 = 0,3536$. Заметим, что все $\psi_j \leq 1$, так как в качестве ν выбран наибольший из ν_j . Дополнительно выражаем через i_0 жесткость упругой связи: $c_0 = 0,5 \text{ м}^{-3} EI = 2 \text{ м}^{-2} i_0$.

Система канонических уравнений метода перемещений:

$$r \cdot Z = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.2)$$

Компоненты r_{ik} матрицы внешней жесткости r имеют смысл реакций введенных связей в единичных состояниях основной системы. Эти состояния, вызываемые единичными смещениями угловых и линейной связей, изображены на рис. 3.3.

При построении схемы деформированного состояния ОСМП от линейного смещения $Z_3 = 1$ использован план перемещений узлов. Заметим, что реакция упругой связи $r_{c,k}$ (здесь k – номер единичного состояния) отлична от нуля только при $Z_3 = 1$, так как в двух других состояниях связь не претерпевает деформации. При $Z_3 = 1$ возникает абсолютное удлинение связи, равное 1, поэтому $r_{c,3} = c_0 \cdot 1 = 2i_0$.

На рис. 3.3 приведены также эпюры нагибающих моментов в единичных состояниях основной системы, построенные с использованием таблицы типовых эпюр для сжато-изогнутых стержней (см. «Приложение»). Все эпюры криволинейные, поскольку во всех элементах имеются сжимающие продольные силы (если бы были элементы, не испытывающие сжатия, то для них эпюры моментов получились бы прямолинейными). Полезно обратить внимание на то, что общее очертание криволинейной эпюры для какого-либо стержня напоминает вид соответствующей прямолинейной эпюры (треугольной или трапецидальной) при расчете на прочность (без учета влияния продольной силы).

Характерные ординаты единичных эпюр представлены в конечном счете с точностью до общего множителя i_0 , а аргументы специальных функций записаны через ведущий параметр ν .

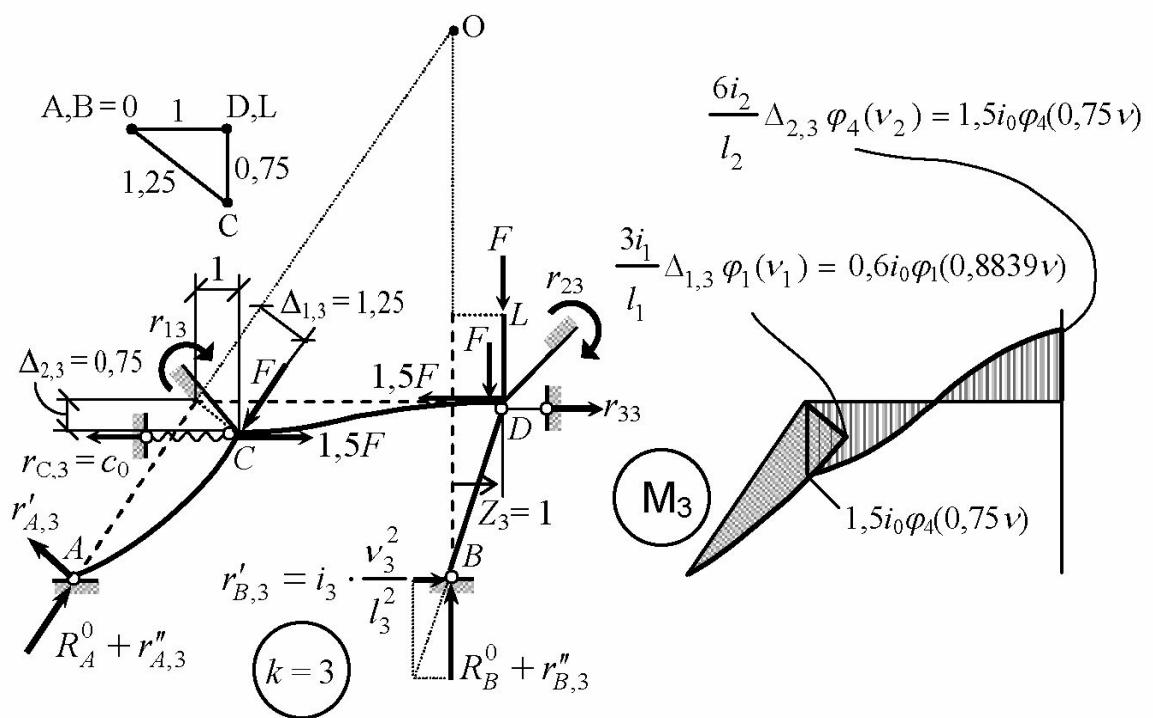
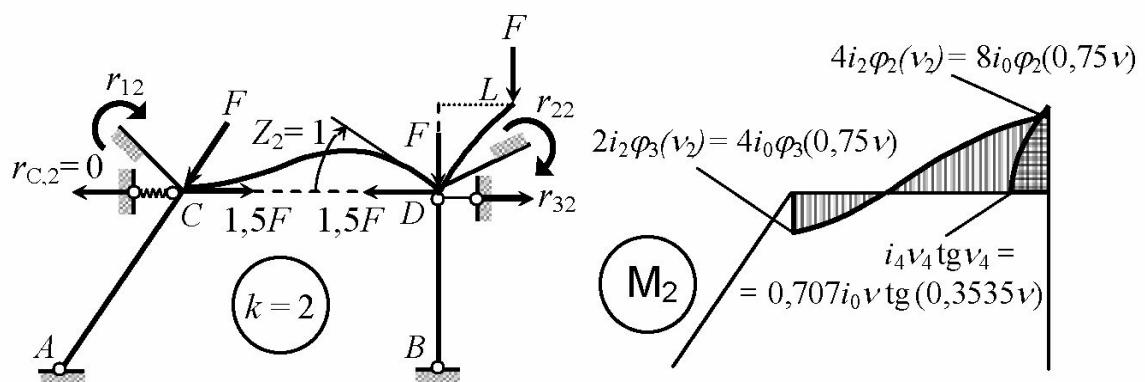
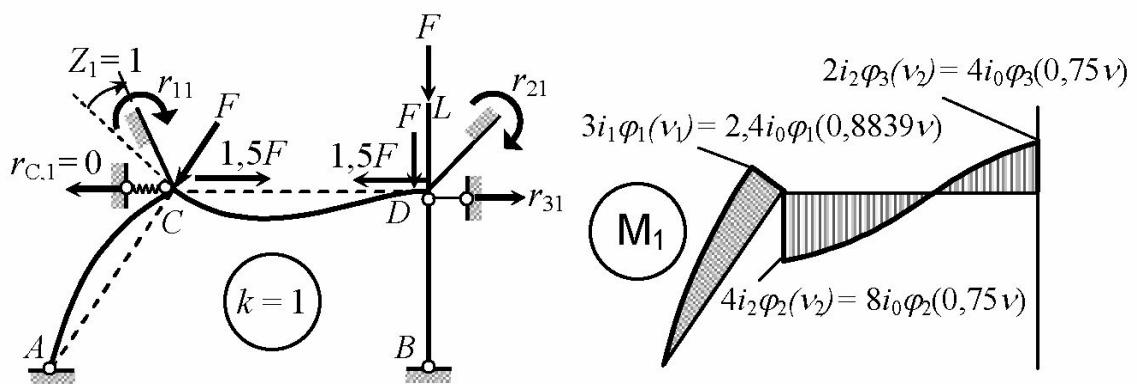


Рис. 3.3

Относительные линейные смещения концевых сечений 1-го, 2-го и 3-го элементов по нормали к оси стержня, необходимые для вычисления характерных ординат эпюры M_3 (в единичном состоянии от линейного смещения $Z_3 = 1$), удобно находить по плану перемещений: $\Delta_{1,3} = 1,25$; $\Delta_{2,3} = 0,75$; $\Delta_{3,3} = 1$ (индекс j у перемещения $\Delta_{j,k}$ указывает номер элемента, а индекс k – номер единичного состояния).

Рассмотрим определение единичных реакций r_{ik} статическим способом. Реакции угловых связей – моменты r_{1k} и r_{2k} находятся

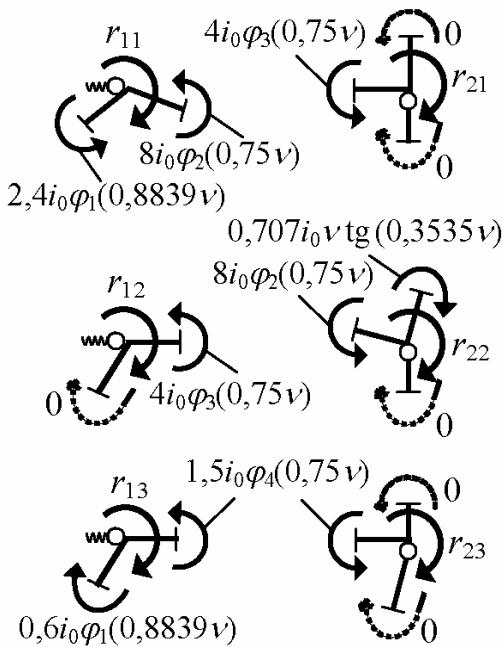


Рис. 3.4

из условий равновесия *моментов* в узлах C и D (рис. 3.4, на котором условно не показаны узловые нагрузки, реакции линейных связей, продольные и поперечные силы):

$$r_{11} = i_0 [2,4\varphi_1(0,8839v) + 8\varphi_2(0,75v)];$$

$$r_{12} = r_{21} = 4i_0\varphi_3(0,75v);$$

$$r_{13} = r_{31} = i_0 [1,5\varphi_4(0,75v) - 0,6\varphi_1(0,8839v)];$$

$$r_{22} = i_0 [8\varphi_2(0,75v) - 0,707v\tg(0,3535v)];$$

$$r_{23} = r_{32} = 1,5i_0\varphi_4(0,75v).$$

Собственную реакцию линейной связи определяем из условия равновесия системы в целом в 3-ем единичном состоянии (см. рис. 3.3):

$$\begin{aligned} \sum x = r_{33} - 1,5F + 1,5F - F \cdot 0,6 - r'_{c,3} - r'_{A,3} \cdot 0,8 + \\ + (R_A^0 + r''_{A,3}) \cdot 0,6 + r'_{B,3} = 0. \quad \text{Учитывая, что } R_A^0 = F, \quad r_{c,3} = 2i_0, \\ r_{c,3} = 2i_0, \quad r'_{A,3} = (3i_1/l_1^2) \cdot \Delta_{1,3} \cdot \eta_1(v_1) = 0,12i_0\eta_1(0,8839v), \\ r'_{B,3} = i_3v_3^2/l_3^2 = 0,0625i_0v^2, \quad \text{получаем} \\ r_{33} = 2i_0 + 0,096i_0\eta_1(0,8839v) - 0,0625i_0v^2 - 0,6r''_{A,3}. \end{aligned}$$

Необходимое для вычисления приращения реакции $r''_{A,3}$ уравнение получаем из условия равновесия узла C (рис. 3.5):

$$\sum y = -(R_A^0 + r''_{A,3}) \cdot 0,8 - r'_{A,3} \cdot 0,6 + F \cdot 0,8 - 0,5i_0\eta_2(0,75v) = 0,$$

откуда $r''_{A,3} = -i_0 [0,09\eta_1(0,8839\nu) + 0,625\eta_2(0,75\nu)]$, и окончательно $r_{33} = i_0 [2 + 0,15\eta_1(0,8839\nu) + 0,375\eta_2(0,75\nu) - 0,0625\nu^2]$.

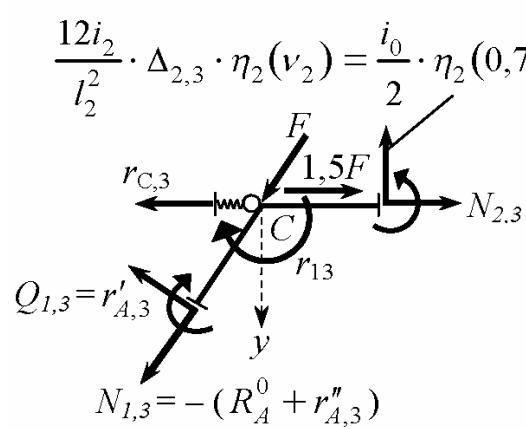


Рис. 3.5

Возможен другой вариант определения r_{33} – с использованием точки пересечения направлений реакций $R_A^0 + r''_{A,3}$ и $R_B^0 + r''_{B,3}$ в качестве моментной точки (см. рис. 3.3). Очень важно то, что уравнение равновесия записывается для деформированного состояния системы, поэтому должны быть учтены моменты от узловых нагрузок:

$$\sum m_O = r_{33} \cdot 8m - 2F \cdot Z_3 - r_{23} - 1,5F \cdot 8m + r'_{B,3} \cdot 12m - F \cdot \Delta_{1,3} + (1,5F - r_{c,3}) \cdot (8m + \Delta_{2,3}) - r_{1,3} - r'_{A,3} \cdot 15m = 0.$$

Полученное из этого уравнения выражение содержит иную комбинацию специальных функций, чем в первом варианте, но их эквивалентность может быть доказана (заметим, что при преобразовании уравнения произведение малых величин $r_{c,3} \cdot \Delta_{2,3}$ принимается ≈ 0).

Матрицу r можно получить также кинематическим способом по формуле (1.9). Матрицы K и a формируются из блоков для всех элементов системы, включая упругую связь в узле C . Структура матриц K_j и $a_{(j),i}$ (j – номер элемента) в зависимости от типа элемента описана в табл. 1 «Приложения».

$$K = \text{diag} [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4 \ K_C];$$

$$K_1 = i_0 \begin{bmatrix} 2,4\varphi_1(\nu_1) & -0,48\varphi_1(\nu_1) \\ -0,48\varphi_1(\nu_1) & 0,096\eta_1(\nu_1) \end{bmatrix}, \quad \nu_1 = 0,8839\nu; \\ \nu_2 = 0,75\nu;$$

$$K_2 = i_0 \begin{bmatrix} 8\varphi_2(\nu_2) & -2\eta_3(\nu_2) & 4\varphi_3(\nu_2) \\ -2\eta_3(\nu_2) & 0,667\eta_2(\nu_2) & -2\eta_3(\nu_2) \\ 4\varphi_3(\nu_2) & -2\eta_3(\nu_2) & 8\varphi_2(\nu_2) \end{bmatrix};$$

$$K_3 = i_0[0,0625\nu^2]; \quad K_4 = i_0[0,707\nu \operatorname{tg}(0,3535\nu)]; \quad K_C = i_0[2];$$

$$a = [a_1 \ a_2 \ a_3] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,25 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,75 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \theta_{b1} \\ \Delta_{be,(1)} \end{array} \right\} a_{(1)} \circled{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta_{b2} \\ \Delta_{be,(2)} \end{array} \right\} a_{(2)} \circled{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta_{e2} \end{array} \right\} a_{(3)} \circled{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta_{b4} \end{array} \right\} a_{(4)} \circled{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{be,(3)} \\ \Delta_{l_c} \end{array} \right\} a_{(5)} \circled{yc}$$

от

от

от

\$Z_1 = 1\$

\$Z_2 = 1\$

\$Z_3 = 1\$

Составляем уравнение устойчивости:

$$\Phi(\nu) = \operatorname{Det}(r) = |r| = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= r_{11}r_{22}r_{33} + 2r_{12}r_{23}r_{13} - r_{11}r_{23}^2 - r_{22}r_{13}^2 - r_{33}r_{12}^2 = 0. \quad (3.3)$$

Корень уравнения устойчивости отыскивается способом последовательных приближений: задавая значения ведущего параметра ν с некоторым начальным шагом $\Delta\nu$, определяют соответствующие значения левой части $\Phi(\nu)$ уравнения устойчивости до тех пор, пока не произойдет изменение знака $\Phi(\nu)$. После этого производится поиск корня в том интервале $\Delta\nu$, на концах которого получены разнозначные значения $\Phi(\nu)$. Интервал поиска постепенно сужается, и в конце может быть применена аналитическая или графическая интерполяция.

