

270800 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Изложен теоретический материал, необходимый для выполнения расчетно-графических работ по дисциплине «Соппротивление материалов». Приведены задания по курсу, порядок их оформления и выполнения, варианты расчетно-графических работ. Предназначено для оказания помощи студентам в их самостоятельной работе при освоении материала и выполнении лабораторных работ.

Для студентов-заочников, обучающихся по специальности 270800 «Строительство», профиль «Промышленное и гражданское строительство».

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|-----|
| Общие положения..... | 5 |
| 1. Геометрические характеристики поперечных сечений стержней. | |
| Основные определения и формулы..... | 7 |
| 2. Центральное растяжение и сжатие стержней. | |
| Основные определения и формулы..... | 20 |
| 3. Внутренние усилия при изгибе стержней. | |
| Основные определения и формулы..... | 42 |
| 4. Определение напряжений в балках при изгибе. | |
| Расчет на прочность..... | 59 |
| 5. Определение перемещений в балках и рамах при прямом изгибе. | |
| Основные определения и формулы..... | 83 |
| 6. Лабораторный практикум. Общие положения | |
| 6.1. Приборы для измерения перемещений и деформаций..... | 104 |
| 6.2. Методика выполнения экспериментов и обработка их результатов..... | 112 |
| 6.3. Лабораторная работа № 1. Определение модуля упругости и коэффициента Пуассона некоторых конструкционных материалов..... | 113 |
| 6.4. Лабораторная работа № 2. Испытание образца из малоуглеродной стали на разрыв..... | 122 |
| 6.5. Лабораторная работа №3. | |
| Определение напряжений в балке при изгибе..... | 133 |
| Приложения..... | 146 |
| Библиографический список..... | 171 |

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Сопротивление материалов является основной общенаучной дисциплиной, на которой базируется изучение специальных курсов всех строительных конструкций. В свою очередь изучение курса сопротивления материалов основывается на знаниях, полученных в курсах высшей математики, теоретической механики и программирования на ЭВМ.

При изучении курса «Сопротивление материалов» студент должен ознакомиться с существующими методами расчета элементов сооружений и конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

В процессе изучения дисциплины студент должен усвоить:

- основные понятия, гипотезы и принципы механики деформируемого твердого тела;
- параметры, характеризующие внешние нагрузки и воздействия;
- свойства материалов, применяемых в строительных конструкциях;
- понятия о прочности, жесткости и устойчивости сооружений, конструкций и их элементов.

В процессе изучения курса «Сопротивление материалов» студент должен уметь:

- рассчитывать на прочность, жесткость и устойчивость элементы сооружений и конструкций;
- определять экспериментально деформации и напряжения в элементах конструкций;
- определять экспериментально механические свойства материалов;
- пользоваться приборами и оборудованием, применяемым при экспериментальных исследованиях элементов конструкций; знать принципы действия и устройство приборов и оборудования;
- работать с учебными пособиями и технической литературой.

Чтобы овладеть необходимыми знаниями и навыками, студент должен самостоятельно изучить соответствующие разделы курса по учебнику и самостоятельно выполнить расчетно-графические работы.

Расчетно-графическую работу необходимо выполнять на листах чертежной или писчей бумаги формата А4 и оформить в виде папки с титульным листом. На титульном листе указываются: название работы, факультет, курс, группа, фамилия и инициалы студента, дата представления работы. Перед решением каждой задачи нужно выписать ее условие с числовыми, а не буквенными данными, и дать чертеж с числовыми размерами, строго соблюдая масштаб. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными пояснениями и аккуратными схемами. При затруднениях, встречающихся в ходе выполнения расчетно-графических работ, полезно обращаться к аналогичным задачам, имеющимся в учебниках и учебных пособиях.

Результаты расчетов, схемы и рисунки выполняются карандашом, шариковой ручкой или тушью на одной стороне листа формата А4. Все арифметические вычисления следует проводить с достаточной, но не излишней точностью.

В пособии по курсу «Сопротивление материалов» приводятся основные формулы. Рассматриваются примеры решения задач для разделов «Геометрические характеристики поперечных сечений стержней», «Определение усилий, напряжений и деформаций в элементах, работающих на растяжение и сжатие», «Внутренние усилия и напряжения в стержнях», «Определение перемещений в балках при прямом изгибе», по которым студенты выполняют расчетно-графические работы, а также приводится материал по лабораторному практикуму.

Методические указания предназначены для оказания помощи студентам в их самостоятельной работе при выполнении расчетно-графических работ.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Основными геометрическими характеристиками поперечных сечений стержней (рис. 1), используемыми при расчете стержней на прочность, являются следующие.

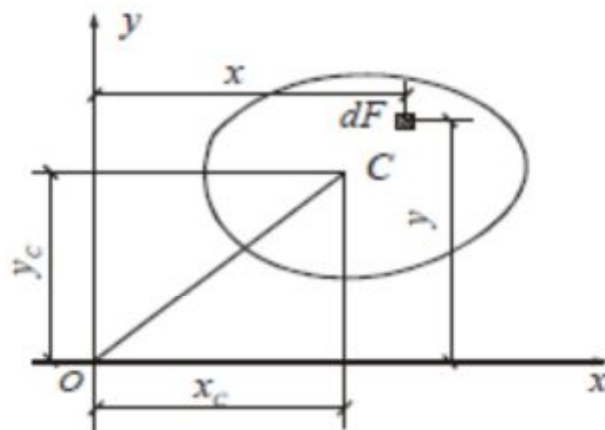


Рис. 1. Геометрические характеристики сечения стержня

Площадь сечения F .

Статические моменты сечения относительно осей Ox и Oy :

$$S_x = \iint_F y dF, \quad S_y = \iint_F x dF \quad (1)$$

Осевые моменты инерции:

$$J_x = \iint_F y^2 dF, \quad J_y = \iint_F x^2 dF \quad (2)$$

Центробежный момент инерции:

$$J_{xy} = \iint_F xy dF. \quad (3)$$

Полярный момент инерции:

$$J_p = \iint_F r^2 dF = J_x + J_y \quad (4)$$

Статические моменты имеют размерность длины в третьей степени (см^3), а моменты инерции - единицы длины в четвертой степени (см^4).

Координаты центра тяжести сечения определяются по формулам:

$$x_c = \frac{S_y}{F},$$

$$y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (5)$$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются центральными осями. Статический момент сечения относительно любой центральной оси равен нулю.

При определении моментов инерции сечений используются зависимости между моментами инерции при параллельном переносе осей координат (рис. 2).

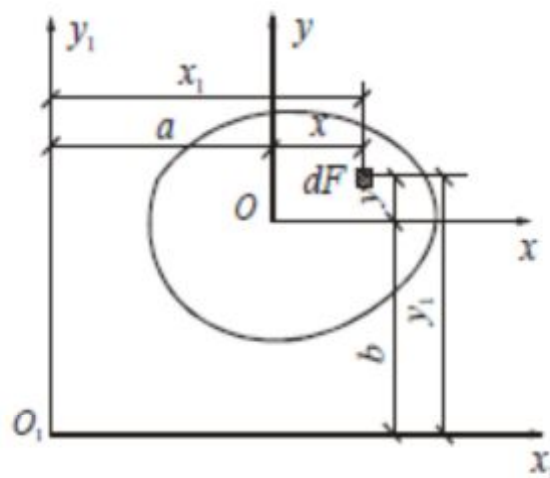


Рис. 2. Моменты инерции относительно параллельных осей

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x + b^2 F, & J_{y_1} &= J_y + a^2 F; \\ J_{x_1 y_1} &= J_{xy} + abF, \end{aligned} \quad (6)$$

где a и b — координаты центра тяжести O в системе координат $O_1 x_1 y_1$.

Две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции. Осевые моменты инерции относительно главных осей имеют экстремальные значения $J_{\max} = J_1$ и $J_{\min} = J_2$. Они называются главными моментами инерции.

Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются главными центральными осями сечения.

Величины главных моментов инерции J_1 и J_2 и углы наклона главных осей α_1 и α_2 к оси Ox определяются по формулам

$$\begin{aligned} J_{1,2} &= \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}; \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{J_{xy}}{J_y - J_1}, & \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{J_{xy}}{J_y - J_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ось симметрии сечения и любая ось, ей перпендикулярная, составляют пару главных осей. Для сечений, имеющих более двух осей симметрии, все центральные оси являются главными.

Ниже приведены справочные данные о геометрических характеристиках простых сечений.

Прямоугольник (рис. 3):

$$J_x = \frac{bh^3}{12}, \quad J_y = \frac{hb^3}{12}, \quad J_{x_1} = \frac{bh^3}{3}, \quad J_{y_1} = \frac{hb^3}{3} \quad (8)$$

Равнобедренный треугольник (рис. 4):

$$J_x = \frac{bh^3}{36}, \quad J_y = \frac{hb^3}{48}. \quad (9)$$

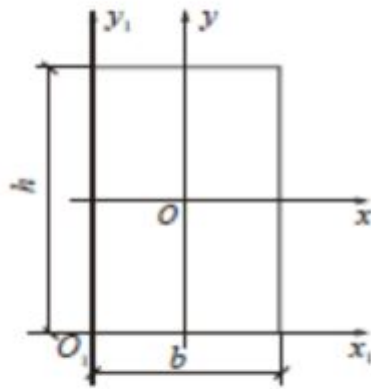


Рис. 3. Моменты инерции прямоугольного сечения стержня

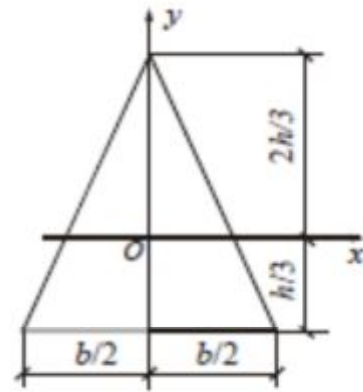


Рис. 4. Моменты инерции треугольного сечения стержня

Круг (рис. 5):

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}, \quad J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} \quad (10)$$

Полукруг (рис. 6):

$$J_{x_1} = J_y = \frac{\pi R^4}{8}, \quad J_x = 0,11R^4, \quad y_0 = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,424R \quad (11)$$

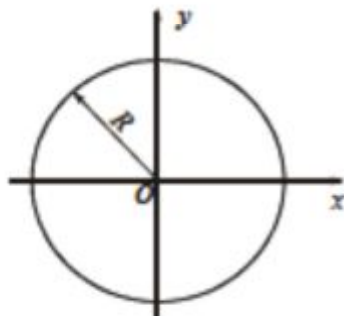


Рис. 5. Моменты инерции круглого сечения стержня

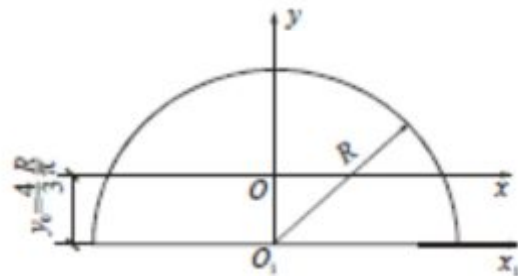


Рис. 6. Моменты инерции полукруглого сечения стержня

Геометрические характеристики сечений прокатных стержней (двутавра, швеллера, уголка) приведены в сортаменте.

Решение задач

Задача 1.

Определим моменты инерции относительно главных центральных осей сечения в виде прямоугольника с круглыми отверстиями (рис. 7).

Размеры сечений на рис. 7—11 даны в сантиметрах.

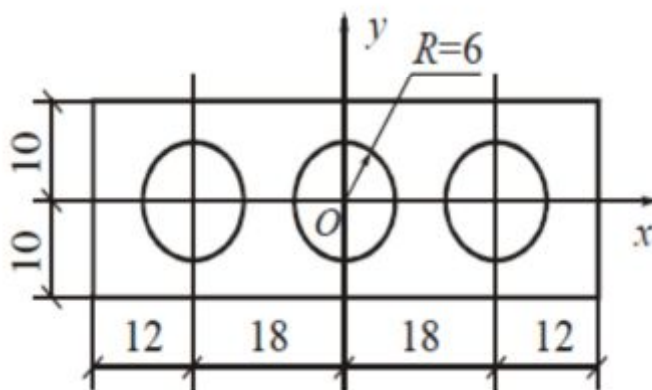


Рис. 7. К задаче 1

Оси симметрии Ox , Oy являются главными центральными осями всего сечения.

Моменты инерции и площади прямоугольника и круговых вырезов относительно их собственных центральных осей определяются по формулам (8) и (10).

$$J_x^{(1)} = \frac{60 \cdot 20^3}{12} = 40000 \text{ см}^4,$$

$$J_y^{(1)} = \frac{20 \cdot 60^3}{12} = 360000 \text{ см}^4, \quad F_1 = 60 \cdot 20 = 1200 \text{ см}^2;$$

$$J_x^{(2)} = J_y^{(2)} = \frac{3,14 \cdot 6^4}{4} = 1017 \text{ см}^4, \quad F_2 = 3,14 \cdot 6^2 = 113 \text{ см}^2$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей определяются по формулам (6).

$$J_x = J_x^{(1)} - 3J_x^{(2)} = 40000 - 3 \cdot 1017 = 36949 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_y^{(1)} - 3J_y^{(2)} - 2F_2 a^2 = 360000 - 3 \cdot 1017 - 2 \cdot 113 \cdot 18^2 = 283725 \text{ см}^4$$

Задача 2.

Определим моменты инерции относительно главных центральных осей поперечного сечения, показанного на рис. 8.

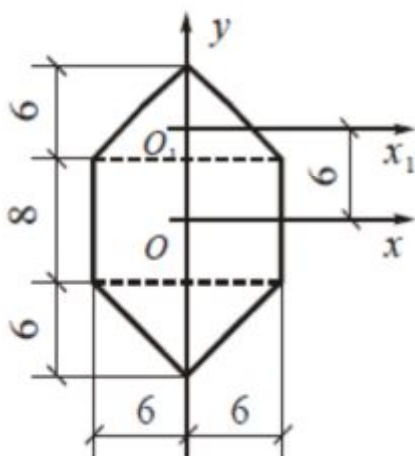


Рис. 8. К задаче 2

Разобьем сечение на три простые фигуры: прямоугольник с размерами 12×8 см и два равнобедренных треугольника с размерами 12×6 см. Моменты инерции и площади прямоугольника и треугольников относительно их собственных центральных осей определяются по формулам (8) и (9).

$$J_x^{(1)} = \frac{12 \cdot 8^3}{12} = 512 \text{ см}^4$$

$$J_y^{(1)} = \frac{8 \cdot 12^3}{12} = 1152 \text{ см}^4,$$

$$F_1 = 12 \cdot 8 = 96 \text{ см}^2;$$

$$J_x^{(2)} = \frac{12 \cdot 6^3}{36} = 72 \text{ см}^4, \quad J_y^{(2)} = \frac{6 \cdot 12^3}{48} = 216 \text{ см}^4, \quad F_2 = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{ см}^2.$$

Площадь всего сечения равна:

$$F = 96 + 2 \cdot 36 = 168 \text{ см}^2.$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей Ox , Oy определяются по формулам (6).

$$J_x = J_x^{(1)} + 2(J_x^{(2)} + F_2 b^2) = 512 + 2(72 + 36 \cdot 6^2) = 3248 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_y^{(1)} + 2J_y^{(2)} = 1152 + 2 \cdot 216 = 1584 \text{ см}^4.$$

Задача 3.

Определим моменты инерции относительно главных центральных осей поперечного сечения стального стержня, составленного из четырех равнобоких уголков L100×100×10 и листа сечением 300×10 мм (рис. 9).

Выпишем из сортамента площадь и моменты инерции сечения уголка относительно собственных центральных осей O_1x_1 и O_1y_1 :

$$J_{x_1}^{(1)} = J_{y_1}^{(1)} = 179 \text{ см}^4, F_1 = 19,2 \text{ см}^2.$$

Моменты инерции относительно осей Ox и Oy и площадь сечения листа равны:

$$J_x^{(2)} = \frac{1 \cdot 30^3}{12} = 2250 \text{ см}^4, J_y^{(2)} = \frac{30 \cdot 1^3}{12} = 2,5 \text{ см}^4, F_2 = 30 \text{ см}^2.$$

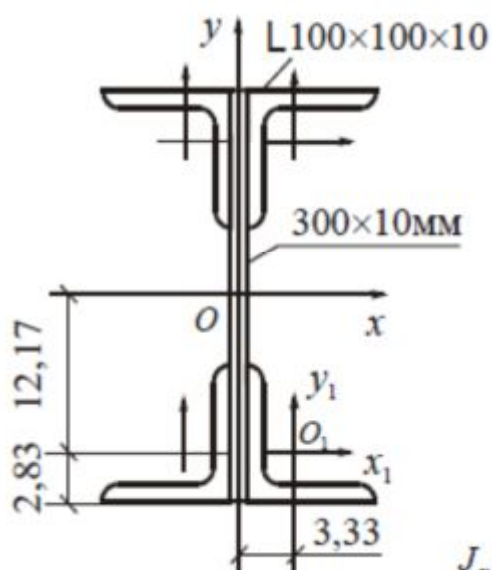


Рис. 9. К задаче 3

Площадь всего сечения равна:

$$F = 4 \cdot 19,2 + 30 = 106,8 \text{ см}^2.$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей Ox и Oy определяются по формулам (6):

$$\begin{aligned} J_x &= 4(J_{x_1}^{(1)} + F_1 b_1^2) + J_x^{(2)} = 4(179 + 19,2 \cdot 12,17^2) + \\ &\quad + 2250 = 14341 \text{ см}^4; \\ J_y &= 4(J_{y_1}^{(1)} + F_1 a_1^2) + J_y^{(2)} = 4(179 + 19,2 \cdot 3,33^2) + \\ &\quad + 2,5 = 1570 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Задача 4.

