ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

Методические указания

Методические указания содержат решения типовых задач по курсу «Механика. Сопротивление материалов», вошедшие в контрольные тесты НИИ «Мониторинга качества образования». Тематика и уровень задач соответствуют требованиям государственных образовательных стандартов по специальностям: 240301, 240302, 240304, 240306, 240307 24041, 240402, 240501, 240502, 240601, 240603, 240701, 240702, 240704, 240803, 240901,280102, 280202.

Методические указания предназначены для студентов химико-технологических специальностей при подготовке к интернет-тестированию.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Настоящие методические указания предназначены для подготовки студентов технологических специальностей к аккредитационному тестированию по дисциплине «Механика». Проведенные в ноябре 2012 г. и январе 2013 г. контрольные проверки знаний студентов по указанной дисциплине показали, что уровень их знаний не отвечает требованиям государственных образовательных стандартов по соответствующим специальностям.

Основная причина этого состоит в том, что объем аудиторных занятий, предусмотренный действующими в институте учебными планами, абсолютно недостаточен для освоения сложных разделов «Механики», таких, например, как «Сопротивление материалов». Поэтому из-за недостатка времени некоторые темы учебного курса рассматриваются на занятиях только на уровне ознакомления с их основными понятиями. Проведение занятий по освоению студентами методов решения задач учебными планами вообще не предусмотрено. Между тем многие тестовые вопросы связаны именно с умением решать задачи по разделу «Сопротивление материалов».

Предлагаемые методические указания содержат решения типовых тестовых задач, а также ответы на типовые вопросы, составляющие содержание контрольных тестов НИИ «Мониторинга качества образования». Материал разбит на разделы, соответствующие дидактическим единицам тестовых заданий.

Основная цель методических указаний – хоть в какой-то степени восполнить пробелы в подготовке студентов-технологов по «Механике», обусловленные несовершенством учебных планов.

1 Основные понятия, определения и допущения

ЗАДАНИЕ 1.1

Способность материала сопротивляться разрушению при действии на него внешней нагрузки называется …

1) упругостью; 2) пластичностью; 3) прочностью; 4) твердостью.

Решение:

Процесс разрушения материала образца на уровне отдельных кристаллов начинается уже при малых нагрузках и завершается окончательным разрушением (если нагрузка растет), разделением образца на две части. Способность материала сопротивляться процессу разрушения называется прочностью.

ЗАДАНИЕ 1.2

Свойство материала сохранять некоторую часть деформации после снятия нагрузки называется …

Решение:

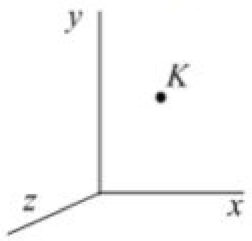
При нагружении силой F стержень изгибается (рис. 1). В процессе снятия нагрузки (при уменьшении силы F) исчезает только часть деформаций. Такие деформации называются упругими деформациями. Деформации, которые сохранились после снятия нагрузки, называются пластическими деформациями. В результате стержень после снятия нагрузки остается искривленным. Если сила F мала, то пластические деформации равны нулю и стержень после снятия нагрузки полностью выпрямляется. Свойство материала сохранять некоторую часть деформации после снятия нагрузки называется пластичностью.

Рис. 1

Рис. 2

ЗАДАНИЕ 1.3

Точка K деформируемого тела перемещается в пространстве. Известны полное перемещение δ и перемещения вдоль координатных осей x, y (u и v). Величина перемещения вдоль оси z (w) определяется по формуле …



Решение:

Полное перемещение точки равно длине диагонали прямоугольного параллелепипеда, ребрами которого являются перемещения вдоль координатных осей. Полное перемещение и перемещения по осям связаны зависимостью $\delta^2 = u^2 + v^2 + w^2$, откуда $w = \sqrt{\delta^2 - u^2 - v^2}$.

ЗАДАНИЕ 1.4

Нагрузка, медленно растущая во времени, называется __________ нагрузкой.
1) статической; 2) динамической; 3) ударной; 4) повторно-переменной.

Решение:

Если нагрузка растет медленно, то ускорения частиц тела малы, малы и силы инерции, которые в этом случае в расчетах не учитываются. В любой момент времени тело находится в равновесии. Такая нагрузка называется статической.

ЗАДАНИЕ 1.5

Колонна здания относится к классу …
1) оболочек; 2) стержней; 3) пластин; 4) массивов.

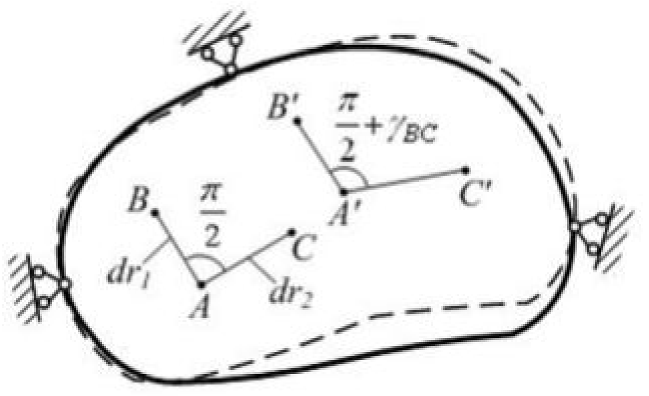
Решение:

Высота колонны намного превосходит размеры поперечного сечения. Следовательно, колонна относится к классу стержней.

ЗАДАНИЕ 1.6

Угловая деформация − это …

Решение:



Рассмотрим два взаимно перпендикулярных до деформации малых отрезка dr_1 и dr_2 (см. рисунок). В процессе деформации тела точки A, B, C, перемещаются в положения A', B', C'. Прямой угол между направлениями AB и AC изменяется на величину γ_{BAC}.

Изменение прямого угла между двумя взаимно перпендикулярными до деформации малыми отрезками, проходящими через данную точку, называется угловой деформацией или углом сдвига между направлениями AB и AC. Если рассматривать различные пары взаимно перпендикулярных до деформации направлений, проходящих через точку A, то угловые деформации между ними в общем случае будут различными.

ЗАДАНИЕ 1.7

Сталь – материал …
1) изотропный; 2) анизотропный; 3) аморфный; 4) волокнистый.

Решение: Свойства стали, как правило, не зависят от направления. Поэтому сталь считается изотропным материалом.

ЗАДАНИЕ 1.8

Коэффициент Пуассона μ для изотропного материала изменяется в пределах …

Решение:
Область изменения коэффициента Пуассона изотропного материала $0 < \mu \leq 0,5$.

ЗАДАНИЕ 1.9

Материал, механические характеристики которого не зависят от направления, называется …
1) изотропным; 2) однородным; 3) сплошным; 4) анизотропным.

Решение:
Материал, механические характеристики которого не зависят от направления, называется изотропным материалом.

ЗАДАНИЕ 1.10

Напряжение – это сила, …

Решение:

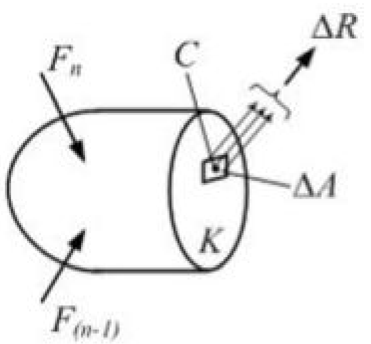


Рис. 1

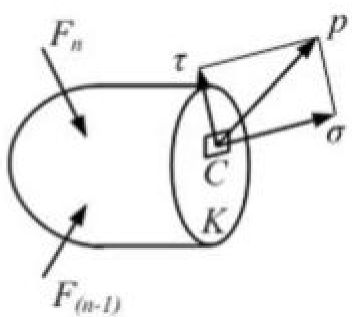


Рис. 2

На рисунке 1 показана отсеченная часть тела, находящаяся в равновесии под действием внешних сил и внутренних дополнительных усилий, действующих в каждой точке сечения K. ΔR – равнодействующая внутренних усилий, действующих по площадке с площадью ΔA. $\lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta R}{\Delta A} = p$ – полное напряжение в точке C сечения K. Из структуры формулы видно, что напряжение – это сила, приходящаяся на единицу площади сечения. Полное напряжение обычно раскладывается на нормальное σ и касательное τ (рис. 2).

ЗАДАНИЕ 1.11

Моделью формы купола цирка является …
1) массивное тело; 2) стержень; 3) пластина; 4) оболочка.

Решение:

Купол цирка – это тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, близко расположенными друг к другу. Следовательно, моделью формы купола цирка является оболочка.

ЗАДАНИЕ 1.12

Объемные силы имеют размерность …

Решение:

Объемные силы непрерывно распределены по всему объему, занятому телом. К таким силам относятся: силы веса, силы инерции, магнитные силы. Все они являются результатом взаимодействия тел, не обязательно соприкасающихся друг с другом. Интенсивность объемных сил имеет размерность $\left(\dfrac{сила}{длина^3}\right)$.

ЗАДАНИЕ 1.13

Если известны углы поворота малого прямолинейного отрезка в трех координатных плоскостях $(\varphi_{xy}, \varphi_{yz}, \varphi_{zx})$, то полный угол поворота определяется по формуле $\varphi = \ldots$

Решение:

Полный угол поворота малого прямолинейного отрезка можно изобразить в виде вектора (вектор направлен перпендикулярно плоскости угла поворота). Проектируя вектор на координатные оси, получаем вектора углов поворота отрезка в координатных плоскостях $(\overline{\varphi}_{xy}, \overline{\varphi}_{yz}, \overline{\varphi}_{zx})$ Модуль вектора полного угла поворота определится по формуле $\varphi = \sqrt{\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yz}^2 + \varphi_{zx}^2}$.

ЗАДАНИЕ 1.14

При растяжении-сжатии прямого стержня дополнительные внутренние силы, действующие в поперечном сечении, образуют …

1) плоскую систему сходящихся сил; 2) плоскую систему параллельных сил; 3) пространственную систему сходящихся сил; 4) пространственную систему параллельных сил перпендикулярных к плоскости сечения.

Решение:

При растяжении-сжатии прямого стержня дополнительные внутренние силы, действующие в поперечном сечении, образуют пространственную систему параллельных сил перпендикулярных к плоскости сечения.

ЗАДАНИЕ 1.15

В сопротивлении материалов основным методом расчета на прочность является метод расчета по …

1) допускаемым напряжениям; 2) разрушающим нагрузкам; 3) предельным состояниям; 4) деформациям.

Решение:

В сопротивлении материалов основным методом расчета является метод расчета по допускаемым напряжениям. В этом методе за опасное состояние конструкции, изготовленной из пластичного материала, принимается такое состояние, при котором в самой напряженной точке конструкции появляются заметные пластические деформации. Если же материал конструкции хрупкий, то за опасное состояние принимается такое состояние, при котором в самой напряженной точке конструкции материал начинает разрушаться (образуются трещины).

ЗАДАНИЕ 1.16

Полное напряжение в точке сечения определяется как $\lim\limits_{\Delta A\to 0}\dfrac{\Delta R}{\Delta A}$.

Предельный переход позволила осуществить гипотеза …

1) однородности материала; 2) сплошной среды; 3) начальных размеров; 4) изотропности материала.

Решение:

Полное напряжение в точке сечения $p=\lim\limits_{\Delta A\to 0}\dfrac{\Delta R}{\Delta A}$. Предельный переход позволила осуществить гипотеза сплошной среды.

ЗАДАНИЕ 1.17

Совокупность линейных и угловых деформаций по множеству направлений и плоскостей, проходящих через точку, называется ________ состоянием в точке.

1) предельным; 2) напряженно-деформированным; 3) деформированным; 4) напряженным.

Решение:

Совокупность линейных и угловых деформаций по множеству направлений и плоскостей, проходящих через точку, называется деформированным состоянием в этой точке.

ЗАДАНИЕ 1.18

Формула, которая связывает упругие постоянные изотропного материала, имеет вид …

Решение:

Формула, которая связывает упругие постоянные изотропного материала, имеет вид $G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$.

ЗАДАНИЕ 1.19

Продольная сила есть равнодействующая …

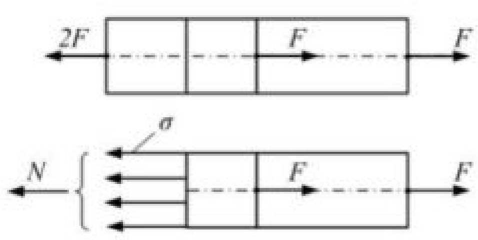
1) всех внешних сил, приложенных к стержню;

2) внешних сил, приложенных к отсеченной части стержня;

3) нормальных напряжений в поперечном сечении стержня;

4) нормальных напряжений и внешних сил, приложенных к отсеченной части стержня.

Решение:



Нормальное напряжение − это сила, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения. Напряжения распределены по площади сечения равномерно. Если их сложить, то получим их равнодействующую – продольную силу, которая приложена к центру тяжести поперечного сечения.

ЗАДАНИЕ 1.20

Большинство пластичных материалов при испытаниях на растяжение и сжатие …

1) лучше работают на сжатие, чем на растяжение;

2) лучше работают на растяжение, чем на сжатие;

3) ведут себя одинаково вплоть до предела текучести;

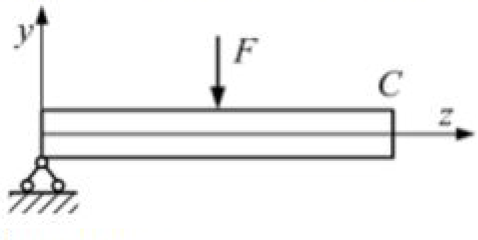
4) ведут себя одинаково вплоть до предела прочности.

Решение:

Большинство пластичных материалов при испытаниях на растяжение и сжатие ведут себя одинаково вплоть до предела текучести.

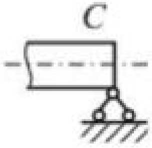
ЗАДАНИЕ 1.21

Правый конец балки (см. рисунок) необходимо закрепить так, чтобы сечение



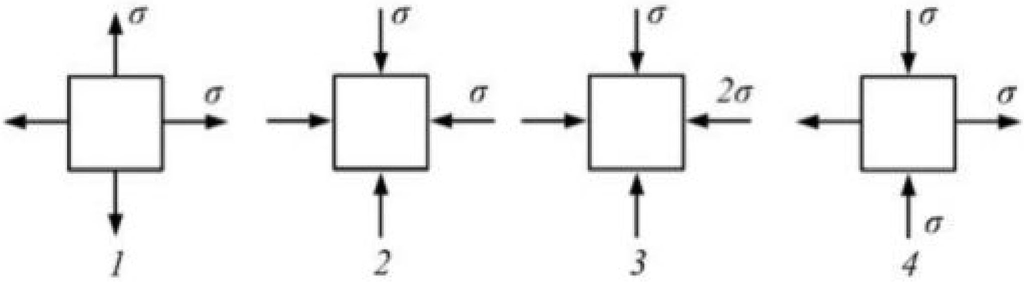
C не перемещалось вдоль координатных осей *z* и *y*, но могло бы поворачиваться в плоскости *zy*. Опора, отвечающая таким требованиям, называется …

Решение:



Опора, отвечающая требованиям задания, называется шарнирно неподвижной. Условное обозначение такой опоры показано на рисунке.

ЗАДАНИЕ 1.22



Напряженное состояние «чистый сдвиг» показано на рисунке …

Решение:

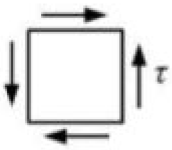


Рис. 1

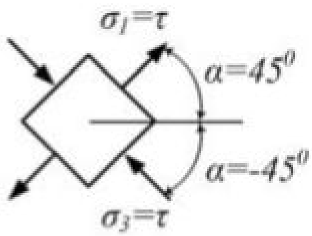
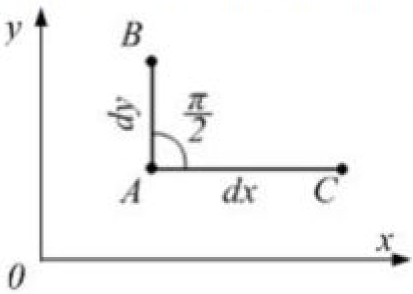


Рис. 2

При напряженном состоянии «чистый сдвиг» (рис. 1) на гранях элементарного объема действуют только касательные напряжения. Если элементарный объем повернуть на угол, равный 45^o (рис. 2), то касательные напряжения на его гранях исчезнут, но появятся нормальные напряжения $\sigma_1 = \tau$ и $\sigma_3 = -\tau$. Таким образом, чистый сдвиг может быть реализован растяжением и сжатием в двух взаимно перпендикулярных направлениях напряжениями, равными по абсолютной величине.

ЗАДАНИЕ 1.23

В процессе деформации точки A, B, C деформируемого тела перемещаются в плоскости xoy, а прямолинейные отрезки AB и AC поворачиваются по часовой стрелке на угол α. Угловая деформация в точке A между направлениями AB и AC, когда длины отрезков стремятся к нулю, равна …

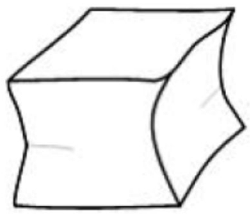


Решение:

Прямолинейные отрезки AB и AC поворачиваются в одном направлении на равные углы. Первоначально прямой угол между ними не изменяется. Поэтому угловая деформация в точке A между направлениями AB и AC равна нулю.

ЗАДАНИЕ 1.24

Вид образца после испытания показан на рисунке. Испытание проводилось по варианту …



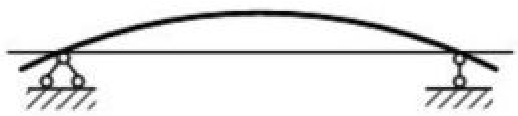
	Вид испытания	Материал образца
а	сжатие	цементно-песчаная смесь
б	растяжение вдоль волокон	древесина
в	сжатие поперек волокон	древесина
г	растяжение	хрупкий металл

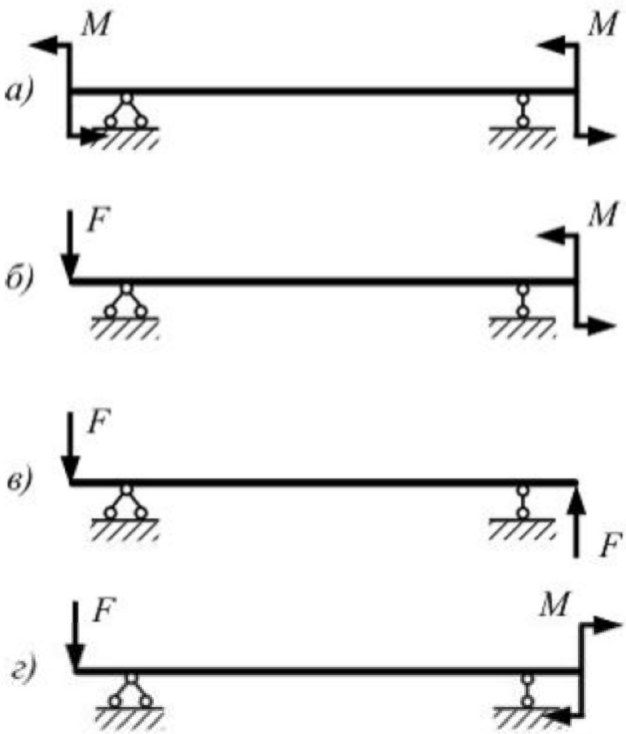
Решение:

Видно, что до испытания образец имел кубическую форму. Значит, он предназначен для испытаний на сжатие. Картина разрушения (две усеченные пирамиды) – типичная картина разрушения образца из цементно-песчаной смеси при больших силах трения между поверхностями образца и поверхностями плит испытательной машины.

ЗАДАНИЕ 1.25

На рисунке показан примерный вид изогнутой оси балки. Схема нагружения балки, соответствующая представленной форме изгиба, показана на схеме …



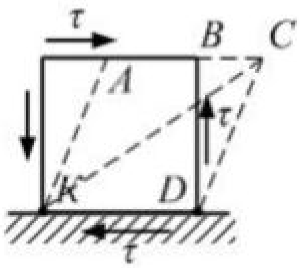


Решение:

Вид изогнутой оси балки показывает, что верхние слои на всех силовых участках работают на деформацию растяжения. Это соответствует нагружению балки показанному на схеме «*г*».

ЗАДАНИЕ 1.26

Напряженное состояние «чистый сдвиг» показано на рисунке. Штриховыми линиями показан характер деформации. Углом сдвига называется угол …

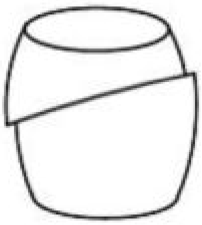


Решение:

Отрезок BC называется абсолютным сдвигом. Отношение $\left(\dfrac{BC}{BD}\right)$ называется относительным сдвигом или углом сдвига. $\dfrac{BC}{BD} = tg\angle BDC$. При малых перемещениях $tg\angle BDC \approx \angle BDC$. $\angle BDC$ – угол сдвига.

ЗАДАНИЕ 1.27

Вид образца после испытаний показан на рисунке. По форме образца и характеру разрушения можно сказать, что испытание проводилось по варианту …



	Вид испытания	Материал образца
а	растяжение	хрупкий металл
б	сжатие	пластичный металл
в	сжатие	хрупкий металл
г	растяжение	пластичный металл

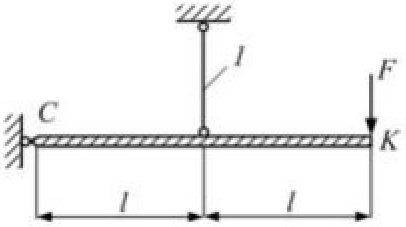
Решение:

Образец короткий, поэтому он предназначен для испытаний на сжатие. Бочкообразная форма образца и наклонная трещина – характерная картина разрушения образца из хрупкого материала. Правильный ответ – вариант «*в*».