Задаем $\nu = 0$, тогда $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0$, $\varphi_1(0) = 1, \dots, \eta_3(0) = 1$, $\nu_4 \operatorname{tg} \nu_4 = 0$, $r_{11} = 10,4 i_0$, $r_{12} = 4 i_0$, $r_{13} = 0,9 i_0$, $r_{22} = 8 i_0$, $r_{23} = 1,5 i_0$, $r_{33} = 2,525 i_0$, $\Phi(0) = 150,6 i_0^3$. Назначаем начальный шаг поиска $\Delta\nu = 0,6$. При $\nu = 0,6$ получаем $\nu_1 = 0,5304$, $\nu_2 = 0,45$, $\nu_3 = 0,6$,

$v_4 = 0,2121$. По табл. 2 «Приложения», применяя интерполяцию, находим значения специальных функций, необходимые для определения единичных реакций: $\varphi_1(0,5304) = 0,9809$, $\varphi_2(0,45) = 0,9932$, $\varphi_3(0,45) = 1,0035$, $\varphi_4(0,45) = 0,9966$, $\eta_1(0,5304) = 0,8865$, $\eta_2(0,45) = 0,9795$, $0,2121 \cdot \operatorname{tg} 0,2121 = 0,0468$ (можно вычислять $\varphi_1(0,5304) \dots \eta_2(0,45)$ непосредственно по формулам из табл. 1 «Приложения»). Затем рассчитываем r_{ik} и $\Phi(v)$. Увеличив v на $\Delta v = 0,6$, вычисляем $\Phi(1,2)$ и т.д. Для получения приемлемой точности все расчеты следует выполнять не менее чем с тремя десятичными знаками после запятой.

Значения r_{ik} и $\Phi(v)$ представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

v	r_{11}/i_0	r_{12}/i_0	r_{13}/i_0	r_{22}/i_0	r_{23}/i_0	r_{33}/i_0	$\Phi(v)/i_0^3$
0	10,4	4,0	0,9	8,0	1,5	2,525	150,60
0,6	10,2996	4,0140	0,9064	7,8543	1,4949	2,4778	141,93
1,2	9,9951	4,0552	0,9262	7,3984	1,4796	2,3366	117,25
1,8	9,4626	4,1288	0,9634	6,5606	1,4538	2,0999	80,09
2,4	8,6606	4,2400	1,0261	5,1715	1,4171	1,7657	36,83
3,0	7,4914	4,3992	1,1332	2,7604	1,3686	1,3287	-2,17
2,9	7,7180	4,3684	1,1109	3,2742	1,3776	1,4091	3,40

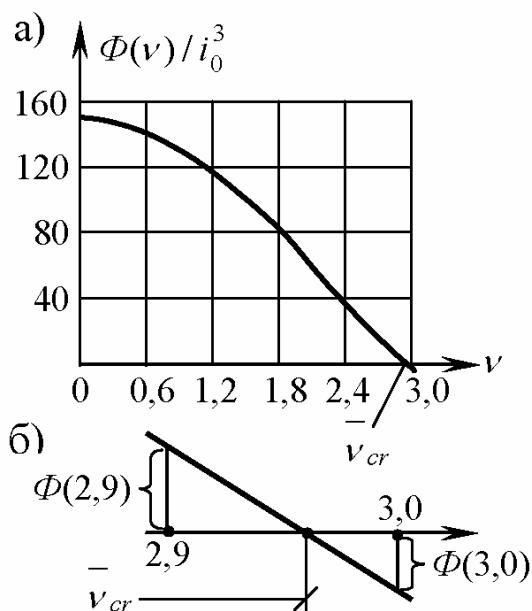


Рис. 3.6

График функции $\Phi(v)$ показан на рис. 3.6, а. Корень уравнения устойчивости определяется линейной интерполяцией в интервале от 2,9 до 3,0 (рис. 3.6, б):

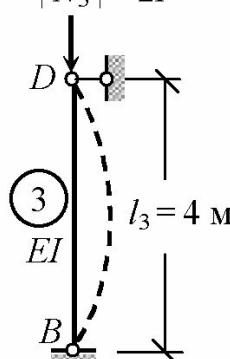
$$\begin{aligned}
 v_{cr} &= 2,9 + \frac{3-2,9}{1 - \frac{\Phi(3)}{\Phi(2,9)}} = \\
 &= 2,9 + \frac{0,1}{1 - \frac{-2,17}{3,40}} = 2,96.
 \end{aligned}$$

Для контроля: $\Phi(2,96) = -0,02 \approx 0$.

Вычисляем \bar{F}_{cr} по формуле (1.16), где ввиду того, что принято $\nu = \nu_3$ (т.е. $d = 3$), имеем $l_d = l_3 = 4$ м, $EI_d = EI_3 = EI$, $\xi_d = \xi_3 = -2$, тогда $\bar{F}_{cr} = \frac{2,96^2 \cdot EI}{2 \cdot 4^2} = 0,274 EI$. (Заметим, что коэффициент 0,274 здесь – в м^{-2}).

Тот же результат можно получить непосредственно из соотношения $\nu_3 = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{F/(EI)}$.

Нагрузка \bar{F}_{cr} соответствует общей потере устойчивости системы. Поскольку использовалась *несовершенная* основная система, то требуется дополнительное исследование скрытых форм потери устойчивости. В рассматриваемой задаче *единственная скрытая форма связана с локальной потерей устойчивости стойки BD*. Рассматривая этот стержень изолированно от других (рис. 3.7), находим по формуле (1.19) критическое значение продольной силы, соответствующее местной потере устойчивости элемента *BD* (коэффициент приведения

$$|N_3| = 2F \quad \text{длины для элемента 4-го типа } \mu_3^* = 1:$$


$$|N_{cr,3}^*| = |\xi_3| F_{cr,3}^* = \frac{\pi^2 EI_3}{(\mu_3^* l_3)^2} = \frac{\pi^2 EI}{(1 \cdot 4)^2} = 0,617 EI,$$

$$\text{откуда } F_{cr,3}^* = \frac{|N_{cr,3}^*|}{|\xi_3|} = \frac{0,617 EI}{2} = 0,308 EI.$$

Рис. 3.7

Выполняя аналогичные расчеты остальных элементов (хотя в этом нет необходимости, так как несомненно, что местная потеря устойчивости для них невозможна), можно найти

$$F_{cr,1}^* = \frac{\pi^2 EI_1}{|\xi_1|(\mu_1^* l_1)^2} = \frac{\pi^2 EI}{1 \cdot (0,7 \cdot 5)^2} = 0,806 EI,$$

$$F_{cr,2}^* = \frac{\pi^2 EI_2}{|\xi_2|(\mu_2^* l_2)^2} = \frac{\pi^2 3EI}{1,5 \cdot (0,5 \cdot 6)^2} = 2,193 EI,$$

$$F_{cr,4}^* = \frac{\pi^2 EI_4}{|\xi_4|(\mu_4^* l_4)^2} = \frac{\pi^2 EI}{1 \cdot (2 \cdot 2)^2} = 0,617 EI.$$

Определяем истинное значение критического параметра нагрузки $F_{cr} = \min(\bar{F}_{cr}, F_{cr,j}^*) = \bar{F}_{cr} = 0,274 EI$ – следовательно, происходит общая потеря устойчивости.

Для выявления формы потери устойчивости вычисляем собственный вектор перемещений β_Z . Принимаем основное неизвестное Z_1 в качестве ведущего, тогда $\beta_Z = [Z_1/Z_1 \ Z_2/Z_1 \ Z_3/Z_1]^T = [1 \ \beta_{Z2} \ \beta_{Z3}]^T$. Сформировав матрицу r при $\nu = \nu_{cr}$, получаем систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 7,584 & 4,387 & 1,124 \\ 4,387 & 2,974 & 1,372 \\ 1,124 & 1,372 & 1,361 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_{Z2} \\ \beta_{Z3} \end{bmatrix} = 0.$$

Представив систему в форме (1.23) и отбросив последнее уравнение, имеем

$$\begin{bmatrix} 4,387 & 1,124 \\ 2,974 & 1,372 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{Z2} \\ \beta_{Z3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7,584 \\ 4,387 \end{bmatrix} = 0,$$

откуда $\beta_{Z2} = -2,046$, $\beta_{Z3} = 1,236$.

Отметим, что β_{Z3} имеет размерность длины (в данном примере измеряется в метрах) потому, что перемещения Z_3 и Z_1 разнотипные (одно линейное, другое угловое), и коэффициент, связывающий их по (1.24), не может быть безразмерным.

Знак «–» у β_{Z2} указывает на то, что поворот узла D на угол Z_2 происходит против часовой стрелки (т.е. в направлении, противоположном принятому за положительное при составлении основной системы).

С учетом найденных соотношений $Z_2 = -2,046 Z_1$ и $Z_3 = 1,236 \text{ м} \cdot Z_1$ может быть изображено – с точностью до неопределенного множителя Z_1 – деформированное состояние системы после потери устойчивости при $F = F_{cr}$ (рис. 3.8).

Вспомогательное построение, выполненное около узла C , позволяет графически выразить линейное перемещение Z_3 через угол поворота Z_1 с учетом коэффициента β_{Z3} . При этом отрезок $\overline{ab} = \beta_{Z3} = 1,236 \text{ м}$ должен изображаться строго в том же масштабе, что и сама система. Угол Z_2 показан на чертеже равным $2,046 Z_1$.

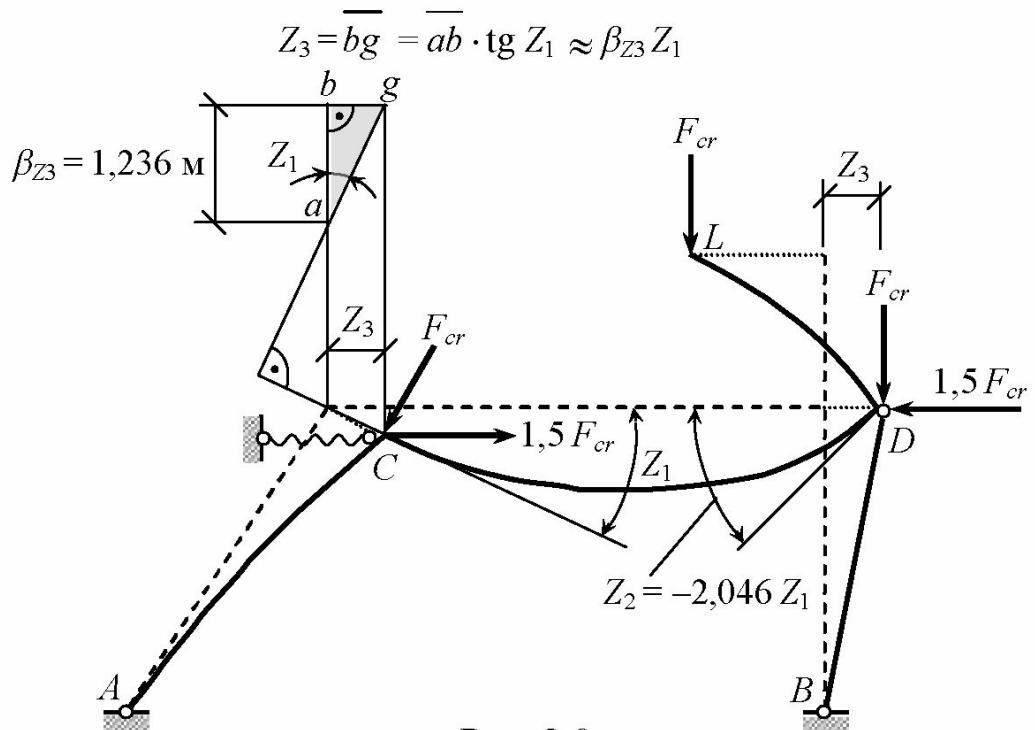


Рис. 3.8

В заключение расчета вычисляются коэффициенты приведения длины $\mu_j = \pi / v_{j,cr} = \pi / (\psi_j v_{cr})$ и приведенные длины всех сжатых элементов системы $l_{0,j} = \mu_j l_j$:

$$\mu_1 = \frac{\pi}{0,8839 \cdot 2,96} = 1,201; \quad \mu_2 = \frac{\pi}{0,75 \cdot 2,96} = 1,415;$$

$$\mu_3 = \frac{\pi}{1 \cdot 2,96} = 1,061; \quad \mu_4 = \frac{\pi}{0,3535 \cdot 2,96} = 3,002;$$

$$l_{0,1} = 1,201 \cdot 5 \text{ m} = 6,00 \text{ m}; \quad l_{0,2} = 1,415 \cdot 6 \text{ m} = 8,49 \text{ m};$$

$$l_{0,3} = 1,061 \cdot 4 \text{ m} = 4,24 \text{ m}; \quad l_{0,1} = 3,002 \cdot 2 \text{ m} = 6,00 \text{ m}.$$

Полезно обратить внимание на то, что полученные значения коэффициентов μ_j , учитывающие совместность работы стержней в выявленной общей потере устойчивости, сильно отличаются от тех, которые используются в расчетах одиночных сжатых стержней с соответствующими закреплениями концов. Например, μ_4 для консоли DL в 1,5 раза больше, чем для консольного стержня с неподвижным опорным защемлением. То, что для стойки BD с шарнирами на обоих концах получен $\mu_3 = 1,061 > 1$, свидетельствует об отсутствии местной потери устойчивости этого элемента.

3.4. Расчет рамы на устойчивость с учетом симметрии

Первый из основных способов учета симметрии системы основан на использовании групповых основных неизвестных, когда осуществляется переход от исходных неизвестных узловых перемещений Z к новым – групповым – неизвестным \tilde{Z} , часть из которых представляют собой *симметричные* обобщенные перемещения \tilde{Z}_s , а другая часть – это *обратносимметричные* (иначе – кососимметричные, антисимметричные) групповые перемещения \tilde{Z}_{as} :

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_s \\ \tilde{Z}_{as} \end{bmatrix} = \eta \cdot Z,$$

где η – квадратная невырожденная ($\text{Det}(\eta) \neq 0$) матрица линейного преобразования вектора Z в вектор \tilde{Z} .

После введения групповых неизвестных \tilde{Z} расчет выполняется так же, как с исходными неизвестными: система канонических уравнений метода перемещений имеет вид $\tilde{r} \cdot \tilde{Z} = 0$, а уравнение устойчивости – $\text{Det}(\tilde{r}) = 0$.

Упрощение расчета состоит в том, что матрица единичных реакций

$$\tilde{r} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{ss} & \tilde{r}_{s,as} \\ \tilde{r}_{as,s} & \tilde{r}_{as,as} \end{bmatrix},$$

компоненты которой представляют собой обобщенные (групповые) силовые факторы по направлениям групповых неизвестных \tilde{Z} , имеет нулевые блоки $\tilde{r}_{s,as} = \tilde{r}_{as,s}^T = 0$ (здесь $\tilde{r}_{s,as}$ – матрица симметричных составляющих реакций введенных связей от обратно-симметричных единичных смещений $\tilde{Z}_{as} = 1$; $\tilde{r}_{as,s}$ – матрица обратносимметричных составляющих реакций введенных связей от симметричных единичных смещений $\tilde{Z}_s = 1$). Вследствие этого полная система уравнений $\tilde{r} \cdot \tilde{Z} = 0$ распадается на независимые части $\tilde{r}_{ss} \cdot \tilde{Z}_s = 0$ и $\tilde{r}_{as,as} \cdot \tilde{Z}_{as} = 0$, первая из которых описывает *симметричные формы потери устойчивости*, а вторая – *обратносимметричные*. Вследствие этого уравнение устойчивости $\text{Det}(\tilde{r}) = \begin{vmatrix} \tilde{r}_{ss} & 0 \\ 0 & \tilde{r}_{as,as} \end{vmatrix} = 0$ также распадается на два независимых – $\text{Det}(\tilde{r}_{ss}) = 0$ и $\text{Det}(\tilde{r}_{as,as}) = 0$, дающих два значения критического параметра нагрузки – $\bar{F}_{cr,s}$ и $\bar{F}_{cr,as}$ для симметричной и обратносимметричной форм соответственно.