Определим положение центра тяжести и моменты инерции относительно главных центральных осей поперечного сечения стальной балки, составленной из двух двутавров I27 и стального листа сечением 400×12 мм (рис. 10).

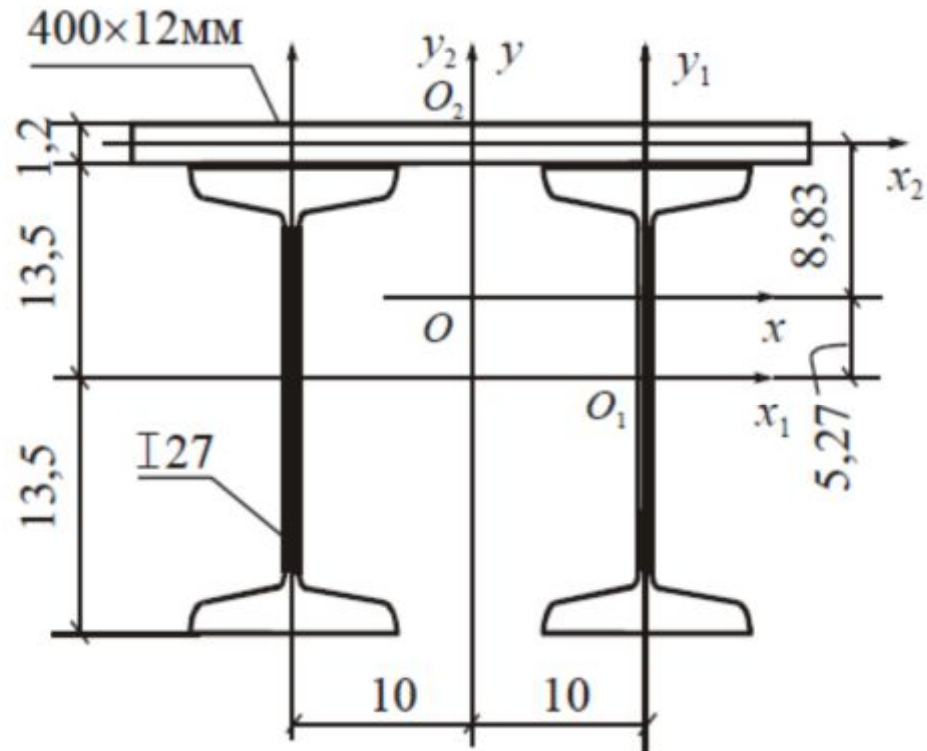


Рис. 10. К задаче 4

Моменты инерции и площади сечений двутавра и листа относительно собственных центральных осей соответственно равны:

$$J_{x_1} = 5010 \text{ см}^4, J_{y_1} = 260 \text{ см}^4,$$

$$F_1 = 40,2 \text{ см}^2;$$

$$J_{x_2} = \frac{40 \cdot 1,2^3}{12} = 5,76 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_2} = \frac{1,2 \cdot 40^3}{12} = 6400 \text{ см}^4 ,$$

$$F_2 = 40 \cdot 1,2 = 48 \text{ см}^2 .$$

Площадь всего сечения равна:

$$F = 2 \cdot 40,2 + 48 = 128,4 \text{ см}^2 .$$

Для определения положения центра тяжести всего сечения найдем статический момент сечения относительно оси O_1x_1 , проходящей через центры тяжести двутавров:

$$S_{x_1} = F_2 y_2 = 48 \left(13,5 + \frac{1,2}{2} \right) = 676,8 \text{ см}^3 .$$

По второй из формул (5) получим:

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{676,8}{128,4} = 5,27 \text{ см} .$$

Оси Ox и Oy являются главными центральными осями. Моменты инерции сечения относительно этих осей равны:

$$J_x = 2(5010 + 40,2 \cdot 5,27^2) + 5,76 + 48 \cdot 8,83^2 = 16000 \text{ см}^4 ;$$

$$J_y = 2(260 + 40,2 \cdot 10^2) + 6400 = 14960 \text{ см}^4 .$$

Задача 5.

Для стержня несимметричного сечения, составленного из двутавра I50 и неравнобокого уголка L200×125×16 (рис. 11, а).

Определим положение центра тяжести сечения, моменты инерции относительно главных центральных осей и положение этих осей.

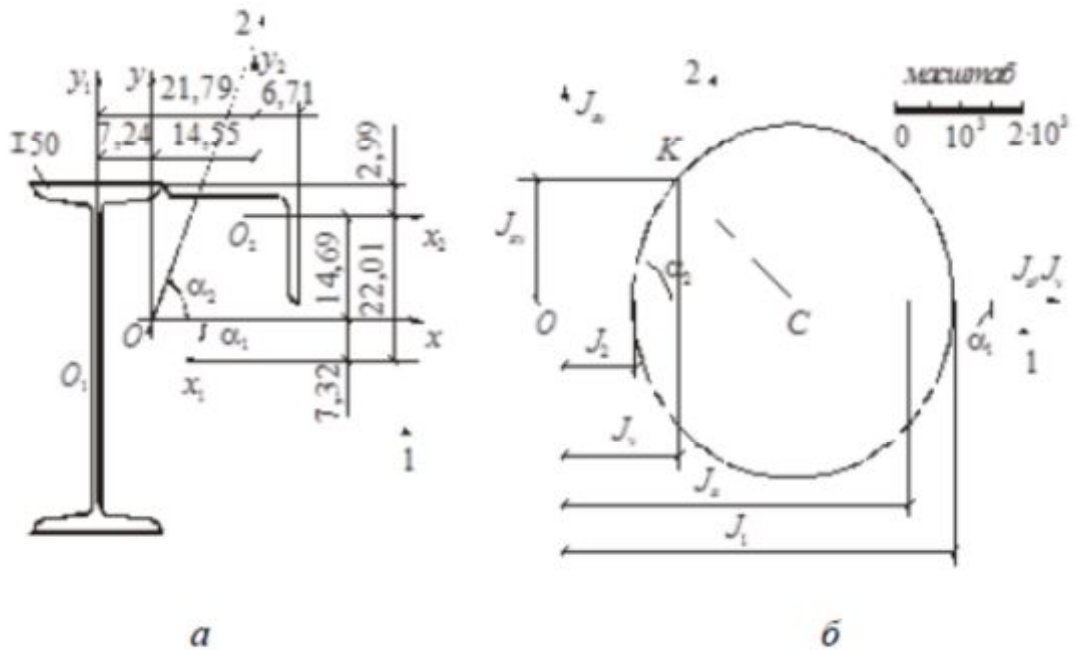


Рис. 11. Определение положения:
а — главных осей; б — круг Мора

Моменты инерции и площади сечений двутавра и уголка относительно их собственных центральных осей соответственно равны:

$$J_{x_1} = 39727 \text{ см}^4, \quad J_{y_1} = 1043 \text{ см}^4, \quad F_1 = 100 \text{ см}^2;$$

$$J_{x_2} = 617 \text{ см}^4, \quad J_{y_2} = 2026 \text{ см}^4, \quad J_{x_2y_2} = -644 \text{ см}^4,$$

$$F_2 = 49,8 \text{ см}^2.$$

Площадь всего сечения равна:

$$F = 100 + 49,8 = 149,8 \text{ см}^2.$$

Для определения положения центра тяжести выберем в качестве вспомогательных осей оси двутавра O_1x_1 и O_1y_1 . По формулам (5) получим:

$$x_0 = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{F_2 x_2}{F} = \frac{49,8 \cdot 21,79}{149,8} = 7,24 \text{ см};$$

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{F_2 y_2}{F} = \frac{49,8 \cdot 22,01}{149,8} = 7,32 \text{ см}.$$

Эти величины и координаты центров тяжести двутавра и уголка в системе координат Oxy показаны на рис. 2.6, а и соответственно равны:

$$a_1 = -7,24 \text{ см}, \quad b_1 = -7,32 \text{ см}, \quad a_2 = 14,55 \text{ см}, \quad b_2 = 14,69 \text{ см}.$$

Определим по формулам (5) моменты инерции сечения относительно центральных осей Ox и Oy .

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x_1} + F_1 b_1^2 + J_{x_2} + F_2 b_2^2 = \\ &= 39727 + 100 \cdot (-7,32)^2 + 617 + 49,8 \cdot 14,69^2 = 56449 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y_1} + F_1 a_1^2 + J_{y_2} + F_2 a_2^2 = \\ &= 1043 + 100 \cdot (-7,24)^2 + 2026 + 49,8 \cdot 14,55^2 = 18854 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{x_1 y_1} + F_1 a_1 b_1 + J_{x_2 y_2} + F_2 a_2 b_2 = \\ &= 100 \cdot (-7,24) \cdot (-7,32) - 644 + 49,8 \cdot 14,55 \cdot 14,69 = 15300 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

По формулам (7) найдем величины главных моментов инерции и углы наклона главных осей 1 и 2 к оси Ox .

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} =$$

$$= \frac{56449 + 18854}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{56449 - 18854}{2}\right)^2 + 15300^2};$$

$$J_1 = 61889 \text{ см}^4, \quad J_2 = 13415 \text{ см}^4;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_1} = \frac{15300}{18854 - 61889} = -0,356, \quad \alpha_1 = -19,6^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_2} = \frac{15300}{18854 - 13415} = 2,813, \quad \alpha_2 = 70,4^\circ.$$

На рис. 11, б приведено графическое определение величин главных моментов инерции и положения главных осей.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные геометрические характеристики поперечных сечений стержней и напишите их выражения в интегральной форме.
2. Относительно каких осей статические моменты сечения равны нулю?
3. Относительно каких осей сечения центробежный момент инерции равен нулю?
4. Какой зависимостью связаны между собой осевые и полярный моменты инерции?
5. Напишите формулы для координат центра тяжести сечения.
6. Напишите зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей и объясните их смысл на простых примерах.

7. Какие оси называются главными осями инерции? Напишите формулы для определения главных моментов инерции и углов наклона главных осей.

8. Как определяется положение главных осей инерции для симметричных сечений?

9. Напишите формулы для моментов инерции прямоугольника и круга.

10. Как изменяется центробежный момент инерции прокатного уголка при изменении направлений его центральных осей, параллельных полкам?

2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Центральное растяжение и сжатие прямого стержня вызывается действием осевых нагрузок, в состав которых входят сосредоточенные силы и распределенные нагрузки, характеризующиеся интенсивностью q . При $q = const$ нагрузка называется равномерно распределенной, равнодействующая которой равна произведению qa , где a — длина участка распределения.

В поперечных сечениях стержня действуют только нормальные напряжения и одно внутреннее усилие — продольная сила N , определяемая с помощью метода сечений. При этом продольная сила равна сумме проекций на ось Ox нагрузок, приложенных к одной из частей стержня (рис. 12).

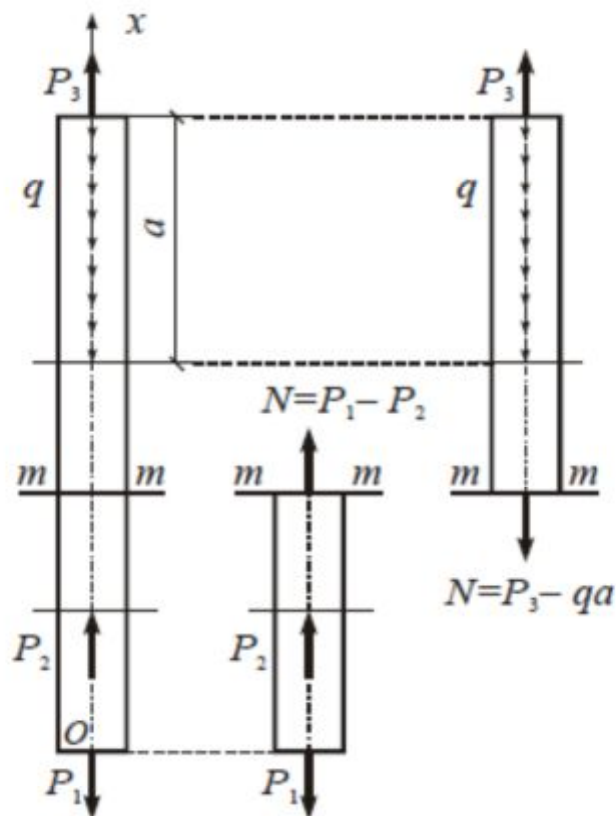


Рис. 12. Определение продольных сил
в сечении стержня

Результаты вычисления продольных сил N для верхней и нижней частей стержня должны совпадать. Растягивающая продольная сила считается положительной, а сжимающая — отрицательной. Продольная сила имеет размерность сосредоточенной силы (например, кН).

После определения продольных сил N в характерных сечениях стержня можно построить график изменения этих сил по длине стержня (эпюру N). Для её построения используется дифференциальное соотношение:

$$\frac{dN}{dx} = -q . \quad (12)$$

Нормальные напряжения одинаковы во всех точках поперечного сечения и определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F} , \quad (13)$$

где F — площадь поперечного сечения.

В системе СИ напряжения имеют размерность $\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$, $\text{МПа} = 10^{-1} \text{ кН}/\text{см}^2$ и др.

Относительная деформация стержня длиной l равна:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} , \quad (14)$$

где Δl — удлинение или укорочение стержня.

В пределах упругих деформаций справедливо линейное соотношение между напряжениями и деформациями, называемое законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon , \quad (15)$$

где E — модуль упругости материала.

Удлинение или укорочение стержня, закрепленного в начальном сечении $x = 0$, определяется по формуле:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EF} dx . \quad (16)$$

Для частного случая $EF = const$ и $N = const$ имеем:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} . \quad (17)$$

Для стержня с постоянной жесткостью EF при произвольном законе изменения продольной силы N величину Δl можно определить по формуле:

$$\Delta l = \frac{1}{EF} \Omega_N \quad (18)$$

где Ω_N — площадь эпюры N на рассматриваемом участке стержня.

Поперечные сечения стержня, оставаясь плоскими и перпендикулярными к оси, получают осевые перемещения $u = u(x)$. Эпюра осевых перемещений строится после определения удлинений и укорочений Δl участков стержня.

Если при определении продольных сил и опорных реакций уравнений равновесия недостаточно, то стержень или стержневая система называются статически неопределимыми. Для их расчета необходимо использовать условия деформации.

Расчет на прочность элементов строительных конструкций производится по методу предельных состояний. В поперечных сечениях стержня при центральном растяжении или сжатии должно выполняться условие прочности:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq \gamma_c R , \quad (19)$$

где R — расчетное сопротивление материала, характеризующее его прочность, и γ_c — коэффициент условий работы.

Величина продольной силы N вычисляется от действия расчетных нагрузок, определяемых с учетом коэффициента надежности по нагрузкам γ_f . Значения R , γ_c и γ_f приведены в соответствующих разделах СНиП.

Подбор сечения стержня производится по формуле:

$$F \geq \frac{N}{\gamma_c R} . \quad (20)$$

Расчет элементов машиностроительных конструкций производится по методу допускаемых напряжений. Условие прочности в этом случае записывается в виде:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (21)$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение.

При расчете стержней и стержневых систем из пластичных материалов может быть использована упрощенная диаграмма зависимости $\sigma = f(\varepsilon)$, например, диаграмма Прандтля (рис. 13). Согласно этой диаграмме при достижении напряжениями предела текучести σ_T деформации неограниченно возрастают. При этом продольная сила в стержне принимает предельное значение (разрушающая сила) $N = N_{\text{пред}} = \sigma_T F$ (21).

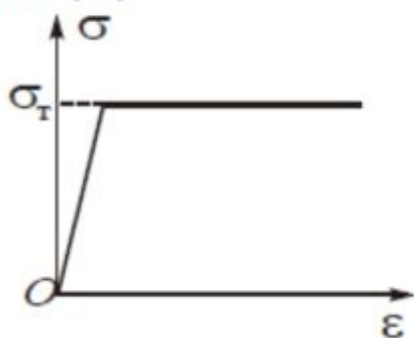


Рис. 13. Диаграмма Прандтля

За начало разрушения (предельное состояние) стержневой системы можно принять момент, когда напряжения в одном или нескольких стержнях достигнут предела текучести. При этом величина предельной нагрузки $P_{\text{пред}}$ определяется из уравнений равновесия. Допускаемая нагрузка определяется по формуле:

$$P = \frac{P_{\text{пред}}}{n}, \quad (22)$$

где n — коэффициент запаса прочности.

Решение задач

Задача 6.