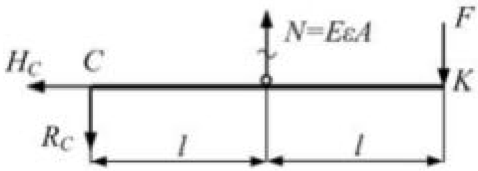
2 РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

ЗАДАНИЕ 2.1

Продольная линейная деформация стержня 1 равна ε. Модуль упругости материала E и площадь поперечного сечения A стержня – известны. Значение силы F равно …



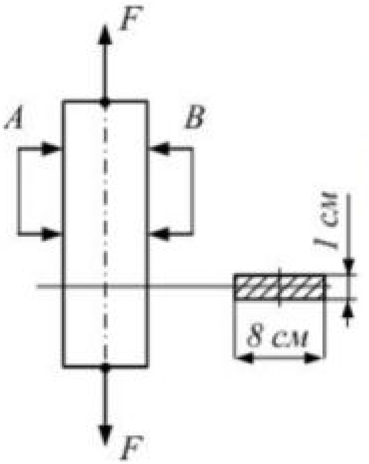
Решение:



Продольная сила в стержне 1 определяется на основании закона Гука при растяжении-сжатии $N = \sigma A = E\varepsilon A$. Рассмотрим равновесие элемента CK (см. рисунок) и составим уравнение равновесия $\sum M_c = Nl - F \cdot 2l = 0$, откуда $F = \dfrac{N}{2} = \dfrac{1}{2} E\varepsilon A$.

ЗАДАНИЕ 2.2

При нагружении образца прямоугольного сечения силами $F = 0{,}04\ МН$ стрелки тензометров А и В переместились на 6 и 4 деления соответственно. Базы тензометров – 20 *мм*. Цена деления шкалы тензометров – 0,001 *мм*. Модуль упругости материала образца равен ____ *МПа*.



Решение:

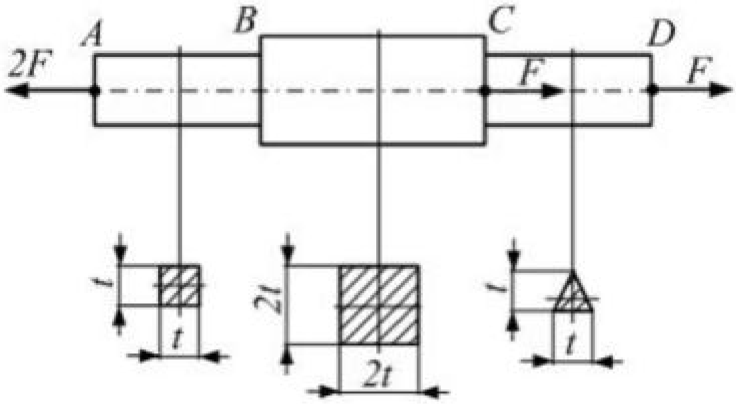
Продольную линейную деформацию центрального слоя определим по формуле $\varepsilon = \dfrac{(A+B)K}{2l}$, где A и B – показания тензометров в числе делений, K – цена деления шкалы тензометров, l – размер базы тензометров.

Подставляя числовые значения, получаем $\varepsilon = 25 \cdot 10^{-5}$. Напряжение в поперечном сечении образца $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{0{,}04}{0{,}01 \cdot 0{,}08} = 50\ МПа.$

Модуль упругости материала образца $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{50}{0{,}00025} = 2 \cdot 10^5\ МПа.$

ЗАДАНИЕ 2.3

Стержень нагружен тремя осевыми силами. Форма и размеры поперечного сечения на каждом участке показаны на рисунке. Максимальные нормальные напряжения действуют в поперечных сечениях участка(-ов) …

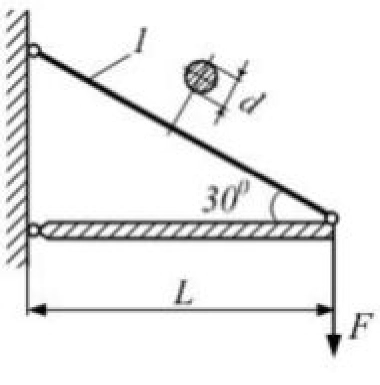


Решение:

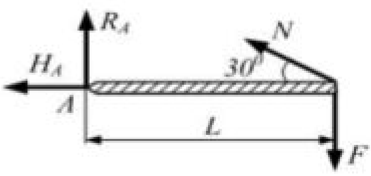
Определим продольную силу на каждом участке: $N_{AB} = N_{BC} = 2F$, $N_{CD} = F$. Нормальные напряжения в поперечных сечениях участков: $\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{AB}} = \frac{2F}{t^2}$, $\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{F}{2t^2}$, $\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A_{CD}} = \frac{2F}{t^2}$. Таким образом, максимальные нормальные напряжения действуют в поперечных сечениях участков *AB* и *CD*.

ЗАДАНИЕ 2.4

Абсолютно жесткий элемент (заштрихованный) поддерживается упругим стержнем 1. Сила F, длина L, диаметр d и модуль упругости материала стержня E известны. Линейная продольная деформация стержня 1 равна …



Решение:



Рассмотрим равновесие заштрихованного элемента (см. рисунок). Запишем одно из условий равновесия

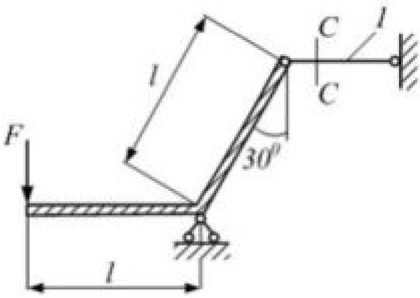
$\sum M_{iA} = N\sin 30^{\circ} L - FL = 0.$ Откуда $N = 2F.$

Напряжение $\sigma = \dfrac{N}{A} = \dfrac{8F}{\pi d^2}.$ Из закона Гука

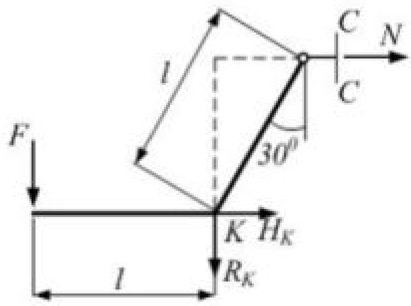
$\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{8F}{\pi d^2 E}.$

ЗАДАНИЕ 2.5

Внутренний силовой фактор в сечении С-С стержня 1 равен …



Решение:

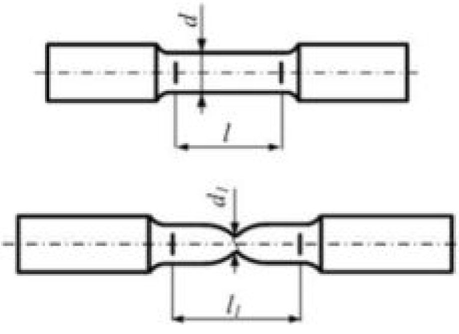


Рассекаем стержень 1 сечением С-С и делим конструкцию на две части. Рассмотрим равновесие левой части конструкции (см. рисунок). Стержень 1 работает на растяжение. Составляем уравнение равновесия:

$\sum M_{iK} = Fl - Nl\cos 30^{\circ} = 0,$ откуда продольная сила $N = \dfrac{2F}{\sqrt{3}}.$

ЗАДАНИЕ 2.6

Образец имел следующие размеры (см. рисунок):



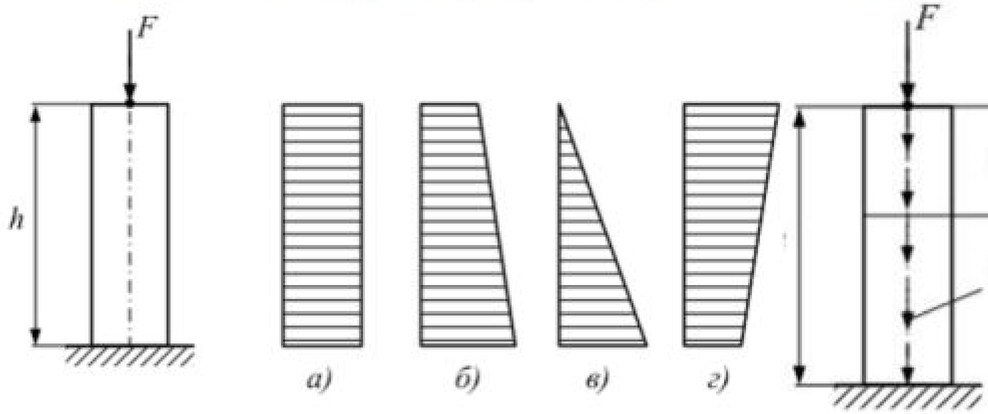
а) $l = 100$ *мм*, $d = 10$ *мм*, до опыта;
б) после испытаний на растяжение $l_1 = 120$ *мм*, диаметр в месте разрыва $d_1 = 6$ *мм*. Относительное остаточное удлинение к моменту разрыва δ и относительное остаточное поперечное сужение в месте разрыва ψ, соответственно, имеют значения …

Решение:

Относительное остаточное удлинение к моменту разрыва образца определяется по формуле $\delta = \dfrac{l_1 - l}{l} \cdot 100\%$. Относительное остаточное поперечное сужение в месте разрыва образца $\psi = \dfrac{A - A_1}{A} \cdot 100\%$, где A – площадь поперечного сечения образца до испытаний, A_1 – площадь поперечного сечения образца в месте шейки после разрыва. После вычислений получаем: $\delta = 20\%$, $\psi = 64\%$.

ЗАДАНИЕ 2.7

Колонна высотой h (см. рисунок) находится под действием силы F, приложенной в центре тяжести поперечного сечения, и собственного веса. Удельный вес материала колонны γ (вес единицы объема), площадь поперечного сечения A – известны. Эпюра продольной силы имеет вид …

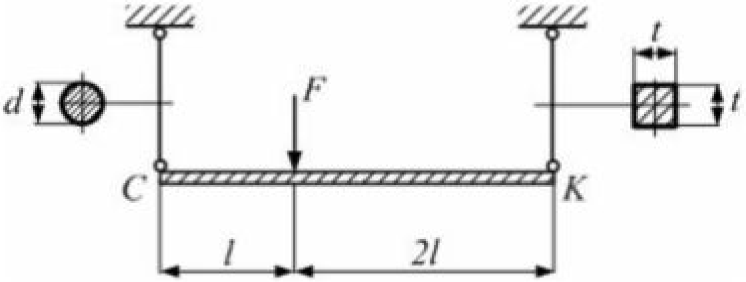


Решение:

Обозначим через $q = \gamma A$ – интенсивность равномерно распределенной нагрузки от собственного веса. В поперечном сечении с координатой x продольная сила $N = -F - \gamma A x$. Подставляя значения x, найдем $N(0) = -F$, $N(h) = -F - \gamma A h$. Эпюра продольной силы имеет вид «*б*».

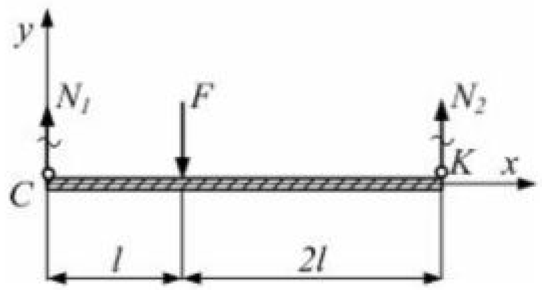
ЗАДАНИЕ 2.8

Абсолютно жесткий элемент CK подвешен на двух стержнях и нагружен силой F (см. рисунок). Известны величины: сила F, линейный размер l, $[\sigma]$ – допускаемое напряжение для материала стержней. Вес элемента CK в расчетах не учитывается. Мини-



мально допустимые размеры поперечных сечений стержней имеют значения: $d =$ ___, $t =$ ___.

Решение:



Рассмотрим равновесие элемента CK (см. рисунок). Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{iy} = N_1 + N_2 - F = 0,$$

$$\sum M_{ic} = N_2 \cdot 3l - F \cdot l = 0,$$

откуда $N_1 = \dfrac{2}{3}F,\ N_2 = \dfrac{1}{3}F.$

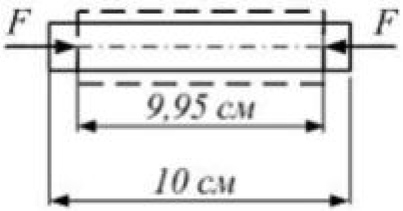
Условия прочности для стержней:

$$\sigma^{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{2F \cdot 4}{3\pi d^2} \le [\sigma], \qquad \sigma^{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{F}{3t^2} \le [\sigma].$$

Следовательно, $d \ge \sqrt{\dfrac{8F}{3\pi[\sigma]}}, \qquad t \ge \sqrt{\dfrac{F}{3[\sigma]}}.$

ЗАДАНИЕ 2.9

До приложения к стержню сил F (см. рисунок) его длина равнялась 10 *см*. После приложения сил F длина стержня стала равна 9,95 *см*. Продольная линейная деформация стержня равна …

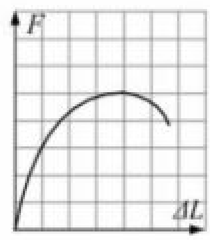


Решение:

Продольную линейную деформацию определим по формуле $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L}$, где L – длина стержня до нагружения, ΔL – укорочение стержня. После подстановки числовых значений $\varepsilon = 0{,}005$.

ЗАДАНИЕ 2.10

На рисунке показана диаграмма растяжения образца диаметром 0,01 *м*. Масштаб нагрузки – 1 деление – 0,007 *МН*. Предел прочности материала равен ___ *МПа*

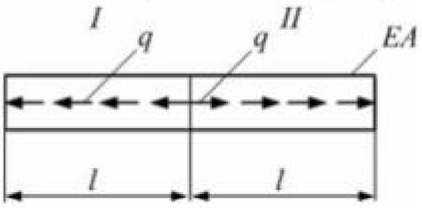


Решение:

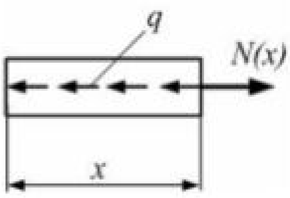
Предел прочности – это напряжение, соответствующее максимальной нагрузке, которую может выдержать образец. Предел прочности определяется по формуле $\sigma = \dfrac{N}{A}$, где A – первоначальная площадь поперечного сечения образца. В данном случае $\sigma_в = \dfrac{0{,}007 \cdot 5 \cdot 4}{\pi \cdot 0{,}01^2} = 446$ *МПа.*

ЗАДАНИЕ 2.11

На стержень действует равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью q (см. рисунок). Заданы величины: $E, A, l, [\Delta]$ – допустимая величина удлинения стержня. Максимально допустимое значение интенсивности распределенной нагрузки равно …



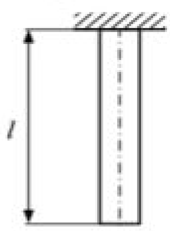
Решение:



Стержень имеет два грузовых участка. Поперечным сечением на первом участке делим стержень на две части и рассмотрим равновесие левой части (см. рисунок). Уравнение равновесия имеет вид $N(x) - qx = 0$, откуда $N(x) = qx$. Абсолютное удлинение первого участка $\Delta l_1 = \int\limits_0^l \dfrac{qx dx}{EA} = \dfrac{ql^2}{2EA}$. Удлинение всего стержня $\Delta = 2\Delta l_1 = \dfrac{ql^2}{EA}$. Условие жесткости имеет вид $\dfrac{ql^2}{EA} \le [\Delta]$, откуда $q \le \dfrac{EA[\Delta]}{l^2}$.

ЗАДАНИЕ 2.12

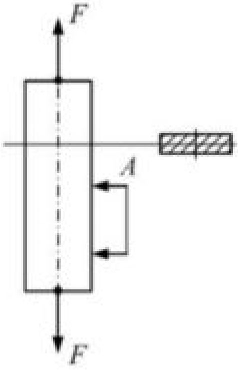
Стержень длиной l (см. рисунок) находится под действием собственного веса. Вес стержня Q, площадь поперечного сечения A, модуль упругости материала стержня E – известны. Продольная линейная деформация в среднем сечении стержня равна …



Решение:

Продольную линейную деформацию в среднем сечении стержня определим по формуле $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$, где $\sigma = \dfrac{N}{A} = \dfrac{Q}{2A}$ – нормальное напряжение в среднем сечении. Подставляя выражение σ в формулу для ε, получим $\varepsilon = \dfrac{Q}{2AE}$.

ЗАДАНИЕ 2.13



При испытании образца на растяжение силами F (см. рисунок) стрелка тензометра A с базой, равной 60 *мм*, переместилась с деления 5 на деление 9. Цена деления шкалы тензометра 0,001 *мм*. Модуль упругости материала образца $E = 2 \cdot 10^5$ *МПа*. Напряжение в крайнем правом слое равно ____ *МПа*.

Решение:

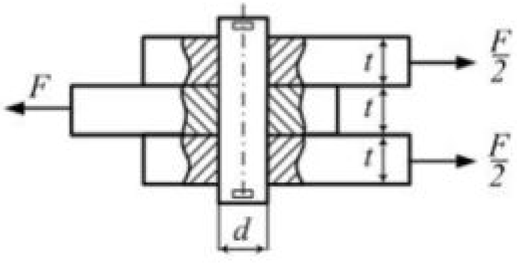
Напряжение определим по закону Гука.

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \cdot 10^5 \frac{(9-5) \cdot 0{,}001}{60} = 13{,}3 \text{ МПа}.$$

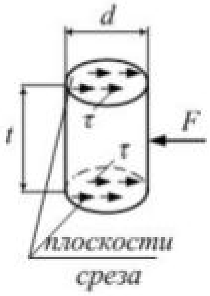
3 СДВИГ. КРУЧЕНИЕ

ЗАДАНИЕ 3.1

Три металлические полосы (см. рисунок) соединены штифтом. $[\tau_{ср}]$ – значение допускаемого касательного напряжения на срез для материала штифта. Условие прочности штифта на срез имеет вид …



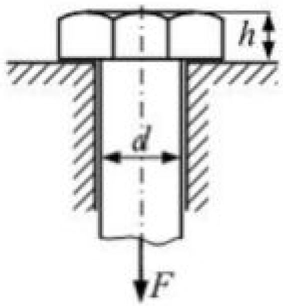
Решение:



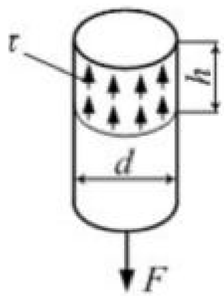
Рассмотрим равновесие средней части штифта (см. рисунок). Считаем, что касательные напряжения распределены по площади среза равномерно. Составим уравнение равновесия $2\tau \frac{\pi d^2}{4} - F = 0$, откуда $\tau = \frac{2F}{\pi d^2}$. Условие прочности штифта на срез имеет вид $\tau = \dfrac{2F}{\pi d^2} \le [\tau_{ср}]$, где $[\tau_{ср}]$ – допускаемое касательное напряжение на срез для штифта.

ЗАДАНИЕ 3.2

На рисунке показан болт, нагруженный силой F. Дано: $d = 1\ см$, $F = 0{,}01\ МН$, $[\tau_{ср}] = 40\ МПа$ – допускаемое касательное напряжение на срез головки болта. Минимально допустимая высота головки болта из расчета на срез равна ___ $см$.



Решение:



Срез головки болта происходит по цилиндрической поверхности диаметром d и высотой h (см. рисунок). Полагаем, что напряжения по высоте h не изменяются. Запишем уравнение равновесия $\pi d h \tau - F = 0$, откуда $\tau = \dfrac{F}{\pi d h}$.

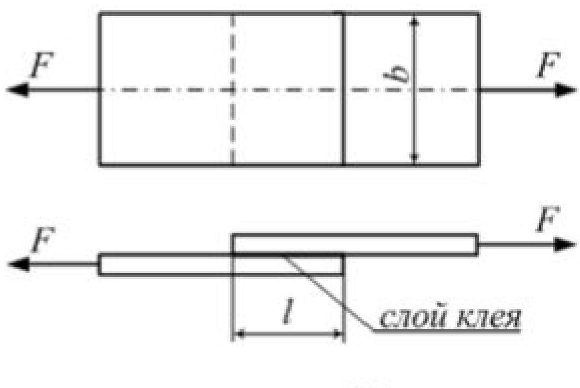
Условие прочности на срез имеет вид $\tau = \dfrac{F}{\pi d h} \le [\tau_{ср}]$, откуда

$$h \ge \frac{F}{[\tau_{ср}]\pi d} = \frac{0{,}01}{40 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}01} = 0{,}008\ м = 0{,}8\ см.$$

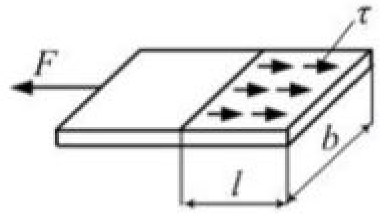
ЗАДАНИЕ 3.3.

На рисунке показано клеевое соединение двух листов.

Известно: $b = 2{,}5\ см$, $F = 4{,}5\ кН$, $[\tau_{ср}] = 1{,}2\ \dfrac{кН}{см^2}$ – допускаемое касательное напряжение на срез клеевого слоя. Минимально допустимое значение l из расчета на срез клеевого слоя равно ___ $см$.



Решение:

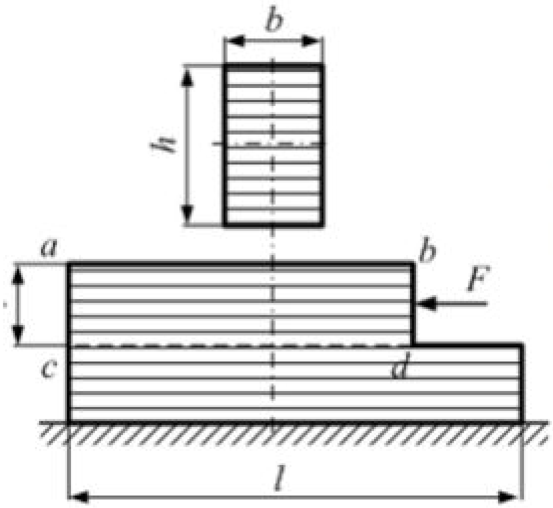


Рассмотрим равновесие нижнего листа (см. рисунок). Полагаем, что касательные напряжения распределены по площади среза равномерно. Условие равновесия и условие прочности на срез имеют вид: $\tau lb - F = 0$, $\tau = \dfrac{F}{lb} \le [\tau_{ср}]$, откуда $l \ge \dfrac{F}{[\tau_{ср}]b}$.