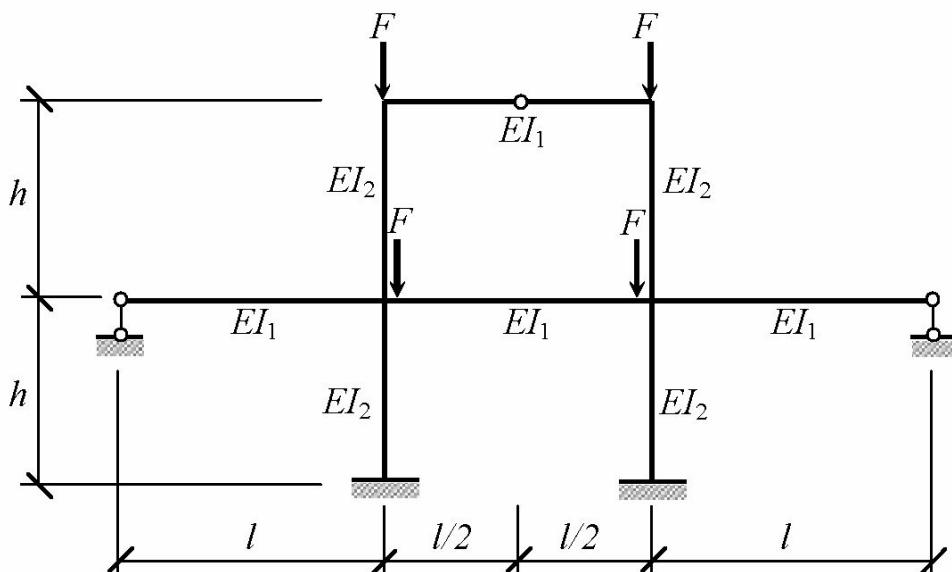


Рис. 3.9

Для рамной системы, обладающей симметрией геометрии, структуры, упругих свойств и нагрузок, схема которой приведена на рис. 3.9, основная система с негрупповыми неизвестными

$Z = [Z_1 \dots Z_6]^T$ представлена на рис. 3.10, а, а с групповыми неизвестными $\tilde{Z}_s = [\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2 \tilde{Z}_3]^T$ и $\tilde{Z}_{as} = [\tilde{Z}_4 \tilde{Z}_5 \tilde{Z}_6]^T$ – на рис. 3.10, б.

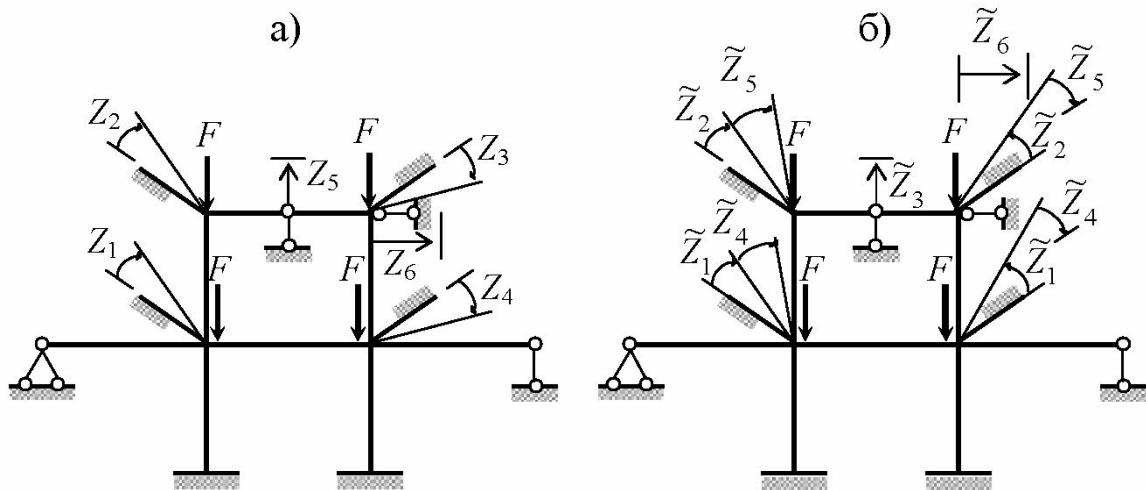


Рис. 3.10

Отметим, что основная система *совершенная* (локальные формы потери устойчивости невозможны).

Матрица преобразования имеет вид

$$\eta = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На рис. 3.11 показаны два из шести единичных состояний основной системы – одно симметричное и одно обратносимметричное, а также соответствующие эпюры изгибающих моментов.

Эпюры криволинейны только на вертикальных сжато-изогнутых элементах, а в пределах горизонтальных стержней, где $N_j^0 = 0$, эпюры линейные. Особенностью единичных состояний является то, что реакции по направлениям групповых неизвестных – это обобщенные силы (в рассматриваемом случае – пары

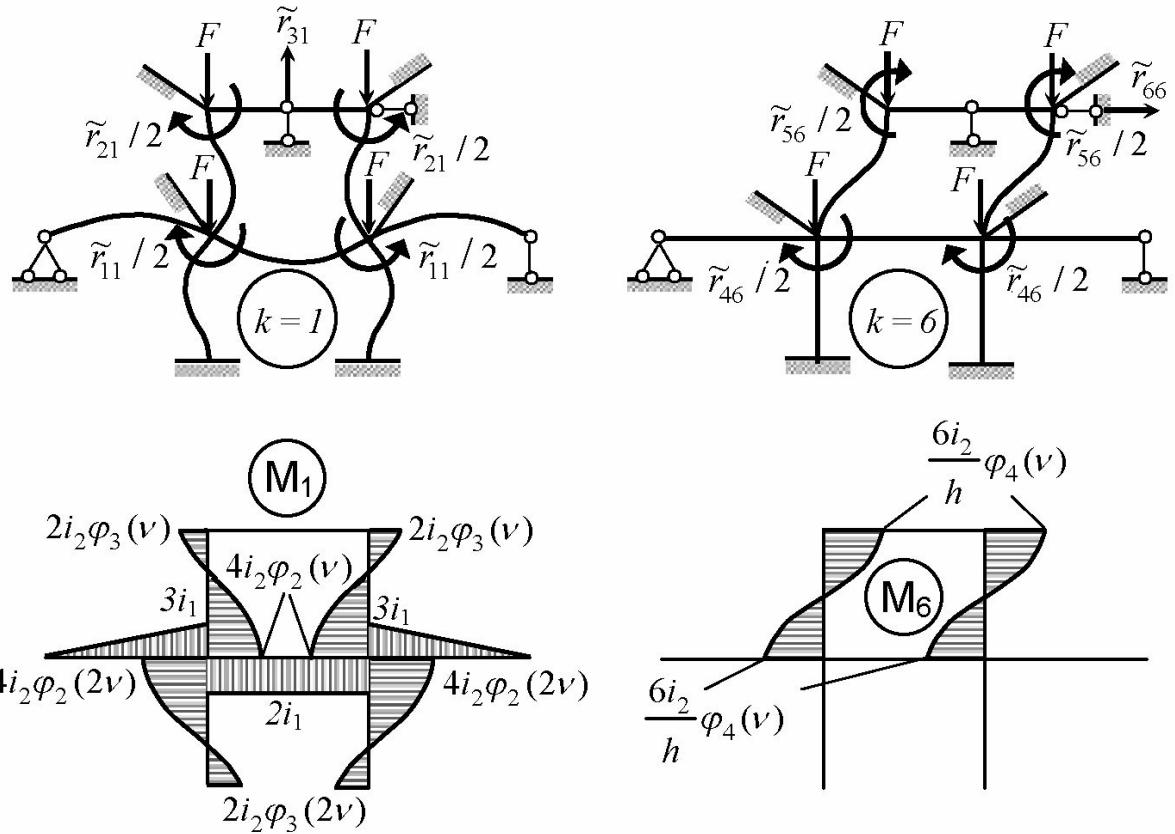


Рис. 3.11

моментов $\tilde{r}_{ik}/2$). Определяя \tilde{r}_{ik} обычными способами, составляем и решаем два независимых уравнения устойчивости для симметричной и обратносимметричной форм. Далее расчет выполняется по общему алгоритму.

Другие примеры расчетов на устойчивость симметричных систем разных типов (многопролетных стержней, ферм, рам, арок) с использованием групповых неизвестных приведены в [9].

Второй способ расчета симметричных систем заключается в том, что система рассекается по линии симметрии, после чего одна из половин отбрасывается с компенсацией введением по линии симметрии связей, соответствующих ожидаемой форме потери устойчивости (симметричной или обратносимметричной) и моделирующих влияние отброшенной части. Далее рассчитывается уже половина системы. В случае, когда невозможно заранее предсказать, какая форма потери устойчивости опаснее – симметричная или обратносимметричная, расчет половины системы выполняется дважды – с разными связями по линии симметрии.

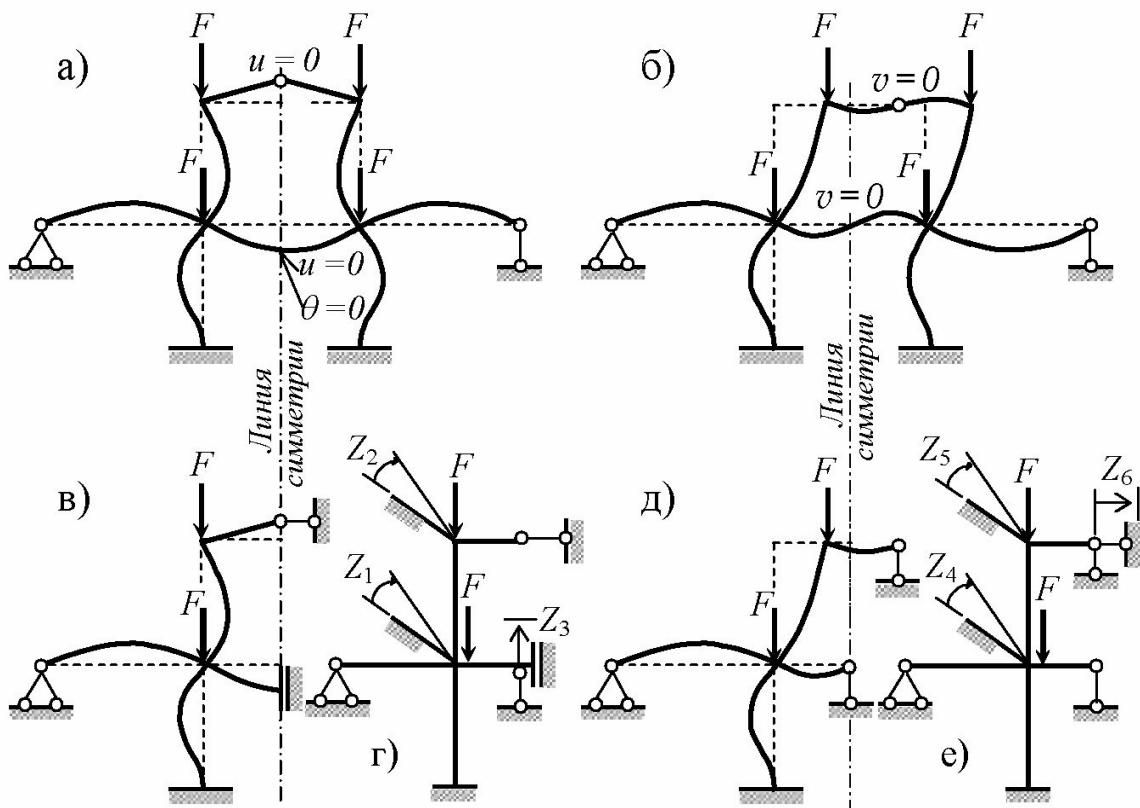


Рис. 3.12

На рис. 3.12, а, б изображены симметричная и обратносимметрическая формы потери устойчивости системы, уже рассматривавшейся выше с применением групповых неизвестных. На схемах обозначены кинематические граничные условия на линии симметрии (u, v – соответственно горизонтальное и вертикальное перемещения сечения, θ – угол поворота), исходя из которых выбираются связи, моделирующие влияние отбрасываемой правой половины системы (рис. 3.12, в, д). На рис. 3.12, г, е приведены основные системы, каждая из которых далее рассчитывается обычным порядком, в результате чего определяются критические значения параметра нагрузки для симметричной и обратносимметрической форм.

Второй способ привлекателен тем, что при таком же (как правило) числе неизвестных, как в первом способе, приходится иметь дело лишь с половиной системы, что снижает трудоемкость технической части решения (упрощается изображение расчетных схем, единичных эпюров и т.д.).

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое устойчивость? В каком случае равновесие тела (сооружения, конструктивного элемента) устойчивое? неустойчивое? безразличное? (64)^{*)}

^{*)} Здесь и далее в скобках даны номера страниц, на которых можно найти ответ на вопрос.

2. Что такое потеря устойчивости? Почему понятие «потеря устойчивости сооружения» не вполне корректно? К чему следует относить термин «потеря устойчивости»? (65)

3. Каков общий принцип исследования качества равновесия системы? (65)

4. Что такое критический параметр нагрузки (воздействия)? (4)

5. Дайте определение бифуркации форм равновесия. В каких системах возможна бифуркация? (67)

6. Что представляет собой потеря устойчивости второго рода? (66)

7. Какой вид имеют графики равновесных состояний при потере устойчивости первого и второго рода? (67, 70, 72, 75)

8. Какой род потери устойчивости имеет место в реальных сооружениях? (71, 72)

9. Что общего у бифуркационной потери устойчивости и потери устойчивости второго рода и чем они отличаются? (66)

10. Как влияют несовершенства системы и загружения на критическую нагрузку второго рода? К чему стремится предельная нагрузка при уменьшении несовершенств до нуля? (72, 75)

11. Сформулируйте основные задачи расчета системы на устойчивость. (71)

12. Какие существуют основные методы расчета сооружений на устойчивость, в чем их сущность? (4, [1, с.209])

13. Перечислите предпосылки линейной теории устойчивости. Какие из них определяют идеальную систему, и какие обеспечивают линеаризацию задачи? (5–8, 68–70)

14. Укажите предпосылки, специфические для расчета на устойчивость методом перемещений. (5, 7, 8)

15. Что принимается за основные неизвестные в расчете стержневой системы на устойчивость методом перемещений? (9)
16. Каким требованиям должны удовлетворять нагрузки? Какие нагрузки называются параметрическими и почему? (7, 68, 69)
17. Как определить начальные продольные силы в стержнях? (7, 35)
18. Как получается основная система метода перемещений в расчетах на устойчивость и в чем ее принципиальные особенности в сравнении с ОСМП при расчете на прочность? (9, 10)
19. Объясните физический смысл канонических уравнений метода перемещений и их членов в случае расчета на устойчивость. Чем они отличаются от уравнений при расчете на прочность? (10–12)
20. Какими способами можно определять единичные реакции r_{ik} ? (12)
21. Каким путем получены выражения специальных функций метода перемещений для сжато-изогнутых стержней? (14)
22. Что такое тривиальное и нетривиальное решения канонических уравнений, каков их физический смысл? (15–17)
23. Как получается уравнение устойчивости по методу перемещений, и каков его физический смысл? (15–17)
24. Что является аргументом в уравнении устойчивости? (15, 20)
25. Сколько корней имеет уравнение устойчивости? Какие из них представляют практический интерес и почему? В каких пределах находится значение минимального корня уравнения устойчивости? (21, 22, 25)
26. Что такое спектр критических нагрузок и как они определяются? Всегда ли нагрузка, соответствующая минимальному корню уравнения устойчивости, является истинной критической нагрузкой? (21, 23)
27. Что называется общей потерей устойчивости системы? (16)
28. Что такое локальная (местная) потеря устойчивости? (16)
29. Что такое форма потери устойчивости? (17)