Для стержня ступенчато постоянного сечения, находящегося под действием осевых нагрузок (рис. 14, а), построим эпюры N и σ . Определим удлинения (укорочения) участков стержня и всего стержня в целом и построим эпюру осевых перемещений. В расчетах примем $E = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

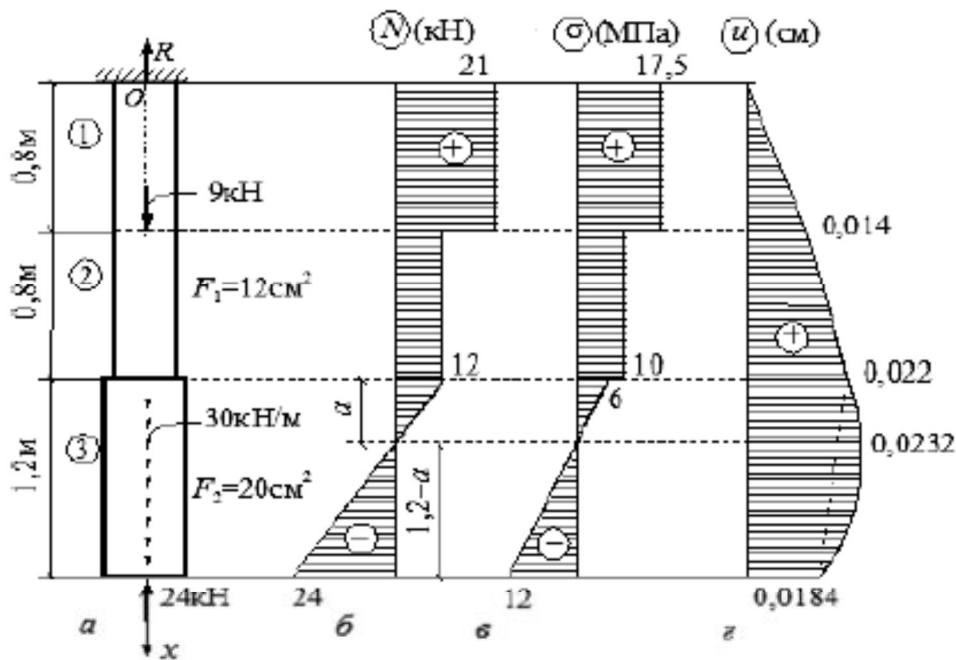


Рис. 14. Нагрузки:
a — на стержень; *б, в* — эпюры N, σ ; *г* — эпюра u

Определим опорную реакцию в точке закрепления стержня:

$$\sum X = 0, -R + 9 + 30 \cdot 1,2 - 24 = 0, R = 21 \text{ кН.}$$

Направление опорной реакции в начале расчета принято правильно.

Определим с помощью метода сечений продольные силы и нормальные напряжения в пределах трех характерных участков стержня.

Участок 1 ($0 \leq x \leq 0,8$ м, рис. 15):

$$\sum X = 0, -21 + N = 0;$$

$$N = 21 \text{ кН (растяжение);}$$

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{21}{12} = 1,75 \text{ кН/см}^2 = \\ = 17,5 \text{ МПа.}$$

Участок 2 ($0,8 \leq x \leq 1,6$ м, рис. 16):

$$\Sigma X = 0, -21 + 9 + N = 0;$$

$$N = 12 \text{ кН (растяжение),}$$

$$\sigma = \frac{12}{12} = 1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}.$$

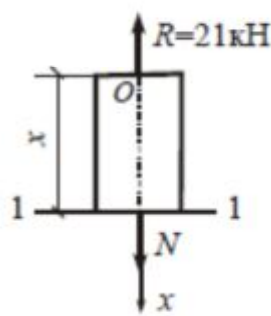


Рис. 15. Сечение 1-1

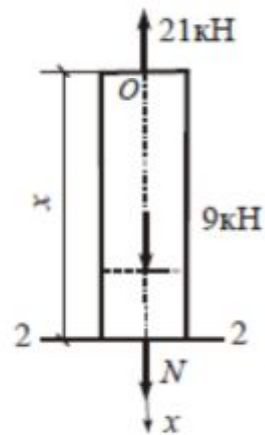


Рис. 16. Сечение 2-2

Участок 3 ($1,6 \leq x \leq 2,8$ м, рис. 17).

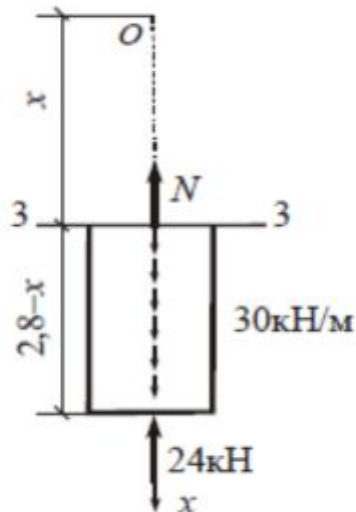


Рис. 17. Сечение 3-3

$$\Sigma X = 0, -N + 30(2,8 - x) - 24 = 0,$$

$$N = 30(2,8 - x) - 24;$$

$$x = 1,6 \text{ м}, N = 30 \cdot 1,2 - 24 = 12 \text{ кН} \\ \text{(растяжение),}$$

$$\sigma = \frac{12}{20} = 0,6 \text{ кН/см}^2 = 6 \text{ МПа}.$$

$$x = 2,8 \text{ м}, N = -24 \text{ кН (сжатие),}$$

$$\sigma = -\frac{24}{20} = -1,2 \text{ кН/см}^2 = -12 \text{ МПа}.$$

Строим эпюры N и σ (рис. 14, б, в). В пределах первого и второго участков продольные силы и нормальные напряжения имеют постоянные значения, а в пределах третьего участка они изменяются по линейному закону. В сечении $x = 0,8$ м продольная сила имеет скачок на величину 9 кН.

Определим величины удлинений (укорочений) участков стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{21 \cdot 80}{1 \cdot 10^4 \cdot 12} = 0,014 \text{ см (удлинение)}$$

$$\Delta l_2 = \frac{12 \cdot 80}{1 \cdot 10^4 \cdot 12} = 0,008 \text{ см (удлинение),}$$

$$\Delta l_3 = \frac{1}{EF_2} \Omega_N = \frac{1}{1 \cdot 10^4 \cdot 20} \cdot \frac{(-24 + 12)}{2} \cdot 120 = \\ = -0,0036 \text{ см (укорочение).}$$

Общее удлинение стержня равно:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,014 + 0,008 - 0,0036 = 0,0184 \text{ см.}$$

Определим осевые перемещения характерных сечений стержня:

$$x = 0, \quad u = u_0 = 0 ;$$

$$x = 0,8 \text{ м}, \quad u_1 = u_0 + \Delta l_1 = 0,014 \text{ см};$$

$$x = 1,6 \text{ м}, \quad u_2 = u_1 + \Delta l_2 = 0,014 + 0,008 = 0,022 \text{ см};$$

$$x = 2,8 \text{ м}, \quad u_3 = u_2 + \Delta l_3 = \Delta l = 0,0184 \text{ см}.$$

Эпюра u приведена на рис. 14, z . В пределах первого и второго участков осевые перемещения изменяются по линейному закону, а в пределах третьего участка — по закону квадратной параболы. В сечении, где $N = \sigma = 0$, имеется экстремум u_{max} , который равен:

$$u_{max} = u_2 + \Delta l_3^* = 0,022 + \frac{1}{1 \cdot 10^4} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 40 = 0,0232 \text{ см},$$

где Δl_3^* — удлинение верхней части третьего участка стержня длиной a , которая определяется из пропорции:

$$\frac{24}{1,2 - a} = \frac{12}{a}, \quad a = 0,4 \text{ м.}$$

Все поперечные сечения перемещаются в положительном направлении оси Ox , то есть вниз.

Задача 7.

Для стержня ступенчато постоянного сечения, испытывающего центральное растяжение и сжатие (рис. 18, *a*), построим эпюры N и σ .

Определим удлинения (укорочения) участков стержня и всего стержня в целом и построим эпюру осевых перемещений.

В расчетах примем:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2.$$

Определим с помощью метода сечений значения продольных сил и нормальных напряжений в характерных сечениях стержня, начиная с сечения вблизи свободного торца.

Участок 3 ($2 \leq x \leq 3 \text{ м}$):

$$x = 3 \text{ м}, N = 0, \sigma = 0;$$

$$x = 2 \text{ м}, N = -30 \cdot 1 = -30 \text{ кН (сжатие)};$$

$$\sigma = -\frac{30}{15} = -2 \text{ кН/см}^2 = -20 \text{ МПа}.$$

Участок 2 ($1,2 \leq x \leq 2 \text{ м}$):

$$x = 2 \text{ м}, N = -30 \text{ кН},$$

$$\sigma = -\frac{30}{10} = -3 \text{ кН/см}^2 = -30 \text{ МПа}.$$

$$x = 1,2 \text{ м}, N = -30 \text{ кН}, \sigma = -30 \text{ МПа}.$$

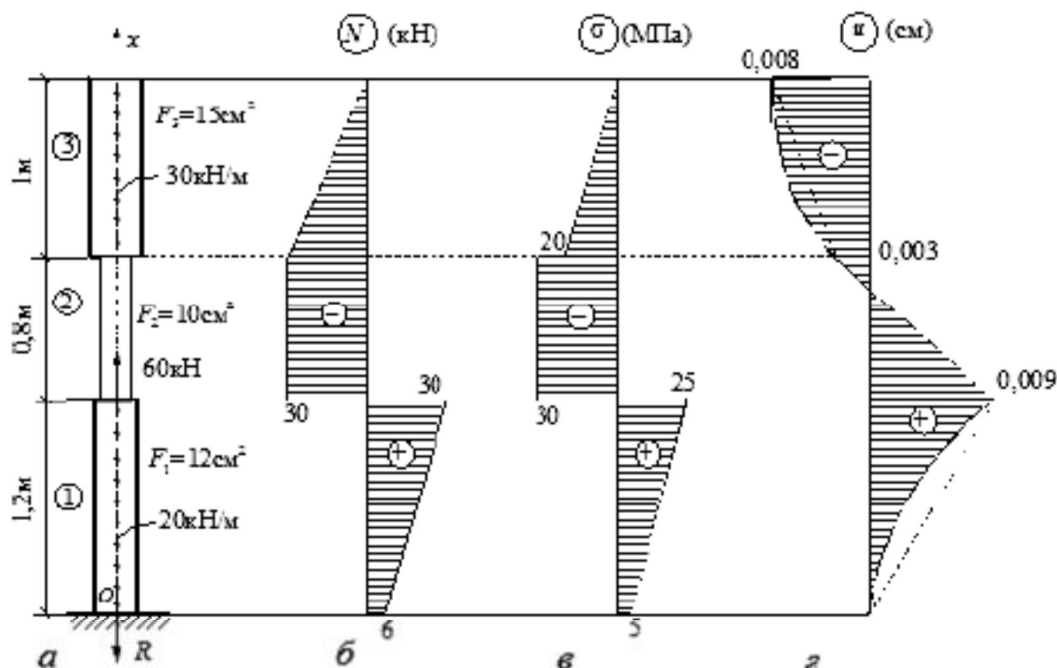


Рис. 18. Расчетная схема:
a — стержня; *б, в* — эпюры N, σ ; *г* — эпюра осевых перемещений

Участок 1 ($0 \leq x \leq 1,2$ м):

$$x = 1,2 \text{ м}, N = -30 + 60 = 30 \text{ кН (растяжение)};$$

$$\sigma = \frac{30}{12} = 2,5 \text{ кН/см}^2 = 25 \text{ МПа};$$

$$x = 0, N = 30 - 20 \cdot 1,2 = 6 \text{ кН};$$

$$\sigma = \frac{6}{12} = 0,5 \text{ кН/см}^2 = 5 \text{ МПа}.$$

Эпюры N и σ приведены на рис. 18, *б, в*. В пределах первого и третьего участков продольные силы и нормальные напряжения изменяются по линейному закону, а в пределах второго участка они имеют постоянное значение. В сечении $x = 1,2$ м продольная сила имеет скачок на величину 60 кН.

Опорная реакция в закрепленном сечении равна $R = 6$ кН. Её направление показано на рис. 18, а.

Определим величины удлинений (укорочений) участков стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^4 \cdot 12} \cdot \frac{(30 + 6)}{2} \cdot 120 = 0,009 \text{ см};$$

$$\Delta l_2 = -\frac{30 \cdot 80}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} = -0,012 \text{ см};$$

$$\Delta l_3 = -\frac{1}{2 \cdot 10^4 \cdot 15} \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 100 = -0,005 \text{ см};$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,009 - 0,012 - 0,005 = -0,008 \text{ см}.$$

Стержень в целом укорачивается.

Определяем осевые перемещения характерных сечений стержня:

$$x = 0, \quad u_0 = 0;$$

$$x = 1,2 \text{ м}, \quad u_1 = u_0 + \Delta l_1 = 0,009 \text{ см};$$

$$x = 2 \text{ м}, \quad u_2 = u_1 + \Delta l_2 = 0,009 - 0,012 = -0,003 \text{ см};$$

$$x = 3 \text{ м}, \quad u_3 = u_2 + \Delta l_3 = \Delta l = -0,008 \text{ см}.$$

Эпюра u приведена на рис. 18, з. В пределах второго участка осевые перемещения изменяются по линейному закону, а в пределах первого и третьего участков — по закону квадратной параболы. В сечении $x = 3$ м, касательная к эпюре u параллельна оси Ox .

В пределах второго участка имеется сечение, осевое перемещение которого равно нулю.

Задача 8.

Чугунный стержень ступенчато-постоянного сечения закреплен на обоих торцах и находится под действием двух сосредоточенных сил (рис. 19, а). Построим в общем виде эпюры N , σ и u и определим величину силы P из условий прочности по методу допускаемых напряжений. В расчетах примем $F = 10 \text{ см}^2$ и допускаемые напряжения при растяжении и сжатии $[\sigma_p] = 80 \text{ МПа} = 8 \text{ кН/см}^2$, $[\sigma_c] = 150 \text{ МПа} = 15 \text{ кН/см}^2$.

В точках закрепления стержня возникают две опорные реакции R_1 и R_2 . Составим уравнение равновесия:

$$\sum X = 0, -R_1 + P + 3P - R_2 = 0, R_1 + R_2 = 4P.$$

Получили одно уравнение с двумя неизвестными. Данный стержень является статически неопределимым и для его расчета необходимо использовать условие деформации стержня $\Delta l = 0$. Раскроем это условие с помощью принципа независимости действия сил.

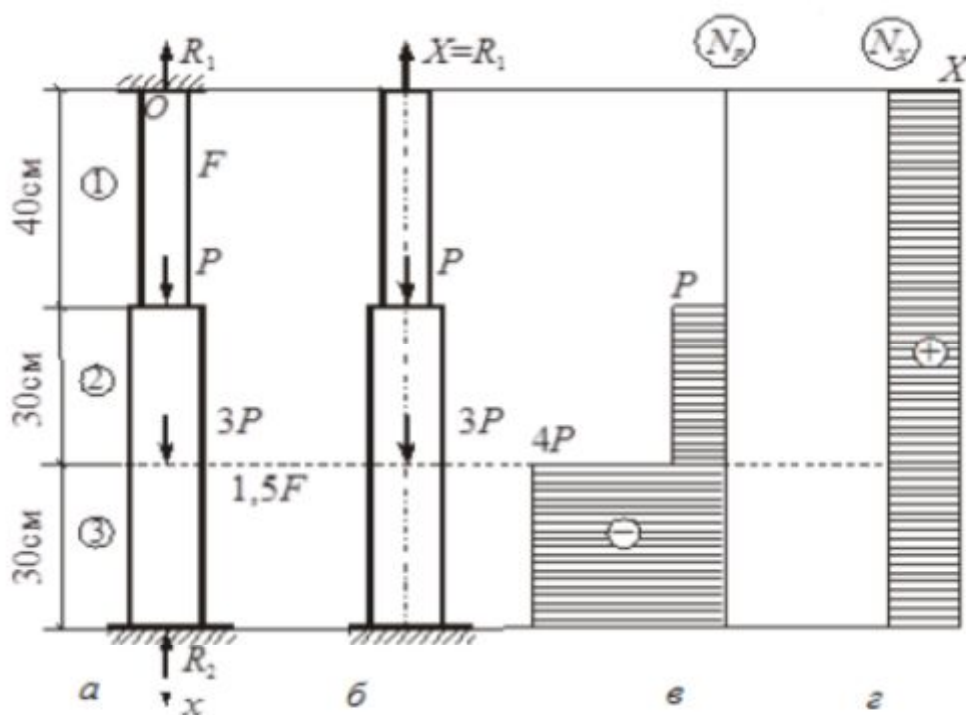


Рис. 19. Чугунный стержень:

а, б — расчетная схема стержня; в — эпюры продольных сил N_p ; г — эпюра N_x

Отбросим мысленно одно из закреплений, например, верхнее, и введем вместо него неизвестную силу $X = R_1$ (рис. 19, б). Произведем расчет полученного таким образом статически определимого стержня отдельно на действие заданных нагрузок и силы X . Соответствующие эпюры продольных сил приведены на рис. 19, в, г. При этом величины удлинений и укорочений стержня равны:

$$\Delta l_P = -\frac{P \cdot 30}{E \cdot 1,5F} - \frac{4P \cdot 30}{E \cdot 1,5F} = -100 \frac{P}{EF};$$

$$\Delta l_X = \frac{X \cdot 40}{EF} + \frac{X \cdot 60}{E \cdot 1,5F} = 80 \frac{X}{EF}.$$

Используем условие деформации стержня и находим опорные реакции:

$$\Delta l = \Delta l_P + \Delta l_X = -100 \frac{P}{EF} + 80 \frac{X}{EF} = 0;$$

$$X = R_1 = 1,25P, \quad R_2 = 4P - R_1 = 2,75P.$$

Определяем значения N , σ и Δl в пределах участков стержня.