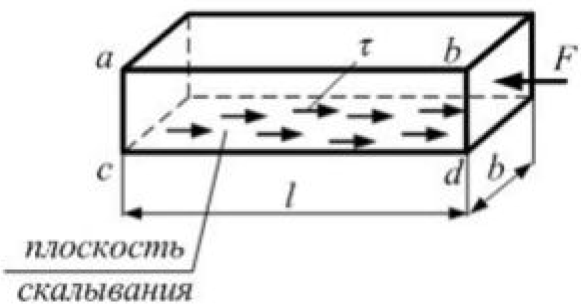
Подставляя числовые значения, получаем $l = 1{,}5$ *см*.

ЗАДАНИЕ 3.4

На деревянную деталь действует сила F (см. рисунок). При некотором значении силы происходит скалывание элемента *abdc*. Известны величины: $b, h, l, t, \tau_{ск}$ – предел прочности при скалывании вдоль волокон. Значение силы F в момент скалывания определяется выражением …



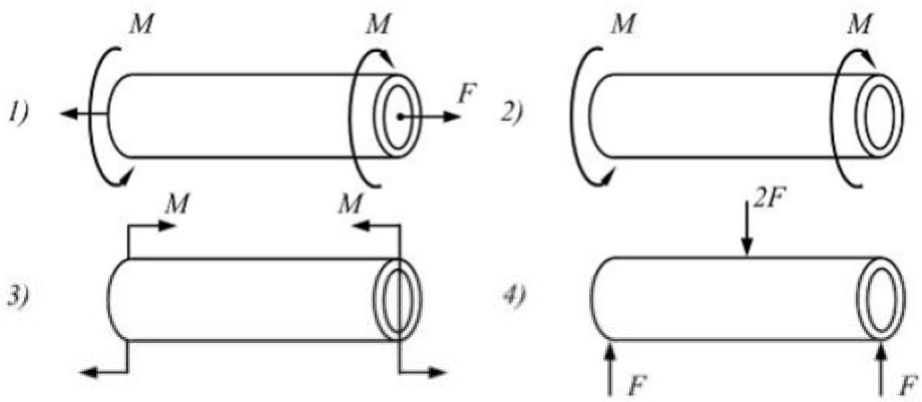
Решение:



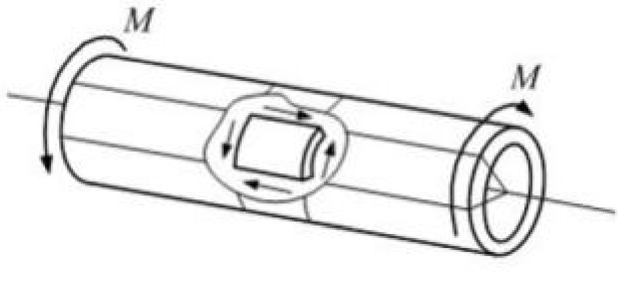
Величину касательных напряжений в плоскости скалывания определим из уравнения равновесия, составленного для прямоугольного параллелепипеда, показанного на рисунке. Считаем, что касательные напряжения распределены по площади скалывания равномерно. Тогда $\tau lb - F = 0$, $\tau = \dfrac{F}{lb}$. Условие разрушения имеет вид $\tau = \dfrac{F}{lb} = \tau_{ск}$, откуда $F = \tau_{ск} lb$.

ЗАДАНИЕ 3.5

Напряженное состояние «чистый сдвиг» имеет место при нагружении тонкостенной трубки по схеме, показанной на рисунке …



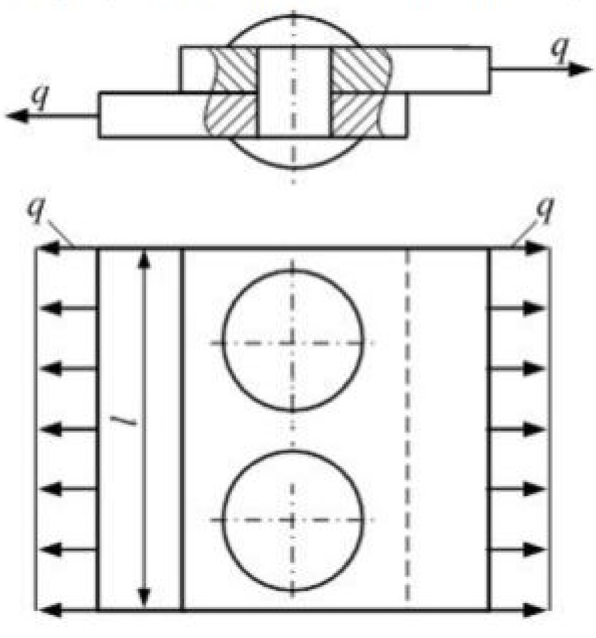
Решение:



Двумя поперечными и двумя продольно-осевыми сечениями выделим элемент стенки трубки (см. рис.). Известно, что в поперечном сечении трубки при кручении действуют касательные напряжения. По закону парности такие же напряжения действуют в продольно-осевых сечениях. Нормальные напряжения в этих сечениях равны нулю. Поэтому напряженное состояние стенки трубки – «чистый сдвиг».

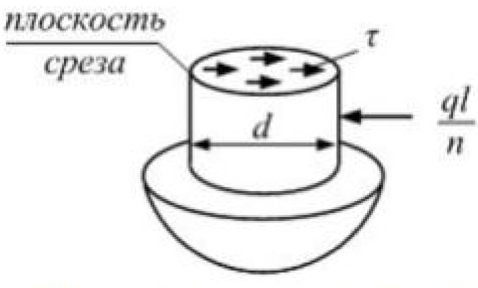
ЗАДАНИЕ 3.6.

На рисунке показано соединение двух листов с помощью ряда заклепок.



Соединение нагружено равномерно распределенной по кромкам листов нагрузкой с интенсивностью q. Известны величины: q, l, d – диаметр тела заклепки, $\left[\tau_{ср}\right]$ – допускаемое касательное напряжение на срез для заклепки. Из расчета заклепок на срез минимально допустимое число заклепок определяется выражением …

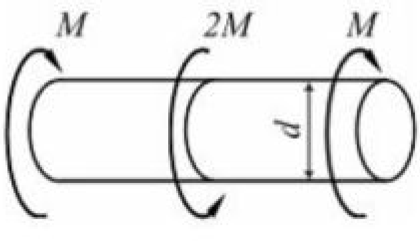
Решение:



Полагаем, что на каждую заклепку со стороны листа действует сила, равная $\frac{ql}{n}$, где n – число заклепок. Реакцию со стороны листа на головку заклепки и силы трения в расчетах не учитываем. Касательные напряжения распределены по площади среза равномерно. Величину касательных напряжений в плоскости среза определим из уравнения равновесия составленного для нижней части заклепки (см. рисунок): $\tau\frac{\pi d^2}{4}-\frac{ql}{n}=0$, $\tau=\frac{4ql}{n\pi d^2}$. Условие прочности на срез: $\tau=\frac{4ql}{n\pi d^2}\le[\tau_{ср}]$, откуда $n\ge\frac{4ql}{\pi d^2[\tau_{ср}]}$.

ЗАДАНИЕ 3.7

На рисунке показан стержень, работающий на кручение. Заданы величины: $d=10$ *см,* предел текучести при чистом сдвиге $\tau_T=120$ *МПа*, коэффициент запаса по текучести $n_T=2$. Из расчета по допускаемым касательным напряжениям максимально допустимое значение момента M равно ____ $кН\cdot м$.



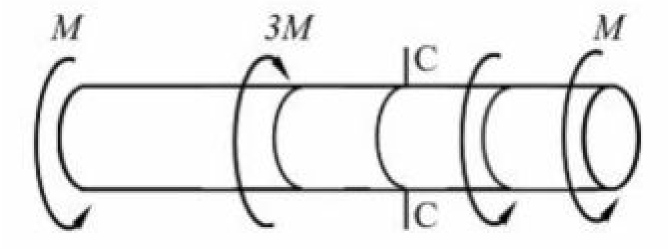
Решение:

Условие прочности для стержня имеет вид $\tau_{\max}=\frac{M_K^{\max}}{W_p}\le[\tau]$, где $\left|M_K^{\max}\right|=M$, $W_p=\frac{\pi d^3}{16}$, $[\tau]=\frac{\tau_T}{n_T}$. Подставляя $M_K^{\max}$, W_p, $[\tau]$ в условие прочности, получаем $\tau_{\max}=\frac{16M}{\pi d^3}\le\frac{\tau_T}{n_T}$, откуда

$$M\le\frac{\pi d^3\tau_T}{16n_T}=\frac{3{,}14\cdot0{,}1^3\cdot120}{16\cdot2}=118\cdot10^{-4}кН\cdot м.$$

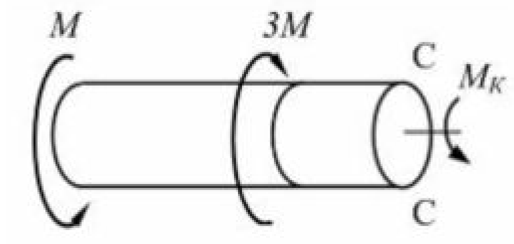
ЗАДАНИЕ 3.8

На рисунке показан стержень, работающий на кручение. Крутящий момент в сечении С-С, по абсолютной величине, равен …



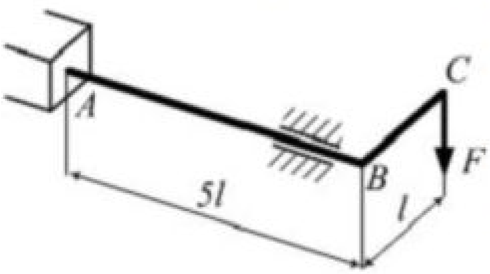
Решение:

Крутящий момент в сечении С-С определим методом сечений. На рисунке показана левая отсеченная часть стержня. Крутящий момент M_K направляем произвольно. Уравнение равновесия имеет вид $M_K - 3M + M = 0$, откуда $M_K = 2M$.



ЗАДАНИЕ 3.9

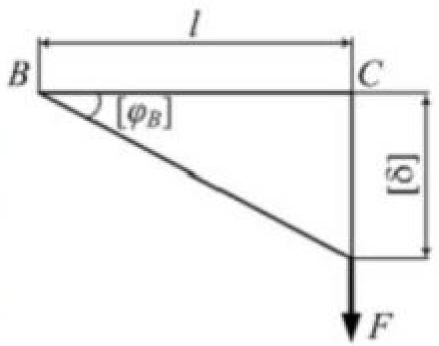
Левый конец стержня *AB* (см. рисунок) жестко защемлен, правый установлен в подшипнике скольжения. Элемент *BC* абсолютно жесткий. Известны величины: l, GJ_p – жесткость поперечного сечения стержня *AB* на кручение, $[\delta]$ – допускаемая величина вертикального перемещения точки *C*. Максимально допустимое значение силы F равно …



Решение:

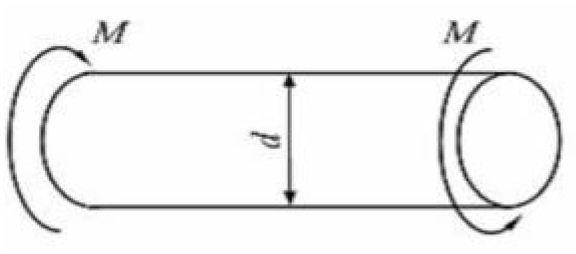
Стержень *AB* скручивается моментом Fl. Допускаемый угол поворота поперечного сечения *B* стержня *AB* равен $[\varphi_B] = \dfrac{[\delta]}{l}$ (см. рисунок). С другой стороны $\varphi_B = \dfrac{Fl \cdot 5l}{GJ_p}$. Условие жесткости имеет вид

$\dfrac{5Fl^2}{GJ_p} \le \dfrac{[\delta]}{l}$. Откуда $F \le \dfrac{GJ_p[\delta]}{5l^3}$.



ЗАДАНИЕ 3.10

Стержень скручивается двумя моментами (см. рисунок). $d = 10\,см$, $G = 8 \cdot 10^4\,МПа$, $[\tau] = 50\,МПа$, $[\theta] = 0{,}0017\,\frac{рад}{м}$. Из расчетов на прочность и жесткость максимально допустимая величина момента M равна ____ $МН \cdot м$.



Решение:

Запишем условие прочности для стержня $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{M \cdot 16}{\pi d^3} \le [\tau]$, откуда

$M \le \frac{\pi d^3[\tau]}{16} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}1^3 \cdot 50}{16} = 0{,}0098\,МН \cdot м.$ Составим условие жесткости

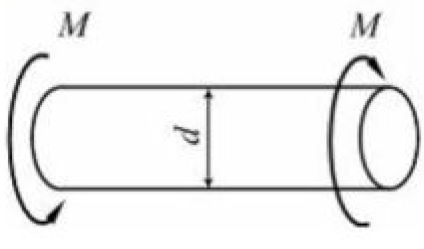
$\theta = \frac{M_{кр}}{GJ_p} = \frac{M \cdot 32}{G\pi d^4} \le [\theta]$, откуда

$$M \le \frac{G\pi d^4[\theta]}{32} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}0017}{32} = 0{,}0013\,МН \cdot м.$$

Таким образом, максимально допустимое значение $M = 0{,}0013\,МН \cdot м$.

ЗАДАНИЕ 3.11

На рисунке показан стержень, работающий на кручение. Известны величины: d, τ_T – предел текучести при чистом сдвиге, n – коэффициент запаса по текучести в самых напряженных точках. Значение M равно …



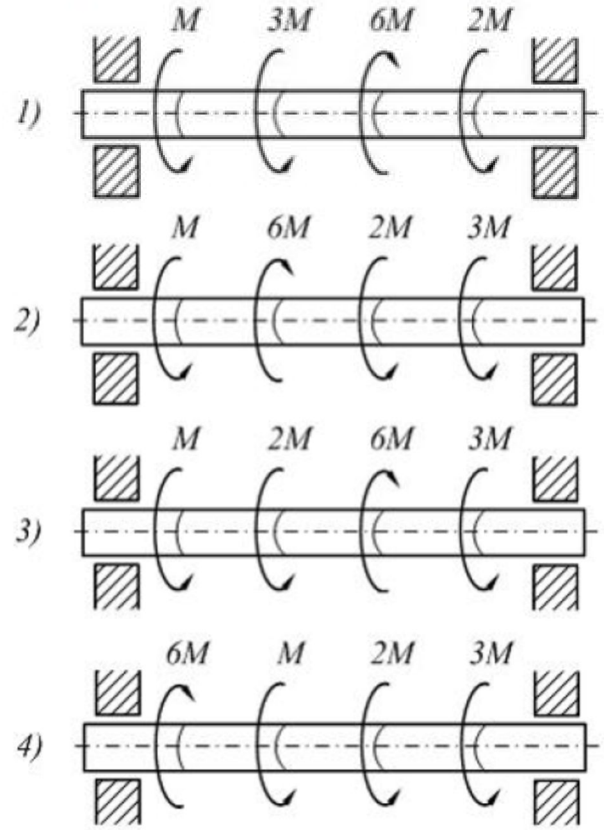
Решение:

Коэффициент запаса по текучести в самых напряженных точках определяется по формуле $n = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}}$, где $\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} = \frac{16M}{\pi d^3}$.

После подстановки получаем $n = \frac{\pi d^3 \tau_T}{16M}$, откуда $M = \frac{\pi d^3 \tau_T}{16n}$.

ЗАДАНИЕ 3.12

На рисунках показаны четыре варианта нагружения одного и того же вала моментами M, $2M$, $3M$ и $6M$. Вал будет иметь наименьший диаметр при его нагружении по варианту …



Решение:

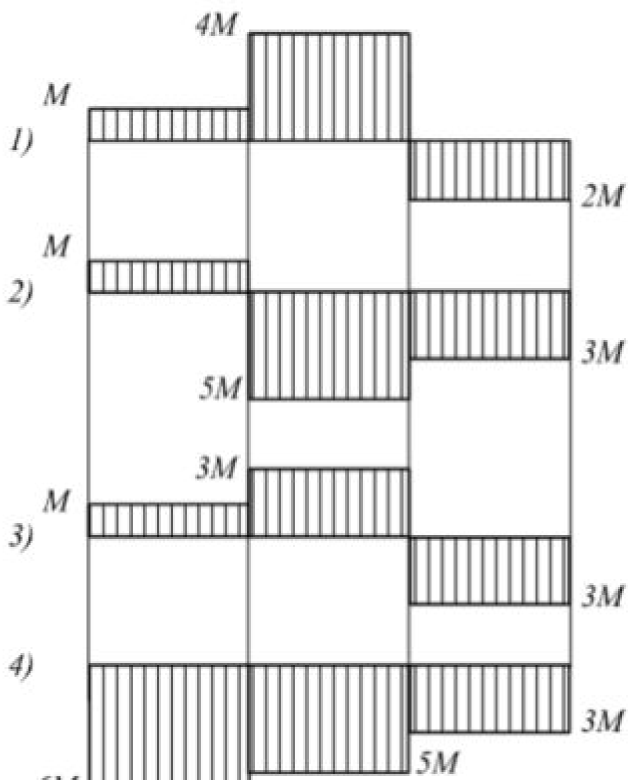
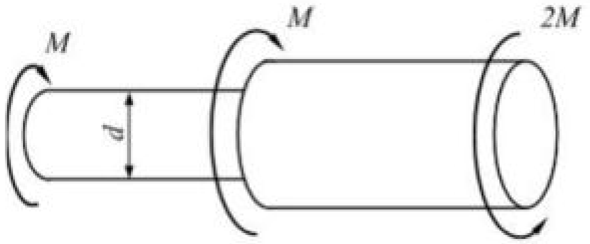


Рис. 1

Эпюры крутящих моментов для четырех вариантов нагружения вала имеют вид (смотри рис. 1). Наименьшее значение максимального крутящего момента, а значит и наименьший диаметр, вал будет иметь в третьем варианте нагружения.

ЗАДАНИЕ 3.13



Стержень работает на кручение. Величины M и d заданы. Из условия равнопрочности по напряжениям диаметр вала на правом грузовом участке равен …

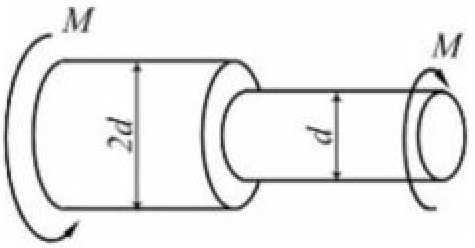
Решение:

Определяем максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях вала на левом и правом

грузовых участках: $\tau_{\max}^{лев} = \dfrac{16M}{\pi d^3}$, $\tau_{\max}^{прав} = \dfrac{32M}{\pi d_{прав}^3}$. Записываем условие

равнопрочности $\dfrac{16M}{\pi d^3} = \dfrac{32M}{\pi d_{прав}^3}$, откуда $d_{прав} = 1{,}26d$.

ЗАДАНИЕ 3.14



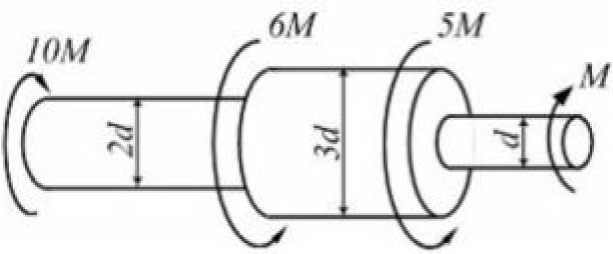
В самых напряженных точках поперечного сечения вала касательные напряжения достигнут предела текучести тогда, когда значение момента M равно …

Решение:

Максимальные касательные напряжения возникают на правом участке. Значение M, при котором эти напряжения станут равными пределу текучести, определим из условия

$\tau_{\max} = \dfrac{M_K}{W_p} = \dfrac{16M}{\pi d^3} = \tau_T$, откуда $M = \dfrac{\pi d^3 \tau_T}{16}$.

ЗАДАНИЕ 3.15



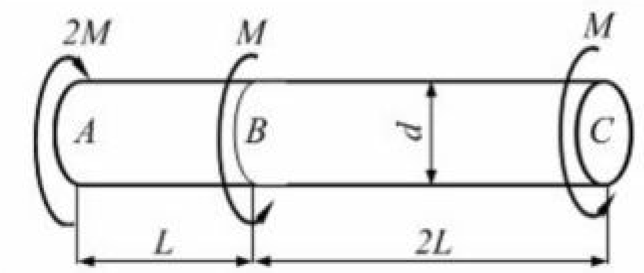
На рисунке показан стержень, работающий на кручение. Максимальные касательные напряжения в поперечном сечении стержня равны …

Решение:

Стержень имеет три грузовых участка (левый, средний и правый). Абсолютные значения крутящих моментов: на левом участке $10M$, на среднем участке $4M$, на правом участке M. Максимальные касательные напряжения определим по формуле $\tau_{\max} = \dfrac{M_K}{W_p}$, где $W_p = \dfrac{\pi D^3}{16}$ – полярный момент сопротивления. Учитывая, что диаметры сечений на участках разные, получим $\tau_{\max}^{лев} = \dfrac{20M}{\pi d^3}$, $\tau_{\max}^{сред} = \dfrac{64M}{27\pi d^3}$, $\tau_{\max}^{прав} = \dfrac{16M}{\pi d^3}$. Таким образом, максимальные касательные напряжения равны $\dfrac{20M}{\pi d^3}$.

ЗАДАНИЕ 3.16

На рисунке показан стержень, скручиваемый тремя моментами. Величины $M, G, d, [\varphi]_{A-C}$ (допустимый взаимный угол поворота концевых сечений стержня) известны. Из расчета на жесткость максимально допустимое



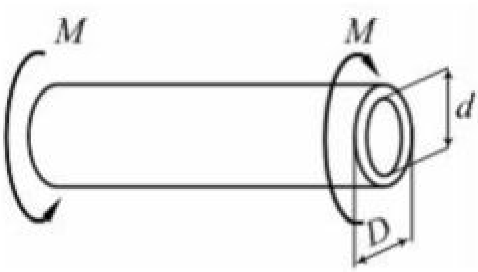
значение L равно …

Решение:

Определяем взаимный угол поворота концевых сечений $\varphi_{A-C} = \varphi_{A-B} + \varphi_{B-C} = \dfrac{2M \cdot L}{G\dfrac{\pi d^4}{32}} + \dfrac{M \cdot 2L}{G\dfrac{\pi d^4}{32}} = \dfrac{128ML}{G\pi d^4}$. Условие жесткости имеет вид $\varphi_{A-C} = \dfrac{128ML}{G\pi d^4} \le [\varphi]_{A-C}$, откуда $L \le \dfrac{G\pi d^4 [\varphi]_{A-C}}{128M}$.