30. Какие формы потери устойчивости называются явными, а какие – скрытыми? Может ли форма общей потери устойчивости быть скрытой? а локальная форма? (17, 18)
31. Объясните различие между совершенной, несовершенной и ложной основными системами. (19, 20, 23)
32. Как исследуются скрытые формы потери устойчивости при несовершенной основной системе? (23, 24, 43)
33. Почему не удается определить числовые значения основных неизвестных при критической нагрузке? Какими параметрами описывается форма потери устойчивости? (26, 27)
34. Что такое собственный вектор перемещений и как он вычисляется? В каком случае собственный вектор не может быть найден? (27, 28, 44)
35. Что такое приведенная длина сжатого элемента? Чему равны значения коэффициента приведения длины для основных случаев закрепления концов равномерно сжатого стержня постоянного сечения? (24)
36. Как определить коэффициент приведения длины элемента при работе его в составе системы, если известно критическое значение ведущего параметра v_{cr} ? (24, 45)
37. Изложите общий алгоритм расчета на устойчивость методом перемещений. (28)
38. Что является характерным для потери устойчивости симметричных систем? (50)
39. Что дает использование групповых неизвестных в расчете на устойчивость симметричной системы? Каковы при этом особенности канонических уравнений и уравнения устойчивости? Что представляют собой единичные реакции \tilde{r}_{ik} , соответствующие групповым неизвестным, и как они определяются? (49–52)
40. Изложите способ расчета симметричных систем, в котором не применяется группировка неизвестных. (52)

5. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ «РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ РАМЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ»

5.1. Содержание расчетно-графического задания

Для заданной рамы требуется:

1. Проверить безызгибность исходного равновесного состояния.
2. Выбрать основную систему метода перемещений.
3. Составить уравнение устойчивости.
4. Вычислить одно значение левой части уравнения устойчивости.
5. Подготовить исходные данные для расчета на ЭВМ.
6. По результатам расчета на ЭВМ вычислить F_{cr} , изобразить форму потери устойчивости.
7. Определить приведенные длины сжатых элементов рамы.

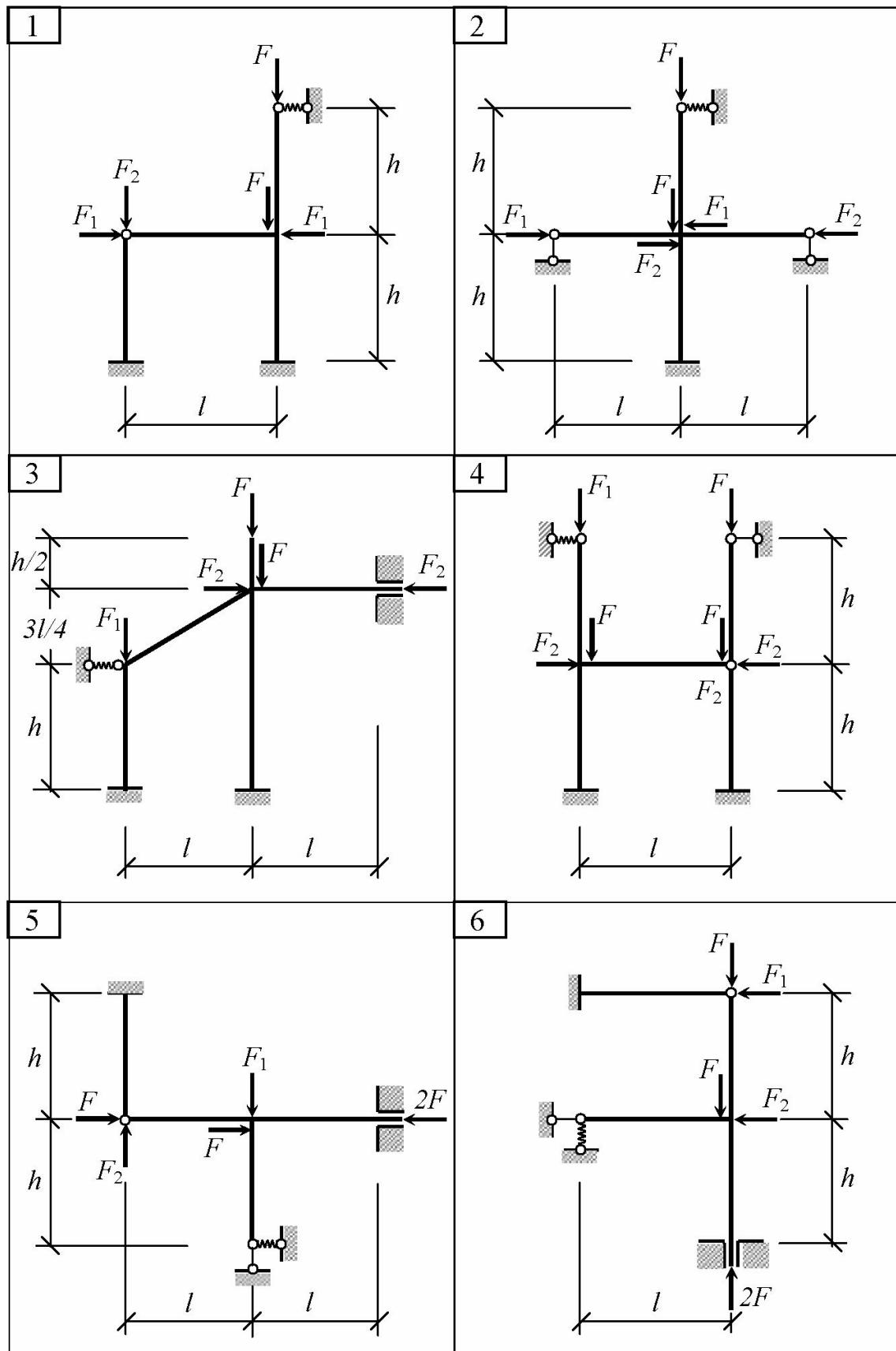
5.2. Варианты исходных данных

№№ вариантов	l , м	h , м	EI_1/EI_2	F_1/F	F_2/F
I	6	4	3	0	0,8
II	6	6	2	0,6	0
III	4	3	2	1,5	0
IV	8	4	3	0	1,2
V	5	3	1,5	0,8	0
VI	8	6	4	0	0,8
VII	4	4	2	1,6	0
VIII	6	3	4	1	0,6
IX	8	3	3	1,2	1
X	12	4	4,5	2	1

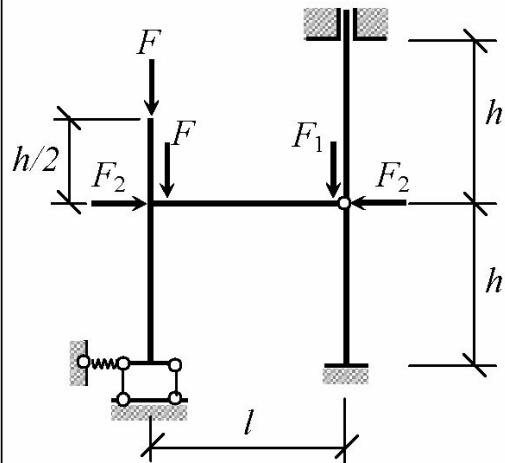
EI_1 – изгибная жесткость сечений горизонтальных и наклонных стержней;

EI_2 – изгибная жесткость сечений вертикальных стержней;

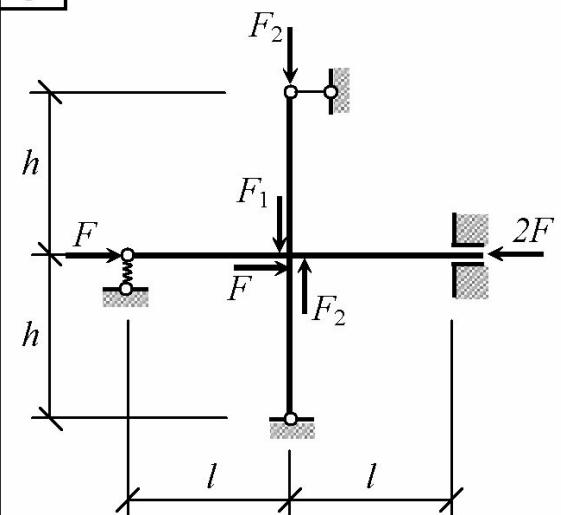
$c_0 = \frac{72EI_1}{l^3}$ – жесткость упругоподатливой связи.