Участок 1:

$$N = R_1 = 1,25P, \quad \sigma = 1,25 \frac{P}{F};$$

$$\Delta l_1 = \frac{1,25P \cdot 40}{EF} = 50 \frac{P}{EF}.$$

Участок 2:

$$N = 1,25P - P = 0,25P, \quad \sigma = 0,25 \frac{P}{1,5F} = 0,167 \frac{P}{F};$$

$$\Delta l_2 = \frac{0,25P \cdot 30}{E \cdot 1,5F} = 5 \frac{P}{EF}.$$

Участок 3:

$$N = -R_2 = -2,75P, \quad \sigma = -2,75 \frac{P}{1,5F} = -1,83 \frac{P}{F};$$

$$\Delta l_3 = -\frac{2,75P \cdot 30}{E \cdot 1,5F} = -55 \frac{P}{EF}.$$

Проверим выполнение условия деформации стержня:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{P}{EF}(50 + 5 - 55) = 0.$$

Задача решена правильно. Эпюры N и σ приведены на рис. 20, б, в.

Определяем осевые перемещения характерных сечений:

$$x = 0, \quad u = u_0 = 0;$$

$$x = 40 \text{ см}, \quad u_1 = u_0 + \Delta l_1 = 50 \frac{P}{EF};$$

$$x = 70 \text{ см}, \quad u_2 = u_1 + \Delta l_2 = \frac{P}{EF}(50 + 5) = 55 \frac{P}{EF};$$

$$x = 100 \text{ см}, \quad u_3 = \Delta l = 0.$$

Эпюра u приведена на рис. 20, г. Осевые перемещения изменяются по линейному закону. Все поперечные сечения перемещаются в положительном направлении оси Ox , то есть вниз.

Используем условия прочности по наибольшим растягивающим и сжимающим напряжениям (первый и третий участки) и определим допускаемые значения силы P .

$$\sigma_{\text{нб}} = 1,25 \frac{P}{F} = 1,25 \frac{P}{10} \leq [\sigma_p] = 8 \text{ кН/см}^2, \quad P \leq 64 \text{ кН};$$

$$|\sigma_{\text{вм}}| = 1,83 \frac{P}{F} = 1,83 \frac{P}{10} \leq [\sigma_c] = 15 \text{ кН/см}^2, \quad P \leq 81,8 \text{ кН}.$$

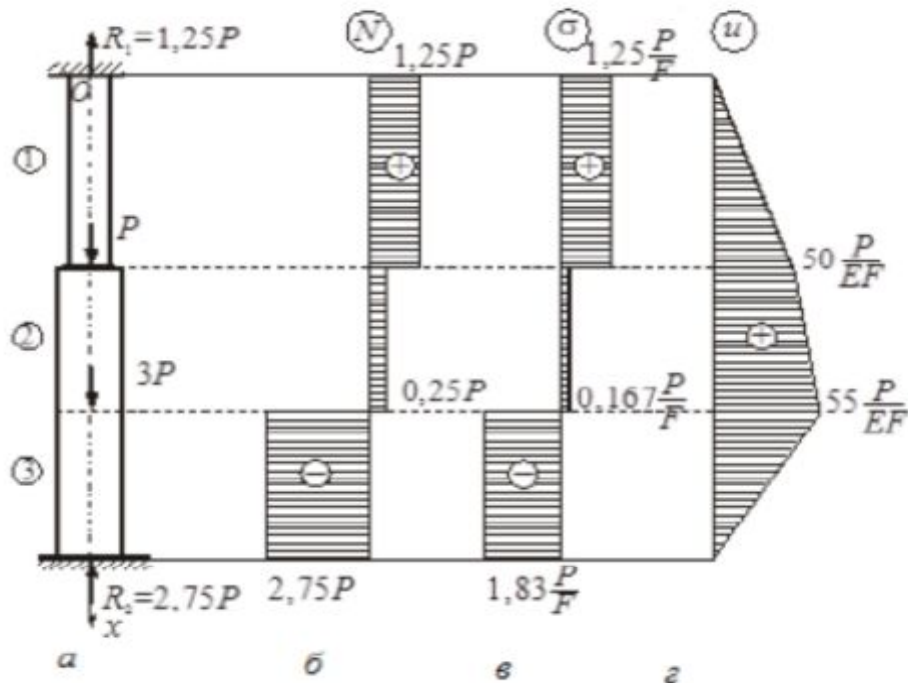


Рис. 20. Стержень:

a — расчетная схема стержня; *б, в* — эпюры N , σ ; *г* — эпюра u

Из двух допускаемых значений сил надо принять меньшее:
 $P = 64 \text{ кН}$.

Задача 9.

Стержневая система состоит из жесткой балки AB , шарнирно опертой в точке A и поддерживаемой стержнем CB круглого сечения диаметром $d = 22 \text{ мм}$ (рис. 21, *a*). Определим величину силы P из условия прочности стержня CB по методу предельных состояний, величину удлинения стержня и угол поворота балки AB . В расчетах примем $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_f = 1,4$, $\gamma_c = 0,9$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

При нагружении системы возникают опорные реакции R_A и H_A на опоре A и продольная растягивающая сила N в стержне CB . Эти величины можно определить из уравнений равновесия $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M = 0$.

Для определения N используем уравнение равновесия для моментов:

$$\Sigma M_A = 0, \quad Nr - 2P = 0, \quad N = \frac{2P}{r} = \frac{2}{1,34}P = 1,49P,$$

где $r = 3 \sin \alpha = 3 \cdot 0,447 = 1,34$ м — плечо силы N , $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,5}{3} = 0,5$,
 $\sin \alpha = 0,447$.

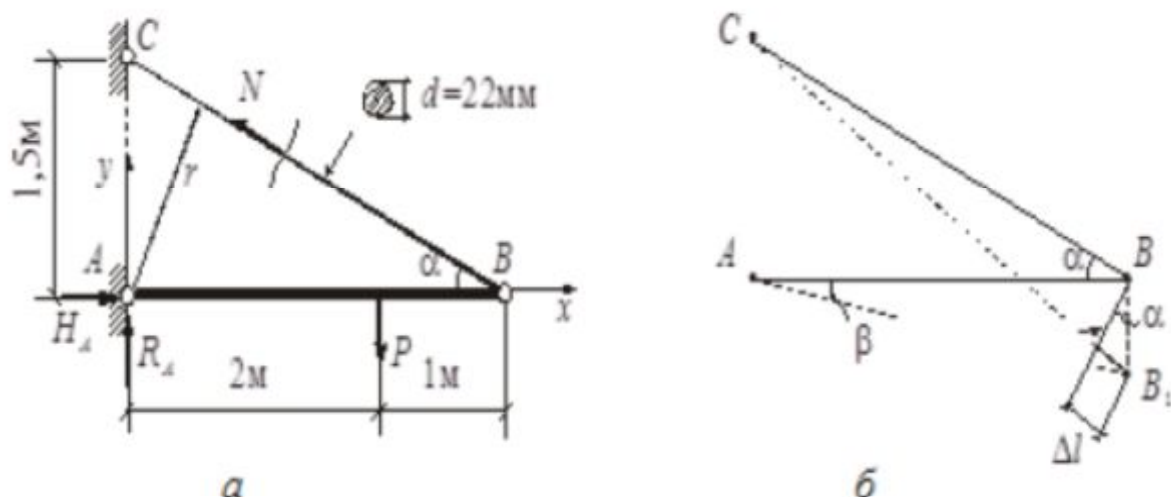


Рис. 21. Схема:
 а — стержневой системы; б — деформации системы

Используем условие прочности стержня:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{1,49P}{3,8} \leq \gamma_c R = 21 \cdot 0,9,$$

где $F = \frac{3,14 \cdot 2,2^2}{4} = 3,8$ см² — площадь сечения стержня.

Расчетное и нормативное значения силы P равны:

$$P_p \leq \frac{21 \cdot 0,9 \cdot 3,8}{1,49} = 48,2 \text{ кН};$$

$$P_n = \frac{P_p}{\gamma_f} = \frac{48,2}{1,4} = 34,4 \text{ кН}.$$

Принимаем с округлением $P_n = 34$ кН и определяем величину удлинения стержня от действия этой силы. Схема деформации системы приведена на рис. 21, б.

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} = \frac{1,49 \cdot 34 \cdot 335,4}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 3,8} = 0,213 \text{ см},$$

где $l = \sqrt{1,5^2 + 3^2} = 3,354$ м — длина стержня.

Определим угол поворота жесткой балки AB .

$$BB_1 = \frac{\Delta l}{\sin \alpha} = \frac{0,213}{0,447} = 0,477 \text{ см};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BB_1}{AB} = \frac{0,477}{300} = 0,00159, \beta = 0,09^\circ.$$

Угол поворота балки очень мал.

Задача 10.

Стержневая система (рис. 22, а) состоит из жесткой балки AB , имеющей шарнирно неподвижную опору A , и двух стержней CD и ED , поддерживающих балку. К балке приложена сила P , нормативное значение которой равно 400 кН. Определим усилия в стержнях и подберем их сечения из условия прочности в виде двух стальных прокатных равнобоких уголков. Определим величину разрушающей (предельной) силы. В расчетах примем коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$,

расчётное сопротивление материала $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, коэффициент условий работы $\gamma_c = 0,9$, предел текучести $\sigma_T = 240 \text{ МПа} = 24 \text{ кН/см}^2$ и соотношение между площадями поперечных сечений стержней $F_2/F_1 = 1,2$.

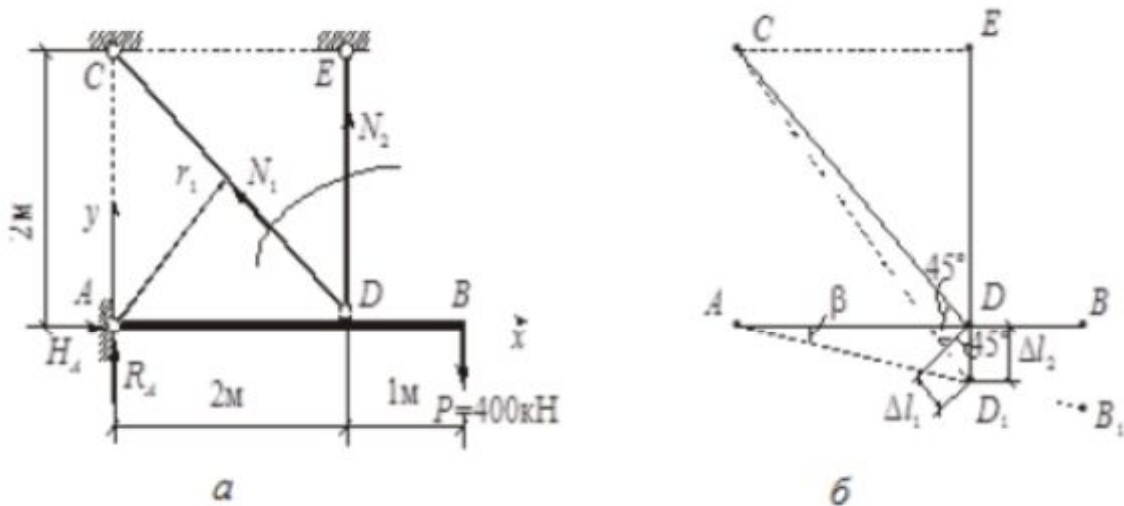


Рис. 22. Расчетная схема:
a — стержневой системы; *б* — схема деформации системы

Под действием нагрузки на опоре *A* возникают опорные реакции R_A и H_A , а в стержнях — продольные растягивающие усилия N_1 и N_2 . Поскольку для их определения можно использовать только три независимых уравнения равновесия $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M = 0$, задача является статически неопределимой ($n = 4 - 3 = 1$ — степень статической неопределимости системы).

Составим уравнение равновесия относительно усилий N_1 и N_2 :

$$\Sigma M_A = 0; N_1 r_1 + N_2 r_2 - P r_P = 0,$$

где $r_1 = 2 \sin 45^\circ = 2 \cdot 0,707 = 1,414 \text{ м}$, $r_2 = 2 \text{ м}$ и $r_P = 3 \text{ м}$ — плечи сил N_1 , N_2 и P относительно точки *A*.

Расчетное значение силы P равно:

$$P_p = P_n \gamma_f = 400 \cdot 1,2 = 480 \text{ кН}.$$

Получили одно уравнение относительно двух неизвестных N_1 и N_2 :

$$1,44N_1 + 2N_2 = 480 \cdot 3 = 1440 .$$

Для получения второго уравнения относительно N_1 и N_2 рассмотрим схему деформации системы. Под действием силы P жесткая балка AB повернется относительно точки A на малый угол β . Стержни при этом получают удлинения Δl_1 и Δl_2 (рис. 22, б). Из схемы деформации находим:

$$\Delta l_1 = DD_1 \sin 45^\circ , \quad \Delta l_2 = DD_1 , \quad \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \sin 45^\circ = 0,707 .$$

Полученное соотношение является условием деформации системы. Выразим Δl_1 и Δl_2 через усилия в стержнях:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} , \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} ,$$

где $l_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,828$ м, $l_2 = 2$ м — длины стержней.

Используем условие деформации системы:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{N_1 l_1}{EF_1} \cdot \frac{EF_2}{N_2 l_2} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{F_2}{F_1} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{2,828}{2,0} \cdot 1,2 = 0,707 ,$$

$$N_1 = 0,417 N_2 .$$

Подставляем полученное соотношение в уравнение равновесия и определяем расчетные значения усилий в стержнях:

$$1,414 \cdot 0,417 N_2 + 2N_2 = 1440 , \quad N_2 = 556 \text{ кН} , \quad N_1 = 0,417 \cdot 556 = 232 \text{ кН} .$$

Определяем требуемые площади сечений стержней:

$$F_1 \geq \frac{N_1}{\gamma_c R} = \frac{232}{21 \cdot 0,9} = 12,3 \text{ см}^2 , \quad F_2 \geq \frac{N_2}{\gamma_c R} = \frac{556}{21 \cdot 0,9} = 29,4 \text{ см}^2 .$$

Проверяем выполнение принятого соотношения между F_1 и F_2 :

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{29,4}{12,3} = 2,39 > 1,2.$$

При подборе сечения первого стержня её площадь надо увеличить и принять равной:

$$F_1 = \frac{F_2}{1,2} = \frac{29,4}{1,2} = 24,5 \text{ см}^2.$$

Поскольку каждый стержень состоит из двух одинаковых равнобоких уголков (рис. 23), разделим требуемые площади сечений пополам и по сортаменту примем сечения стержней.

Проверим прочность стержней и определим величины их удлинений.

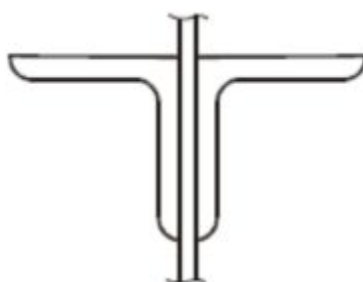


Рис. 23. Поперечное сечение стержня

Первый стержень $\perp 90 \times 90 \times 7$:

$$F_1 = 2 \cdot 12,3 = 24,6 \text{ см}^2;$$

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1} = \frac{232}{24,6} = 9,43 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 18,9 \text{ кН/см}^2;$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{\gamma_f E F_1} = \frac{232 \cdot 282,8}{1,2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 24,6} = 0,106 \text{ см}.$$

Второй стержень $\perp 110 \times 110 \times 7$:

$$F_2 = 2 \cdot 15,2 = 30,4 \text{ см}^2;$$

$$\sigma = \frac{N_2}{F_2} = \frac{556}{30,4} = 18,3 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 18,9 \text{ кН/см}^2;$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{\gamma_f E F_2} = \frac{556 \cdot 200}{1,2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 30,4} = 0,145 \text{ см}.$$

Прочность стержней обеспечена. Согласно СНиП определение удлинений произведено от действия нормативной нагрузки. В силу этого расчетные значения усилий разделены на коэффициент надежности по нагрузке γ_f . Модуль упругости стали принят равным $E = 2,1 \cdot 10^5 = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

Проверим выполнение условия деформации системы:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{0,106}{0,145} = 0,73 \neq 0,707.$$

Расхождение составляет:

$$\Delta\% = \frac{0,73 - 0,707}{0,707} \cdot 100\% = 3,3\%.$$

Определим величину разрушающей (предельной) силы. Согласно диаграмме Прандтля принимается, что при этом напряжения в стержнях равны пределу текучести σ_{τ} , а усилия в стержнях равны $N_{1\tau} = \sigma_{\tau} F_1$ и $N_{2\tau} = \sigma_{\tau} F_2$.