ЗАДАНИЕ 3.17

На рисунке показана труба, работающая на кручение. Заданы величины: $M = 0{,}05\ МН \cdot м$, $D = 20\ см$, $d = 15\ см$, предел текучести при чистом сдвиге $\tau_Т = 100\ МПа$. Фактический коэффициент запаса из расчета по текучести в самых напряженных точках равен …



Решение:

Фактический коэффициент запаса определим по формуле $n = \dfrac{\tau_T}{\tau_{\max}}$, где

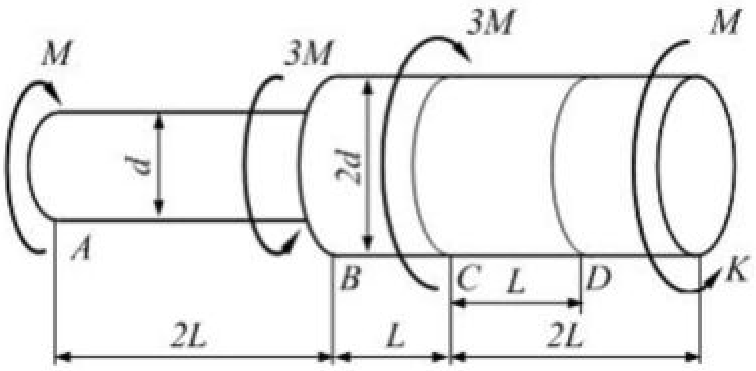
$\tau_{\max} = \dfrac{M_K}{W_p} = \dfrac{M}{\dfrac{\pi D^3}{16}\left(1 - \dfrac{d^4}{D^4}\right)}$. Подставляя числовые значения, получаем

$\tau_{\max} = 46{,}7\ МПа, n = 2{,}1$.

ЗАДАНИЕ 3.18

На рисунке показан ступенчатый стержень, работающий на кручение. Величины L, M, d, G заданы. Взаимный угол поворота поперечных сечений A и D равен …

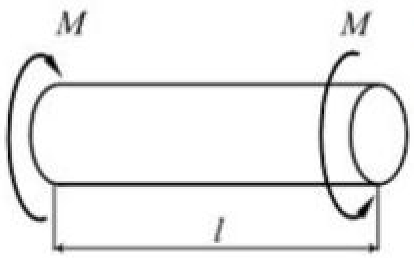
Решение:



Методом сечений определяем крутящие моменты на грузовых участках. На участке $AB - M_{кр} = M$. На участке $BC - M_{кр} = -2M$. На участке $CK - M_{кр} = M$. Взаимный угол поворота двух любых сечений равен сумме углов закручивания участков стержня, расположенных между ними. Поэтому $\varphi_{A-D} = \varphi_{A-B} + \varphi_{B-C} + \varphi_{C-D} = \dfrac{M2L \cdot 32}{G\pi d^4} - \dfrac{2ML \cdot 32}{G\pi 16 d^4} + \dfrac{ML \cdot 32}{G\pi 16 d^4} = \dfrac{62ML}{G\pi d^4}$.

ЗАДАНИЕ 3.19

На рисунке показан стержень длиной $l = 15\ см$, работающий на кручение.



Концевые сечения стержня повернулись относительно друг друга на угол $\varphi = 0{,}017$ рад. Относительный угол закручивания равен …

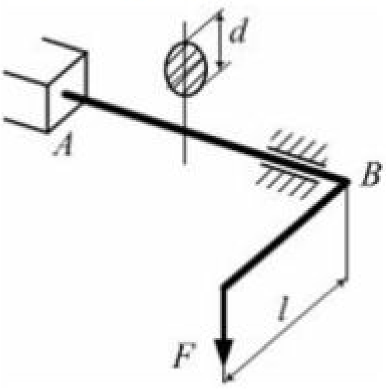
Решение:

Относительный угол закручивания определяется по формуле $\Theta = \frac{\varphi}{l}$.

Подставляя числовые значения, получаем $\Theta = 113 \cdot 10^{-5} \frac{рад}{см} = 113 \cdot 10^{-3} \frac{рад}{м}$.

ЗАДАНИЕ 3.20

Левый конец стержня AB круглого поперечного сечения диаметром d (см. рисунок) жестко защемлен, правый установлен в подшипнике скольжения. К стержню под прямым углом прикреплен рычаг длиной l. Система нагружена силой F. Известны величины: d, l, τ_T – предел текучести при чистом сдвиге для материала стержня AB, n_T – коэффициент запаса по текучести. Из расчета по допускаемым напряжениям максимально допустимое значение силы F равно …

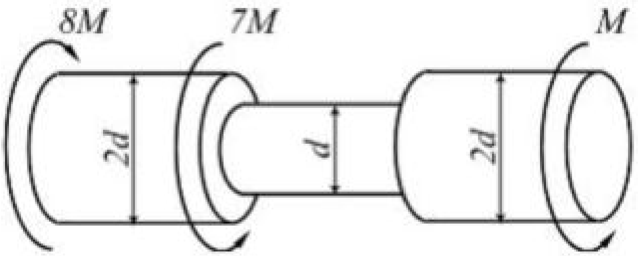


Решение:

Стержень AB скручивается моментом Fl. Условие прочности для стержня имеет вид $\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} = \frac{16Fl}{\pi d^3} \le \frac{\tau_T}{n_T}$, откуда $F \le \frac{\pi d^3 \tau_T}{16 l n_T}$.

ЗАДАНИЕ 3.21

Максимальный относительный угол закручивания для стержня, показанного на рисунке, равен … Известны величины: M, d, G – модуль сдвига материала стержня.



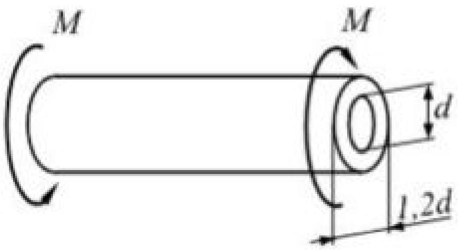
Решение:

Стержень имеет три участка (левый, средний и правый). Относительный угол закручивания определим по формуле $\Theta = \frac{M_K}{GJ_p}$, где M_K и $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$ – крутящий момент и полярный момент инерции поперечного сечения на соответствующем участке. После вычислений получаем: $\Theta_{лев} = \dfrac{16M}{G\pi d^4}$, $\Theta_{сред} = \dfrac{32M}{G\pi d^4}$, $\Theta_{прав} = \dfrac{2M}{G\pi d^4}$, таким образом

$$\Theta_{max} = \Theta_{сред} = \frac{32M}{G\pi d^4}.$$

ЗАДАНИЕ 3.22

Труба скручивается двумя моментами. Величины M и $[\tau]$ заданы.



Минимально допустимое значение параметра d из расчета на прочность по допускаемым напряжениям равно …

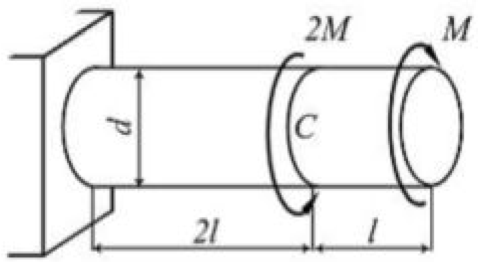
Решение:

Запишем условие прочности $\tau_{\max} = \dfrac{M}{W_p} \le [\tau]$, где $W_p = \dfrac{\pi D^3}{16}\left(1 - \dfrac{d^4}{D^4}\right)$, d и D – внутренний и наружный диаметры трубы. После вычислений получаем, $W_p = 0{,}177d^3$ и условие прочности принимает вид $\tau_{\max} = \dfrac{M}{0{,}177d^3} \le [\tau]$,

откуда $d \ge \sqrt[3]{\dfrac{M}{0{,}177[\tau]}}$.

ЗАДАНИЕ 3.23

Стержень, показанный на рисунке, испытывает деформацию кручение.



Известны величины: M, l, $[\varphi_C]$ – допустимый угол поворота поперечного сечения C в радианах, G – модуль сдвига материала стержня. Минимально допустимое значение диаметра d равно …

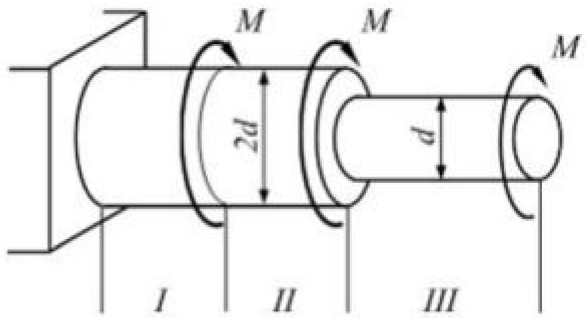
Решение:

Крутящий момент на левом грузовом участке стержня по модулю равен M. Условие жесткости имеет вид $\varphi_C \le [\varphi_C]$, где $\varphi_C = \dfrac{M_K l_{лев}}{GJ_p} = \dfrac{64Ml}{G\pi d^4}$, $l_{лев}$ –

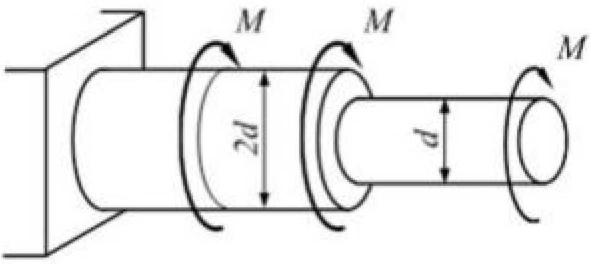
длина левого грузового участка. Подставляя значение φ_C в условие жесткости, получаем $\dfrac{64Ml}{G\pi d^4} \le [\varphi_C]$, откуда $d \ge \sqrt[4]{\dfrac{64Ml}{G\pi[\varphi_C]}}$.

ЗАДАНИЕ 3.24

На рисунке показан стержень, нагруженный тремя моментами. Величины τ_T, d, M известны. Фактический коэффициент запаса прочности из расчета по напряжениям равен …



Решение:



Определяем максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях стержня на всех грузовых участках по формуле $\tau_{\max} = \dfrac{M_{кр}}{W_p}$.

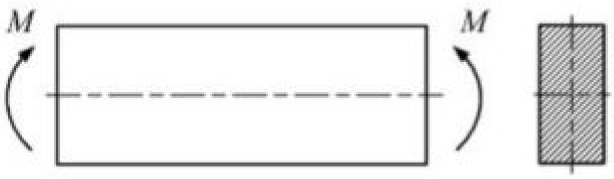
$$\tau_{\max}^{(1)} = \frac{3M}{\pi(2d)^3/16} = \frac{6M}{\pi d^3}.$$

$\tau_{\max}^{(2)} = \dfrac{2M}{\pi(2d)^3/16} = \dfrac{4M}{\pi d^3}$. $\tau_{\max}^{(3)} = \dfrac{M}{\pi d^3/16} = \dfrac{16M}{\pi d^3}$. Далее определяем фактический коэффициент запаса прочности $n = \dfrac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \dfrac{\tau_T \pi d^3}{16M}$.

4 ПЛОСКИЙ ПРЯМОЙ ИЗГИБ

ЗАДАНИЕ 4.1

Стержень изготовлен из пластичного материала с одинаковыми пределами текучести на растяжение и сжатие. Значения M и осевого момента сопротивления W заданы. Фактический коэффициент запаса прочности равен …

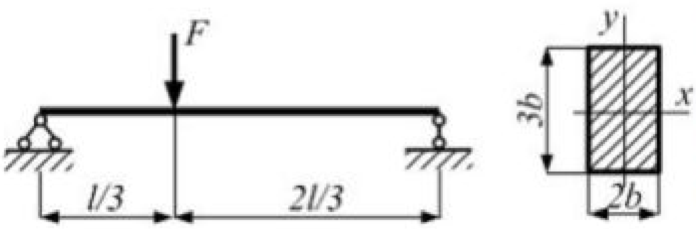


Решение:

Фактический коэффициент запаса прочности определяется по формуле $n = \dfrac{\sigma_m}{\sigma_{\max}}$, где σ_m – предел текучести материала стержня; $\sigma_{\max} = \dfrac{M}{W}$ – максимальное значение напряжения в стержне. Коэффициент запаса прочности $n = \dfrac{\sigma_m \cdot W}{M}$.

ЗАДАНИЕ 4.2

Однопролетная балка длиной l нагружена силой F. Сечение прямоугольное с размерами $2b$ и $3b$. Предел текучести для материала балки σ_T задан. Коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям равен …



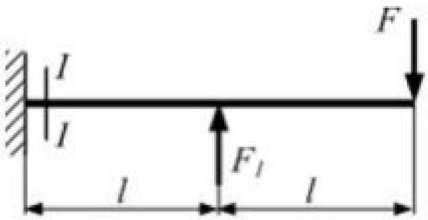
Решение:

Определим максимальное нормальное напряжение в балке по формуле $\sigma_{\max} = \dfrac{M_{x\max}}{W_x}$. Учитывая, что $M_{x\max} = \dfrac{2}{9}Fl$, $W_x = 3b^3$ найдем $\sigma_{\max} = \dfrac{2}{27}\dfrac{Fl}{b^3}$.

Коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям $n_T = \dfrac{\sigma_T}{\sigma_{\max}}$ или $n_T = \dfrac{27}{2}\dfrac{\sigma_T b^3}{Fl}$.

ЗАДАНИЕ 4.3

Консольная балка длиной $2l$ нагружена силами F_1 и F. Сечение I–I расположено бесконечно близко в заделке. Изгибающий момент в сечении I–I равен нулю, если значение силы F_1 равно …

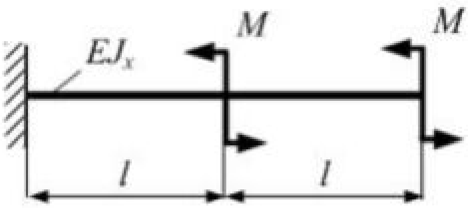


Решение:

Рассекаем балку в сечении I–I на две части. Отбросим левую часть. Действие отброшенной левой части на оставшуюся заменяем поперечной силой Q и изгибающим моментом M. Составим уравнение равновесия для определения изгибающего момента в сечении I–I: $-M - F2l + F_1 l = 0$. Из условия, что в данном сечении $M = 0$, найдем $F_1 = 2F$.

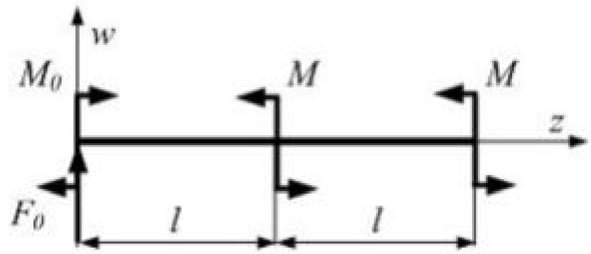
ЗАДАНИЕ 4.4

Консоль длиной $2l$ нагружена двумя моментами. Жесткость поперечного сечения на изгиб EJ_x по длине постоянна. Прогиб свободного конца консоли равен δ, если значение момента M равно …



Решение:

Составим расчетную схему

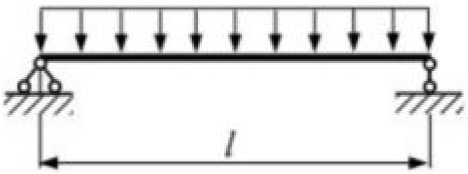


Воспользуемся универсальным уравнением упругой линии балки $w = w_0 + \varphi_0 z + \frac{1}{EJ_x}\left[M_0\frac{z^2}{2!} + F_0\frac{z^3}{3!} - M\frac{(z-l)^2}{2!}\right]$.

Из условий равновесия имеем $F_0 = 0$, $M_0 = 2M$. Прогиб и угол поворота в начале координат $w_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$. После преобразований найдем прогиб свободного конца консоли $w(z = 2l) = \frac{7}{2}\frac{Ml^2}{EJ_x}$. Из условия $w(z = 2l) = \delta$ получим $M = \frac{2}{7}\frac{\delta EJ_x}{l^2}$.

ЗАДАНИЕ 4.5

Однопролетная балка длиной l, высотой h нагружена равномерно распределенной нагрузкой. Радиус кривизны нейтрального слоя балки в середине пролета равен ρ. Жесткость поперечного сечения на изгиб EJ_x по всей длине постоянна. Максимальное нормальное напряжение в балке равно …



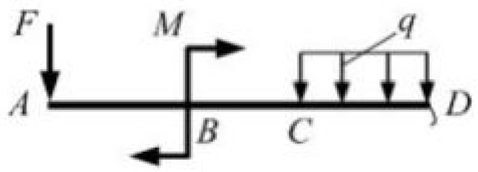
(Влияние поперечной силы на изменение кривизны не учитывать).

Решение:

При изгибе балки кривизна нейтрального слоя связана с изгибающим моментом и жесткостью поперечного сечения на изгиб соотношением $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$. Следовательно, в середине пролета, в котором возникает максимальный изгибающий момент, имеем $M_{x\max} = \frac{EJ_x}{\rho}$. Максимальное нормальное напряжение найдем по формуле $\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{J_x} \cdot y_{\max}$. Учитывая, что $y_{\max} = h/2$, получим $\sigma_{\max} = \frac{Eh}{2\rho}$.

ЗАДАНИЕ 4.6

На схеме показана отсечная часть стержня и нагрузка, действующая на нее.



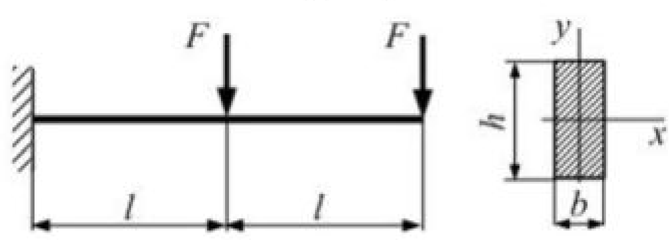
Неверным является утверждение, что изгибающий момент …
1) на участке *CD* меняется по линейному закону, 2) в сечении *A* равен нулю;
3) в сечении *B* изменяется скачком;
4) на участке *AB* переменный.

Решение:

При изгибе выполняются дифференциальные зависимости $\frac{dQ_y}{dz} = q$, $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$, где q – интенсивность распределенной нагрузки на участке; Q_y – поперечная сила; M_x – изгибающий момент. Из анализа формул видно, что на участке, где к балке приложена равномерно распределенная нагрузка, поперечная сила меняется по линейному закону, а изгибающий момент по закону квадратной параболы. Следовательно, утверждение, что изгибающий момент на участке *CD* меняется по линейному закону будет неверным.

ЗАДАНИЕ 4.7

Консольная балка прямоугольного сечения с размерами b и h нагружена



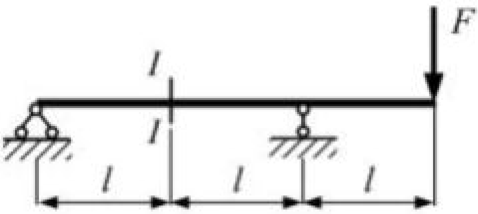
силами F. Линейный размер $l = 10h$. Отношение максимального нормального напряжения к максимальному касательному напряжению в балке $(\sigma_{\max}/\tau_{\max})$ равно …

Решение:

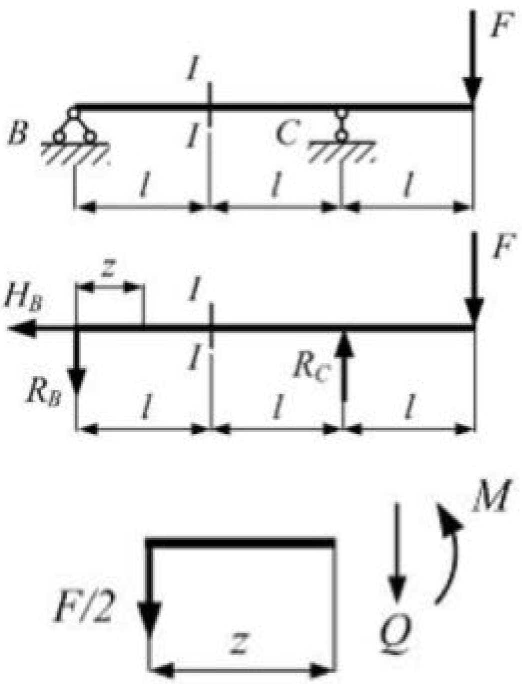
Максимальный изгибающий момент возникает в поперечном сечении балки вблизи заделки $M_{x\max} = 3Fl$. Для определения максимального нормального напряжения используем формулу $\sigma_{\max} = \dfrac{M_x}{W_x}$, где $W_x = \dfrac{bh^2}{6}$. Тогда $\sigma_{\max} = \dfrac{18Fl}{bh^2}$. Максимальное значение поперечной силы $Q_y = 2F$. Максимальное касательное напряжение для балки прямоугольного сечения определяется по формуле $\tau_{\max} = \dfrac{3}{2}\dfrac{Q_y}{A}$, где $A = bh$. После вычислений $\tau_{\max} = 3\dfrac{F}{bh}$. Учитывая, что $l = 10h$, получим $\dfrac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 60$.

ЗАДАНИЕ 4.8

Однопролетная консольная балка нагружена силой F. Размер l задан. Значения изгибающего момента и поперечной силы по абсолютной величине в сечении I–I равны …



Решение:



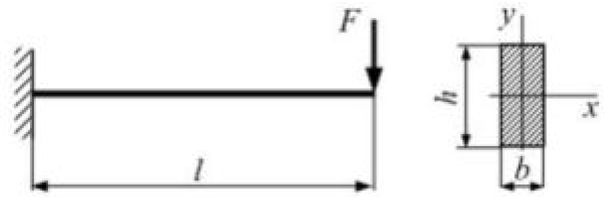
Отбросим связи, наложенные на балку, и их действие заменяем реакциями H_B, R_B, R_C. Используя уравнения статики, найдем:

$$H_B = 0,\ R_B = \frac{1}{2}F,\ R_C = \frac{3}{2}F.$$

Балка имеет два участка. Рассекаем балку произвольным сечением на левом участке на две части. Отбрасываем правую часть. Длина левой части изменяется в пределах $0 \le z \le 2l$. Действие отброшенной правой части заменяем на левую внутренними силовыми факторами. При плоском поперечном изгибе в сечении балки возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила Q и изгибающий момент M. Из уравнений статики определяем $Q = -\frac{1}{2}F, M = -\frac{1}{2}F \cdot z$. Следовательно, поперечная сила по длине левого участка постоянна, а изгибающий момент меняется по линейному закону. Сечение I–I $(z = l)$ находится в границах левого участка. Абсолютные значения изгибающего момента и поперечной силы в этом сечении: $|M(z = l)| = \frac{1}{2}Fl, |Q| = \frac{1}{2}F$.