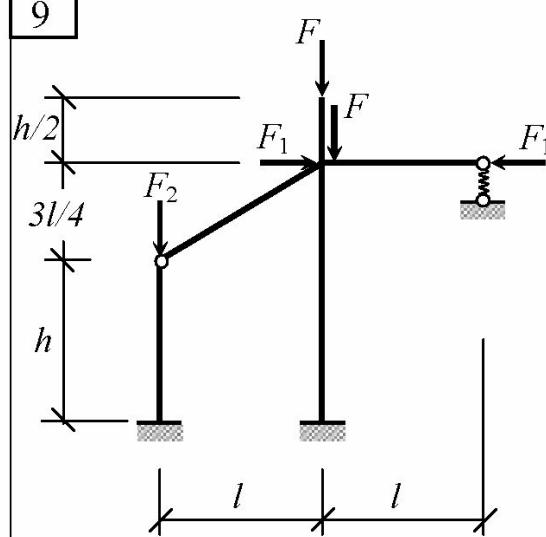
7



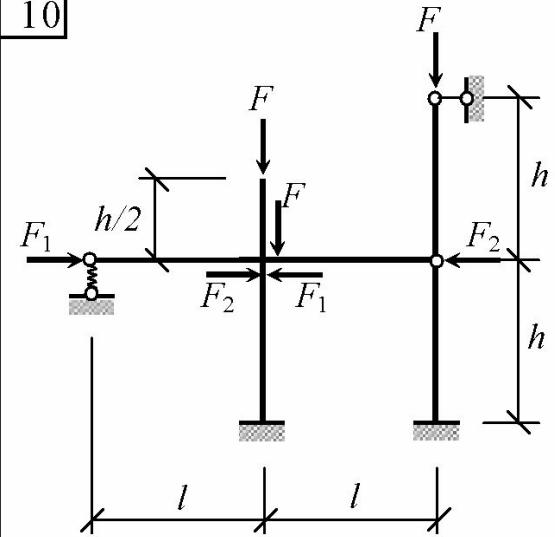
8



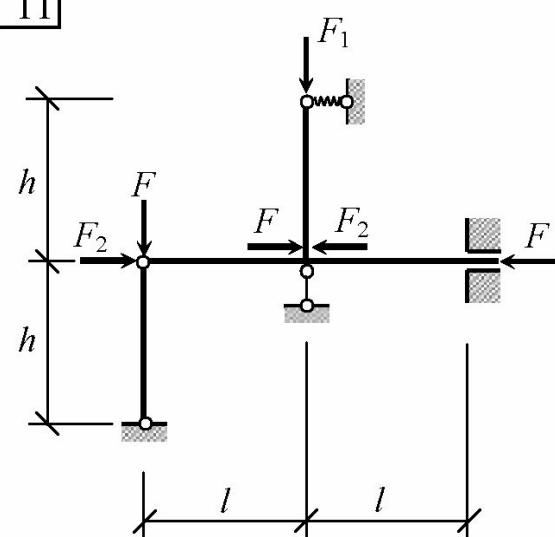
9



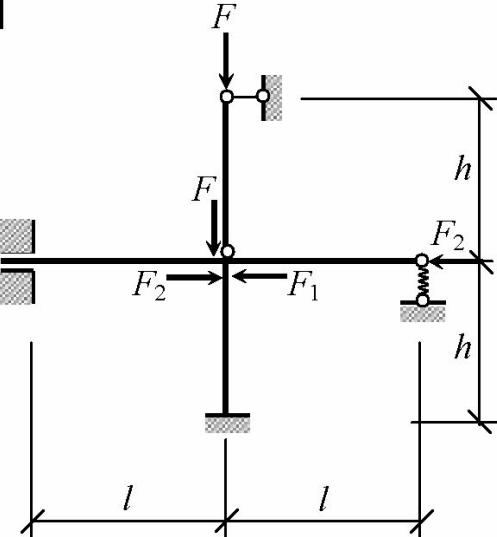
10



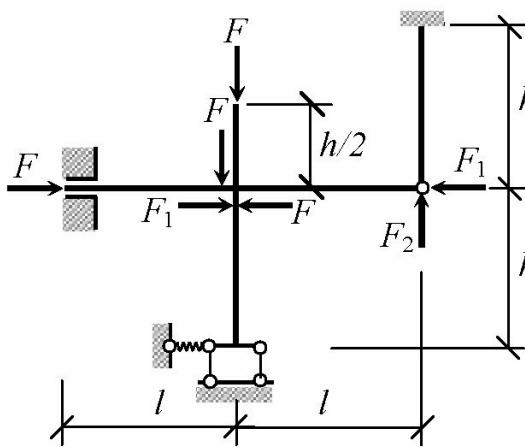
11



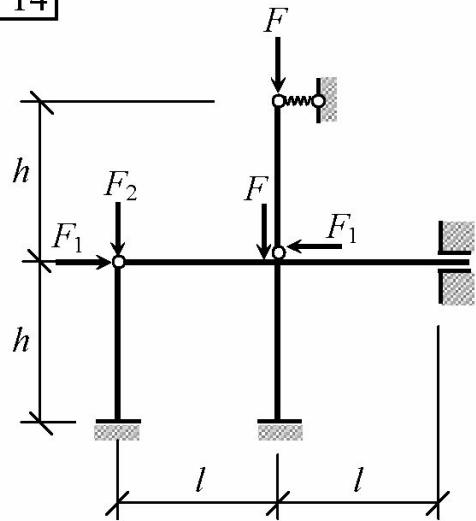
12



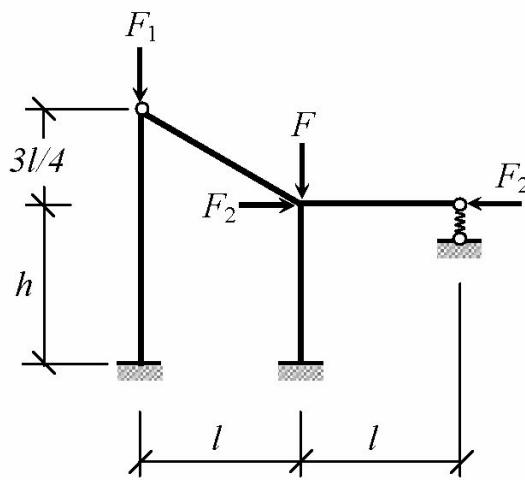
13



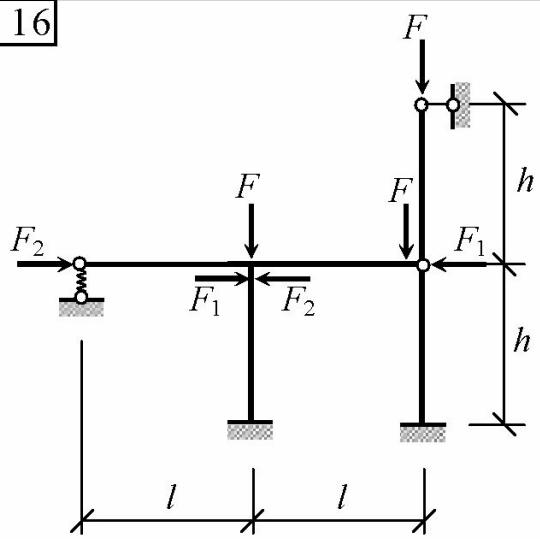
14



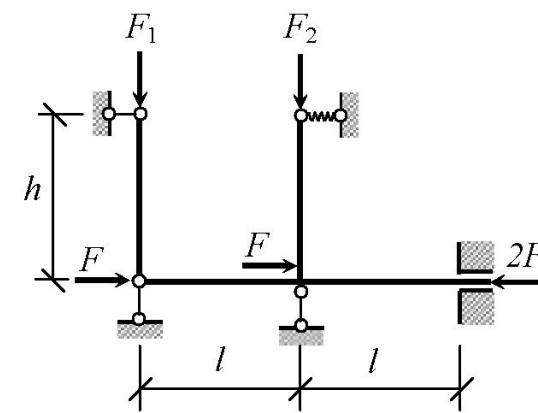
15



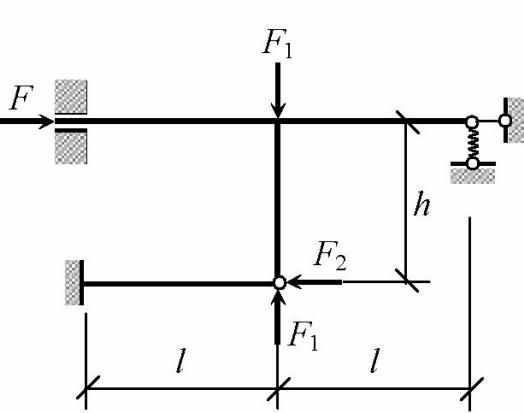
16



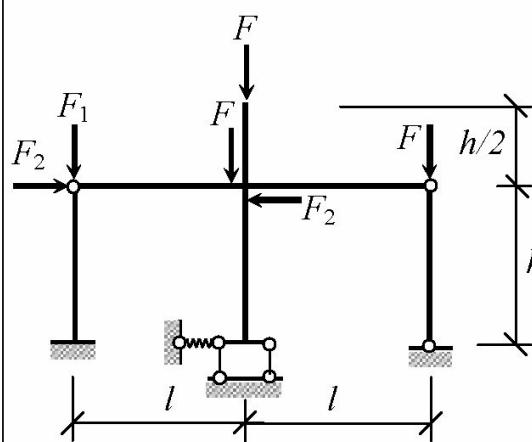
17



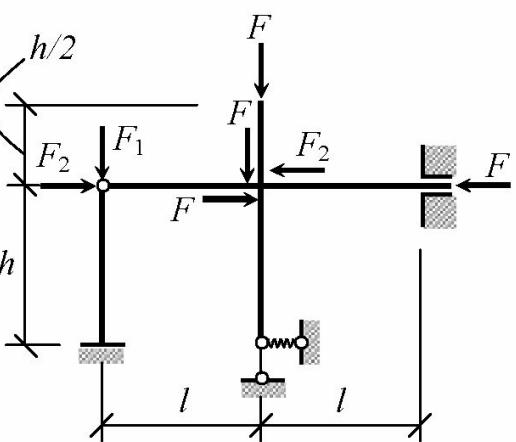
18



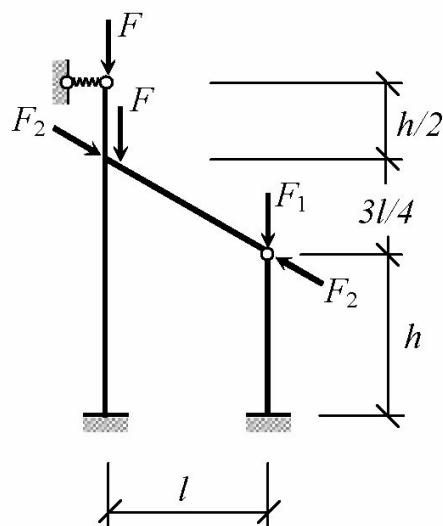
19



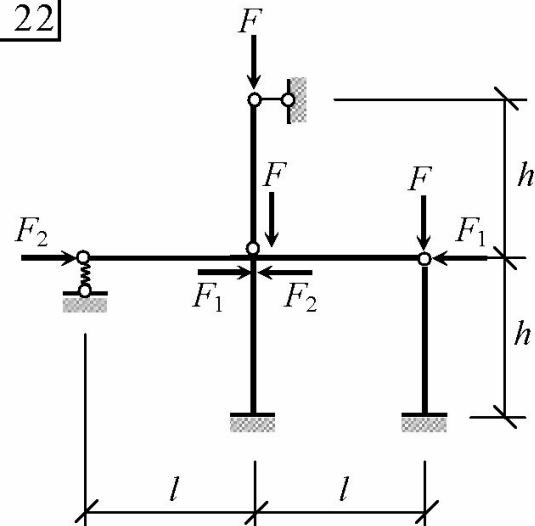
20



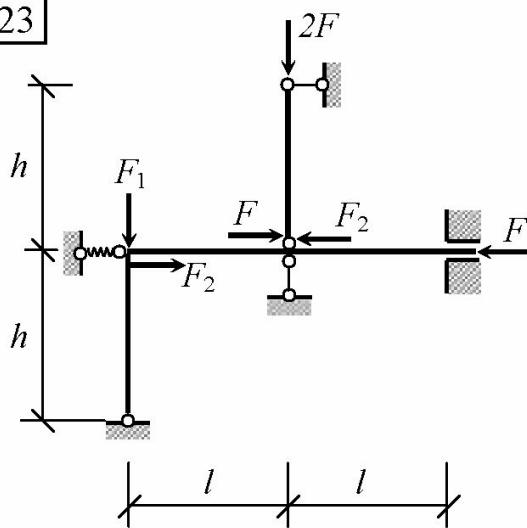
21



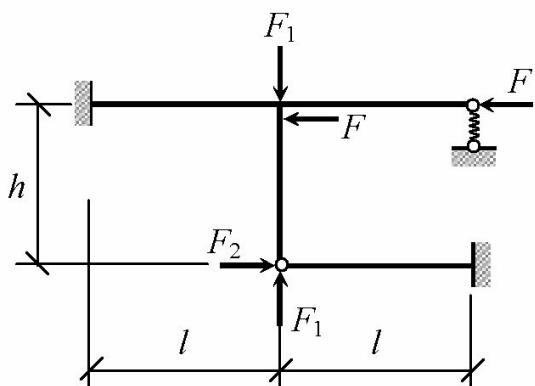
22



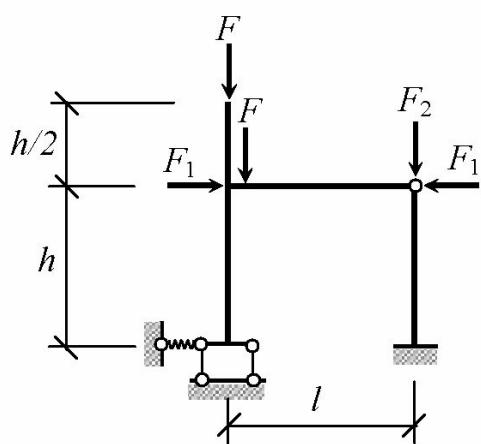
23



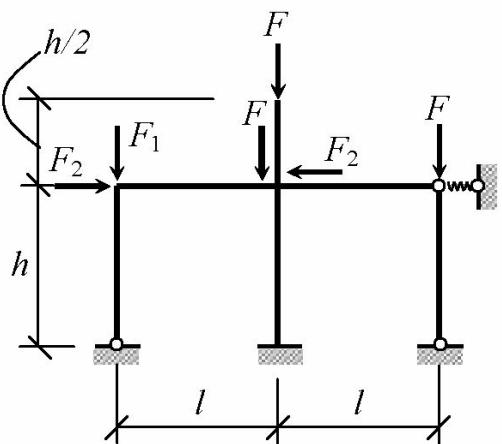
24



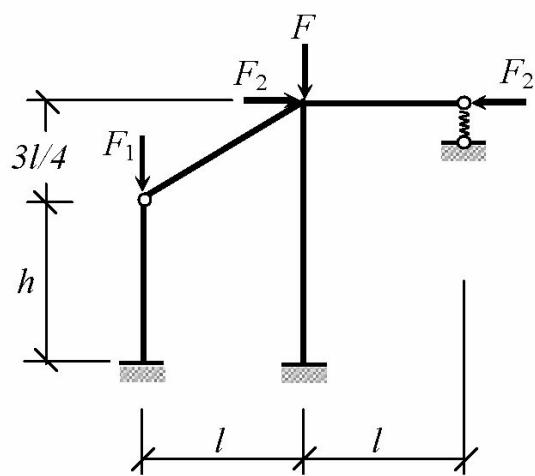
25



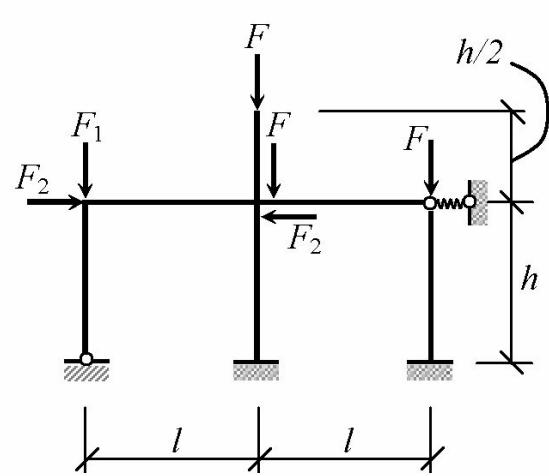
26



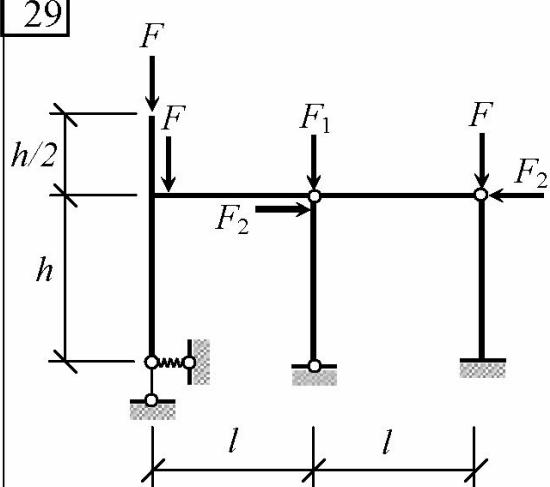
27



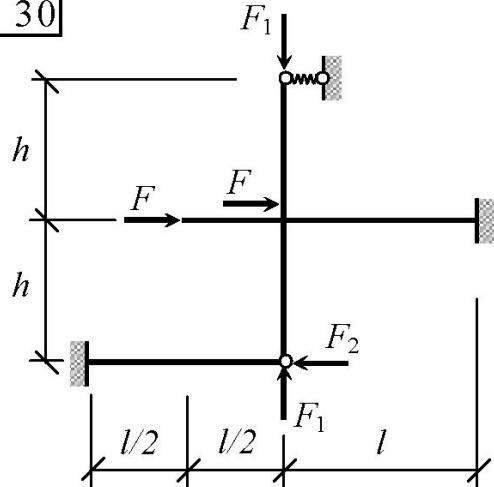
28



29



30



СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: Учеб. для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников и др. / под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
2. Леонтьев Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для строит. спец. вузов. / Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. – М.: Изд-во АСВ, 1996. – 541 с.
3. Безухов Н.И. Устойчивость и динамика в примерах и задачах: Учеб. пособие для строит. спец. вузов / Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов. – М.: Высшая школа, 1987. – 264 с.
4. Крамаренко А.А. Устойчивость и динамика сооружений: Сборник задач для самостоятельной работы студентов / Новосиб. гос. акад. стр-ва. – Новосибирск: НГАС, 1994. – 36 с.

Дополнительная

5. Киселев В.А. Строительная механика: Спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений / В.А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
6. Ржаницын А.Р. Строительная механика: Учебное пособие для вузов / А.Р. Ржаницын. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
7. Клейн Г.К. Руководство к практическим занятиям по строительной механике (основы теории устойчивости, динамики сооружений и расчета пространственных систем): Учебное пособие для втузов / Г.К. Клейн, В.Г. Рекач, Г.И. Розенблат. – М.: Высшая школа, 1972. – 320 с.
8. Роеv В.И. Устойчивость упругих стержневых систем. Метод перемещений: Метод. указания для студентов спец. 2903 «Промышленное и гражданское строительство» / Новосиб. гос. акад. стр-ва. – Новосибирск: НГАС, 1997. – 41 с.
9. Себешев В.Г. Расчет стержневых систем на устойчивость методом перемещений с применением ЭВМ: Метод. указания по строит. механике / Новосиб. инж.-строит. ин-т. – Новосибирск: НИСИ, 1990. – 37 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Основные понятия и определения теории устойчивости сооружений

Теория устойчивости сооружений – раздел строительной механики, в котором рассматриваются принципы и методы расчета деформируемых систем на устойчивость.

Устойчивость деформируемой системы (сооружения, конструкции, элемента) – это свойство сохранять требуемую форму равновесия при заданных воздействиях и проявлять тенденцию возвращаться к ней полностью или частично после устранения малого (в принципе – бесконечно малого) возмущения, вызвавшего отклонение от рассматриваемого положения равновесия.

Форма равновесия характеризуется статическими и кинематическими признаками – определенными комбинациями возникающих внутренних силовых факторов и перемещений сечений элементов.

Состояние (положение, форма) равновесия, устойчивость которого исследуется, принято называть **исходным**.

Возмущающее воздействие может быть реальным (при натурном или экспериментальном исследовании устойчивости сооружения, конструкции) или гипотетическим (в теоретическом решении задачи), а по физической природе – силовым или кинематическим (сосредоточенным или распределенным, статическим или динамическим), но обязательно малым. Теоретически возмущающий фактор должен быть бесконечно малым, а практически – как минимум на два порядка меньше соответствующей по смыслу величины, вызванной заданным воздействием.

Качество равновесия – характеристика равновесного состояния системы, отражающая реакцию (отклик) системы на малое возмущение.

Качественно равновесие системы может быть: а) устойчивым, б) неустойчивым, в) безразличным.

Равновесие называется устойчивым, если после малого его возмущения и прекращения действия возмущающего фактора сооружение стремится вернуться в исходное положение пол-

ностью (при отсутствии необратимых деформаций) или частично (при развитии пластичности).

Особо подчеркнем, что после отклонения системы от исходного состояния устраняется причина этого отклонения – малый возмущающий фактор, но заданное воздействие, конечно, сохраняется.

Неустойчивым называется такое равновесие, после малого возмущения которого с последующим устранением возмущающего фактора система **приходит в движение**, безвозвратно удаляясь от исходного положения.

Безразличное равновесие – это такое равновесие системы, после выведения из которого малым возмущением, прекращающим затем действовать, система остается в отклоненном состоянии, не проявляя тенденции ни возвращаться в исходное положение, ни удаляться от него.

Таким образом, задание малого возмущения равновесного состояния системы при заданном воздействии (образно говоря, «испытание» равновесия малым отклонением) является общим методологическим принципом исследования качества равновесия. В теории устойчивости он называется **принципом малых возмущений**.

Особенностью равновесия *деформируемых систем* (сооружений, конструкций) является то, что качество его может изменяться по мере увеличения нагрузки (или других воздействий – кинематических, температурных и пр.) – устойчивое при меньших воздействиях равновесие может стать неустойчивым или безразличным^{*)} при более высоком уровне воздействия.