Составим уравнение предельного равновесия системы:

$$\Sigma M_A = 0, \sigma_{\tau} F_2 r_1 + \sigma_{\tau} F_2 r_2 = P_{\text{пред}} r_P.$$

Отсюда находим:

$$P_{\text{пред}} = \frac{\sigma_{\tau} (F_1 r_1 + F_2 r_2)}{r_p} = \frac{24(24,6 \cdot 1,414 + 30,4 \cdot 2)}{3} = 765 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса по отношению к нормативному значению силы равен:

$$n = \frac{P_{\text{пред}}}{P_{\text{н}}} = \frac{765}{400} = 1,91$$

Контрольные вопросы

1. Что такое центральное растяжение (сжатие) стержня?
2. Как определяются продольные усилия и нормальные напряжения в стержне?
3. Как вычислить абсолютные удлинения (укорочения) и осевые перемещения поперечных сечений стержня?
4. Объясните принцип локального эффекта Сен-Венана.
5. Перечислите основные механические характеристики материалов.
6. Каким соотношением связаны между собой продольные и поперечные деформации?
7. Назовите методы расчета конструкций на прочность.
8. Что такое допускаемое напряжение и расчетное сопротивление?
9. Какие коэффициенты используются в методе расчета на прочность по предельным состояниям?
10. Что такое жесткость стержня при растяжении (сжатии) и какова ее размерность?
11. Какие задачи называются статически неопределимыми? Назовите особенности решения статически неопределимых задач.
12. Нарисуйте диаграмму Прандтля.
13. Как определить несущую способность системы исходя из условий прочности?
14. Как определяется разрушающая нагрузка для стержневой системы в пластической стадии работы материала?

3. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ ПРИ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЕЙ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ.

При плоском прямом изгибе в плоскости Oxy поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_z (рис. 24).

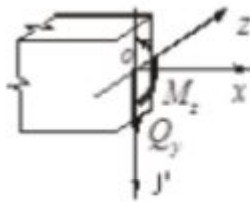


Рис. 24.
Внутренние
силы

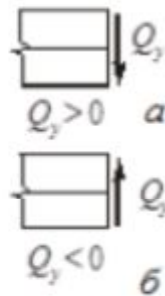


Рис. 25.
Поперечная сила:
 $a - Q > 0$; $b - Q < 0$

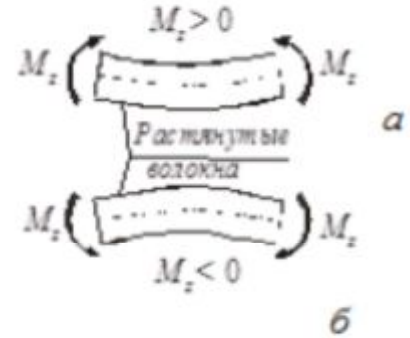


Рис. 26.
Изгибающий момент:
 $a - M > 0$; $b - M < 0$

Поперечная сила считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки (рис. 25). Изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки (рис. 26).

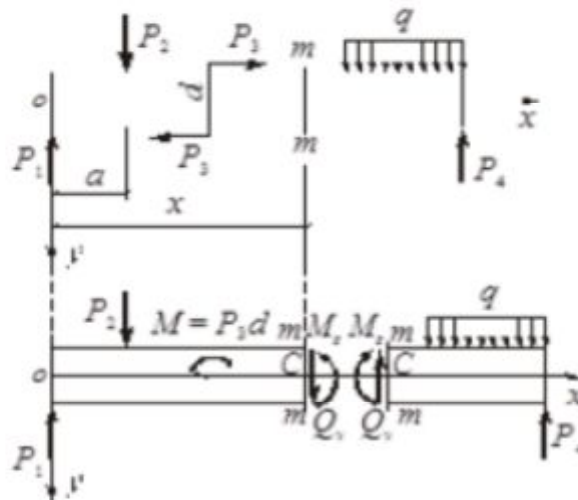


Рис. 27. Внутренние усилия при изгибе стержня

Поперечная сила в любом сечении балки определяется как сумма проекций всех сил, приложенных к одной из частей балки, на нормаль к её оси.

Изгибающий момент в любом сечении балки определяется как сумма моментов всех сил, приложенных к одной из частей балки, относительно центра тяжести данного сечения.

Рассматривая, например, равновесие левой части балки (рис. 27), получим:

$$\sum Y = 0, \quad -P_1 + P_2 + Q_y = 0,$$

$$Q_y = P_1 - P_2. \quad (23)$$

$$\sum M_C = 0, \quad -P_1x + P_2(x-a) - M + M_z = 0, \quad M_z = P_1x - P_2(x-a) + M. \quad (24)$$

Между изгибающим моментом M_z , поперечной силой Q_y и распределённой нагрузкой q имеют место следующие дифференциальные зависимости:

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q, \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y, \quad \frac{d^2M_z}{dx^2} = -q. \quad (25)$$

Эти зависимости используются при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Решение задач

Задача 11.

Для консольной балки, изображённой на рис. 28, построим эпюры Q_y и M_z .

$$\sum Y = 0, \quad -R_A + 30 \cdot 2 - 20 = 0, \quad R_A = 40 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0, \quad M_A - 30 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \cdot 2 - 10 = 0, \quad M_A = 30 \text{ кНм}.$$

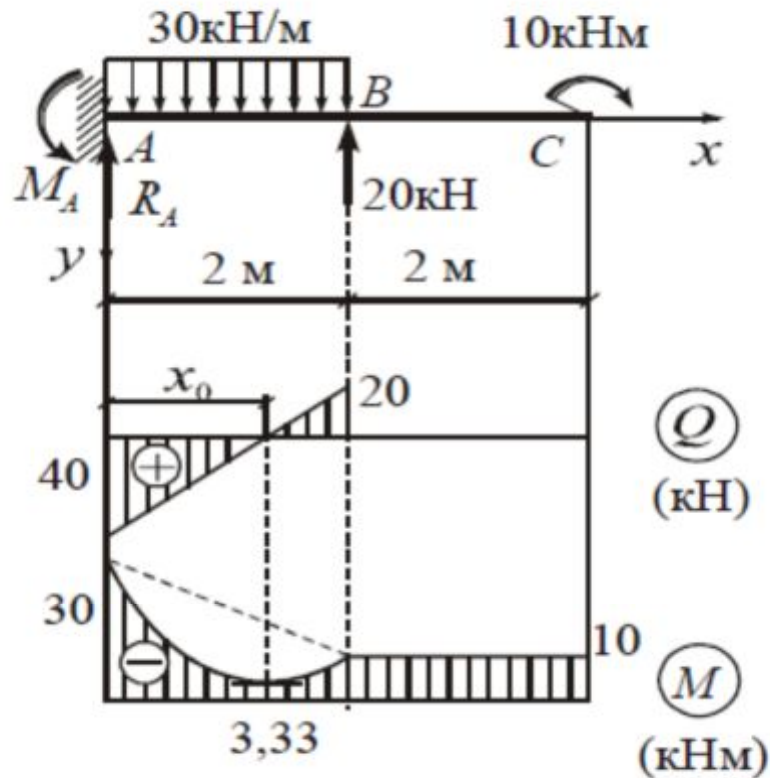


Рис. 28. К задаче 11

При построении эпюр и изгибающих моментов M_z в консольных балках определение опорных реакции не обязательно, однако, если эти реакции известны, то они могут служить для проверки правильности эпюр Q_y и M_z .

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки, начиная со свободного конца:

- сечение $x = 4 \text{ м}$, $Q_y = 0$, $M_z = -10 \text{ кНм}$ (растянуты верхние волокна);
- сечение $x = 2 \text{ м}$ (справа), $Q_y = 0$, $M_z = -10 \text{ кНм}$;
- сечение $x = 2 \text{ м}$ (слева), $Q_y = -20 \text{ кН}$, $M_z = -10 \text{ кНм}$;
- сечение $x = 0$, $Q_y = -20 + 30 \cdot 2 = 40 \text{ кН}$, $M_z = -10 - 30 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \cdot 2 = -30 \text{ кНм}$ (растянуты верхние волокна).

На участке BC поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент согласно второй из формул (25) имеет постоянное значение. На участке AB с равномерно распределённой нагрузкой ($q = const$) согласно первой и третьей из формул (25) поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент — по закону квадратной параболы с выпуклостью, обращённой в сторону действия нагрузки.

Эпюра M_z имеет экстремум в сечении x_0 , где $Q_y = 0$. Величину x_0 можно определить из подобия треугольников на эпюре Q_y :

$$\frac{x_0}{2 - x_0} = \frac{40}{20}, \quad x_0 = 1,33 \text{ м}, \quad 2 - x_0 = 0,67 \text{ м}.$$

При этом:

$$M_{\max} = M_z(1,33) = -10 - 30 \cdot \frac{0,67^2}{2} + 20 \cdot 0,67 = -3,33 \text{ кНм}.$$

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 28.

Задача 12.

Для консольной балки, изображенной на рис. 29, построим эпюры Q_y и M_z .

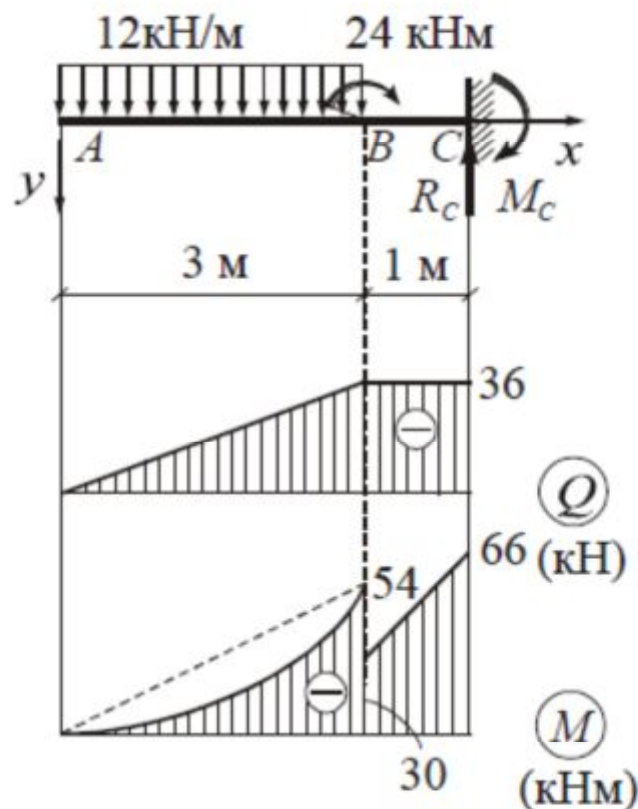


Рис. 29. К задаче 12

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки, начиная со свободного конца:

- сечение $x = 0$, $Q_y = 0$, $M_z = 0$;
- сечение $x = 3$ м (слева), $Q_y = -12 \cdot 3 = -36$ кН, $M_z = -12 \cdot 3 \cdot 1,5 = -54$ кНм (растянуты верхние волокна);
- сечение $x = 3$ м (справа), $Q_y = -36$ кН,
- $M_z = -54 + 24 = -30$ кНм;
- сечение $x = 4$ м, $Q_y = -36$ кН,
- $M_z = -12 \cdot 3 \cdot 2,5 + 24 = -66$ кНм (растянуты верхние волокна).

На участке AB с равномерно распределенной нагрузкой согласно формулам (3) поперечная сила Q_y изменяется по линейному закону, а изгибающий момент M_z — по закону квадратной параболы с выпуклостью, обращенной в сторону действия нагрузки; при этом во всех сечениях он вызывает растяжение верхних волокон. На участке BC распределенная нагрузка отсутствует. Следовательно, на этом участке поперечная сила имеет постоянное значение, а изгибающий момент изменяется по линейному закону, причем в сечении B имеется скачок, равный по величине приложенному моменту 24 кНм.

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 29. Из этих эпюр следует, что $R_C = 36$ кН, $M_C = 66$ кНм.

Задача 13.

Для шарнирно опертой балки, изображенной на рис. 30, построим эпюры Q_y и M_z .

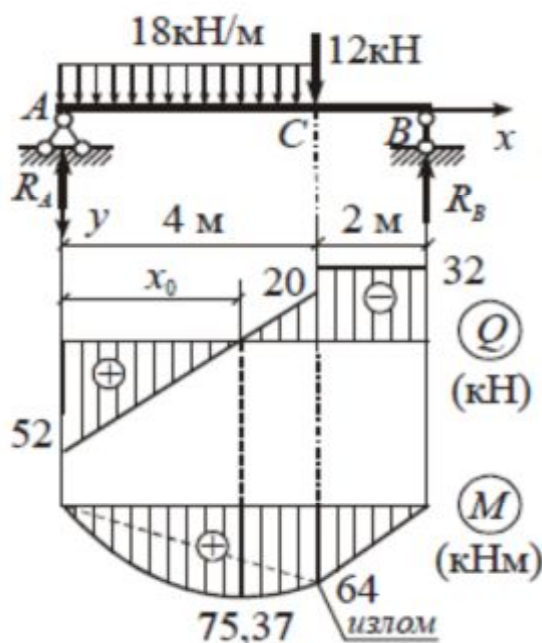


Рис. 30. К задаче 13

Расчет шарнирно опертой балки необходимо начинать с определения опорных реакций:

$$\Sigma M_A = 0, \quad -18 \cdot 4 \cdot 2 - 12 \cdot 4 + 6R_B = 0, \quad R_B = 32 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_B = 0, \quad 18 \cdot 4 \cdot 4 + 12 \cdot 2 - 6R_A = 0, \quad R_A = 52 \text{ кН.}$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad 18 \cdot 4 + 12 - 32 - 52 = 84 - 84 = 0.$$

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки:

- сечение $x = 0$, $Q_y = R_A = 52 \text{ кН}$, $M_z = 0$;
- сечение $x = 6 \text{ м}$, $Q_y = -R_B = -32 \text{ кН}$, $M_z = 0$;
- сечение $x = 4 \text{ м}$ (справа), $Q_y = -32 \text{ кН}$, $M_z = 32 \cdot 2 = 64 \text{ кНм}$ (растянуты нижние волокна);
- сечение $x = 4 \text{ м}$ (слева), $Q_y = -32 + 12 = -20 \text{ кН}$, $M_z = 64 \text{ кНм}$.

На участке AC с равномерно распределенной нагрузкой, поперечная сила изменяется по линейному закону со сменой знака с плюса на минус. Изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы и принимает экстремальное значение в сечении, где поперечная сила равна нулю.

На участке CB распределенная нагрузка отсутствует, поэтому поперечная сила имеет постоянное значение, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. В сечении C , где действует сосредоточенная сила 12 кН , на эпюре Q_y имеется скачок, равный по величине приложенной силе, а на эпюре M_z имеет место излом.

Из подобия треугольников на эпюре Q_y определяем координату сечения x_0 , где поперечная сила обращается в нуль, и для этого сечения определяем экстремальное значение изгибающего момента:

$$\frac{x_0}{4 - x_0} = \frac{52}{20}, \quad x_0 = 2,89 \text{ м.}$$

$$M_{max} = M_z(2,89) = 52 \cdot 2,89 - 18 \cdot 2,89 \cdot \frac{2,89}{2} = 75,37 \text{ кНм}$$

(растянуты нижние волокна)

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 30.

Задача 14.

Для шарнирно опёртой балки, изображенной на рис. 31, построим эпюры Q_y и M_z .

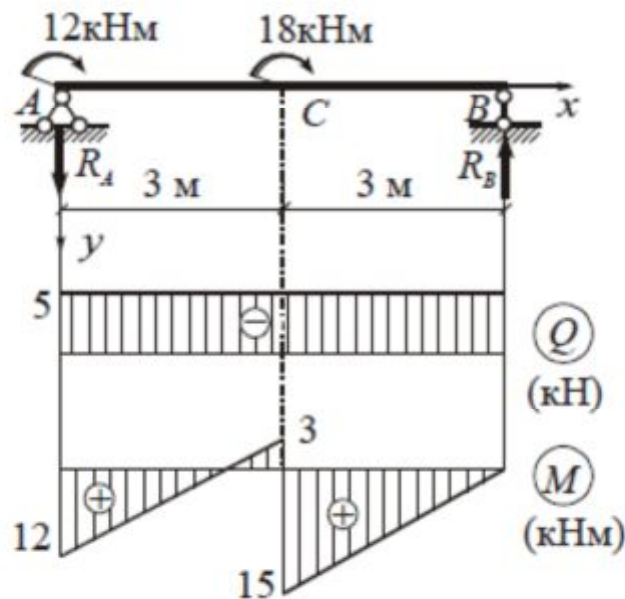


Рис. 31. К задаче 14

Определяем опорные реакции:

$$\Sigma M_A = 0, -12 - 18 + 6R_B = 0, R_B = 5 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_B = 0, -12 - 18 + 6R_A = 0, R_A = 5 \text{ кН.}$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка), } 5 - 5 = 0.$$

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки:

- сечение $x = 0$, $Q_y = -R_A = -5 \text{ кН}$, $M_z = 12 \text{ кНм}$ (растянуты нижние волокна);
- сечение $x = 3 \text{ м}$ (слева), $Q_y = -5 \text{ кН}$, $M_z = 12 - 5 \cdot 3 = -3 \text{ кНм}$ (растянуты верхние волокна);
- сечение $x = 3 \text{ м}$ (справа), $Q_y = -R_B = -5 \text{ кН}$, $M_z = 5 \cdot 3 = 15 \text{ кНм}$ (растянуты нижние волокна).