ЗАДАНИЕ 4.9

Консоль длиной l нагружена силой F. Сечение балки прямоугольное с размерами b и h. Модуль упругости материала E. При увеличении линейных размеров (l, b, h) в два раза значение максимального прогиба …



Решение:

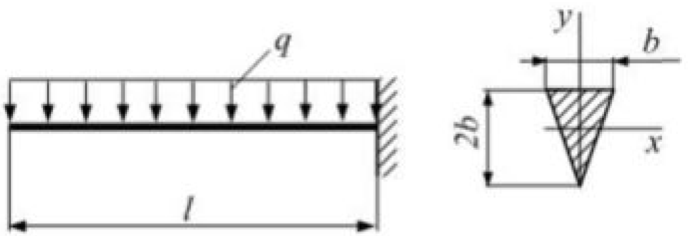
Максимальный прогиб консольной балке $w_{\max} = \frac{Fl^3}{3EJ_x}$, где $J_x = \frac{bh^3}{12}$.

При увеличении линейных размеров в два раза получим $w_{\max} = \frac{1}{2}\frac{Fl^3}{3EJ_x}$.

Следовательно, максимальный прогиб уменьшится в два раза.

ЗАДАНИЕ 4.10

Консольная балка длиной $l = 1{,}5$ *м* нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q = 640\,\frac{Н}{м}$. Поперечное сечение – равнобедренный треугольник. Допускаемое нормальное напряжение для материала балки $[\sigma] = 160$ *МПа*. Из расчета на прочность по нормальным напряжениям размер поперечного сечения балки b равен ____ (*см*).



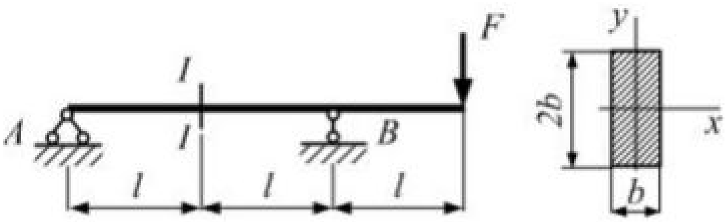
Решение:

Максимальные нормальные напряжения в балке определяются по формуле

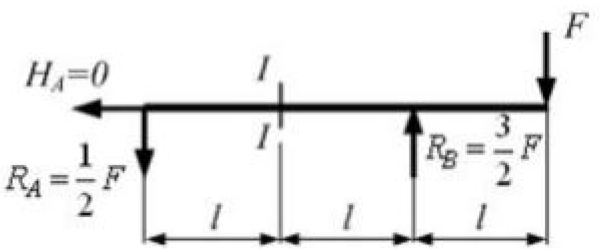
$\sigma_{\max} = \left(\dfrac{M_x}{J_x} y \right)_{\max}$. В случае, когда размеры поперечного сечения балки по длине не меняются, максимальные нормальные напряжения возникают в сечении балки, где действует максимальный изгибающий момент и в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии. Нейтральная линия совпадает с главной центральной осью поперечного сечения перпендикулярной плоскости действия изгибающего момента. Максимальный изгибающий момент $M_{x\max} = \dfrac{1}{2} q l^2$ действует в сечении балки вблизи заделки. Центр тяжести треугольного сечения расположен на расстоянии $h/3$ от основания треугольника, то есть $\dfrac{2}{3} b$. Осевой момент инерции относительно главной центральной оси x равен $J_x = \dfrac{b(2b)^3}{36}$, а расстояние $y_{\max} = \dfrac{2}{3} 2b$. После вычислений $\sigma_{\max} = 3 \dfrac{q l^2}{b^3}$. Из условия прочности по нормальным напряжениям $\sigma_{\max} \le [\sigma]$ получим $b \ge 3$ *см*.

ЗАДАНИЕ 4.11

Однопролетная консольная балка прямоугольного сечения с размерами b и $2b$ нагружена силой F. Линейные размеры b и $l = 20b$ заданы. В сечении I–I значение максимального касательного напряжения равно τ. Максимальное нормальное напряжение в балке равно …



Решение:



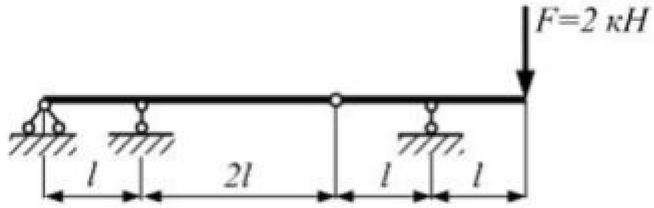
Используя уравнения статики, определим реакции опор A и B: $H_A = 0,\ R_A = \dfrac{1}{2} F,\ R_B = \dfrac{3}{2} F.$

Касательное напряжение в любой точке поперечного сечения балки определяется по формуле Д. И. Журавского $\tau = \dfrac{Q_y S_x^*}{b \cdot J_x}$. Для прямоугольного сечения максимальное касательное напряжение возникает в точках на нейтральной линии и равно

$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{A}$, где Q – значение поперечной силы в данном сечении; A – площадь поперечного сечения. В сечении I–I имеем $Q = \frac{1}{2}F$, $A = 2b^2$. Тогда $\tau_{\max} = \frac{3}{8}\frac{F}{b^2} = \tau$. Максимальное нормальное напряжение возникает в сечении балки над опорой B, где действует максимальный изгибающий момент $M_x = Fl$. Значение максимального нормального напряжения вычислим по формуле $\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$, где W_x – момент сопротивления. Для прямоугольного сечения $W_x = \frac{b(2b)^2}{6}$. После вычислений, учитывая, что $F = \frac{8}{3}\tau b^2$ и $l = 20b$, получим $\sigma_{\max} = 80\tau$.

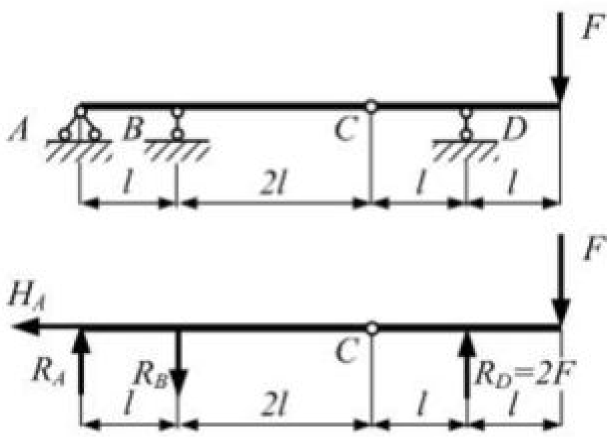
ЗАДАНИЕ 4.12

Двухпролетная консольная балка с шарниром нагружена силой $F = 2\ кН$.



Линейный размер $l = 0{,}5\ м$. Максимальное значение изгибающего момента в балке по абсолютной величине равно … (*кНм*).

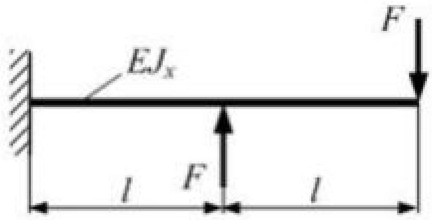
Решение:



Обозначим сечения над опорами и в шарнире буквами A, B, C, D. Отбросим связи, наложенные на балку, а их действие заменим реакциями. Используя уравнения статики, найдем реакции в опорах: $H_A = 0, R_A = 2F, R_B = 3F, R_D = 2F$. На рисунке показаны положительные направления реакций. В сечениях A и C изгибающие моменты равны нулю. Сопоставим значения изгибающих моментов в сечениях B и D по абсолютной величине: $M_B = 2Fl$, $M_D = Fl$. Максимальное значение изгибающего момента в балке будет в сечении В и равно 2 *кНм*.

ЗАДАНИЕ 4.13

Консольная балка длиной $2l$ нагружена силами F. Модуль упругости материала E, осевой момент инерции сечения J_x заданы. Прогиб концевого сечения примет значение δ, когда значение силы F равно …



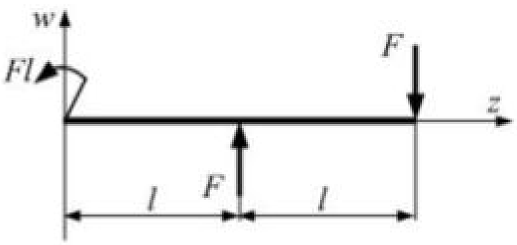
Решение:

Воспользуемся универсальным уравнением упругой линии балки

$$w = w_0 + \Theta_0 z + \frac{1}{EJ_x}\left[M_0 \frac{z^2}{2!} + F_0 \frac{z^3}{3!} + \sum M_i \frac{(z-a_i)^2}{2!} + \right.$$

$$\left. + \sum F_i \frac{(z-b_i)^3}{3!} + \sum q_i \frac{(z-c_i)^4}{4!} \ldots \right],$$

где w_0 и Θ_0 – начальные параметры (прогиб и угол поворота в начале координат); M_0, F_0 – значения момента и силы в начале координат.

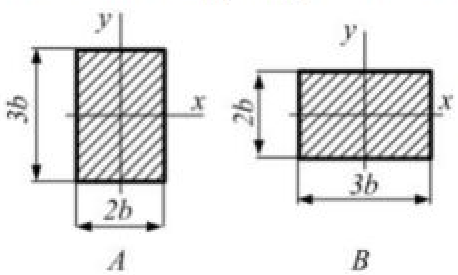


Составим расчетную схему. Начало координат расположим в крайнем левом сечении балки. Из условий равновесия балки найдем $M_0 = Fl, F_0 = 0$. Начало координат совпадает с заделкой. В начале координат прогиб $w_0 = 0$ и угол поворота $\Theta_0 = 0$. Уравнение упругой линии имеет вид:

$w = \frac{1}{EJ_x}\left[-Fl\frac{z^2}{2} + F\frac{(z-l)^3}{6}\right]$. Полагая, что $z = 2l$, определим прогиб свободного конца балки $w = -\frac{11}{6}\frac{Fl^3}{EJ_x}$. Знак «минус» показывает, что перемещение направлено вниз. Из условия $|w| = \delta$, получим $F = \frac{6}{11}\frac{EJ_x}{l^3}\delta$.

ЗАДАНИЕ 4.14

Балка имеет прямоугольное поперечное сечение с размерами $2b$ и $3b$. При повороте поперечного сечения из положения A в положение B грузоподъемность балки, из расчета по нормальным напряжениям, …



Решение:

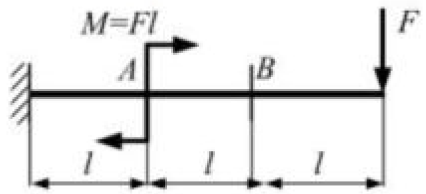
При прочих равных условиях необходимо сопоставить моменты сопротивления сечений.

Для варианта A: $W_x = \dfrac{2b(3b)^2}{6} = 3b^3$, для варианта B: $W_x = \dfrac{3b(2b)^2}{6} = 2b^3$.

Следовательно, грузоподъемность балки уменьшится в 1,5 раза.

ЗАДАНИЕ 4.15

Схема нагружения консольной балки внешней нагрузкой показана на рисунке. Значение максимального изгибающего момента при переносе пары сил с моментом $M = Fl$ из сечения A в сечение B …

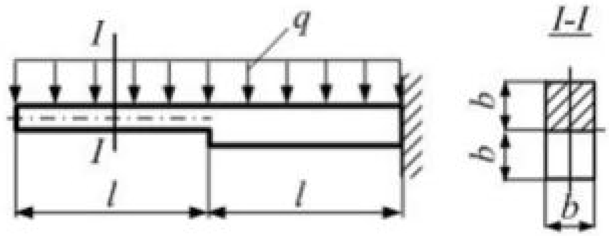


Решение:

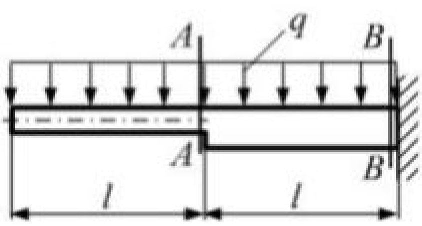
Максимальный изгибающий момент, в обоих вариантах нагружения балки, возникает в сечении, расположенном бесконечно близко к заделке и принимает одно и то же значение по абсолютной величине: $|M_x| = 4Fl$.

ЗАДАНИЕ 4.16

На ступенчатую консольную балку длиной $2l$ действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q. Поперечное сечение левой ступени – квадрат с размерами $b \times b$, правая – имеет прямоугольное сечение с размерами b и $2b$. Максимальное значение нормального напряжения в балке равно …(Концентрацию напряжений не учитывать).



Решение:



Рассмотрим два поперечных сечения балки A–A и B–B. Сечение A–A расположено в конце первой ступени. Сечение B–B бесконечно близко к заделке. При определении нормальных максимальных напряжений воспользуемся формулой $\sigma_{\max} = \dfrac{M_x}{W_x}$, где

M_x – значение изгибающего момента в сечении, в котором определяется нормальное максимальное напряжение;

W_x – осевой момент сопротивления сечения.

Для сечения A–A: $M_{xA} = \frac{1}{2}ql^2$, $W_{xA} = \frac{b^3}{6}$, $\sigma_{\max A} = 3\frac{ql^2}{b^3}$.

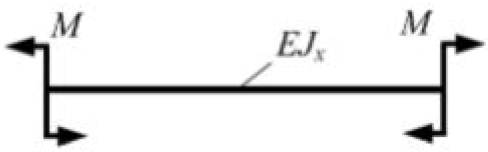
Для сечения B–B: $M_{xB} = 2ql^2$, $W_{xB} = \frac{b(2b)^2}{6}$, $\sigma_{\max B} = 3\frac{ql^2}{b^3}$.

Следовательно, оба сечения равноопасны.

Значение максимального нормального напряжения в балке $\sigma_{\max} = 3\frac{ql^2}{b^3}$.

ЗАДАНИЕ 4.17

Стержень из однородного материала нагружен моментами М. Жесткость



поперечного сечения на изгиб EJ_x по длине постоянна. Радиус кривизны ρ оси стержня равен …

1) $\frac{M}{EJ_x}$; 2) $\frac{M}{2EJ_x}$; 3) $\frac{EJ_x}{M}$; 4) $\frac{2EJ_x}{M}$.

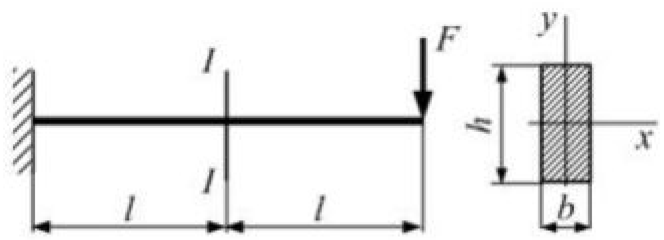
Решение:

Стержень находится в условиях чистого изгиба. Изменение кривизны для всех точек оси стержня будет одним и тем же. Зависимость кривизны оси стержня от изгибающего момента имеет вид $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$.

Учитывая, что $M_x = M$ найдем $\rho = \frac{EJ_x}{M}$.

ЗАДАНИЕ 4.18

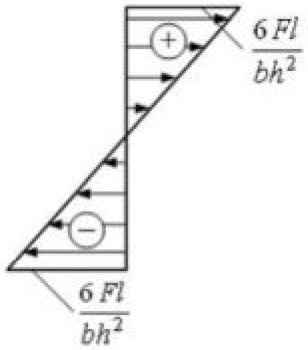
Эпюра распределения нормальных напряжений по высоте сечения балки I–I с



размерами b и h имеет вид и максимальные напряжения равны …

Решение:

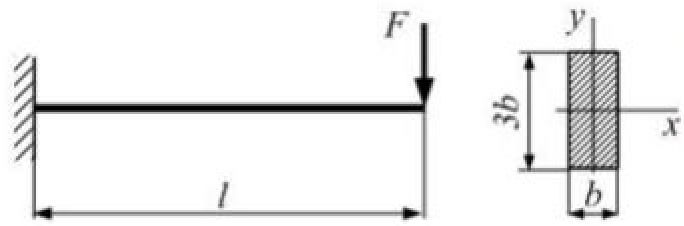
Нормальные напряжения в поперечном сечении балки распределены по высоте по линейному закону $\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y$, где M_x – значение изгибающего момента в сечении, в котором определяется нормальное напряжение; J_x – осевой момент инерции сечения относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости действия изгибающего момента в том же сечении; y – расстояние от главной центральной оси до точки, в которой



определяется нормальное напряжение. В сечении I–I имеем $M_x = -Fl, J_x = \dfrac{bh^3}{12}$. Верхняя половина сечения I–I работает на растяжение, нижняя – на сжатие. Максимальные значения нормальных напряжений по абсолютной величине возникают в точках при $y = \pm\dfrac{h}{2}$ и равны $\sigma_{\max} = \dfrac{Fl}{\dfrac{bh^3}{12}} \cdot \dfrac{h}{2} = \dfrac{6Fl}{bh^2}$. По полученным значениям $\sigma_{\max}$ построим эпюру распределения нормальных напряжений по высоте сечения I–I.

ЗАДАНИЕ 4.19

Консольная балка прямоугольного сечения нагружена силой $F = 3\ кН$.



Допускаемое нормальное напряжение для материала балки $[\sigma] = 160\ МПа$, линейный размер $b = 20\ мм$. Наибольшая длина консоли l из расчета на прочность по нормальным напряжениям равна ___ *см*.

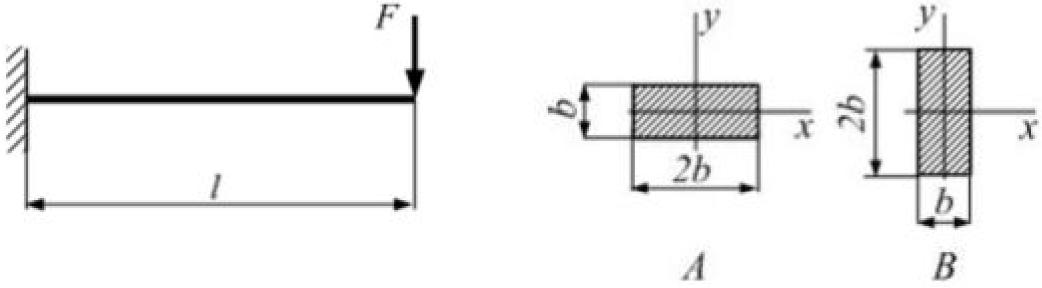
Решение:

Условие прочности по допускаемым нормальным напряжениям имеет вид $\sigma_{\max} \le [\sigma]$. Наибольшее нормальное напряжение действует в сечении балки вблизи заделки, где возникает максимальный изгибающий момент $M_{x\max} = Fl$, и определяется по формуле $\sigma_{\max} = \dfrac{M_{x\max}}{W_x}$. Осевой момент сопротивления при заданных размерах поперечного сечения равен $W_x = \dfrac{3}{2}b^3$. Следовательно, $\sigma_{\max} = \dfrac{2}{3}\dfrac{Fl}{b^3} \le [\sigma]$. Откуда $l \le \dfrac{3}{2}\dfrac{[\sigma]b^3}{F}$ или $l \le 64\ см$.

ЗАДАНИЕ 4.20

Консольная балка длиной l имеет два варианта расположения прямоугольного поперечного сечения. Сила F, линейные размеры b и h

заданы. В опасном сечении балки отношение наибольших нормальных напряжений σ_A / σ_B равно …

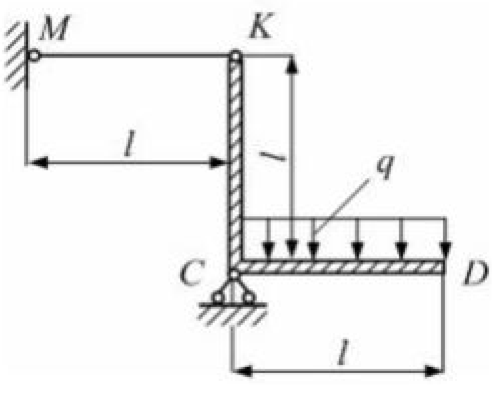


Решение:

Опасное сечение балки расположено бесконечно близко к заделке. Изгибающий момент по абсолютной величине, в данном сечении $M_x = Fl$. Для определения наибольшего нормального напряжения используем формулу $\sigma = \dfrac{M_x}{W_x}$, где W_x – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки. Для прямоугольного сечения: $W_x = \dfrac{bh^2}{6}$, где b – ширина сечения; h – высота. Для варианта A: $W_x = \dfrac{2b \cdot b^2}{6}$, для варианта B: $W_x = \dfrac{b \cdot (2b)^2}{6}$. Следовательно, $\dfrac{\sigma_A}{\sigma_B} = 2$.

ЗАДАНИЕ 4.21

Элемент KCD закреплен с помощью шарнирно неподвижной опоры и стержня с жесткостью поперечного сечения на растяжение EA (см. рисунок). Система нагружена равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью q. Допустимая величина удлинения стержня $[\Delta l]$ задана. Условие жесткости имеет вид …

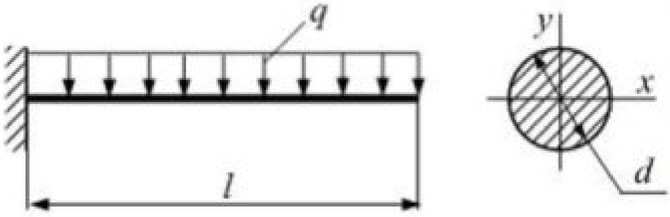


Решение:

Рассмотрим равновесие элемента KCD и определим продольную силу в стержне $N = \dfrac{ql}{2}$. Удлинение стержня $\Delta l = \dfrac{ql^2}{2EA}$, а условие жесткости имеет вид $\dfrac{ql^2}{2EA} \le [\Delta l]$.