^{*)} Безразличное равновесие возможно лишь для особых расчетных моделей сооружений (см. ниже).

Потеря устойчивости равновесного состояния – изменение качества равновесия (утрата устойчивости, превращение в безразличное или неустойчивое).

В практических расчетах сооружений и конструкций термин «потеря устойчивости» условно принято использовать и применительно к самой системе, хотя теоретически это некорректно.

Критическое состояние системы – ее деформированное состояние, в котором исходная форма равновесия перестает быть устойчивой (происходит потеря устойчивости этой формы).

Критический параметр воздействия – см. «Введение».

**Бифуркация^{*)} (разветвление)
форм равновесия** – возникновение

^{*)} От лат. bifurcus – раздвоенный.

возможности существования при критическом значении параметра воздействия минимум двух форм равновесия – исходной и некоторой качественно новой, отличающейся от первоначальной формы тем, что в ней появляется некоторый вид деформации, отсутствовавший в докритических состояниях системы.

Потеря устойчивости первого рода – это потеря устойчивости исходной формы равновесия системы при бифуркации форм.

Потеря устойчивости второго рода – явление, характеризуемое тем, что в критическом состоянии системы исходная форма равновесия становится **неустойчивой**, но новой формы равновесия не возникает.

Явления потери устойчивости 1-го и 2-го рода обладают как принципиально общими чертами, так и важными различиями:

- общее для них то, что в обоих случаях при критическом воздействии исходная форма равновесия утрачивает устойчивость;
- различие же состоит в том, что при потере устойчивости 1-го рода в критическом состоянии на смену исходной форме равновесия приходит новая (которая может даже быть устойчивой), а в случае потери устойчивости 2-го рода новой формы равновесия не возникает, но начинается *движение* с быстро увеличивающимися перемещениями и существенным формоизменением.

Системы, которым свойственна потеря устойчивости 1-го рода (бифуркационная), называются **идеальными** (идеализированными). Признаки их будут сформулированы ниже.

Для иллюстрации описания свойств и поведения деформируемых систем в аспекте устойчивости используются *графики равновесных состояний*, отражающие зависимость между параметром воздействия (нагрузки) и характерным параметром (чаще всего – перемещением Δ), оценивающим отклонение системы от начального положения.

На рис. П.1, а представлен график равновесных состояний идеальной стержневой системы.

Участок OA_1 – докритическая стадия работы системы с устойчивой первоначальной (без изгиба элементов) формой равно-

весия. A_1 – точка бифуркации (критическая точка первого рода), в которой происходит разветвление возможных путей деформирования в закритической стадии: A_1B – неустойчивые равновесные состояния с исходной безыгибной формой, A_1C – устойчивые состояния равновесия с новой – изгибной – формой. Графики такого вида – с восходящей ветвью A_1C (что является признаком устойчивости новой формы равновесия) – типичны для рамных систем из линейно-упругого материала. Для некоторых видов систем закритическая ветвь A_1C может быть нисходящей (из-за структурных особенностей системы и/или развития пластичности в закритической стадии), что свидетельствует о неустойчивости новых равновесных состояний (пример приведен на рис. П.2), либо быть горизонтальной (безразличное равновесие) – последний случай нехарактерен для деформируемых систем*).

* Следует иметь в виду, что достоверное определение качества закритических состояний системы (даже упруго деформируемой) возможно лишь с учетом геометрической нелинейности.

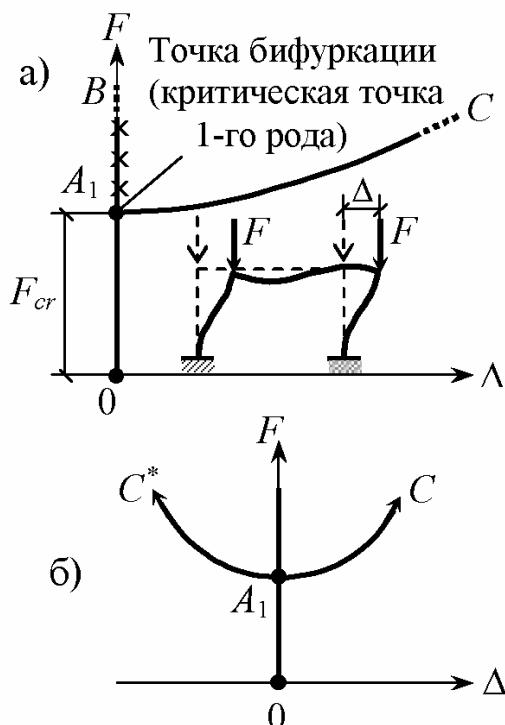


Рис. П.1

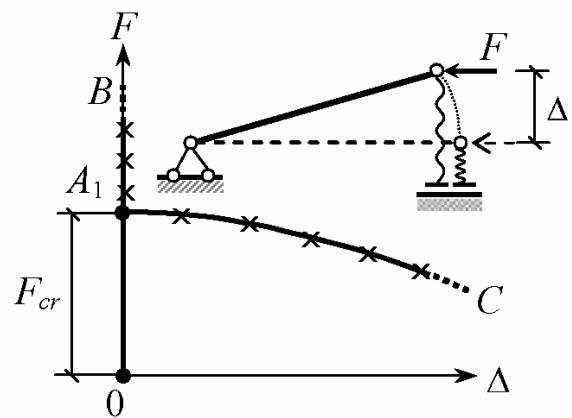


Рис. П.2

Направление отклонения и, следовательно, знак перемещения Δ может быть любым, поэтому наряду с ветвью A_1C ($\Delta > 0$) у графика существует и ветвь A_1C^* при $\Delta < 0$ (см. рис. П.1, б). Если на ветвях изобразить стрелки, указывающие

путь деформирования при увеличении F , то график приобретает характерный вид, из-за которого он получил выразительное название «трезубец бифуркации». В общем случае он несимметричен, однако для отыскания точки A_1 это не имеет значения, поэтому обычно изображается только правая половина, где $\Delta > 0$. Заметим также, что точек бифуркации может быть несколько (и даже бесконечно много!), но практический интерес представляет, как правило, только первая – низшая, отвечающая наименьшему значению F_{cr} .

Разница между системами, имеющими графики различных видов (по рис. П.1 или П.2), состоит в том, что исходная форма равновесия первых при $F = F_{cr}$ теоретически еще устойчива, а вторых – уже неустойчива. Точка бифуркации A_1 в первом случае принадлежит области устойчивости, а во втором – неустойчивости (области неустойчивости на рисунках отмечены крестиками). Однако, исходя из того, что при небольших отклонениях Δ оба графика практически горизонтальны, считают, что при $F = F_{cr}$ начальная форма перестает быть устойчивой, и любое малое возмущение переводит систему в новое – безразличное состояние равновесия.

Далее рассмотрим признаки *идеальной системы*.

Идеальной системой, как следует из ее определения, является такая, для которой можно обнаружить как минимум одну форму равновесия, альтернативную исходной, с качественно иными статическими и кинематическими характеристиками (видом деформированного состояния). Очевидно, что при этом должны учитываться одновременно и структурно-геометрические характеристики системы (в том числе жесткостные), и воздействия на нее.

Например, если плоская стержневая система произвольно загружена в своей плоскости, то ее элементы изначально находятся в условиях сжатия (растяжения) с изгибом, т.е. имеет место общий случай сложной деформации в плоскости. Альтернативой может быть только пространственная деформация – при этом принципиально новыми, отсутствующими в исходном состоянии, видами деформации являются кручение и изгиб из плоскости системы. Однако если плоская система и ее загружение симмет-

ричны, то альтернативой исходному *симметричному* деформированию может быть возникновение *обратносимметричных* перемещений в той же плоскости. При этом возможность бокового выпучивания тоже существует, как и в вышеупомянутом общем случае, поэтому исследованию подлежат уже два варианта потери устойчивости.

Важным для расчетов строительных конструкций случаем является безмоментное исходное состояние системы – с осевым сжатием и растяжением стержневых элементов – прямых (фермы, рамы) или криволинейных (арки с рациональным очертанием оси – например, параболическая арка при равномерно распределенной вертикальной нагрузке). При этом альтернативными формами являются: 1) деформирование в плоскости с продольно-поперечным изгибом элементов; 2) выпучивание из плоскости с пространственным продольно-поперечным изгибом и кручением.

Упомянем также некоторые примеры бифуркационных задач расчета устойчивости более сложных, чем стержневые, пластинчато-оболочечных систем с безмоментным исходным состоянием: сферическая или круговая цилиндрическая оболочка под внешним равномерным гидростатическим давлением; плоское напряженное состояние пластиинки, загруженной в срединной плоскости.

Можно сформулировать правило получения идеализированной расчетной схемы: *если структурно-геометрические параметры системы заданы, то воздействия должны «подбираться» под них из условия равенства нулю соответствующих статико-кинематических характеристик возможных альтернативных форм равновесия* (пример – условие безмоментности).

Идеализированная система, к сожалению, не всегда получается столь просто, как в приведенных выше примерах. Более того, иногда это вообще не удается сделать. Так, в общем случае для арок и оболочек строгую безызгибность исходного состояния обеспечить невозможно.

Воздействия, удовлетворяющие указанному условию, в исследовании альтернативного равновесного состояния играют роль исходных параметров системы, наряду с ее структурными, геометрическими и жесткостными характеристиками. Поэтому такие воздействия (в том числе силовые, т.е. нагрузки) называются **параметрическими**.

Математическим признаком параметрического воздействия является то, что его характеристика присутствует в опе-

раторе (дифференциальном или матричном) уравнений, описывающих возмущенное состояние системы, иначе говоря, входит в коэффициенты при неизвестных в этих уравнениях.

Общей математической особенностью решения задач потери устойчивости первого рода является *однородность* уравнений, которыми описывается альтернативное равновесное состояние. Следовательно, в бифуркационных задачах устойчивости все воздействия – только параметрические.

Если не ставить задачу исследования качества равновесия идеальной системы в закритических состояниях, ограничиваясь только отысканием критической нагрузки F_{cr} , то можно в решении пренебречь геометрической нелинейностью, то есть использовать линеаризованные (приближенные) выражения деформаций через перемещения. Например, для первоначально прямолинейного стержня линеаризованное*) выражение кривизны оси при искривлении в плоскости ХОУ $\rho_z \approx d^2 v / dx^2$ получается из точного уравнения

$$\rho_z = \frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} \text{ при } \frac{dv}{dx} \ll 1.$$

*) Вторая производная прогиба, через которую выражается кривизна, входит в приближенную формулу *в первой степени*.

Таким образом строится расчетная модель *идеальной геометрически линейной системы*, равновесные состояния которой описываются графиком, приведенным на рис. П.3. Эта модель является основой **линейной теории устойчивости**, принципиальными особенностями которой являются:

1) бифуркационная постановка задачи устойчивости, и как следствие этого – однородность уравнений, которыми описывается возмущенное состояние системы (результат идеализации системы);

2) линейность уравнений (причина – использование линеаризованных геометрических соотношений).

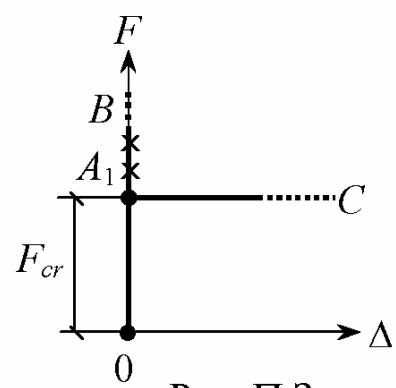


Рис. П.3

Применение линейной теории во многих случаях оказывается практически оправданным, так как удается сравнительно просто получить приемлемое по точности решение основных задач расчета сооружения на устойчивость.

Основными задачами расчета системы на устойчивость являются:

- 1) определение критического параметра воздействия;
- 2) выявление формы потери устойчивости, т.е. вида деформированной системы в критическом состоянии (в случае бифуркации – в альтернативном равновесии);
- 3) нахождение коэффициентов приведения длины μ и приведенных (эффективных, расчетных) длин $l_0 = \mu l$ элементов с учетом их совместной работы в составе системы.

Решение первой задачи позволяет оценить запас устойчивости сооружения (конструкции) при заданной нагрузке – проектной или реально действующей.

Знание формы потери устойчивости помогает в выборе наиболее эффективных конструктивных мер повышения устойчивости системы (так, усиление элементов или введение дополнительных связей целесообразно выполнять в тех ее частях, где перемещения и деформации наибольшие).

И, наконец, с помощью найденных коэффициентов приведения длины μ и расчетных длин l_0 оказывается возможным выполнять поэлементную проверку стержней на устойчивость по нормативной методике «Строительных норм и правил» (СНиП) с использованием коэффициента продольного изгиба φ , зависящего от гибкости стержня $\lambda = l_0 / r$ (здесь r – радиус инерции сечения).

Комментарий относительно практической значимости результатов расчета на устойчивость дан на стр. 24.

Свойства идеальных систем могут заметно отличаться от свойств реальных сооружений. Последние всегда имеют ряд несовершенств (в первую очередь геометрических), нагрузки могут быть достаточно сложными (в частности, для рамных систем не обеспечивается безмоментность исходного равновесия), а достижение предельной несущей способности сопровождается развитием пластических деформаций. В силу этого потеря устойчиво-

сти первого рода в принципе невозможна для реальных сооружений. Им свойственна потеря устойчивости второго рода.

Типичный график равновесных состояний системы (рис. П.4, а) с геометрическими несовершенствами (начальная погибь стойки со стрелой f_0) и с неузловой нагрузкой (e_0 – смещение нагрузки от узла) показан на рис. П.4, б*).

Вершине графика – точке A_2 , называемой предельной точкой или **критической точкой второго рода** – отвечает наибольшая нагрузка F_{ult} , которую может выдержать система. Она называется **предельной нагрузкой** или **критической нагрузкой второго рода**, определяемой из условия

$$dF/d\Delta = 0.$$

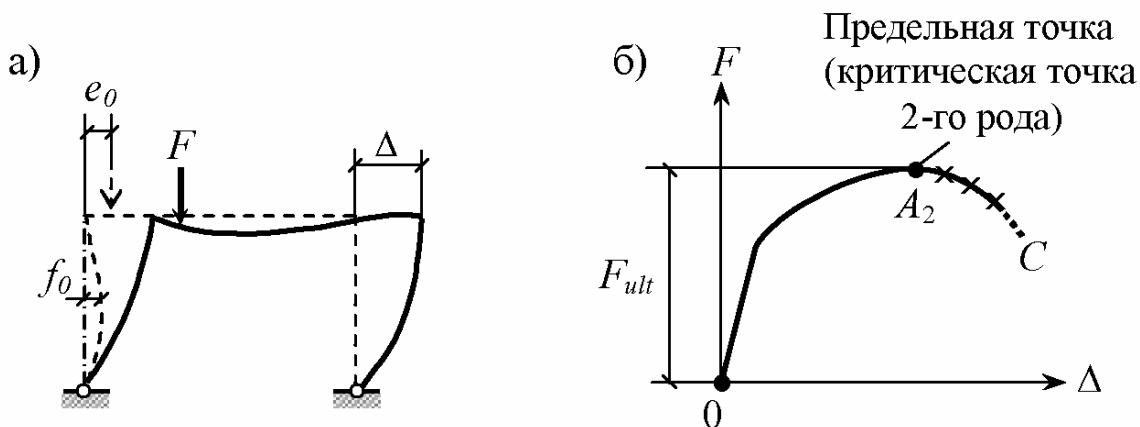


Рис. П.4

В заключение подчеркнем, что не следует путать устойчивость и прочность – это принципиально разные свойства сооружений. Именно поэтому соответствующие расчеты существенно различны, причем в случае использования единой расчетной схемы исследование устойчивости обычно оказывается более сложным**). Тем не менее, действующими нормами проектирования строительных конструкций (СНиП) исчерпание прочности и потеря устойчивости относятся к одному

*) Эту систему можно рассматривать как характерную модель, где в зависимости от значений e_0 и f_0 , могут получаться варианты идеализированные и неидеализированные по геометрии и нагрузкам.