Поперечная сила по всей длине балки постоянна, а изгибающий момент на участках AC и CB изменяется по линейному закону и в сечении C имеет скачок, равный по величине действующему в этом сечении моменту.

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 31.

Задача 15.

Для шарнирно опертой балки с консолью, изображенной на рис. 32, построим эпюры Q_y и M_z .

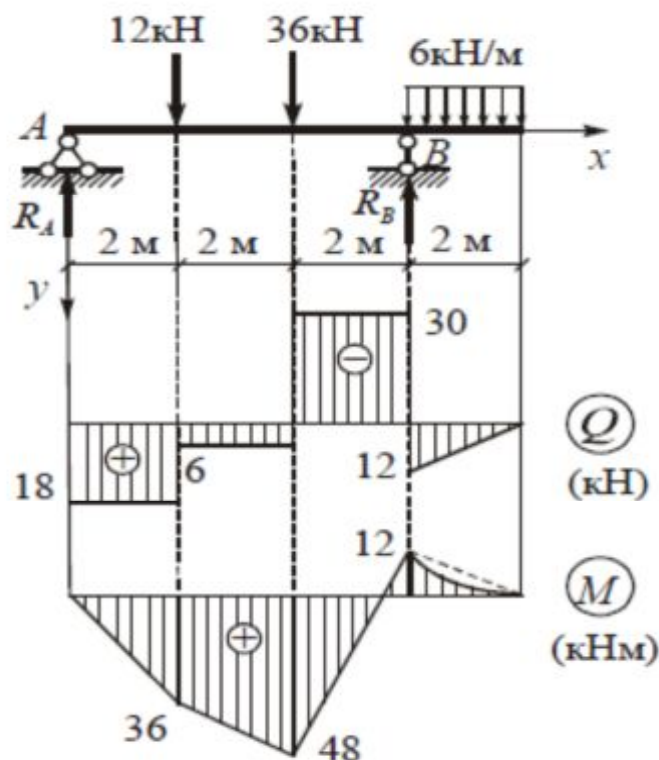


Рис. 32. К задаче 15

Найдем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0, -12 \cdot 2 - 36 \cdot 4 - 6 \cdot 2 \cdot 7 + 6R_B = 0, R_B = 42 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, 12 \cdot 4 + 36 \cdot 2 - 6 \cdot 2 \cdot 1 - 6R_A = 0, R_A = 18 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка)}, 12 + 36 + 6 \cdot 2 - 18 - 42 = 60 - 60 = 0.$$

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки:

- сечение $x = 0$, $Q_y = R_A = 18$ кН, $M_z = 0$;
- сечение $x = 2$ м (слева), $Q_y = 18$ кН, $M_z = 18 \cdot 2 = 36$ кНм (растянуты нижние волокна);
- сечение $x = 2$ м (справа), $Q_y = 18 - 12 = 6$ кН, $M_z = 36$ кНм;
- сечение $x = 4$ м (слева), $Q_y = 6$ кН, $M_z = 18 \cdot 4 - 12 \cdot 2 = 48$ кНм (растянуты нижние волокна);
- сечение $x = 6$ м (справа), $Q_y = 6 \cdot 2 = 12$ кН, $M_z = -6 \cdot 2 \cdot 1 = -12$ кНм (растянуты верхние волокна);
- сечение $x = 6$ м (слева), $Q_y = 12 - 42 = -30$ кН, $M_z = -12$ кНм;
- сечение $x = 8$ м, $Q_y = 0$, $M_z = 0$.

На консольной части балки, где имеется распределенная нагрузка, поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент — по закону квадратной параболы с выпуклостью, обращенной в сторону действия нагрузки. На остальных участках поперечная нагрузка отсутствует, поэтому поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. В сечениях, где действуют сосредоточенные силы или опорные реакции, на эпюре Q_y имеются скачки, равные по величине действующим силам, а на эпюре M_z имеются точки излома. Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 32.

Задача 16.

Для шарнирно опертой балки с консолями (рис. 33) построим эпюры Q_y и M_z .

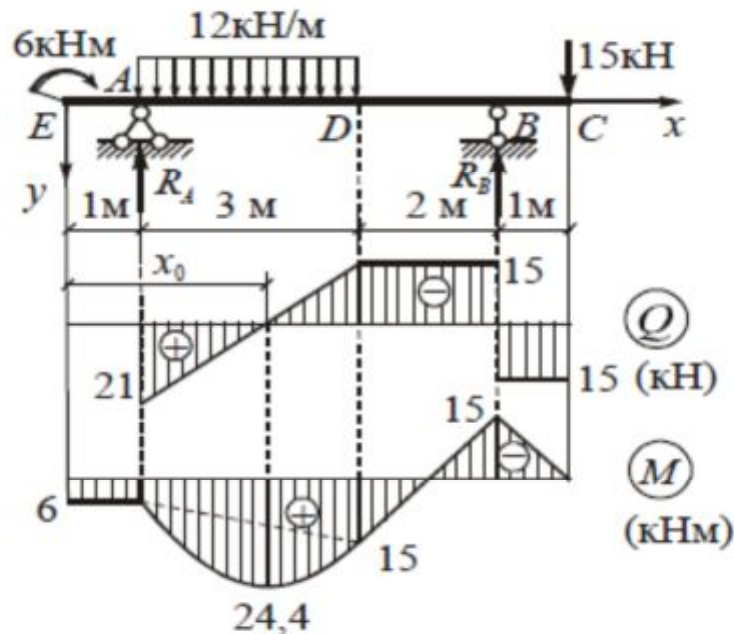


Рис. 33. К задаче 16

Находим опорные реакции:

$$\Sigma M_A = 0, -6 - 12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 15 \cdot 6 + 5R_B = 0, R_B = 30 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0, -6 + 12 \cdot 3 \cdot 3,5 - 15 \cdot 1 - 5R_A = 0, R_A = 21 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, 12 \cdot 3 + 15 - 21 - 30 = 51 - 51 = 0.$$

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки:

- сечение $x = 0$, $Q_y = 0$, $M_z = 6$ кНм (растянуты нижние волокна);
- сечение $x = 1$ м (слева), $Q_y = 0$, $M_z = 6$ кНм;
- сечение $x = 1$ м (справа), $Q_y = R_A = 21$ кН, $M_z = 6$ кНм;
- сечение $x = 4$ м, $Q_y = 21 - 12 \cdot 3 = -15$ кН, $M_z = 6 + 21 \cdot 3 - 12 \cdot 3 \cdot 1,5 = 15$ кНм (растянуты нижние волокна);
- сечение $x = 6$ м (справа), $Q_y = 15$ кН, $M_z = -15 \cdot 1 = -15$ кНм (растянуты верхние волокна);
- сечение $x = 6$ м (слева), $Q_y = 15 - 30 = -15$ кН, $M_z = -15$ кНм;
- сечение $x = 7$ м, $Q_y = 15$ кН, $M_z = 0$.

На участке с распределенной нагрузкой поперечная сила изменяется по линейному закону со сменой знака с плюса на минус. Изгибающий момент на этом участке изменяется по закону квадратной параболы и имеет экстремальное значение в сечении, где поперечная сила равна нулю. Из подобия треугольников на эпюре Q_y определяем координату сечения x_0 , где поперечная сила обращается в нуль, и для этого сечения вычисляем экстремальное значение изгибающего момента.

$$\frac{x_0 - 1}{4 - x_0} = \frac{21}{15}, \quad x_0 = 2,75 \text{ м};$$

$$M_{max} = M_z(2,75) = 6 + 21 \cdot 1,75 - 12 \cdot \frac{1,75^2}{2} = 24,4 \text{ кНм}$$

(растянуты нижние волокна)

На участке EA поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент имеет постоянное значение. На участках DB и BC поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. В сечениях A и B на эпюре Q_y имеются скачки. Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 33.

Задача 17.

Для балки с промежуточным шарниром, изображенной на рис. 34, построим эпюры Q_y и M_z .

Балка является статически определимой, поскольку для определения трех опорных реакций R_A , R_B и R_D можно составить два уравнения равновесия и дополнительное уравнение $\Sigma M_C = 0$ для левой или правой части балки.

Расчет проведем с помощью так называемой *поэтажной схемы*. Разрежем мысленно балку по промежуточному шарниру C . Балка CD не может работать самостоятельно и опирается на несущую балку AC .

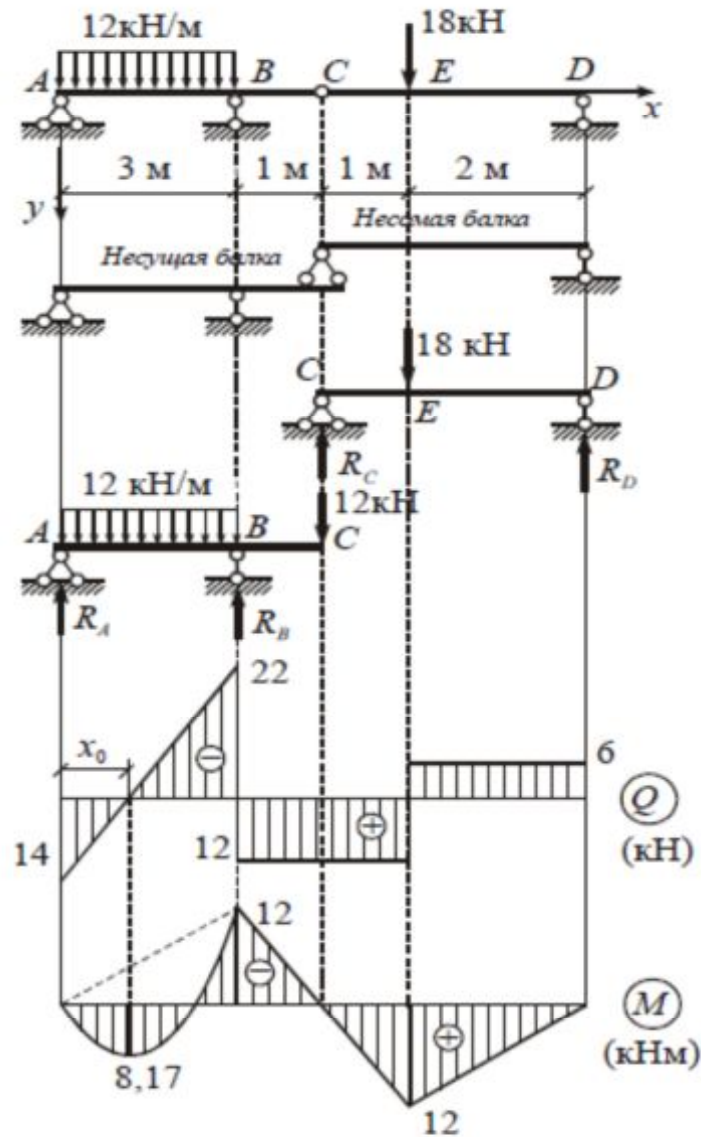


Рис. 33. К задаче 17

Вначале произведём расчёт несомой балки CD , имеющей условную шарнирную опору в сечении C . Определяем опорные реакции:

$$\Sigma M_C = 0, -18 \cdot 1 + 3R_D = 0, R_D = 6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_D = 0, 18 \cdot 2 - 3R_C = 0, R_C = 12 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, 18 - 12 - 6 = 18 - 18 = 0.$$

Выполним расчет несущей балки. Влияние несомой балки CD на несущую балку AC характеризуется действием силы 12 кН , имеющей направление, противоположное направлению условной опорной реакции R_C :

$$\Sigma M_A = 0, -12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 12 \cdot 4 + 3R_B = 0, R_B = 34 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0, 12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 12 \cdot 1 - 3R_A = 0, R_A = 14 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, 12 \cdot 3 + 12 - 34 - 14 = 48 - 48 = 0.$$

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки:
сечение $x = 0$, $Q_y = R_A = 14 \text{ кН}$, $M_z = 0$;

- сечение $x = 3 \text{ м}$ (справа), $Q_y = 12 \text{ кН}$, $M_z = -12 \cdot 1 = -12 \text{ кНм}$ (растянуты верхние волокна);
- сечение $x = 3 \text{ м}$ (слева), $Q_y = 12 - 34 = -22 \text{ кН}$, $M_z = -12 \text{ кНм}$;
- сечение $x = 4 \text{ м}$, $Q_y = 12 \text{ кН}$, $M_z = 0$;
- сечение $x = 5 \text{ м}$ (справа), $Q_y = -6 \text{ кН}$, $M_z = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кНм}$ (растянуты нижние волокна);
- сечение $x = 5 \text{ м}$ (слева), $Q_y = 12 \text{ кН}$, $M_z = 12 \cdot 1 \text{ кНм}$;
- сечение $x = 7 \text{ м}$, $Q_y = -6 \text{ кН}$, $M_z = 0$.

Из подобия треугольников на эпюре Q_y определяем координату сечения x_0 , и для этого сечения вычисляем экстремальное значение изгибающего момента:

$$\frac{x_0}{3-x_0} = \frac{14}{22}, \quad x_0 = 1,17 \text{ м};$$

$$M_{max} = M_z(1,17) = 14 \cdot 1,17 - 12 \cdot \frac{1,17^2}{2} = 8,17 \text{ кНм}$$

(растянуты нижние волокна).

На участках BE и ED поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. В сечениях B и E на эпюре поперечных сил имеются скачки, а на эпюре изгибающих моментов имеются точки излома. Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 33.

Задача 18.

Для консольного ломаного стержня, изображенного на рис. 34, a , построим эпюры N , Q и M . Предварительное определение опорных реакций в заделке не обязательно.

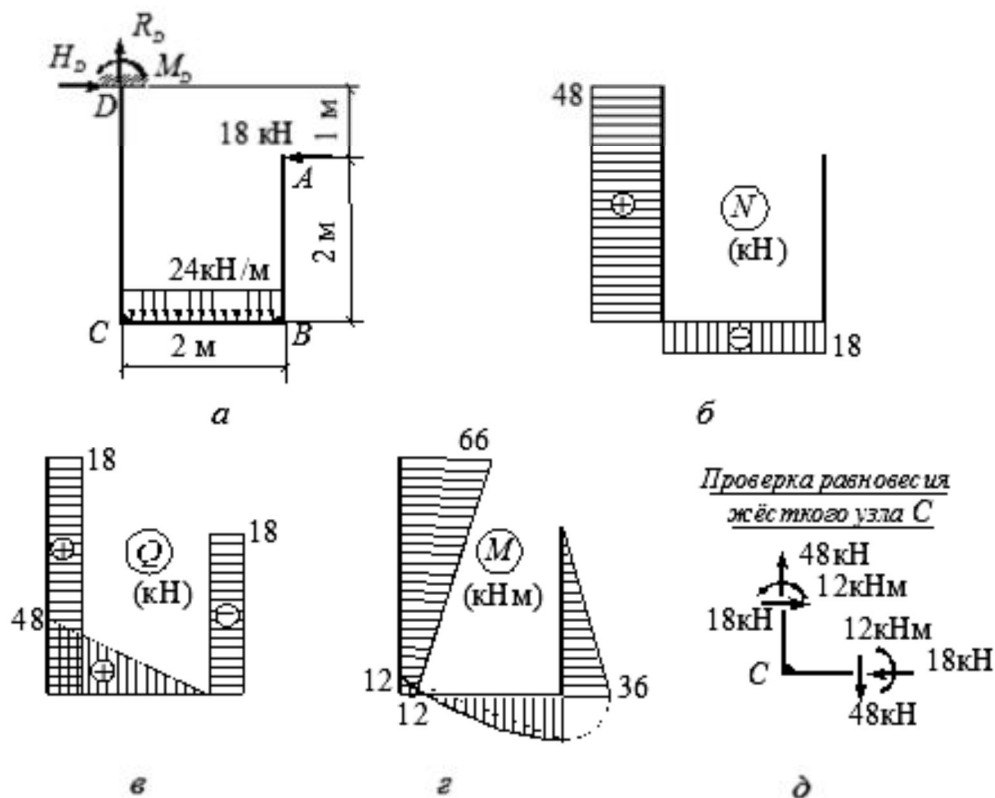


Рис. 34. Стержневая система:
 a — расчетная схема; $б$ — эпюра N ; $в$ — эпюра Q ; $г$ — эпюра M

Определяем внутренние усилия N , Q и M в характерных сечениях стержней, начиная со свободного конца.