ЗАДАНИЕ 4.22

Консольная балка длиной l нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q. Модуль упругости материала E. Сечение круглое диаметром d. Радиус кривизны оси балки ρ в опасном сечении равен …

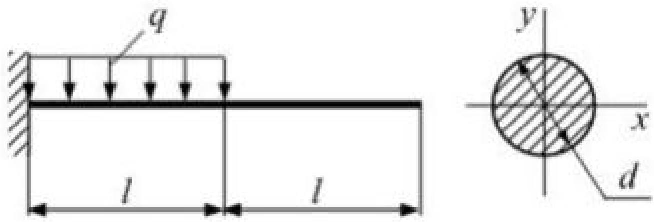


Решение:

Кривизна оси стержня в сечении связана с изгибающим моментом, действующим в этом сечении, и жесткостью поперечного сечения на изгиб, в этом же сечении, зависимостью $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M_x}{EJ_x}$. Опасное сечение расположено вблизи заделки и $M_{x\,\max} = \dfrac{1}{2}ql^2$. Для круглого сечения $J_x = \dfrac{\pi d^4}{64}$. После преобразований получим $\rho = \dfrac{\pi E d^4}{32ql^2}$.

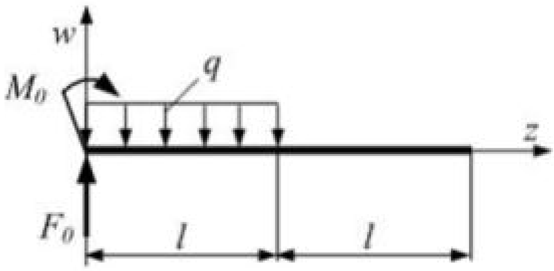
ЗАДАНИЕ 4.23

Консоль на половине длины нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q = 20\,\dfrac{кН}{м}$. Модуль упругости материала балки $E = 10^4$ *МПа*, размер $l = 2$ *м*. Прогиб на свободном конце консоли не должен превышать $[\delta] = 1$ *см*. Из условия жесткости диаметр поперечного сечения d равен ____ (*см*).



Решение:

Составим расчетную схему. Расположим начало координат в крайнем левом сечении балки и запишем универсальное уравнение упругой линии балки $w = w_0 + \Theta_0 z + \dfrac{1}{EJ_x}\left[M_0\dfrac{z^2}{2!} + F_0\dfrac{z^3}{3!} - q\dfrac{cz^4}{4!} + q\dfrac{(z-l)^4}{4!}\right]$, где w_0 и Θ_0 – прогиб и угол поворота в начале координат;

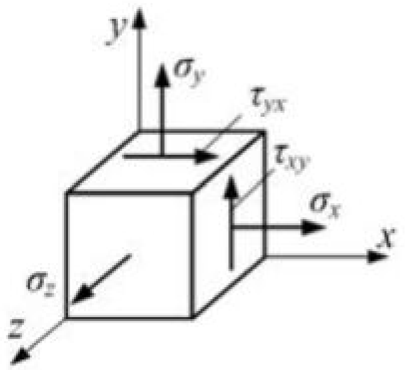


M_0, F_0 – значения момента и силы в начале координат. Из условий равновесия балки определим $M_0 = -\frac{1}{2}ql^2, F_0 = ql$. Прогиб и угол поворота в начале координат $w_0 = 0$, $\Theta_0 = 0$. Подставим полученные значения в уравнение упругой линии $w = \frac{1}{EJ_x}\left[-\frac{1}{2}ql^2\frac{z^2}{2} + ql\frac{z^3}{6} - q\frac{z^4}{24} + q\frac{(z-l)^4}{24}\right]$. Прогиб свободного конца консоли $w(z=2l) = -\frac{7}{24}\frac{ql^4}{EJ_x}$. Знак «минус» показывает, что прогиб направлен вниз. Из условия жесткости $\frac{7}{24}\frac{ql^4}{EJ_x} \le [\delta]$, где $J_x = \frac{\pi d^4}{64}$, получим $d \ge \sqrt[4]{\frac{7}{24}\frac{64ql^4}{\pi E[\delta]}}$. После вычислений найдем $d \ge 37{,}1\ см$.

5 СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

ЗАДАНИЕ 5.1

На рисунке показан элементарный параллелепипед и напряжения на его гранях $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$. Напряженное состояние элементарного параллелепипеда …



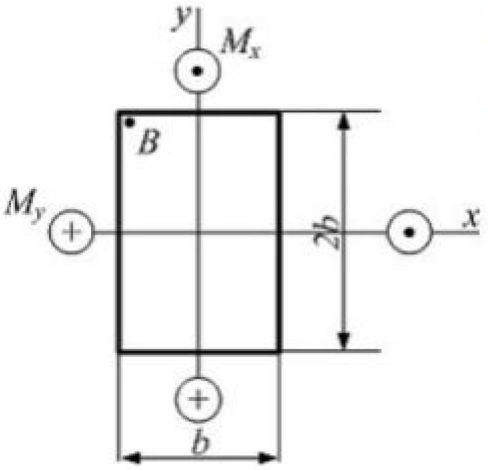
Решение:

Фронтальная грань элементарного параллелепипеда является главной площадкой с главным напряжением $\sigma_z = \tau$. Два других главных напряжения определим по формуле:

$\sigma_{\substack{\max\\\min}} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$, подставляя значения напряжений, получаем $\sigma_{\max} = 2\tau, \sigma_{\min} = 0$. Присваивая главным напряжениям (с учетом σ_z) индексы 1, 2, 3, имеем $\sigma_1 = 2\tau, \sigma_2 = \tau, \sigma_3 = 0$. Напряженное состояние плоское.

ЗАДАНИЕ 5.2

В поперечном прямоугольном сечении стержня с размерами b и $2b$ определены значения изгибающих моментов $M_x = 2M$ и $M_y = M$. Нормальное напряжение в точке B равно …



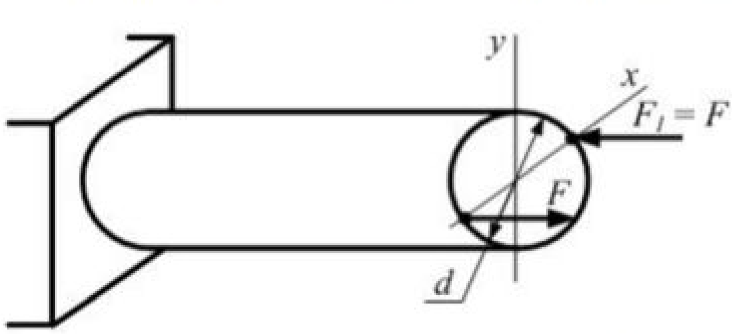
Решение:

Изгибающий момент M_x вызывает растяжение верхней половины сечения, сжатие – нижней. Момент M_y правую половину сечения растягивает, левую – сжимает. Используя формулу для определения нормальных напряжений при косом изгибе, найдем

$\sigma_B = \dfrac{2M}{\dfrac{b(2b)^3}{12}} \cdot b - \dfrac{M}{\dfrac{2b \cdot b^3}{12}} \cdot \dfrac{b}{2} = 0$, где координаты точки B, в системе главных центральных осей $\left(x_B = \dfrac{b}{2};\ y_B = b \right)$, взяты по абсолютной величине.

ЗАДАНИЕ 5.3

Стержень круглого сечения диаметром d нагружен двумя силами F и $F_1 = F$. При смене направления силы F_1 на противоположное значение максимального нормального напряжения в поперечном сечении стержня …

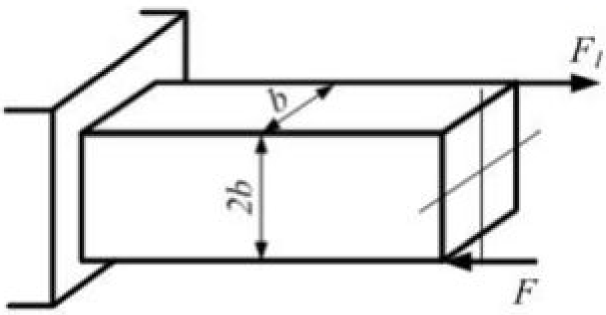


Решение:

Стержень испытывает чистый изгиб моментом $M_y = Fd$. Максимальное нормальное напряжение $\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y} = 32\frac{F}{\pi d^2}$. При смене направления силы $F_1 = F$ на противоположное, стержень будет работать на растяжение силой $2F$. Тогда $\sigma_{max} = \frac{N}{A} = 8\frac{F}{\pi d^2}$. Максимальное нормальное напряжение уменьшится в четыре раза.

ЗАДАНИЕ 5.4

Стержень прямоугольного сечения с размерами b и $2b$ нагружен силами F и F_1. Стержень работает на чистый косой изгиб, когда значение силы F_1 равно …



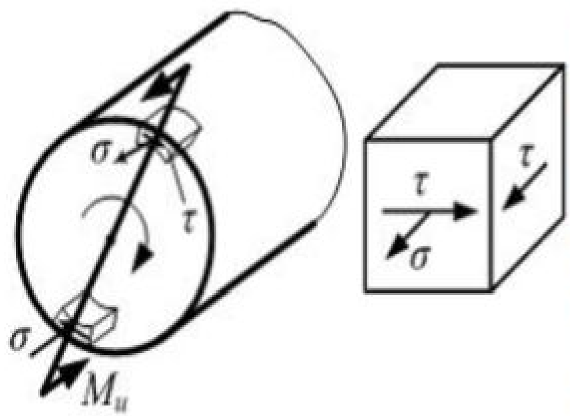
Решение:

При произвольном значении силы F_1 в поперечном сечении стержня действует продольная сила и изгибающий момент. Продольная сила равна разности сил F_1 и F. Поэтому, стержень будет испытывать чистый косой изгиб, когда $F_1 = F$.

ЗАДАНИЕ 5.5

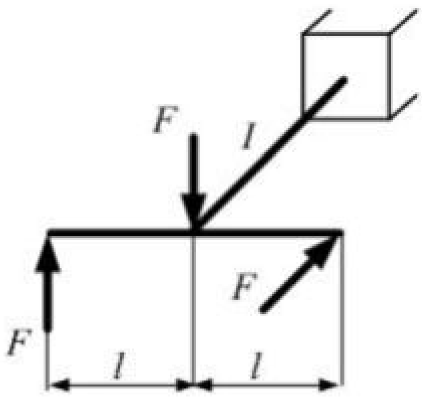
Стержень круглого сечения работает на кручение и изгиб. В опасных точках напряженное состояние …

Решение:



При изгибе с кручением в опасных точках круглого поперечного сечения, расположенных у поверхности стержня, действуют максимальные нормальные и касательные напряжения. Грани элементарных объемов, совпадающих с поверхностью стержня, являются главными площадками с главными напряжениями равными нулю. Поэтому напряженное состояние в опасных точках плоское.

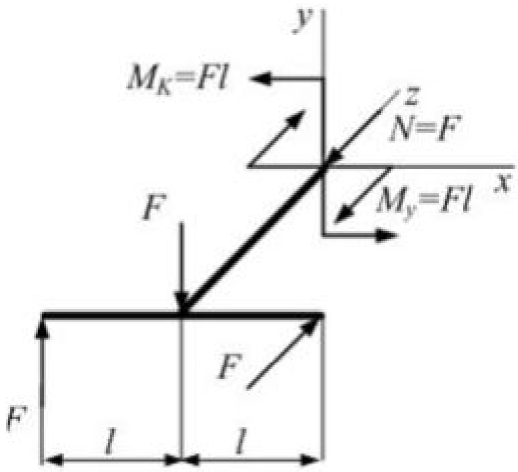
ЗАДАНИЕ 5.6



При заданном варианте нагружения рамы внешними силами участок I работает на …

1) кручение, чистый изгиб и сжатие;
2) кручение, поперечный изгиб и сжатие;
3) сжатие, поперечный изгиб;
4) кручение, косой изгиб и сжатие.

Решение:



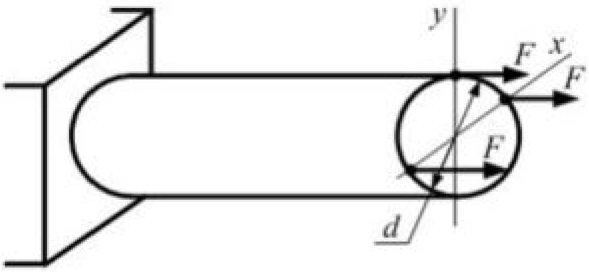
Делим раму на первом участке произвольным сечением на две части и отбросим ту часть, где расположена заделка. Из условий равновесия оставшейся части найдем внутренние силовые факторы действующие в сечении:

$N = F,\ M_y = Fl,\ M_K = Fl.$

Следовательно, первый участок работает на сжатие, кручение и чистый изгиб.

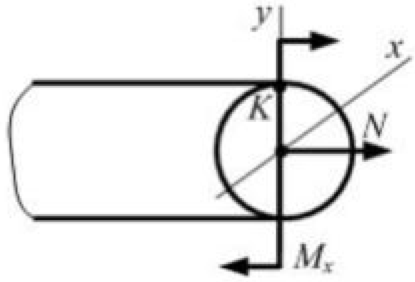
ЗАДАНИЕ 5.7

Стержень круглого сечения диаметром d нагружен внешними силами. Значение максимального нормального напряжения в поперечном сечении стержня равно …



Решение:

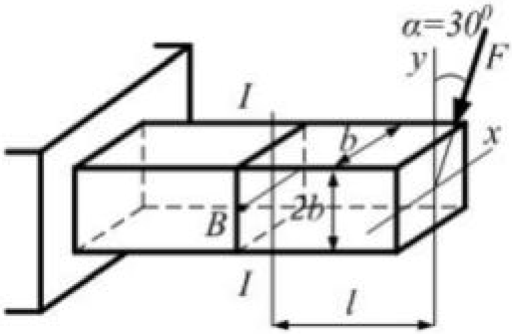
Стержень испытывает внецентренное растяжение. В произвольном сечении стержня возникают продольная сила $N = 3F$ и изгибающий момент $M_x = \frac{1}{2}Fd.$ Изгибающий момент вызывает растяжение верхней половины



сечения и сжатие – нижней. Следовательно, максимальное нормальное напряжение возникает в точке «*K*», наиболее удаленной от главной центральной оси x и определяется по формуле $\sigma_{max} = \dfrac{N}{A} + \dfrac{M_x}{J_x} y_{max}$. Учитывая, что $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$, $J_x = \dfrac{\pi d^4}{64}$, $y_{max} = \dfrac{d}{2}$ получим $\sigma_{max} = 44\dfrac{F}{\pi d^2}$.

ЗАДАНИЕ 5.8

Стержень нагружен силой F, которая расположена под углом $\alpha = 30^0$ к вертикальной оси симметрии и лежит в плоскости сечения. Линейные размеры b и l заданы. Нормальное напряжение в точке B сечения I–I равно …



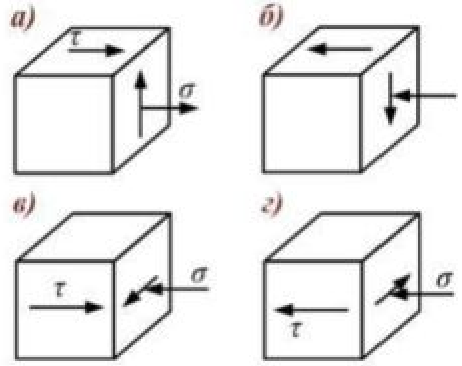
Решение:

Стержень работает при косом изгибе. Определим изгибающие моменты в сечении I–I $M_x = F\cos 30^0 \cdot l$, $M_y = F\sin 30^0 \cdot l$. От изгибающего момента M_x верхняя половина сечения работает на растяжение, нижняя – на сжатие. От изгибающего момента M_y правая половина испытывает растяжение, левая – сжатие. Воспользуемся формулой для определения нормального напряжения в произвольной точке сечения при косом изгибе, $\sigma = \pm\dfrac{M_x}{J_x} y \pm \dfrac{M_y}{J_y} x$, где x, y – координаты точки, в которой определяется нормальное напряжение в системе главных центральных осей, взятые по абсолютной величине; J_x, J_y – осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей. Учитывая, что $|x_B| = \dfrac{b}{2}$; $y_B = 0$ и знак напряжения, найдем $\sigma_B = -\dfrac{M_y}{J_y} x_B$, где $J_y = \dfrac{2b \cdot b^3}{12}$.

После вычислений $\sigma_B = -\dfrac{3}{2}\dfrac{Fl}{b^3}$.

ЗАДАНИЕ 5.9

Стержень длиной l квадратного сечения со стороной b нагружен, как показано на рисунке. Точка «K» находится в поперечном сечении, расположенного вблизи заделки. Какое напряженное состояние, показанное на схеме, соответствует точке «K»?

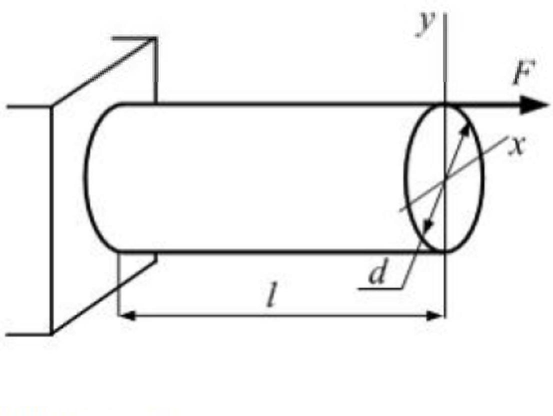


Решение:

При заданной схеме нагружения в точке K от момента $2M$ возникают сжимающие нормальные напряжения, а от момента M касательные напряжения. Направление касательных напряжений всегда согласовано с направлением момента, который их вызывает. Схема *б* соответствует напряженному состоянию в точке «K».

ЗАДАНИЕ 5.10

Стержень круглого сечения диаметром d нагружен силой F. Значение максимального нормального напряжения равно …



Решение:

Стержень испытывает внецентренное растяжение. В любом поперечном сечении стержня возникает продольная сила $N = F$ и изгибающий момент $M_x = \dfrac{1}{2}Fd$. От изгибающего момента верхняя половина сечения работает на растяжение, нижняя – на сжатие. Следовательно, максимальное нормальное напряжение возникает в точке, наиболее удаленной от главной центральной оси x и расположенной в верхней половине сечения, и определяется по формуле: $\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y_{\max}$. Учитывая, что $A = \frac{\pi d^2}{4}$, $J_x = \frac{\pi d^4}{64}$, $y_{\max} = d/2$, получим $\sigma_{\max} = 20\frac{F}{\pi d^2}$.

ЗАДАНИЕ 5.11

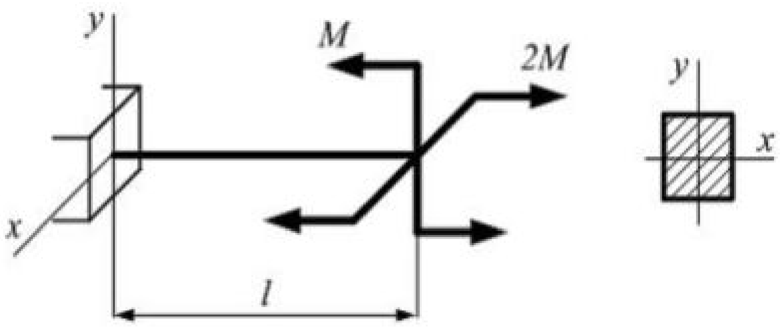
В опасном сечении круглого стержня заданы: изгибающие моменты $M_z = M$, $M_y = 2M$, крутящий момент $M_K = M$. Допускаемое напряжение для материала стержня равно $[\sigma]$. Минимально допустимое значение диаметра d, по теории наибольших касательных напряжений, равно …

Решение:

Эквивалентное напряжение в опасных точках сечения, по теории наибольших касательных напряжений, определяется по формуле $\sigma_{экв}^{III} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_k^2}}{W_u}$, где $W_u = \frac{\pi d^3}{32}$. После подстановки найдем $\sigma_{экв\max}^{III} = 32\sqrt{6}\frac{M}{\pi d^3}$. Из условия прочности $\sigma^{III}{}_{экв\max} \le [\sigma]$ найдем минимально допустимое значение диаметра $d = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{6}M}{\pi[\sigma]}}$.

ЗАДАНИЕ 5.12

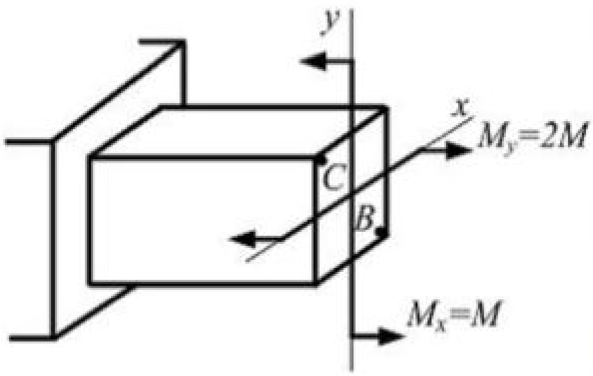
Консольная балка нагружена моментами M и $2M$. Сечение прямоугольное с



осевыми моментами сопротивления $W_x = 2W$, $W_y = W$. Материал балки одинаково работает на растяжение-сжатие. Допускаемое нормальное напряжение $[\sigma]$ задано. Из расчета на прочность по нормальным напряжениям минимально допустимое значение параметра M равно...

Решение:

Балка работает на чистый косой изгиб. Все сечения равноопасны. На рисунке

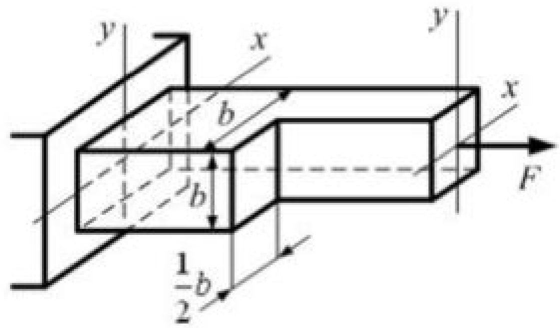


показано произвольное поперечное сечение балки и изгибающие моменты, действующие в нем. Видно, что при данном направлении изгибающих моментов, в точке B возникают максимальные растягивающие напряжения, в точке C – максимальные сжимающие. При косом изгибе нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения определяется по формуле $\sigma = \pm \frac{M_x}{J_x} \cdot y \pm \frac{M_y}{J_y} \cdot x$, где x и y координаты точки, взятые по абсолютной величине. Определим нормальное напряжение в точке B: $\sigma_B = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_B + \frac{M_y}{J_y} \cdot x_B$. Учитывая, что координаты y_B и x_B определяют положения точки наиболее удаленной от главных центральных осей поперечного сечения можно записать $\frac{J_x}{y_B} = W_x$, $\frac{J_y}{x_B} = W_y$.