**) Для понимания этого достаточно сопоставить предписываемые СНиП проверки центрально сжатого стержня на прочность и устойчивость – соответственно по формулам $|N|/A \leq R_c$ и $|N|/A \leq \varphi R_c$. Для определения входящего во вторую из них коэффициента продольного изгиба φ нужно использовать коэффициент приведения длины μ , который в общем случае находится дополнительным расчетом сжатого стержня на устойчивость.

и тому же расчетному предельному состоянию – по несущей способности. Это можно объяснить тем, что последствия обоих указанных явлений могут быть одинаково фатальными. Правда, теоретически возможна потеря устойчивости с сохранением прочности (и это иногда используется в современных конструкциях, где некоторые элементы могут работать в закритической стадии) и наоборот – потеря устойчивости может не быть, а прочность уже исчерпана (пример – разрушение центрально растянутого стержня из хрупкого материала). Практически же, как правило, потеря устойчивости сопровождается возникновением значительных перемещений, и, в конце концов, происходит исчерпание прочности в закритической стадии деформирования.

Но и само явление разрушения конструктивного элемента может быть истолковано как потеря устойчивости процесса деформирования. Так, образование «шейки» на растягиваемом стержне из пластичного материала можно рассматривать как бифуркацию форм (на смену равномерному распределению деформаций по длине элемента приходит равновесие с деформациями, локализованными преимущественно на некотором участке). И далее, переходя на микроуровень, возможно и текучесть пластического материала, и разрушение описать с позиций устойчивости равновесия между силовыми воздействиями на материал и внутренними силами взаимодействия между его материальными частицами. Понятно, что это требует совсем иной – более «тонкой» – детализации расчетных моделей.

Заметим также, что при углубленном подходе удается выявить дополнительные общие черты явлений потери устойчивости 1-го и 2-го рода, кроме тех принципиальных, которые были указаны выше. Определенное сходство математических процедур отыскания критических параметров воздействий в задачах этих двух типов дает основание считать, что и потерю устойчивости второго рода можно трактовать с позиций бифуркации, исходя из возможности возникновения в неидеальных системах смежных форм равновесия (правда, не обладающих качественными отличиями от исходной формы).

Этот комментарий приведен для того, чтобы обратить внимание читателя на необходимость более широкого взгляда на проблему устойчивости деформируемых систем. Добавим, что кроме устойчивости равновесия сооружений, практическое значение имеет и устойчивость их *движения* (динамическая устойчивость), например при аэродинамических колебаниях высотных объектов и большепролетных мостов, но это – предмет особого изучения.

Содержательное и глубокое изложение принципиальных вопросов теории устойчивости сооружений дано в учебнике [5].

Далее приводятся некоторые дополнительные сведения – в расчете на тех читателей, которые, осваивая начала теории устойчивости деформируемых систем, заинтересованы в более глубоком, чем это предусмотрено учебными программами, ее понимании. Акцент сделан на роли различных видов нелинейностей в исследовании устойчивости, так как с этим связано истолкование целого ряда специфических явлений и понятий – таких, как *устойчивость «в большом»* и *«в малом»*, энергетические *«барьер»* и *«яма»*, потеря *устойчивости при фиксированной нагрузке и в условиях продолжающегося загружения* (теории приведенно-модульной нагрузки Ф. Энгессера – Т. Кармана и касательно-модульной нагрузки Ф. Шенли) и др. Систематически и подробно обо всем этом сказано, в частности, в книге:

Филин А.П. *Прикладная механика твердого деформируемого тела. Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики.* Т. III. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 480 с.

Строгое решение задачи исследования устойчивости сооружения в общем случае требует учета всех видов нелинейностей – конструктивной, физической и геометрической.

Конструктивная нелинейность не случайно названа первой – ее учет в расчетах на устойчивость *обязателен*, так как, в соответствии с принципом малых возмущений, все уравнения должны записываться для отклоненного состояния, то есть «по деформированной схеме».

Это относится к задачам устойчивости и 1-го, и 2-го рода.

Математическое описание явления потери устойчивости второго рода значительно сложнее, чем в случае бифуркации. Большие трудности создает учет физической и геометрической нелинейностей.

Если при аналитическом исследовании системы типа рамы, представленной на рис. П.4, а, пренебречь физической нелинейностью, то будет получен график, *принципиально отличный* от истинного (показанного на рис. П.5 сплошной линией A_0A_2C) – он не будет иметь нисходящей ветви; причем в случае учета гео-

Конструктивная нелинейность обусловлена изменением расчетной схемы сооружения в процессе его деформации:

- а) структурными изменениями – включением или выключением связей, изменением их положения;
- б) изменением координат точек сооружения за счет их перемещений, если необходимо выполнять расчет «по деформированной схеме».

Общим признаком конструктивной нелинейности является то, что при записи уравнений равновесия учитываются *перемещения*. Перемещения могут либо непосредственно входить в статические уравнения (случай расчета по деформированной схеме), либо описывать условия,ываемые при записи этих уравнений (изменения связей).

Заметим, что встречающееся иногда истолкование расчета по деформированной схеме как учет геометрической нелинейности **ошибочно**.

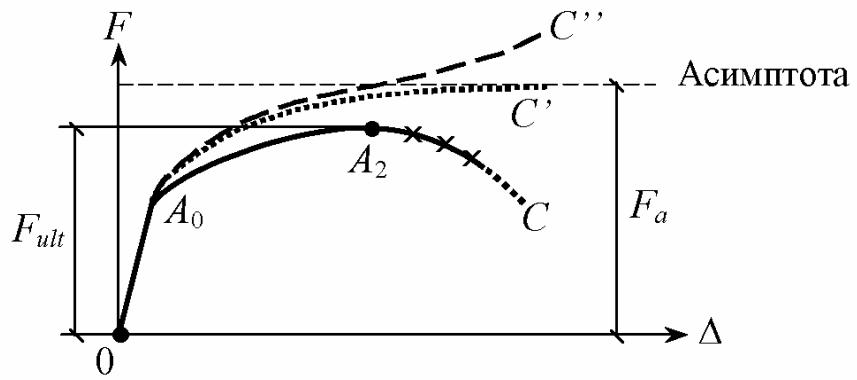


Рис. П.5

метрической нелинейности (при использовании точного выражения кривизны ρ_z) получается монотонно восходящий график A_0C'' (штриховая линия на рис. П.5), не имеющий предельной точки даже при больших перемещениях, следовательно, при таком решении задачи *определить* F_{ult} не удается. В случае расчета в геометрически линейной постановке (по приближенной формуле для ρ_z) график зависимости $F \sim \Delta$ (пунктирная кривая A_0C') асимптотически стремится к горизонтали ($F \rightarrow F_a$ при $\Delta \rightarrow \infty$), и формально можно считать, что $F_{ult}^0 = F_a$. Парадокс: более «грубо» (и, соответственно, простое) решение дает лучшее приближение к искомому F_{ult} .

Расхождение между F_a и F_{ult} уменьшается с уменьшением несовершенств (на рис. П.6 штриховой линией показан график, отвечающий меньшим значениям f_0 и e_0). В пределе при $f_0 \rightarrow 0$ и $e_0 \rightarrow 0$ кривая OA_2C вырождается в ломаную OA_1C' .

Приведенные выше соображения позволяют вместо сложной задачи определения критической нагрузки второго рода F_{ult} сформулировать и решить более простую бифуркационную задачу. Это упрощение достигается ценой потери точности, и полученное значение F_{cr} следует рассматривать как *оценку сверху* для предельной нагрузки F_{ult} (см. рис. П.6). При этом принципиально

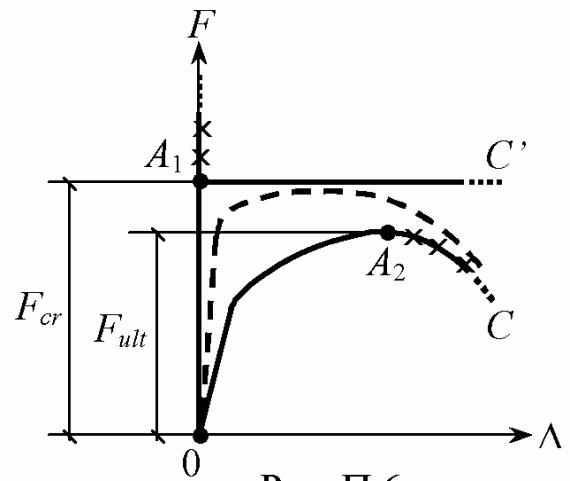


Рис. П.6

возможно учесть в бифуркационном решении физическую нелинейность, хотя это существенно усложняет расчет. Однако чаще всего применяют линейную теорию устойчивости.

Все рассмотренные варианты графиков демонстрируют нелинейность зависимостей $F \sim \Delta$ – от более сложных при учете полного комплекса нелинейностей для неидеальных систем до простейших – билинейных (OA_1C и OA_1C' на рис. П.3 и П.6). Подчеркнем, что последние, хотя и относятся к линейной теории, отражают конструктивную нелинейность – единственную обязательно учитываемую в теории устойчивости сооружений.

Следует отметить, что определение напряженно-деформированного состояния неидеализированной системы при нагрузках, меньших, чем предельная, то есть в докритической стадии (участок OA_2 на рис. П.6), может представлять самостоятельный практический интерес. Для этого выполняется расчет системы по деформированному состоянию, но, как правило, без учета геометрической нелинейности. Подробнее об этом можно узнать из [8].

Таблица 1
Реакции и эпоры внутренних силовых факторов от смещений концевых сечений и матрицы жесткости однопролетных сжато-изогнутых стержней постоянного сечения (типовых элементов плоских ОСМП)

Тип элемента	Вид сечения		Матрица симметричный концевых сечений и матрица жесткости
	Поворот концевого сечения на угол θ	Взаимное линейное смещение концевых сечений Δ	
Тип 1			$a_{i,j} = \begin{bmatrix} \theta_j \\ \frac{6l_j}{l_j^2} \cdot \theta \cdot \eta_1(\nu_j) \\ \frac{12l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) \end{bmatrix}$ $\Delta_{\text{loc},i,j} = \begin{bmatrix} \theta_j & \theta_j & \theta_j \\ \frac{6l_j}{l_j^2} \cdot \theta \cdot \eta_1(\nu_j) & \frac{12l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) & \frac{12l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) \end{bmatrix}$
			$a_{i,j} = \begin{bmatrix} \theta_j \\ \frac{6l_j}{l_j^2} \cdot \theta \cdot \eta_1(\nu_j) \\ \frac{12l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) \end{bmatrix}$ $\Delta_{\text{loc},i,j} = \begin{bmatrix} \theta_j & \theta_j & \theta_j \\ \frac{6l_j}{l_j^2} \cdot \theta \cdot \eta_1(\nu_j) & \frac{12l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) & \frac{12l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) \end{bmatrix}$
			$a_{i,j} = \begin{bmatrix} \theta_j \\ \frac{6l_j}{l_j^2} \cdot \theta \cdot \eta_1(\nu_j) \\ \frac{12l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) \end{bmatrix}$ $\Delta_{\text{loc},i,j} = \begin{bmatrix} \theta_j & \theta_j & \theta_j \\ \frac{6l_j}{l_j^2} \cdot \theta \cdot \eta_1(\nu_j) & \frac{12l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) & \frac{12l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) \end{bmatrix}$
Тип 2			$a_{i,j} = \begin{bmatrix} \theta_j \\ \frac{3l_j}{l_j^2} \cdot \theta \cdot \eta_1(\nu_j) \\ \frac{3l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) \end{bmatrix}$ $\Delta_{\text{loc},i,j} = \begin{bmatrix} \theta_j & \theta_j & \theta_j \\ \frac{3l_j}{l_j^2} \cdot \theta \cdot \eta_1(\nu_j) & \frac{3l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) & \frac{3l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) \end{bmatrix}$
			$a_{i,j} = \begin{bmatrix} \theta_j \\ \frac{3l_j}{l_j^2} \cdot \theta \cdot \eta_1(\nu_j) \\ \frac{3l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) \end{bmatrix}$ $\Delta_{\text{loc},i,j} = \begin{bmatrix} \theta_j & \theta_j & \theta_j \\ \frac{3l_j}{l_j^2} \cdot \theta \cdot \eta_1(\nu_j) & \frac{3l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) & \frac{3l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) \end{bmatrix}$
			$a_{i,j} = \begin{bmatrix} \theta_j \\ \frac{3l_j}{l_j^2} \cdot \theta \cdot \eta_1(\nu_j) \\ \frac{3l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) \end{bmatrix}$ $\Delta_{\text{loc},i,j} = \begin{bmatrix} \theta_j & \theta_j & \theta_j \\ \frac{3l_j}{l_j^2} \cdot \theta \cdot \eta_1(\nu_j) & \frac{3l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) & \frac{3l_j}{l_j^3} \cdot \Delta \cdot \eta_2(\nu_j) \end{bmatrix}$

Продолжение таблицы 1

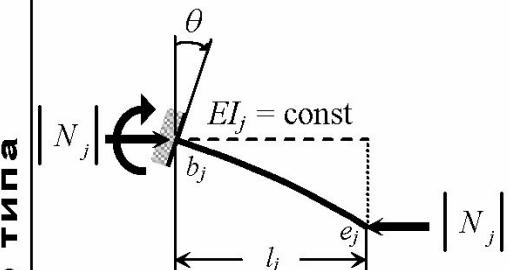
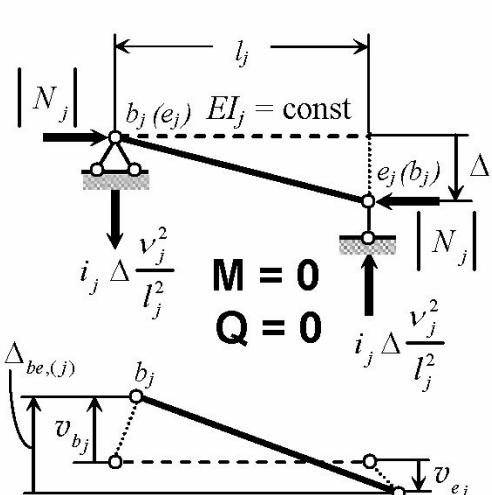
Вид смещения	
Поворот концевого сечения на угол θ	Взаимное линейное смещение концевых сечений Δ
<p>Элемент 3-го типа</p>  $i_j \theta v_j \operatorname{tg} v_j$  $i_j \theta \frac{v_j^2}{l_j}$ Q $a_{(j)} = [\theta_{b_j}]; \quad K_j = i_j [-v_j \operatorname{tg} v_j]$	<p>Элемент 4-го типа</p>  $M = 0$ $Q = 0$ $a_{(j)} = [\Delta_{be,(j)}]; \quad K_j = i_j \left[-\frac{v_j^2}{l_j^2} \right]$
$v_j = l_j \sqrt{\frac{-N_j}{EI_j}}; \quad \varphi_1(v_j) = \frac{v_j^2 \operatorname{tg} v_j}{3(\operatorname{tg} v_j - v_j)}; \quad \varphi_2(v_j) = \frac{v_j (\operatorname{tg} v_j - v_j)}{8 \operatorname{tg} v_j \left(\operatorname{tg} \frac{v_j}{2} - \frac{v_j}{2} \right)}$ $\varphi_3(v_j) = \frac{v_j (v_j - \sin v_j)}{4 \sin v_j \left(\operatorname{tg} \frac{v_j}{2} - \frac{v_j}{2} \right)}; \quad \varphi_4(v_j) = \frac{v_j^2 \operatorname{tg} \frac{v_j}{2}}{12 \left(\operatorname{tg} \frac{v_j}{2} - \frac{v_j}{2} \right)} = \varphi_1 \left(\frac{v_j}{2} \right);$ $\eta_1(v_j) = \frac{v_j^3}{3(\operatorname{tg} v_j - v_j)}; \quad \eta_2(v_j) = \frac{v_j^3}{24 \left(\operatorname{tg} \frac{v_j}{2} - \frac{v_j}{2} \right)} = \eta_1 \left(\frac{v_j}{2} \right);$ $\eta_3(v_j) = \varphi_4(v_j)$	