Стержень AB :

$$N_A = N_B = 0, Q_A = Q_B = -18 \text{ кН}, M_A = 0,$$

$$M_B = 18 \cdot 2 = 36 \text{ кНм (растянуты правые волокна)}.$$

Стержень BC :

$$N_B = N_C = -18 \text{ кН (сжатие)}, Q_B = 0, Q_C = 24 \cdot 2 = 48 \text{ кН},$$

$$M_B = 36 \text{ кНм (растянуты нижние волокна)},$$

$$M_C = -24 \cdot 2 \cdot 1 + 36 = -12 \text{ кНм (растянуты верхние волокна)}.$$

Стержень CD :

$$N_C = N_D = 2 \cdot 24 = 48 \text{ кН (растяжение)},$$

$$Q_C = Q_D = 18 \text{ кН}, M_C = -12 \text{ кНм (растянуты правые волокна)},$$

$$M_D = -24 \cdot 2 \cdot 1 - 18 \cdot 1 = -66 \text{ кНм (растянуты правые волокна)}.$$

Эпюры N , Q и M приведены на рис. 34, б, в, г. Опорные реакции в заделке равны:

$$H_D = 18 \text{ кН}, R_D = 48 \text{ кН}, M_D = 66 \text{ кНм}.$$

Вырезаем жесткий узел C и проверяем его равновесие под действием усилий в стержнях, сходящихся в узле (рис. 34, δ). Условия равновесия $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M_C = 0$ выполняются.

Задача 19.

Для рамы с шарнирными опорами (рис. 35, a) построим эпюры N , Q и M .

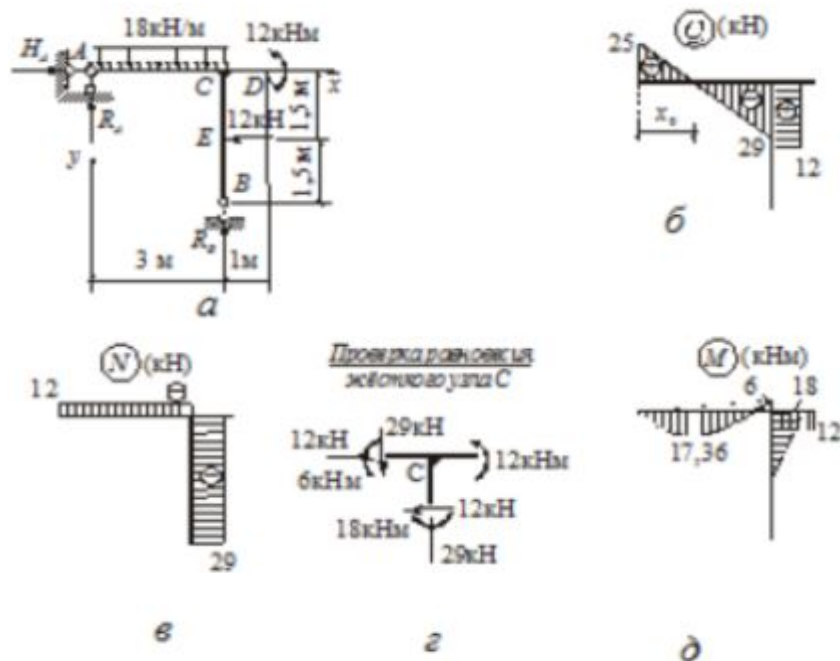


Рис. 35. Рама с шарнирными опорами:
 a — расчетная схема рамы; b — эпюра Q ; c — эпюра N ;
 e — проверка равновесия жесткого узла; d — эпюра M

Определим величины опорных реакций:

$$\Sigma X = 0, H_A - 12 = 0, H_A = 12 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_A = 0, -18 \cdot 3 \cdot 1,5 + 12 - 12 \cdot 1,5 + 3R_B = 0, R_B = 29 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0, 18 \cdot 3 \cdot 1,5 + 12 + 12 \cdot 1,5 - 12 \cdot 3 - 3R_A = 0, R_A = 25 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, 18 \cdot 3 - 25 - 29 = 54 - 54 = 0.$$

Вычисляем внутренние усилия в характерных сечениях каждого участка рамы.

Стержень AD :

- сечение A : $N = -12$ кН, $Q = 25$ кН, $M = 0$;
- сечение C (слева): $N = -12$ кН, $Q = 25 - 18 \cdot 3 = -29$ кН, $M = 25 \cdot 3 - 18 \cdot 3 \cdot 1,5 = -6$ кНм (растянуты верхние волокна);
- сечение C (справа): $N = 0$, $Q = 0$, $M = 12$ кНм (растянуты нижние волокна);
- сечение D : $N = 0$, $Q = 0$, $M = 12$ кНм.

Стержень BC :

- сечение B : $N = -29$ кН, $Q = 0$, $M = 0$;
- сечение E (снизу): $N = -29$ кН, $Q = 0$, $M = 0$;
- сечение E (сверху): $N = -29$ кН, $Q = 12$ кН, $M = 0$;
- сечение C : $N = -29$ кН, $Q = 12$ кН, $M = -12 \cdot 1,5 = -18$ кНм (растянуты правые волокна).

Из подобия треугольников на эпюре Q (рис. 35, б) определяем координату x_0 , где поперечная сила обращается в нуль, и для этого сечения вычисляем экстремальное значение изгибающего момента.

$$\frac{x_0}{3 - x_0} = \frac{25}{29}, \quad x_0 = 1,39 \text{ м};$$

$$M_{\max} = M(1,39) = 25 \cdot 1,39 - 18 \cdot \frac{1,39^2}{2} = 17,36 \text{ кНм}$$

(растянуты нижние волокна).

Эпюры N , Q и M приведены на рис. 35, б, в, д.

Вырежем мысленно узел C и проверим его равновесие под действием внутренних усилий в стержнях, сходящихся в узле (рис. 35, з). Нетрудно видеть, что уравнения равновесия $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M = 0$ выполняются.

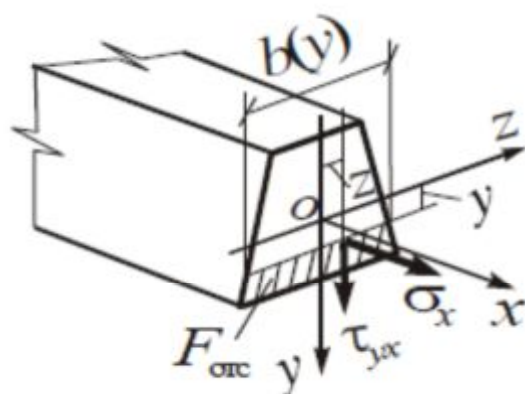
Контрольные вопросы

1. Назовите основные виды деформирования элементов конструкций.
2. Что такое расчётная схема?
3. Назовите типы опорных закреплений стержней. Какие реактивные усилия могут в них действовать?

4. В чём состоит принцип независимости действия сил?
5. В чём состоит и для чего используется метод сечений?
6. Какие внутренние усилия могут действовать в поперечных сечениях стержней? Какие размерности имеют внутренние усилия?
7. Как получить выражение для какого-либо внутреннего усилия в произвольном сечении?
8. Для чего предназначены эпюры внутренних усилий? Объясните приёмы построения и особенности эпюр внутренних усилий.
9. Какие дифференциальные зависимости имеют место между внутренними усилиями и интенсивностью внешних распределённых нагрузок? С помощью этих зависимостей объясните особенности эпюр внутренних усилий.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В БАЛКАХ ПРИ ИЗГИБЕ. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ

При прямом изгибе балки в плоскости Oxy в её поперечных сечениях действуют нормальные и касательные напряжения.



$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y; \quad (26)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{Q_y S_{отс}(y)}{J_z b(y)}. \quad (27)$$

В этих формулах M_z и Q_y — изгибающий момент и поперечная сила; $S_{отс}(y)$ — статический момент отсечённой части сечения $F_{отс}$ относительно нейтральной оси Oz ; $b(y)$ — ширина сечения (рис. 36).

Рис. 36. Напряжения при изгибе

Из формулы (26) следует, что нормальные напряжения σ_x принимают наибольшее и наименьшее значения в нижних ($y = h_n$) и в верхних ($y = -h_n$) волокнах, наиболее удалённых от нейтральной оси (рис. 37, а, б).

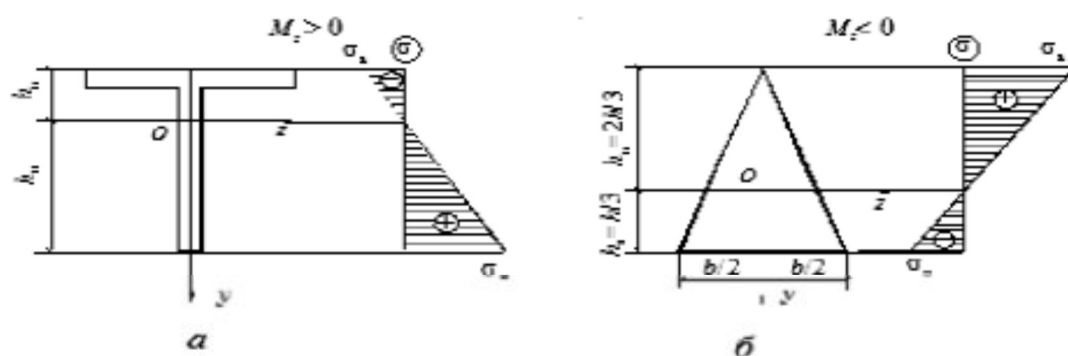


Рис. 37. Эпюры нормальных напряжений:
а — для таврового сечения; б — треугольного сечения

При этом:

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{M_z}{W_{\text{н}}}, \quad \sigma_{\text{в}} = -\frac{M_z}{W_{\text{в}}}, \quad (28)$$

где:

$$W_{\text{н}} = \frac{J_z}{h_{\text{н}}}, \quad W_{\text{в}} = \frac{J_z}{h_{\text{в}}}. \quad (29)$$

Величины $W_{\text{н}}$ и $W_{\text{в}}$ называются моментами сопротивления сечения для нижних и верхних волокон.

Наибольшие напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_{\text{ноб}} = \frac{|M_z|}{W_{\text{ном}}}, \quad (30)$$

где $W_{\text{ном}}$ — меньший из моментов сопротивления $W_{\text{н}}$ и $W_{\text{в}}$.

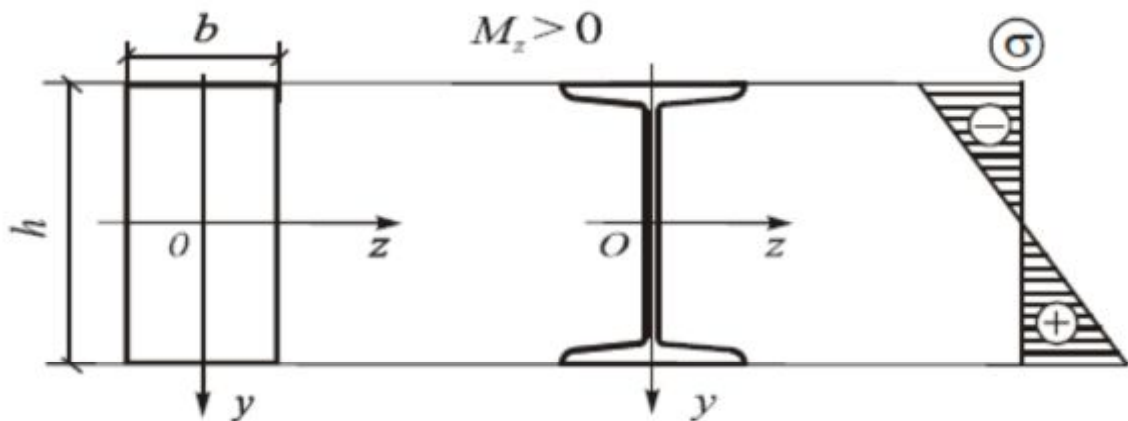


Рис. 38. Эпюра нормальных напряжений для прямоугольного и двутаврового сечений

Для сечений симметричных относительно нейтральной оси (рис. 38), $h_{\text{н}} = h_{\text{в}} = h/2$ и $W_{\text{н}} = W_{\text{в}} = W = J_z/0,5h$. При этом наибольшие напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_{\text{ноб}} = \frac{M_z}{W}. \quad (31)$$

В балках прямоугольного сечения касательные напряжения τ_{yx} изменяются по высоте сечения балки по закону квадратной параболы. Наибольшие значения они имеют в точках на уровне нейтральной оси (рис. 39, а).

Значения $\tau_{\text{ноб}} = \tau_{\text{max}}$ и τ_1 на уровне сопряжения полки и стенки двутавра (рис. 39, б) вычисляются по формулам:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_y S_{1/2}}{J_z d}, \quad \tau_1 = \frac{Q_y S_{\text{п}}}{J_z d}, \quad (32)$$

где $S_{1/2}$ — статический момент половины сечения двутавра; $S_{\text{п}}$ — статический момент полки. При этом:

$$S_{\text{п}} = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right). \quad (33)$$

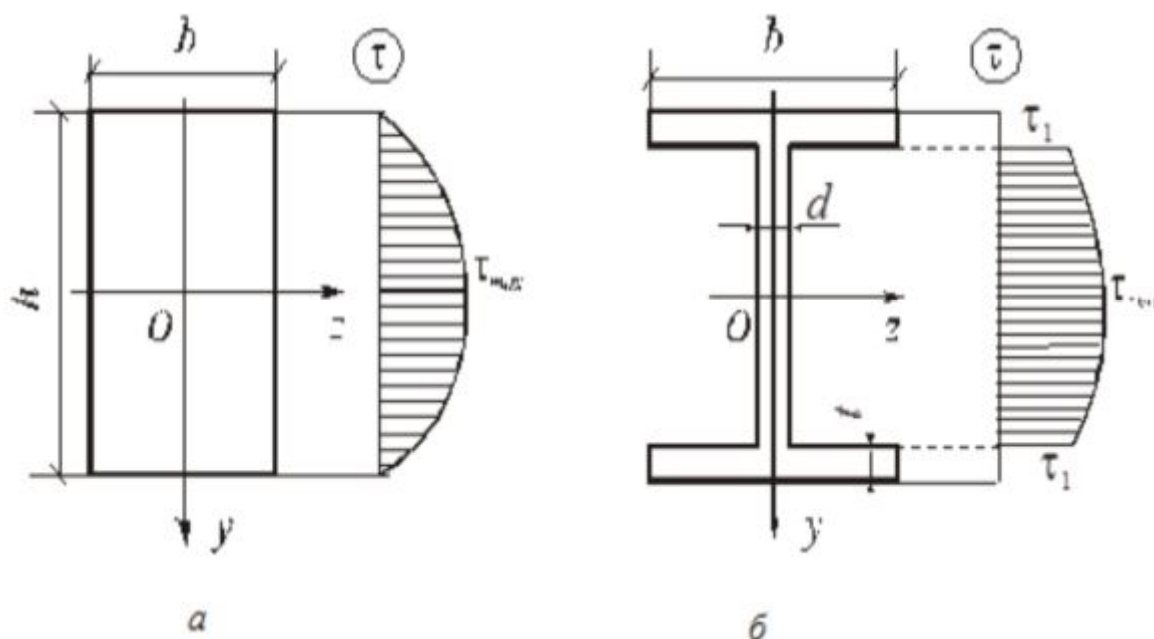


Рис. 39. Эпюры касательных напряжений:
а — для прямоугольно сечения, б — для двутаврового сечения

При изгибе балки величины главных напряжений σ_1 и σ_2 и углы наклона нормалей к главным площадкам α_1 и α_2 определяются по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{yx}^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{yx}^2}; \quad (34)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_2}. \quad (35)$$

При расчёте изгибаемых элементов строительных конструкций на прочность применяется метод расчёта по предельным состояниям. В этом случае условие прочности записывается в виде:

$$\sigma_{\text{нб}} \leq \gamma_c R, \quad (36)$$

где R — расчётное сопротивление материала балки, а γ_c — коэффициент условий работы.

Для хрупких материалов расчётное сопротивление при растяжении R_p существенно меньше, чем при сжатии R_c . В этом случае должны выполняться условия прочности по наибольшим растягивающим и наибольшим сжимающим напряжениям:

$$\sigma_p^{\text{нб}} \leq \gamma_c R_p, \quad \sigma_c^{\text{нб}} \leq \gamma_c R_c. \quad (37)$$

В случае расчёта на прочность по методу допускаемых напряжений в формулах (36) и (37) величины в правых частях необходимо заменить соответственно на $[\sigma]$, $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$.

Для балок из материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, с поперечным сечением, симметричным относительно нейтральной оси, условие прочности (36) записывается в виде:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W} \leq \gamma_c R. \quad (38)$$

Для сечений, несимметричных относительно нейтральной оси (типа тавра и др.):

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_{\text{нм}}} \leq \gamma_c R. \quad (39)$$

В формулах (38) и (39) $M_{\text{расч}} = \gamma_f M_{\text{нб}}$ — наибольший изгибающий момент в опасном сечении балки от расчётных нагрузок, γ_f — коэффициент надёжности по нагрузке.

С использованием условий прочности (36) — (39) решаются следующие задачи: *проверка прочности балки; подбор сечения; определение несущей способности (грузоподъёмности).*

Решение первой задачи сводится к проверке выполнения условий прочности при известных нагрузках, форме и размерах сечения и свойствах материала.