Тогда $\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_B + \frac{M_y}{J_y} \cdot x_B = \frac{M}{2W} + \frac{2M}{W} = \frac{5}{2}\frac{M}{W}$. Из условия прочности по нормальным напряжениям $\sigma_{\max} \le [\sigma]$ найдем $M \le \frac{2}{5}[\sigma]W$.

ЗАДАНИЕ 5.13

Ступенчатый стержень нагружен силой F. Линейный размер b задан. Значение максимального нормального напряжения в стержне равно …



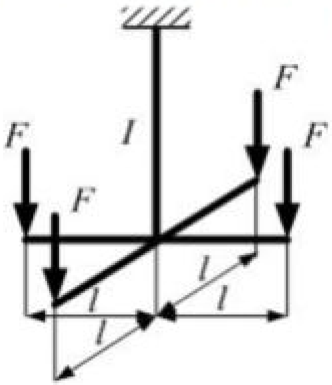
Решение:

Участок стержня с прямоугольным сечением и размерами $b/2$, b работает на растяжение. Нормальное напряжение на данном участке $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{2F}{b^2}$.

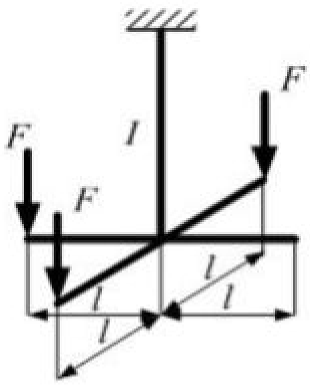
Участок стержня с квадратным сечением испытывает внецентренное растяжение. При определении максимального нормального напряжения воспользуемся формулой $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} x$. Значение продольной силы на участке $N = F$ изгибающего момента $M_y = \frac{1}{4} Fb$. От изгибающего момента M_y правая половина сечения работает на растяжение, левая – на сжатие. Тогда максимальное нормальное напряжение $\sigma_{\max} = \frac{F}{b^2} + \frac{\frac{1}{4} Fb}{\frac{b^4}{12}} \cdot \frac{b}{2} = \frac{5}{2} \frac{F}{b^2}$.

ЗАДАНИЕ 5.14

При данном варианте нагружения стержень I работает на деформацию растяжение. Если удалить одну силу F, то стержень I будет испытывать …



Решение:

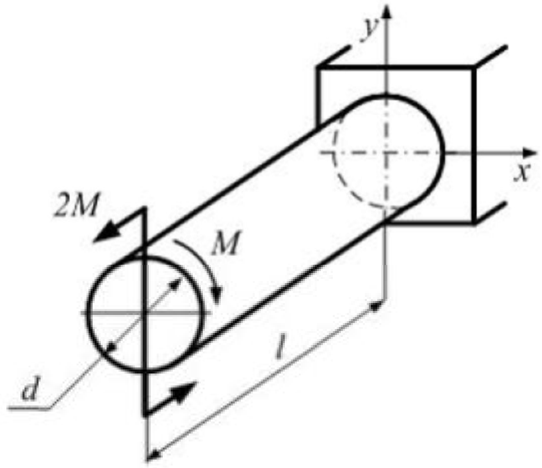


Удалим любую силу F. Схема нагружения будет иметь вид. Из анализа внутренних силовых факторов, возникающих в поперечном сечении стержня I, следует, что он испытывает растяжение силой $3F$ и чистый плоский изгиб моментом $M = Fl$.

ЗАДАНИЕ 5.15

Схема нагружения стержня круглого сечения диаметром d, длиной l показана на рисунке. Значение допускаемого напряжения для материала $[\sigma]$ задано.

Значение параметра внешней нагрузки M, по теории наибольших касательных напряжений, равно …

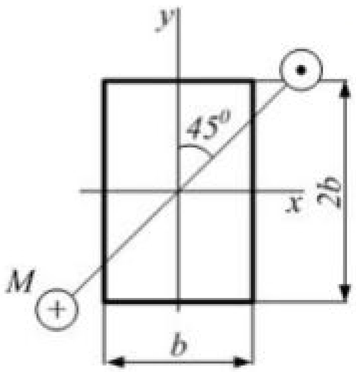


Решение:

При заданном варианте нагружения все поперечные сечения стержня находятся в одинаковых условиях. Изгибающий момент в любом сечении $M_x = 2M$, крутящий – $M_к = M$. Используя теорию наибольших касательных напряжений, определим значение эквивалентного напряжения в опасных точках $\sigma_{экв}^{III} = \dfrac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W}$, где $W = \dfrac{\pi d^3}{32}$ – осевой момент сопротивления. Тогда $\sigma_{экв}^{III} = \dfrac{32\sqrt{5}M}{\pi d^3}$. Из условия прочности по напряжениям $\dfrac{32\sqrt{5}M}{\pi d^3} \leq [\sigma]$ найдем $M \leq \dfrac{\pi d^3[\sigma]}{32\sqrt{5}}$.

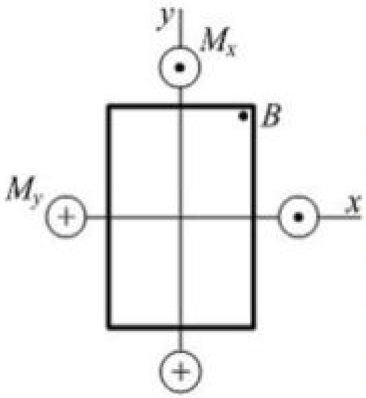
ЗАДАНИЕ 5.16

Поперечное сечение стержня прямоугольник с размерами b и $2b$. Плоскость действия изгибающего момента M расположена над углом 45^0 к главным центральным осям. Значение максимального нормального напряжения в данном сечении равно …



Решение:

Раскладываем момент на составляющие относительно координатных осей x и y, тогда $M_x = M\cos 45^0$, $M_y = M\sin 45^0$. При косом изгибе нормальное напряжение в произвольной точке сечения определяется по формуле



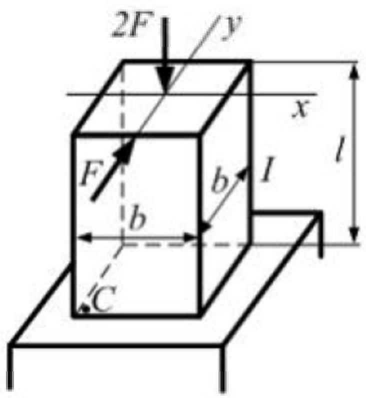
$$\sigma = \pm\frac{M_x}{J_x}\cdot y \pm \frac{M_y}{J_y}\cdot x,$$

где x, y – координаты точки в системе главных центральных осей по абсолютной величине. От изгибающего момента M_x верхняя половина сечения работает на растяжение, нижняя – на сжатие. Момент M_y вызывает растяжение правой половины сечения, сжатие – левой. Следовательно, значение максимального нормального напряжения, которое возникает в точке B с координатами $x_B = \dfrac{b}{2}$, $y_B = b$, равно

$$\sigma_B = \frac{M\cos\alpha}{\dfrac{b(2b)^3}{12}}\cdot b + \frac{M\sin\alpha}{\dfrac{2b\cdot b^3}{12}}\cdot\frac{b}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}\frac{M}{b^3}.$$

ЗАДАНИЕ 5.17

Стержень квадратного сечения с размерами $b\times b$, длиной $l = 10b$ нагружен внешними силами $2F$ и F. Значение нормального напряжения в точке C равно …



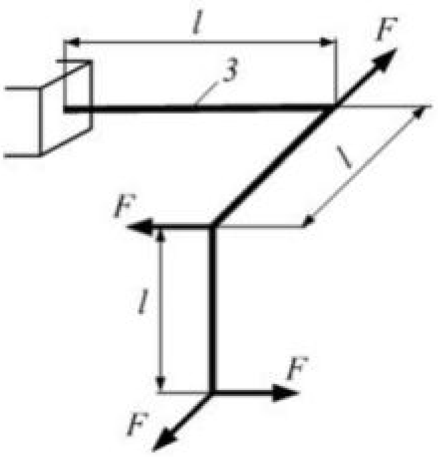
Решение:

Стержень работает на сжатие и плоский поперечный изгиб. При определении нормального напряжения
в произвольной точке поперечного сечения воспользуемся формулой $\sigma = \dfrac{N}{A} + \dfrac{M_x}{J_x}y$. В сечении, где расположена точка C, продольная сила $N = -2F$, изгибающий момент $|M_x| = Fl = 10Fb$. Площадь $A = b^2$, осевой момент инерции сечения $J_x = \dfrac{b^4}{12}$, координата $|y_C| = b/2$. Тогда

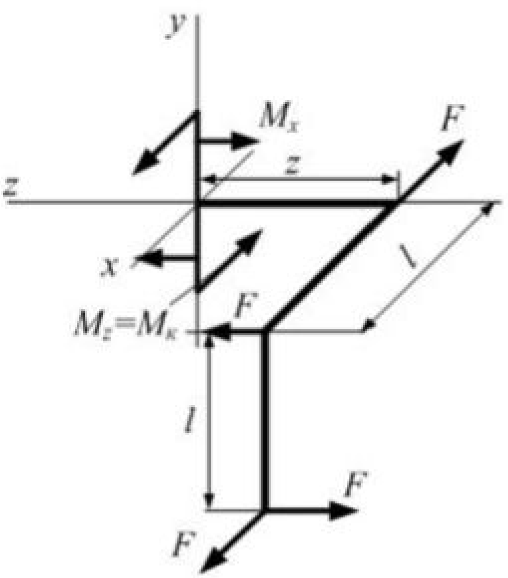
$\sigma_C = -\dfrac{2F}{b^2} + \dfrac{10Fb}{\dfrac{b^4}{12}} \cdot \dfrac{b}{2} = 58\dfrac{F}{b^2}$. При вычислении σ_C учитывали, что ближайшая к нам половина поперечного сечения от изгибающего момента испытывает деформацию растяжение.

ЗАДАНИЕ 5.18

Схема нагружения стержня внешними силами представлена на рисунке. Длины участков одинаковы и равны l. Третий участок стержня испытывает деформации



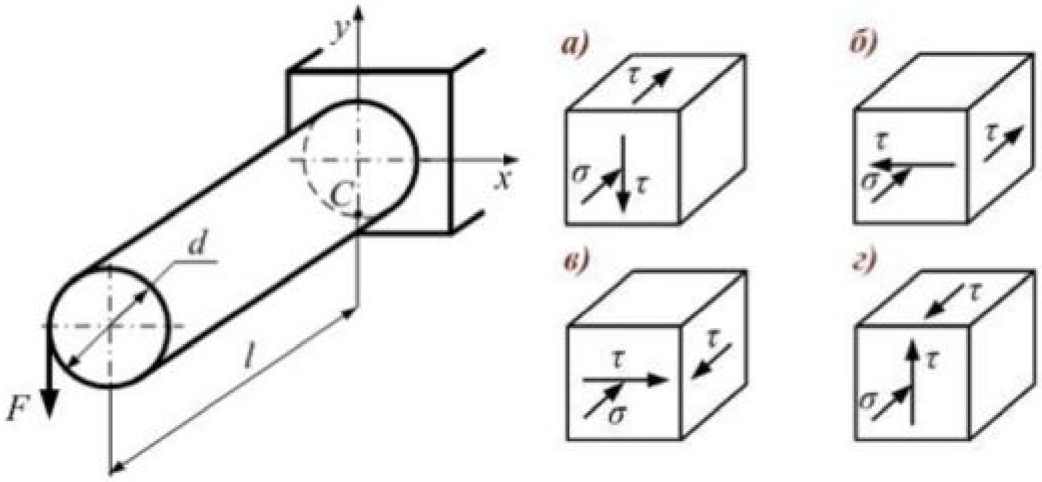
Решение:



Используя метод сечений, рассекаем третий участок произвольным сечением на две части. Рассмотрим равновесие правой части. Из условий равновесия правой части следует, что в поперечном сечении отличны от нуля два внутренних силовых фактора: изгибающий момент $M_x = Fl$ и крутящий момент $M_к = Fl$. Следовательно, участок третий испытывает деформации кручение и чистый изгиб.

ЗАДАНИЕ 5.19

Стержень круглого сечения диаметром d, длиной l нагружен силой F. Напряженное состояние в точке C показано на рисунке …

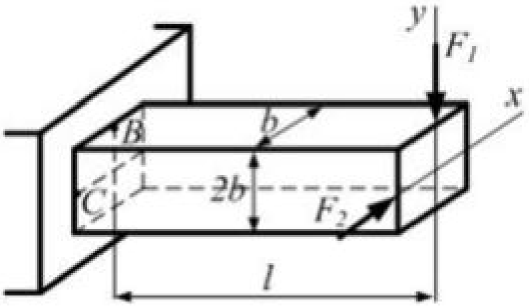


Решение:

Вблизи заделки возникает изгибающий момент $M_x = Fl$ и крутящий момент $M_K = \frac{1}{2}Fd$. От изгибающего момента в точке C возникает максимальное нормальное сжимающее напряжение $\sigma_{\max C} = \frac{32Fl}{\pi d^3} = \sigma$. От крутящего момента в точке C возникает максимальное касательное напряжение $\tau_{\max} = \frac{\frac{1}{2}Fd}{\frac{\pi d^3}{16}} = 8\frac{F}{\pi d^2} = \tau$. Направление касательного напряжения τ должно быть согласовано с направлением крутящего момента. Поэтому, напряженное состояние в точке C соответствует рисунку «*в*».

ЗАДАНИЕ 5.20

Стержень прямоугольного сечения с размерами b и $2b$, длиной l нагружен внешними силами F_1 и F_2. Значение нормального напряжения в точке B будет равно значению нормального напряжения в точке C, когда отношение F_1/F_2 равно …

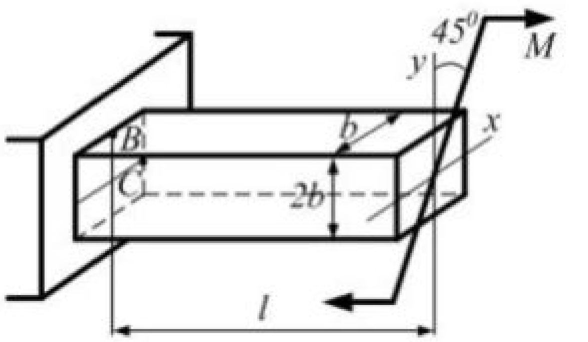


Решение:

Стержень работает на косой изгиб. Нормальное напряжение при косом изгибе в точке поперечного сечения с координатами x, y определяется по формуле $\sigma = \pm\dfrac{M_x}{J_x}y \pm \dfrac{M_y}{J_y}x$. В сечении, где требуется определить нормальные напряжения в точках B и C, изгибающие моменты $M_x = F_1 l$, $M_y = F_2 l$. Осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей $J_x = \dfrac{b(2b)^3}{12}$, $J_y = \dfrac{2b\cdot b^3}{12}$. В точке B с координатами $x_B = 0$, $y_B = b$, с учетом знака напряжения, $\sigma_B = \dfrac{F_1 l}{\frac{8}{12}b^4}b = \dfrac{3}{2}\dfrac{F_1 l}{b^3}$. В точке C с координатами $|x_c| = \dfrac{b}{2}$, $y_C = 0$, с учетом знака напряжения, $\sigma_C = \dfrac{12F_2 l}{2b^4}\cdot\dfrac{b}{2} = 3\dfrac{F_2 l}{b^3}$. Из условия равенства напряжений в точках B и C получим, что отношение

ЗАДАНИЕ 5.21

Стержень прямоугольного сечения с размерами b и $2b$, длиной l нагружен моментом M. Плоскость действия момента расположена под углом 45^0 к главным центральным осям сечения. Отношение значений нормальных напряжений в точках B и C равно …



Решение:

При косом изгибе нормальное напряжение в точке поперечного сечения с координатами x, y определяется по формуле $\sigma = \dfrac{M_x}{J_x}y + \dfrac{M_y}{J_y}x$.

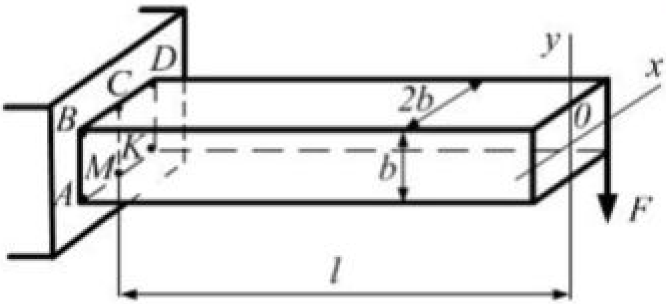
В сечении, в котором расположены точки B и C, значения изгибающих моментов, соответственно, равны $M_x = M\cdot\cos 45^0$, $M_y = M\cdot\sin 45^0$. Осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей $J_x = \dfrac{b(2b)^3}{12}$, $J_y = \dfrac{2b\cdot b^3}{12}$. В точке B с координатами $x_B = 0$, $y_B = b$

нормальное напряжение $\sigma_B = \frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{M}{b^3}$. В точке C с координатами $x_C = \frac{b}{2}$, $y_C = 0$ нормальное напряжение $\sigma_C = \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{M}{b^3}$.

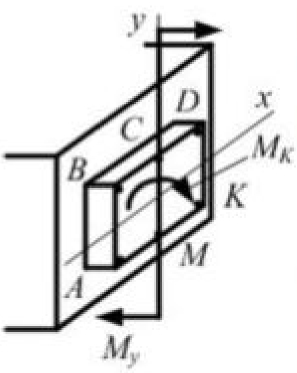
Следовательно, отношение $\sigma_B/\sigma_C = 1/2$.

ЗАДАНИЕ 5.22

Стержень прямоугольного сечения с размерами b и $2b$ нагружен силой F. Опасными являются точки …



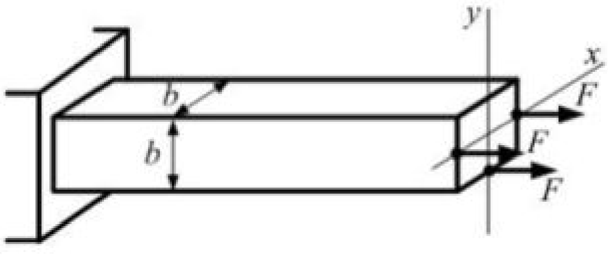
Решение:



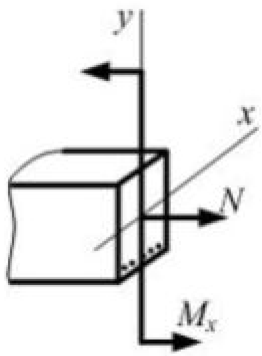
В сечении стержня, расположенном бесконечно близко к заделке возникают изгибающий момент $M_x = Fl$ и крутящий момент $M_K = Fb$. От изгибающего момента максимальные нормальные напряжения, равные по абсолютной величине, возникают в точках наиболее удаленных от главной центральной оси x. На линии BD имеем растягивающие напряжения, на линии AK – сжимающие. Максимальные касательные напряжения, при кручении стержня с прямоугольным сечением, возникают в середине длинной стороны прямоугольника. Поэтому, опасными будут точки C и M.

ЗАДАНИЕ 5.23

Стержень квадратного сечения со стороной b нагружен внешними силами. Значение нормального максимального напряжения в стержне равно …



Решение:

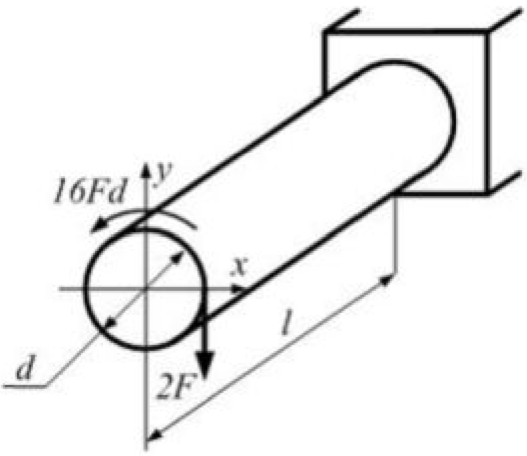


Во всех поперечных сечениях стержня действуют продольная сила $N = 3F$ и изгибающий момент $M_x = \dfrac{1}{2}Fb.$ Изгибающий момент M_x вызывает растяжение нижней половины сечения, сжатие – верхней. Поэтому, нормальные максимальные напряжения действуют в самых нижних точках сечения и равны сумме напряжений от продольной силы и изгибающего момента

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x}|y_{\max}| = \frac{3F}{b^2} + \frac{\frac{1}{2}Fb}{\frac{b \cdot b^3}{12}} \cdot \frac{b}{2} = 6\frac{F}{b^2}.$$

ЗАДАНИЕ 5.24

Схема нагружения круглого стержня диаметром $d = 2\ см$, длиной $l = 20\ см$ показана на рисунке. Значение допускаемого нормального напряжения для материала, одинаково работающего на растяжение и сжатие, $[\sigma] = 160\ МПа$. Максимальное значение силы F, которую можно приложить к стержню, из расчета по напряжениям равно ___ $Н$. При решении задачи использовать теорию наибольших касательных напряжений (III теорию прочности).