Таблица 2

**Значения специальных функций метода перемещений
для сжато-изогнутых стержней**

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$	$\nu \operatorname{tg} \nu$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,10	0,9993	0,9997	1,0002	0,9998	0,9960	0,9990	0,0100
0,20	0,9973	0,9987	1,0007	0,9993	0,9840	0,9960	0,0405
0,30	0,9940	0,9970	1,0015	0,9985	0,9640	0,9910	0,0928
0,40	0,9893	0,9947	1,0027	0,9973	0,9360	0,9840	0,1691
0,50	0,9832	0,9916	1,0042	0,9958	0,8999	0,9750	0,2732
0,60	0,9757	0,9879	1,0061	0,9940	0,8557	0,9640	0,4105
0,70	0,9669	0,9836	1,0083	0,9918	0,8035	0,9510	0,5896
0,80	0,9565	0,9785	1,0109	0,9893	0,7432	0,9360	0,8237
0,90	0,9447	0,9727	1,0138	0,9864	0,6747	0,9189	1,1341
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999	1,5574
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9797	0,5131	0,8786	2,1612
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9757	0,4198	0,8557	3,0866
1,30	0,8814	0,9424	1,0297	0,9715	0,3181	0,8307	4,6827
1,40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035	8,1170
1,50	0,8393	0,9227	1,0403	0,9619	0,0893	0,7744	21,152
$\pi/2$	0,8225	0,9150	1,0445	0,9581	0,0000	0,7525	$\pm\infty$
1,60	0,8152	0,9116	1,0463	0,9565	-0,0381	0,7432	-54,772
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9508	-0,1743	0,7100	-13,084
1,80	0,7606	0,8871	1,0600	0,9447	-0,3194	0,6747	-7,7153
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374	-5,5615
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980	-4,3701
2,04	0,6819	0,8530	1,0795	0,9285	-0,7053	0,5817	-4,0240
2,08	0,6673	0,8468	1,0831	0,9256	-0,7749	0,5650	-3,7255
2,12	0,6521	0,8404	1,0868	0,9226	-0,8461	0,5480	-3,4640
2,16	0,6364	0,8339	1,0907	0,9195	-0,9188	0,5307	-3,2316
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131	-3,0224
2,24	0,6034	0,8204	1,0987	0,9132	-1,0691	0,4951	-2,8320
2,28	0,5861	0,8134	1,1030	0,9099	-1,1467	0,4767	-2,6569
2,32	0,5681	0,8063	1,1073	0,9066	-1,2260	0,4581	-2,4943
2,36	0,5496	0,7990	1,1118	0,9032	-1,3069	0,4391	-2,3421

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$	$\nu \operatorname{tg} \nu$
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198	-2,1984
2,44	0,5105	0,7838	1,1212	0,8963	-1,4740	0,4001	-2,0618
2,48	0,4899	0,7760	1,1261	0,8927	-1,5603	0,3801	-1,9311
2,52	0,4685	0,7679	1,1311	0,8890	-1,6483	0,3598	-1,8051
2,56	0,4464	0,7597	1,1363	0,8853	-1,7381	0,3391	-1,6831
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181	-1,5642
2,64	0,3996	0,7427	1,1473	0,8776	-1,9236	0,2968	-1,4477
2,68	0,3748	0,7339	1,1530	0,8736	-2,0193	0,2751	-1,3331
2,72	0,3491	0,7249	1,1589	0,8696	-8,1171	0,2531	-1,2199
2,76	0,3223	0,7158	1,1650	0,8655	-2,2169	0,2307	-1,1075
2,80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080	-0,9955
2,84	0,2654	0,6967	1,1777	0,8571	-2,4231	0,1849	-0,9835
2,88	0,2352	0,6869	1,1844	0,8527	-2,5296	0,1615	-0,7711
2,92	0,2036	0,6769	1,1913	0,8483	-2,6386	0,1378	-0,6579
2,96	0,1706	0,6666	1,1984	0,8438	-2,7499	0,1137	-0,5435
3,00	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893	-0,4276
3,04	0,1000	0,6453	1,2133	0,8345	-2,9806	0,0645	-0,3099
3,08	0,0621	0,6343	1,2211	0,8299	-3,1001	0,0394	-0,1899
3,12	0,0223	0,6230	1,2292	0,8251	-3,2225	0,0139	-0,0674
π	0,0000	0,6169	1,2337	0,8225	-3,2899	0,0000	0,0000
3,16	-0,0195	0,6115	1,2376	0,8202	-3,3480	-0,0119	0,0582
3,20	-0,0635	0,5997	1,2462	0,8152	-3,4769	-0,0381	0,1871
3,24	-0,1100	0,5877	1,2551	0,8102	-3,6092	-0,0646	0,3199
3,28	-0,1591	0,5753	1,2644	0,8050	-3,7452	-0,0915	0,4569
3,32	-0,2110	0,5627	1,2739	0,7998	-3,8852	-0,1187	0,5987
3,36	-0,2662	0,5498	1,2838	0,7945	-4,0294	-0,1468	0,7457
3,40	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1743	0,8967
3,44	-0,3873	0,5230	1,3046	0,7835	-4,3319	-0,2026	1,0581
3,48	-0,4542	0,5091	1,3156	0,7779	-4,4910	-0,2313	1,2248
3,52	-0,5259	0,4949	1,3269	0,7723	-4,6560	-0,2603	1,3994
3,56	-0,6030	0,4804	1,3367	0,7065	-4,8275	-0,2897	1,5830
3,60	-0,6862	0,4655	1,3509	0,7606	-5,0062	-0,3194	1,7765
3,64	-0,7764	0,4502	1,3635	0,7546	-5,1930	-0,3495	1,9810
3,68	-0,8746	0,4345	1,3766	0,7485	-5,3887	-0,3800	2,1979
3,72	-0,9819	0,4184	1,3902	0,7424	-5,5947	-0,4108	2,4288

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$	$v \operatorname{tg} v$
3,76	-1,0999	0,4019	1,4404	0,7361	-5,8124	-0,4420	2,6753
3,80	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736	2,9395
3,84	-1,3754	0,3676	1,4344	0,7232	-6,2906	-0,5056	3,2239
3,88	-1,5379	0,3498	1,4502	0,7166	-6,5561	-0,5379	3,5315
3,92	-1,7216	0,3315	1,4668	0,7099	-6,8437	-0,5706	3,8656
3,96	-1,9311	0,3126	1,4840	0,7031	-7,1583	-0,6037	4,2305
4,00	-2,1726	0,2933	1,5019	0,6961	-7,5060	-0,6372	4,6313
4,04	-2,4546	0,2734	1,5205	0,6891	-7,8952	-0,6710	5,0744
4,08	-2,7887	0,2529	1,5400	0,6819	-8,3375	-0,7053	5,5678
4,12	-3,1916	0,2318	1,5603	0,6747	-8,8497	-0,7399	6,1216
4,16	-3,6878	0,2101	1,5815	0,6673	-9,4564	-0,7749	6,7489
4,20	-4,3156	0,1878	1,6037	0,6597	-10,196	-0,8103	7,4667
4,22	-4,6968	0,1763	1,6151	0,6559	-10,633	-0,8281	7,8664
4,24	-5,1370	0,1647	1,6269	0,6521	-11,130	-0,8461	8,2979
4,26	-5,6514	0,1529	1,6388	0,6482	-11,701	-0,8641	8,7653
4,28	-6,2609	0,1409	1,6511	0,6443	-12,367	-0,8822	9,2738
4,30	-6,9947	0,1287	1,6636	0,6404	-13,158	-0,9005	9,8291
4,32	-7,8961	0,1164	1,6765	0,6364	-14,116	-0,9188	10,439
4,34	-9,0304	0,1038	1,6896	0,6324	-15,308	-0,9372	11,111
4,36	-10,502	0,0910	1,7031	0,6284	-16,839	-0,9558	11,856
4,38	-12,490	0,0780	1,7168	0,6243	-18,885	-0,9744	12,688
4,40	-15,327	0,0648	1,7310	0,6202	-21,780	-0,9931	13,624
4,42	-19,704	0,0514	1,7454	0,6160	-26,216	-1,0120	14,684
4,44	-27,353	0,0377	1,7602	0,6119	-33,925	-1,0309	15,895
4,46	-44,150	0,0238	1,7754	0,6077	-50,781	-1,0500	17,294
4,48	-111,02	0,0096	1,7910	0,6034	-117,72	-1,0691	18,930
4,50	227,93	-0,0048	1,8070	0,5991	221,18	-1,0884	20,868
4,52	56,983	-0,0194	1,8234	0,5948	50,173	-1,1077	23,204
4,54	32,794	-0,0344	1,8402	0,5905	25,923	-1,1272	26,074
4,56	23,129	-0,0496	1,8574	0,5861	16,198	-1,1467	29,691
4,58	17,924	-0,0651	1,8751	0,5817	10,932	-1,1664	34,393
4,60	14,669	-0,0809	1,8933	0,5772	7,6160	-1,1861	40,757
4,62	12,440	-0,0969	1,9120	0,5727	5,3249	-1,2060	49,864
4,64	10,816	-0,1134	1,9312	0,5681	3,6392	-1,2260	63,986
4,66	9,5793	-0,1301	1,9509	0,5636	2,3408	-1,2461	88,869

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$	$v \operatorname{tg} v$
4,68	8,6057	-0,1471	1,9711	0,5589	1,3049	-1,2663	144,44
4,70	7,8186	-0,1645	1,9920	0,5543	0,4553	-1,2865	379,35
$3\pi/2$	7,4022	-0,1755	2,0052	0,5514	0,0000	-1,2992	$\pm\infty$
4,72	7,1686	-0,1823	2,0134	0,5496	-0,2575	-1,3069	-620,14
4,74	6,6223	-0,2005	2,0355	0,5449	-0,8669	-1,3274	-171,63
4,76	6,1563	-0,2190	2,0582	0,5401	-1,3962	-1,3481	-99,901
4,78	5,7538	-0,2379	2,0815	0,5352	-1,8624	-1,3668	-70,591
4,80	5,4023	-0,2572	2,1056	0,5304	-2,2777	-1,3896	-54,647
4,82	5,0925	-0,2770	2,1304	0,5255	-2,6516	-1,4106	-44,618
4,84	4,8171	-0,2972	2,1560	0,5205	-2,9915	-1,4316	-37,722
4,86	4,5704	-0,3179	2,1823	0,5155	-3,3028	-1,4528	-32,685
4,88	4,3480	-0,3390	2,2095	0,5105	-3,5901	-1,4740	-28,842
4,90	4,1463	-0,3607	2,2375	0,5054	-3,8570	-1,4954	-25,811
4,92	3,9623	-0,3828	2,2665	0,5003	-4,1065	-1,5169	-23,357
4,94	3,7937	-0,4056	2,2964	0,4951	-4,3408	-1,5385	-21,328
4,96	3,6384	-0,4288	2,3273	0,4899	-4,5621	-1,5603	-19,620
4,98	3,4948	-0,4527	2,3592	0,4846	-4,7720	-1,5821	-18,163
5,00	3,3615	-0,4772	2,3923	0,4793	-4,9719	-1,6040	-16903
5,04	3,1211	-0,5281	2,4618	0,4685	-5,3461	-1,6483	-14,830
5,08	2,9097	-0,5818	2,5364	0,4576	-5,6925	-1,6930	-13,191
5,12	2,7215	-0,6387	2,6165	0,4464	-6,0166	-1,7381	-11,858
5,16	2,5523	-0,6989	2,7028	0,4350	-6,3229	-1,7838	-10,748
5,20	2,3986	-0,7629	2,7960	0,4234	-6,6147	-1,8299	-9,8053
5,24	2,2580	-0,8311	2,8969	0,4116	-6,8946	-1,8765	-8,9924
5,28	2,1282	-0,9039	3,0065	0,3996	-7,1646	-1,9236	-8,2810
5,32	2,0075	-0,9819	3,1257	0,3873	-7,4266	-1,9712	-7,6506
5,36	1,8946	-1,0658	3,2560	0,3748	-7,6819	-2,0193	-7,0858
5,40	1,7884	-1,1563	3,3989	0,3621	-7,9316	-2,0679	-6,5747
5,44	1,6877	-1,2544	3,5560	0,3491	-8,1768	-2,1171	-6,1081
5,48	1,5918	-1,3611	3,7297	0,3358	-8,4183	-2,1667	-5,6785
5,52	1,5001	-1,4779	3,9226	0,3223	-8,6567	-2,2169	-5,2801
5,56	1,4118	-1,6062	4,1379	0,3085	-8,8927	-2,2676	-4,9079
5,60	1,3266	-1,7481	4,3794	0,2944	-9,1268	-2,3189	-4,5581
5,64	1,2438	-1,9061	4,6523	0,2801	-9,3594	-2,3707	-4,2272
5,68	1,1631	-2,0833	4,9628	0,2654	-9,5910	-2,4231	-3,9125

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$	$\nu \operatorname{tg} \nu$
5,72	1,0842	-2,2838	5,3190	0,2504	-9,8219	-2,4761	-3,6116
5,76	1,0066	-2,5129	5,7313	0,2352	-10,053	-2,5296	-3,3224
5,80	0,9302	-2,7777	6,2139	0,2195	-10,283	-2,5838	-3,0431
5,84	0,8546	-3,0876	6,7858	0,2036	-10,514	-2,6386	-2,7721
5,88	0,7795	-3,4560	7,4736	0,1873	-10,745	-2,6939	-2,5081
5,92	0,7047	-3,9022	8,3162	0,1706	-10,977	-2,7499	-2,2499
5,96	0,6300	-4,4550	9,3706	0,1535	-11,210	-2,8066	-1,9962
6,00	0,5551	-5,1594	10,727	0,1361	-11,445	-2,8639	-1,7460
6,02	0,5175	-5,5900	11,562	0,1272	-11,563	-2,8928	-1,6220
6,04	0,4798	-6,0900	12,535	0,1182	-11,681	-2,9219	-1,4985
6,06	0,4419	-6,6780	13,684	0,1091	-11,799	-2,9512	-1,3754
6,08	0,4039	-7,3801	15,060	0,1000	-11,918	-2,9806	-1,2527
6,10	0,3656	-8,2336	16,739	0,0907	-12,038	-3,0102	-1,1301
6,12	0,3271	-9,2941	18,832	0,0812	-12,158	-3,0400	-1,0077
6,14	0,2883	-16,648	21,512	0,0717	-12,278	-3,0699	-0,8852
6,16	0,2492	-12,439	25,064	0,0621	-12,399	-3,1001	-0,7627
6,18	0,2098	-14,920	29,998	0,0523	-12,521	-3,1304	-0,6400
6,20	0,1700	-18,590	37,308	0,0424	-12,643	-3,1609	-0,5169
6,22	0,1299	-24,578	49,253	0,0324	-12,766	-3,1916	-0,3935
6,24	0,0893	-36,101	72,269	0,0223	-12,890	-3,2225	-0,2696
6,26	0,0482	-67,488	135,01	0,0121	-13,014	-3,2536	-0,1452
6,28	0,0067	-492,89	985,78	0,0017	-13,140	-3,2849	-0,0200
2π	0,0000	$-\infty$	$+\infty$	0,0000	-13,159	-3,2899	0,0000