Решение:

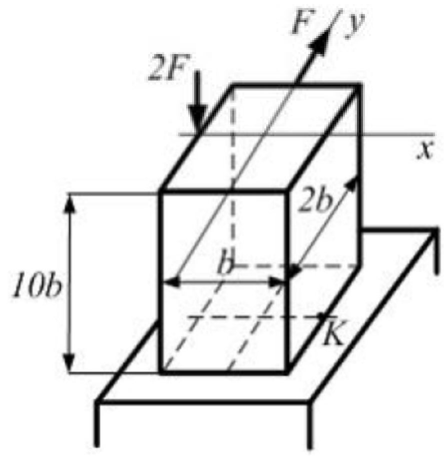
Опасное сечение стержня расположено вблизи заделки, где возникает изгибающий момент $M_x = 2Fl$ и крутящий момент $M_к = 15Fd$. Значение эквивалентного напряжения в опасной точке стержня, по теории наибольших касательных напряжений, определяется по формуле $\sigma_{экв}^{III} = \dfrac{\sqrt{M_x^2 + M_к^2}}{W_и}$,

где $W_и = \dfrac{\pi d^3}{32}$. Учитывая, что $l = 10d$, найдем

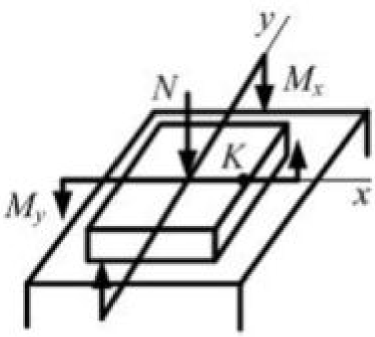
$\sigma_{экв}^{III} = \frac{\sqrt{(20Fd)^2 + (15Fd)^2}}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{261F}{d^2}$. Из условия прочности по напряжениям $\sigma_{экв}^{III} \le [\sigma]$ найдем $F \le \frac{[\sigma]d^2}{261}$. После вычислений получим $F \le 245\,H$.

ЗАДАНИЕ 5.25

Стержень нагружен силами F и $2F$. Линейный размер b задан. Значение нормального напряжения в точке K поперечного сечения равно …



Решение:



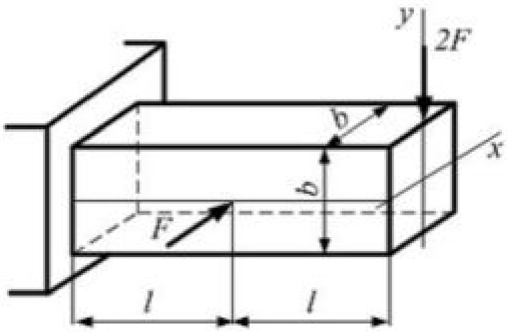
В сечении, где находится точка K, действуют следующие внутренние силовые факторы: $N = 2F$ – продольная сила; $M_x = 10Fb$ – изгибающий момент относительно оси x; $M_y = Fb$ – изгибающий момент относительно оси y. Нормальное напряжение в произвольной точке сечения с координатами x, y определяется по формуле:

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{J_x} \cdot y \pm \frac{M_y}{J_y} \cdot x,$$

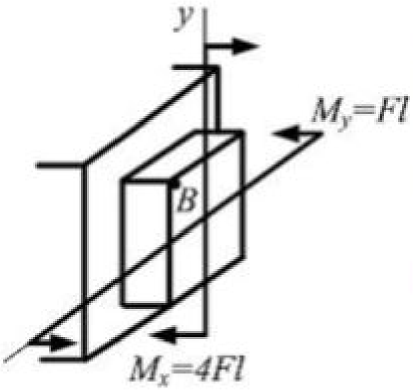
где x и y – координаты точки, взятые по абсолютной величине. Точка K лежит на главной центральной оси x, поэтому от изгибающего момента M_x вклад в величину нормального напряжения равен нулю. Тогда $\sigma_K = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} \cdot x_K = -\frac{2F}{2b^2} + \frac{Fb}{\frac{2b \cdot b^3}{12}} \cdot \frac{b}{2} = 2\frac{F}{b^2}$.

ЗАДАНИЕ 5.26

Стержень квадратного сечения нагружен внешними силами F и $2F$. Линейные размеры l и b заданы. Значение максимального растягивающего нормального напряжения в стержне равно …



Решение:



Опасное сечение стержня расположено вблизи заделки, где действуют максимальные изгибающие моменты $M_x = 4Fl$, $M_y = Fl$. Максимальное растягивающее нормальное напряжение возникает в точке B, так как материал в этой точке испытывает деформацию растяжения от обоих изгибающих моментов. Используя формулу для определения нормальных напряжений при косом изгибе, найдем

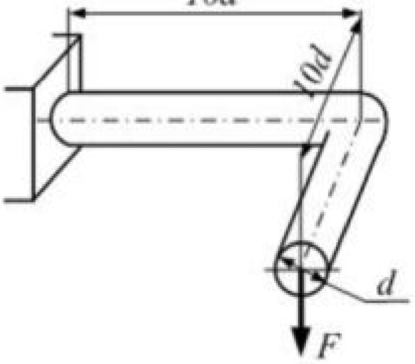
$$\sigma_{\max} = \sigma_B = \frac{4Fl}{\frac{b^4}{12}}\frac{b}{2} + \frac{Fl}{\frac{b^4}{12}}\frac{b}{2} = 30\frac{Fl}{b^3},$$

где координаты точки B взяты по абсолютной величине.

ЗАДАНИЕ 5.27

Стержень круглого сечения диаметром d нагружен силой F. Значение эквивалентного напряжения в опасных точках, по теории наибольших касательных напряжений, равно …

Решение:



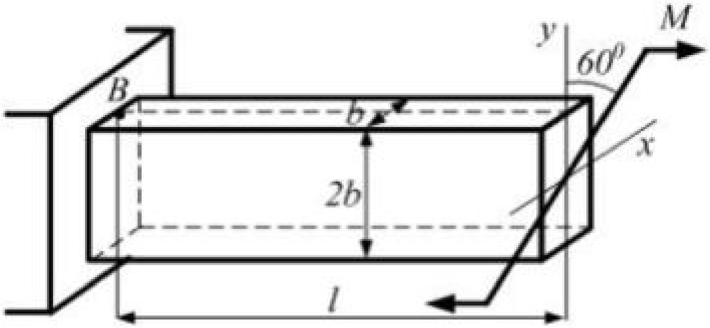
Опасное сечение расположено вблизи заделки, где действуют изгибающий момент $M = 10Fd$ и крутящий момент $M_K = 10Fd$. По теории наибольших касательных напряжений эквивалентное напряжение в опасных точках определяется по формуле

$$\sigma_{экв}^{III} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_к^2}}{W_и}, \text{ где } W_и = \frac{\pi d^3}{32}.$$

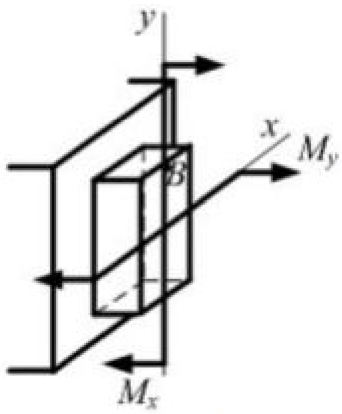
Следовательно $\sigma_{эквmax}^{III} = \frac{320\sqrt{2}}{\pi}\frac{F}{d^2} = 320\sqrt{2}\frac{F}{\pi d^2}$.

ЗАДАНИЕ 5.28

Стержень длиной l прямоугольного сечения с размерами b и $2b$ нагружен моментом M. Плоскость действия момента расположена под углом 60^0 к оси y. Модуль упругости материала E, размер b известны. Линейная деформация в точке B, в направлении оси стержня, достигнет значения ε, если момент M будет равен …



Решение:

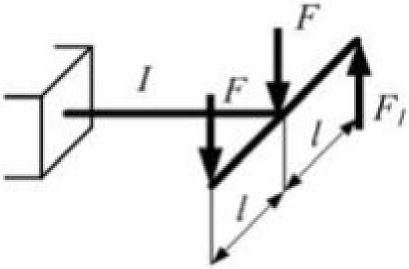


В сечении, где расположена точка B, действуют изгибающие моменты $M_x = M\cos 60^0$ и $M_y = M\cos 30^0$. Учитывая, что точка B лежит на главной центральной оси y, нормальное напряжение в точке будет вызвано только изгибающим моментом M_x. Следовательно $\sigma_B = \frac{M_x}{J_x}\cdot y_B = \frac{\frac{1}{2}M}{\frac{b(2b)^3}{12}}\cdot b = \frac{3}{4}\frac{M}{b^3}$.

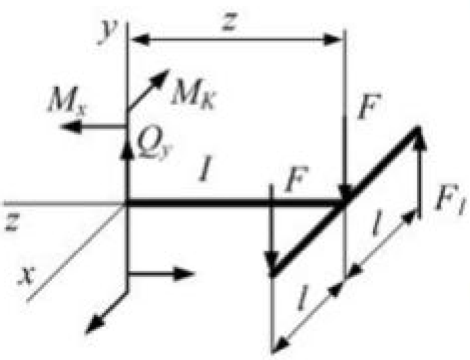
Линейная деформация и нормальное напряжение при растяжении связаны законом Гука $\sigma = E\varepsilon$. Используя данную зависимость, определим значение момента, при котором линейная деформация в точке, по направлению оси стержня, достигает величины ε : $M = \frac{4}{3}Eb^3\varepsilon$.

ЗАДАНИЕ 5.29

Схема нагружения рамы внешними силами показана на рисунке. Участок рамы I будет испытывать деформацию кручение, когда значение силы F_1 равно …



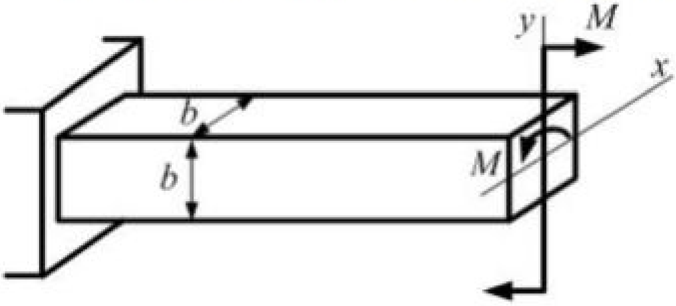
Решение:



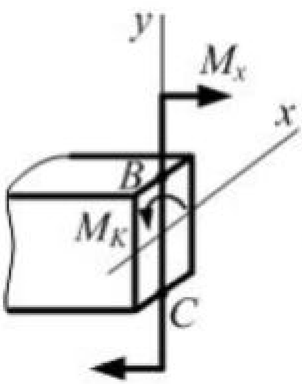
При произвольном значении силы F_1 в поперечном сечении действуют: поперечная сила $Q_y = 2F - F_1$, изгибающий момент $M_x = 2Fz - F_1 z$ и крутящий момент $M_K = F_1 l + Fl$. Из условий равенства нулю Q_y и M_x получим $F_1 = 2F$.

ЗАДАНИЕ 5.30

Стержень квадратного сечения со стороной b нагружен моментами. Значение эквивалентного напряжения в опасных точках, по теории наибольших касательных напряжений, равно _________. При решении принять $W_K \cong 0{,}2b^3$.



Решение:



Стержень работает на чистый изгиб и кручение. В любом поперечном сечении стержня действуют изгибающий $M_x = M$ и крутящий $M_K = M$ моменты.

В точках B и C возникают максимальные по абсолютной величине нормальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{6M}{b^3}, \text{ где } W_x = \frac{b^3}{6}.$$

Касательные напряжения в точках B и C также равны и определяются по формуле $\tau_{\max} = \dfrac{M_K}{W_K} = \dfrac{M}{0{,}2b^3} = 5\dfrac{M}{b^3}$.

Эквивалентное напряжение в опасных точках B и C, по теории наибольших касательных напряжений, определим по формуле

$\sigma^{III}_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$. После подстановки $\sigma_{\max}$ и $\tau_{\max}$ найдем $\sigma^{III}_{экв\max} = \sqrt{136}\dfrac{M}{b^3}$.

6 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

ЗАДАНИЕ 6.1.

Стержень круглого сечения диаметром d и длиной l сжимается силой приложенной в центре тяжести поперечного сечения. При увеличении линейных размеров l и d в два раза, при прочих равных условиях, критическое напряжение … При решении учитывать, что напряжения в сжатом стержне не превышают предел пропорциональности.

Решение:

В случае, когда напряжения в сжатом стержне не превышают предел пропорциональности, для определения критического напряжения применяем формулу $\sigma_{кр} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}$, где $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{\min}}$. При прочих равных условиях критическое напряжение зависит от длины l и минимального радиуса инерции $i_{\min}$. Для круглого сечения $i_{\min} = \dfrac{d}{4}$. При увеличении линейных размеров l и d в два раза, гибкость стержня не изменится. Следовательно, не изменится и значение критического напряжения.

ЗАДАНИЕ 6.2.

Стержень изготовлен из стали с характеристиками: предел пропорциональности $\sigma_{пц} = 220\ МПа$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5\ МПа$. Формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня изготовленного из данного материала применима, если гибкость стержня …

Решение:

Формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня применима, когда

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{пц} \text{ или } \lambda_{пред} \ge \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}.$$

Значит, формула Эйлера становится непригодной при гибкости стержня, меньшей предельного значения. В рассматриваемом случае

$$\lambda_{пред} \ge \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{220}} = 94{,}7 \approx 95.$$

ЗАДАНИЕ 6.3

При замене квадратного сечения на круглое, той же площади, значение критической силы для сжатого стержня, при прочих равных условиях …

При решении учитывать, что стержни, в обоих вариантах, имеют большую гибкость.

Решение:

При определении критической силы для стержней большой гибкости применяют формулу Эйлера $F_{кр} = \dfrac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2}$. При прочих равных условиях форма и размеры поперечного сечения учитываются через минимальный момент инерции J_{min}.

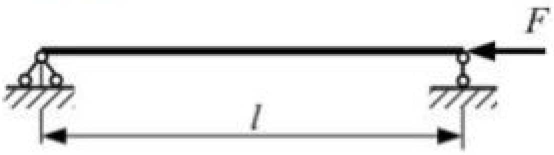
Для квадратного сечения: $J_{\min} = \dfrac{b^4}{12} = \dfrac{A^2}{12}$, где $A = b^2$.

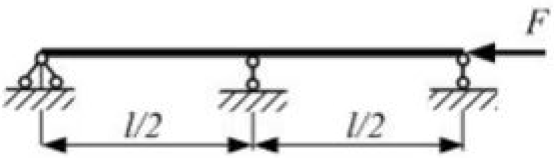
Для круглого сечения $J_{\min} = \dfrac{\pi d^4}{64} = \dfrac{A^2}{4\pi}$, где $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

Из сопоставления полученных значений следует, что при замене квадратного сечения на круглое, той же площади, значение критической силы уменьшится в $\dfrac{\pi}{3}$ раза.

ЗАДАНИЕ N 6.4.

Шарнирно-опертый по концам стержень длиной l сжимается силой F. При постановке в середине пролета промежуточной опоры значение гибкости …





Решение:

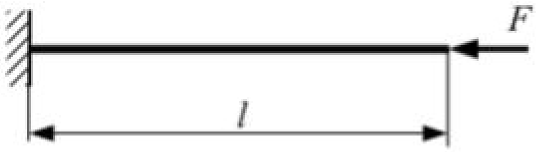
Гибкость стержня определяется по формуле $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{\min}}$. При прочих равных условиях значение гибкости зависит от коэффициента приведения длины μ.

До постановки промежуточной опоры $\mu = 1$, после постановки $\mu = \dfrac{1}{2}$.

Значение гибкости уменьшится в 2 раза.

ЗАДАНИЕ 6.5

Стержень круглого сечения диаметром d, длиной l сжимается силой F. Схема



закрепления показана на рисунке. Модуль упругости материала E. При увеличении диаметра стержня в два раза, при прочих равных условиях, значение критической силы …

При решении учитывать, что напряжение в сжатом стержне не превышает предел пропорциональности.

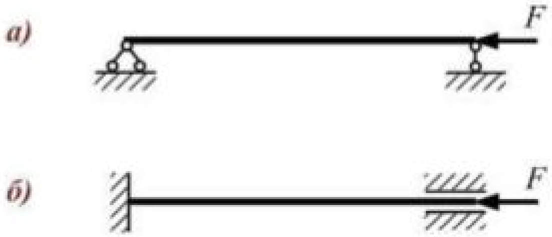
Решение:

Напряжения в сжатом стержне не превышают предел пропорциональности. Следовательно, для определения критической силы используем Эйлера $F_{кр} = \dfrac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2}$. При прочих равных условиях изменение размера диаметра отразится на величине минимального момента инерции, который для круглого сечения определяется по формуле $J_{min} = \dfrac{\pi d^4}{64}$.

При увеличении диаметра в два раза значение критической силы увеличится в 16 раз.

ЗАДАНИЕ 6.6.

При замене шарниров (рис. *а*) в сжатом стержне на жесткие защемления



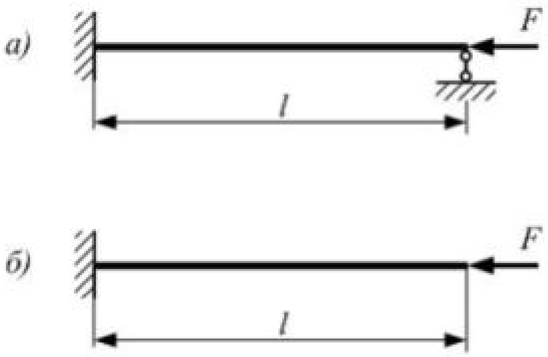
(рис. *б*) значение гибкости …

Решение:

Гибкость сжатого стержня определяется по формуле $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{\min}}$, где μ – коэффициент приведения длины, значение которого зависит от условий закрепления концов стержня. Для варианта «*а*» значение $\mu = 1$, для варианта «*б*» – $\mu = 0{,}5$. Следовательно, гибкость уменьшится в два раза.

ЗАДАНИЕ 6.7

Для стержня с одним защемленным, а другим шарнирно-опертым концами значение критической силы равно $40\ кН$ (схема *а*). При удалении шарнирно-



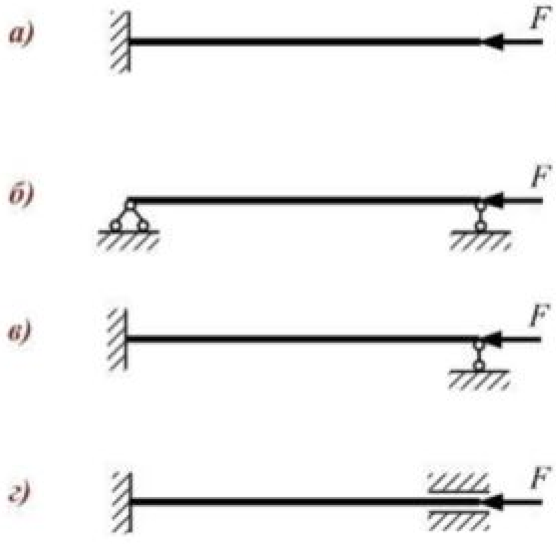
неподвижной опоры (схема *б*) значение силы, при которой прямолинейная форма перестает быть устойчивой, равно ____ *кН*. При решении учитывать, что напряжения в сжатых стержнях не превышают предел пропорциональности.

Решение:

Формула Эйлера $F_{кр} = \dfrac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2}$ для определения критической силы сжатого стержня применима, когда напряжения не превышают предел пропорциональности. Проанализируем величины входящие в данную формулу. При прочих равных условиях на значение критической силы влияют условия закрепления стержня, которые учитываются коэффициентом приведения длины μ. Для схемы «*а*» значение $\mu = 0{,}7$, для схемы «*б*» – $\mu = 2$. Следовательно, критическая сила, после удаления шарнирно-подвижной опоры, уменьшится, примерно, в 8 раз.

ЗАДАНИЕ 6.8.

Стержни изготовлены из одного материала, имеют одинаковую длину, форму и размеры поперечного сечения. Схемы закрепления стержней, сжатых силой *F*, показаны на рисунках. Наибольшее значение гибкости имеет стержень, показанный на рисунке.



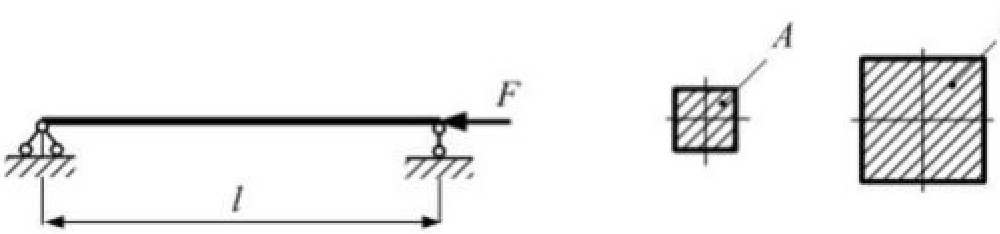
Решение:

При определении гибкости стержня воспользуемся формулой $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{\min}}$.

Коэффициент μ учитывает условия закрепления стержня. Наибольшее значение коэффициент μ имеет при закреплении концов стержня, показанного на рисунке «*а*» $(\mu = 2)$. Поэтому гибкость будет наибольшей для стержня на рисунке «*а*».

ЗАДАНИЕ 6.9.

Стержень квадратного сечения длиной *l* сжимается силой *F*. При увеличении площади квадратного сечения в два раза значение критической силы ___ . При решении учитывать, что напряжения в сжатом стержне не превышают предела пропорциональности.



Решение:

При напряжениях в сжатом стержне меньше предела пропорциональности критическую силу определяют по формуле Эйлера $F_{кр} = \dfrac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2}$, где $J_{\min}$ для квадратного сечения определим по формуле $J_{\min} = \dfrac{b^4}{12} = \dfrac{1}{12}A^2$, $A = b^2$.

При увеличении площади квадратного сечения в два раза значение критической силы увеличится в 4 раза.

ЗАДАНИЕ 6.10.

Стержень квадратного сечения площадью поперечного сечения *A*, длиной *l* сжимается силой *F*. При замене квадратного сечения на круглое с той же площадью *A*, при прочих равных условиях, гибкость стержня _______________ раза.

Решение:

Воспользуемся формулой для определения гибкости $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{\min}}$. При прочих одинаковых условиях, гибкость стержня зависит от минимального радиуса инерции сечения $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{J_{\min}}{A}}$.

Для квадратного сечения: $J_{\min} = \dfrac{b^4}{12}$, $A = b^2$, $i_{\min} = \dfrac{b}{2\sqrt{3}}$, $b = \sqrt{A}$.

Для круглого сечения: $J_{\min} = \dfrac{\pi d^4}{64}$, $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$, $i_{\min} = \dfrac{d}{4}$, $d = \dfrac{2\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}}$.

После вычислений получим, что при замене квадратного сечения на круглое при одинаковой площади гибкость стержня увеличится в $\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$ раза.