Решение второй задачи сводится к определению размеров сечения заданной формы при известных нагрузках и свойствах материала. В этом случае используются расчётные формулы, получаемые из условий прочности (38) или (39):

$$W \geq \frac{M_{\text{расч}}}{\gamma_c R} \text{ или } W_{\text{нм}} \geq \frac{M_{\text{расч}}}{\gamma_c R} \quad (40)$$

При решении задачи по определению грузоподъёмности балки вначале из условия прочности (38) или (39) находится величина расчётного значения изгибающего момента:

$$M_{\text{расч}} \leq \gamma_c R W \text{ или } M_{\text{расч}} \leq \gamma_c R W_{\text{нм}} \quad (41)$$

затем по известному значению $M_{\text{расч}}$ определяются соответствующие величины нагрузок.

В некоторых случаях возникает необходимость использования условий прочности по наибольшим касательным напряжениям или по наибольшим главным напряжениям:

$$\tau_{\text{нб}} \leq \gamma_c R_s, \quad |\sigma_{1,2}| = \left| \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{yx}^2} \right| \leq \gamma_c R. \quad (42)$$

Здесь R_s — расчётное сопротивление материала при сдвиге.

Работа балки за пределом упругости материала зависит от вида диаграммы $\sigma = f(\varepsilon)$. Примем, что для материала балки можно использовать диаграмму Прандтля (рис. 40, а). Согласно этой диаграмме при напряжениях, меньших предела текучести ($\sigma_x < \sigma_T$), справедлив закон Гука, а при $\sigma_x = \sigma_T$ деформации неограниченно возрастают.

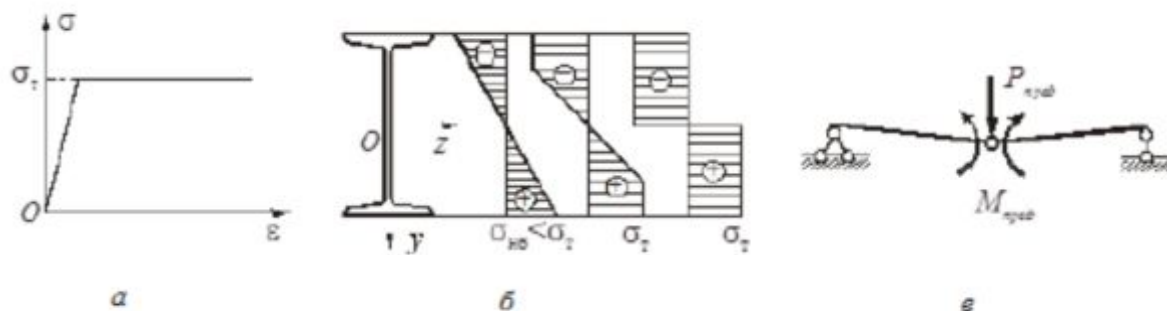


Рис. 40. Балка:

а — диаграмма Прандтля для балки, б — напряжения в балке за пределом упругости, в — образование пластического шарнира

В случае изгиба балки при постепенном увеличении нагрузки напряжения в крайних волокнах опасного сечения достигают предела текучести σ_T и возникают пластические деформации. При дальнейшем увеличении нагрузки пластические деформации распространяются вглубь сечения балки (рис. 40, б). Предельное состояние ($M_x = M_{пред}$) наступает, когда напряжения во всех волокнах в нижней и верхней частях балки достигают значения $\sigma_x = \sigma_T$. В опасном сечении балки возникает так называемый *пластический шарнир* (рис. 40, в).

Предельный момент в пластическом шарнире определяется по формуле:

$$M_{пред} = \sigma_T W_T \quad (43)$$

Величина W_T — называется *пластическим моментом сопротивления*. Для симметричных сечений она равна:

$$W_T = 2S_{1/2} = 2 \int_{F/2} y dF \quad (44)$$

Определив предельный момент, можно найти величину коэффициента запаса как отношение предельного момента к наибольшему изгибающему моменту от действия нормативных нагрузок:

$$n = \frac{M_{\text{пред}}}{M_{\text{нб}}} \quad (45)$$

Решение задач

Задача 20.

Для балки, показанной на рис. 41, построим эпюры Q_y и M_z , подберём сечение балки в виде стального прокатного двутавра. В расчётах примем коэффициент надёжности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$, коэффициент условий работы $\gamma_c = 1,0$, расчётное сопротивление $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, расчётное сопротивление при сдвиге $R_s = 130 \text{ МПа} = 13 \text{ кН/см}^2$, предел текучести $\sigma_T = 230 \text{ МПа} = 23 \text{ кН/см}^2$.

Расчёт начнём с определения опорных реакций и построения эпюр Q_y и M_z :

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot 5 - 40 \cdot 1 \cdot 5,5 - 20 \cdot 2,5 + 10 = 0, R_B = 52 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, -R_A \cdot 5 + 10 + 20 \cdot 2,5 - 40 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0, R_A = 8 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка)}, 20 + 40 \cdot 1 - 8 - 52 = 60 - 60 = 0.$$

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 41. Опасным сечением является сечение над опорой B , где $Q = Q_{\text{нб}} = 40 \text{ кН}$ и $M = M_{\text{нб}} = 20 \text{ кНм}$.

Вычислим расчётные значения наибольшего изгибающего момента и наибольшей поперечной силы:

$$M_{\text{расч}} = M_{\text{нб}} \gamma_f = 20 \cdot 1,2 = 24 \text{ кНм};$$

$$Q_{\text{расч}} = Q_{\text{нб}} \gamma_f = 40 \cdot 1,2 = 48 \text{ кН}$$

И требуемый момент сопротивления:

$$W \geq \frac{M_{\text{расч}}}{\gamma_c R} = \frac{24 \cdot 10^2}{1,0 \cdot 21} = 115 \text{ см}^3$$

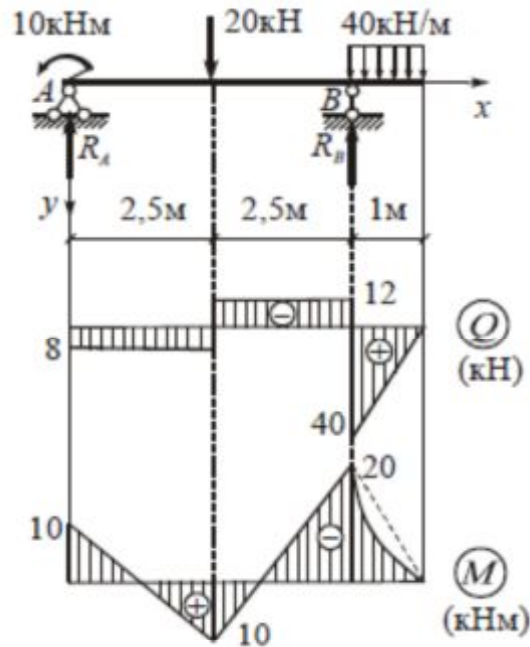


Рис. 41. Расчетная схема балки, эпюры внутренних усилий Q , M

По сортаменту принимаем двутавр I18 и выписываем необходимые геометрические характеристики сечения (рис. 42):

$$h = 18 \text{ см}, b = 9 \text{ см}, d = 0,51 \text{ см}, t = 0,81 \text{ см};$$

$$J_z = 1290 \text{ см}^4, W = 143 \text{ см}^3, S_{y/2} = 81,4 \text{ см}^3.$$

Вычисляем статический момент полки относительно нейтральной оси Oz :

$$S_n = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 9 \cdot 0,81 \left(\frac{18}{2} - \frac{0,81}{2} \right) = 62,7 \text{ см}^3.$$

Для опасного сечения, где Q_y и M_z имеют наибольшие значения, построим эпюры σ_x и τ_{yx} .

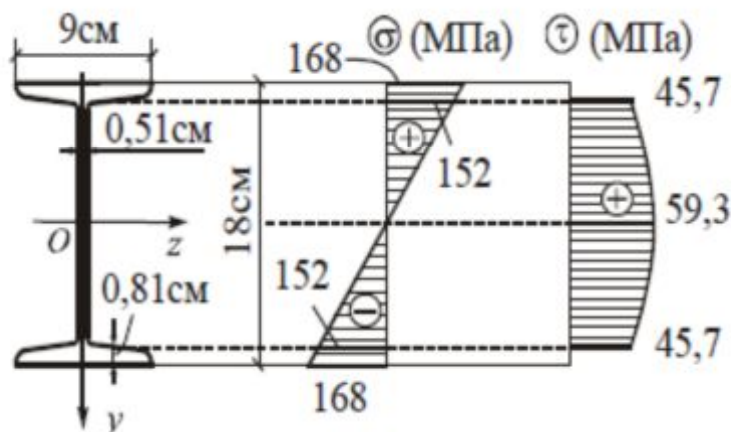


Рис. 42. Эпюры нормальных и касательных напряжений в балке

С этой целью найдём характерные значения напряжений и проверим прочность балки по нормальным и касательным напряжениям:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{вб}} &= \frac{M_{\text{расч}}}{W} = \frac{24 \cdot 10^2}{143} = 16,8 \text{ кН/см}^2 = \\ &= 168 \text{ МПа} < \gamma_c R = 210 \text{ МПа}\end{aligned}$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_{\text{расч}} S_{1/2}}{J_z d} = \frac{48 \cdot 81,4}{1290 \cdot 0,51} = 5,93 \text{ МПа} < \gamma_c R = 130 \text{ МПа};$$

$$\tau_1 = \frac{Q_{\text{расч}} S_{\text{п}}}{J_z d} = \frac{48 \cdot 62,7}{1290 \cdot 0,51} = 4,57 \text{ кН/см}^2 = 45,7 \text{ МПа};$$

Эпюры нормальных напряжений σ_x и касательных напряжений τ_{yx} приведены на рис. 42. Вычислим значения главных напряжений и углы наклона нормалей к главным площадкам в опасном сечении балки, в стенке, на уровне её сопряжения с полкой ($y = 9 - 0,81 = 8,19$ см) в зоне растяжения:

$$\sigma_x = \frac{M_{расч}}{J_z} y = \frac{24 \cdot 10^2}{1290} \cdot 8,19 = 15,2 \text{ кН/см}^2 = 152 \text{ МПа}, \tau_{yx} = \tau_1 = 45,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{152}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{152}{2}\right)^2 + 45,7^2} = 76 \pm 88,7,$$

$$\sigma_1 = 164,7 \text{ МПа}, \sigma_2 = -12,7 \text{ МПа};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_1} = \frac{45,7}{164,7} = 0,277, \quad \alpha_1 = 15,5^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_2} = \frac{45,7}{-12,7} = -3,60, \quad \alpha_2 = -74,5^\circ.$$

На рис. 43 показаны нормальные, касательные и главные напряжения, действующие на гранях бесконечно малых элементов, выделенных из стенки двутавра, на уровне сопряжения с полкой.

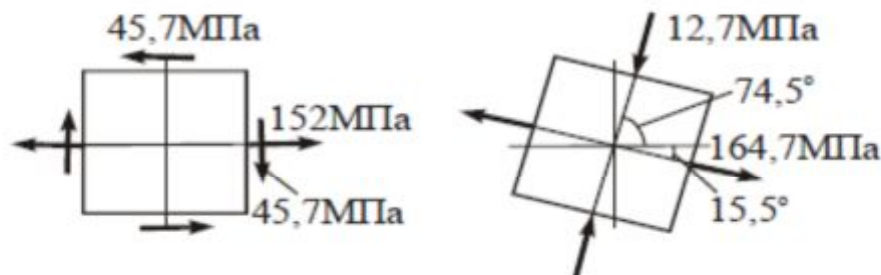


Рис. 43. Нормальные, касательные и главные в стенке двутаврового сечения

Проверяем условие прочности по главным напряжениям:

$$\sigma_1 = 164,7 \text{ МПа} < \gamma_c R = 210 \text{ МПа}$$

Вычисляем значение предельного момента в пластической стадии деформирования. С учётом формул (18) и (19), имеем:

$$M_{пред} = 2\sigma_T S_{1/2} = 2 \cdot 23 \cdot 81,4 = 3744,4 \text{ кНсм} = 37,4 \text{ кНм}.$$

Пластический шарнир образуется в сечении над опорой B , где действует наибольший изгибающий момент.

Вычислим величину коэффициента запаса:

$$n = \frac{M_{\text{пред}}}{M_{\text{нб}}} = \frac{37,4}{20} = 1,87.$$

Задача 21.

Для балки, показанной на рис. 44, построим эпюры Q_y и M_z , подберём сечение балки в виде стального прокатного двутавра.

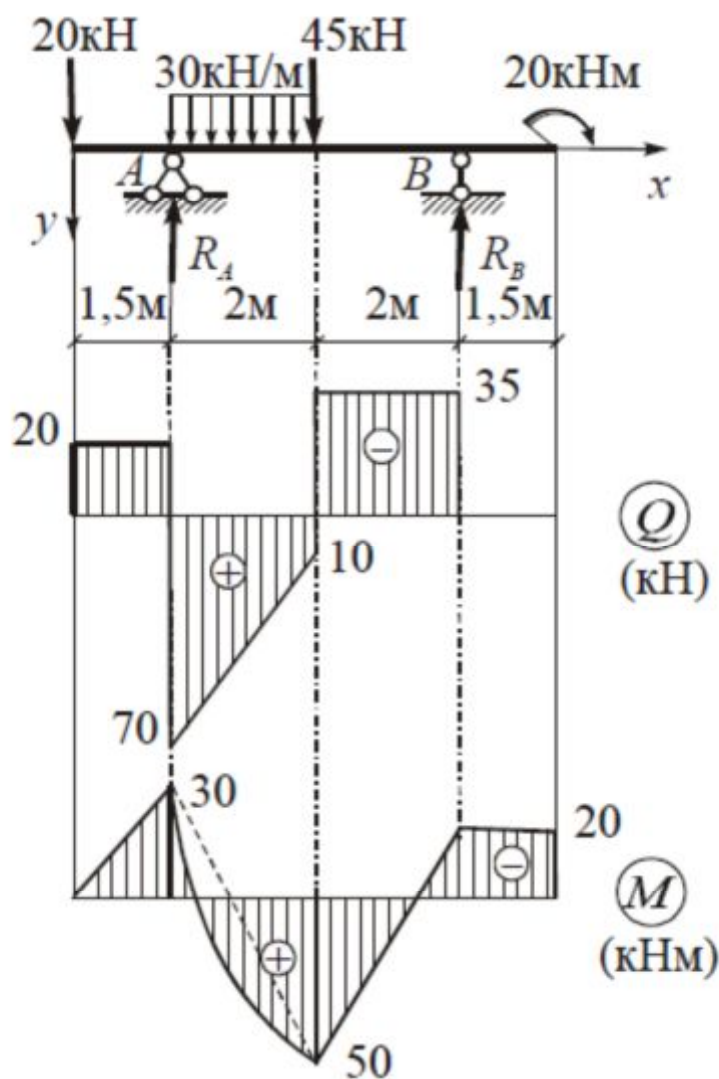


Рис. 44. Схема балки и эпюры M, Q

В расчётах примем $\gamma_f = 1,2$, $\gamma_c = 0,9$, $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, $R_s = 130 \text{ МПа} = 13 \text{ кН/см}^2$, $\sigma_{\tau} = 230 \text{ МПа} = 23 \text{ кН/см}^2$.

Определим опорные реакции и построим эпюры Q_y и M_z :

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot 4 + 20 \cdot 1,5 - 30 \cdot 2 \cdot 1 - 45 \cdot 2 - 20 = 0, R_B = 35 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, -R_A \cdot 4 + 20 \cdot 5,5 + 30 \cdot 2 \cdot 3 + 45 \cdot 2 - 20 = 0, R_A = 90 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка)}, 20 + 30 \cdot 2 + 45 - 90 - 35 = 125 - 125 = 0.$$

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 44.

Поперечная сила Q_y имеет наибольшее значение в сечении над опорой A ($x = 1,5 \text{ м}$), а изгибающий момент M_z — в сечении $x = 3,5 \text{ м}$.

Вычислим расчётные значения наибольшего изгибающего момента и поперечной силы для опасного сечения ($x = 3,5 \text{ м}$):

$$M_{\text{расч}} = M_{\text{нб}} \gamma_f = 50 \cdot 1,2 = 60 \text{ кНм};$$

$$Q_{\text{расч}} = Q_{\text{нб}} \gamma_f = 35 \cdot 1,2 = 42 \text{ кН}.$$

Требуемый момент сопротивления равен:

$$W \geq \frac{M_{\text{расч}}}{\gamma_c R} = \frac{60 \cdot 10^2}{0,9 \cdot 21} = 318 \text{ см}^2.$$

По сортаменту принимаем двутавр 127 и выписываем необходимые геометрические характеристики сечения (рис. 45, a).

$$h = 27 \text{ см}, b = 12,5 \text{ см}, d = 0,6 \text{ см}, t = 0,98 \text{ см};$$

$$J_z = 5010 \text{ см}^4, W = 371 \text{ см}^3, S_{y/2} = 210 \text{ см}^3.$$

Вычисляем статический момент полки относительно нейтральной оси Oz :

$$S_n = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 12,5 \cdot 0,98 \left(\frac{27}{2} - \frac{0,98}{2} \right) = 159,4 \text{ см}^3.$$

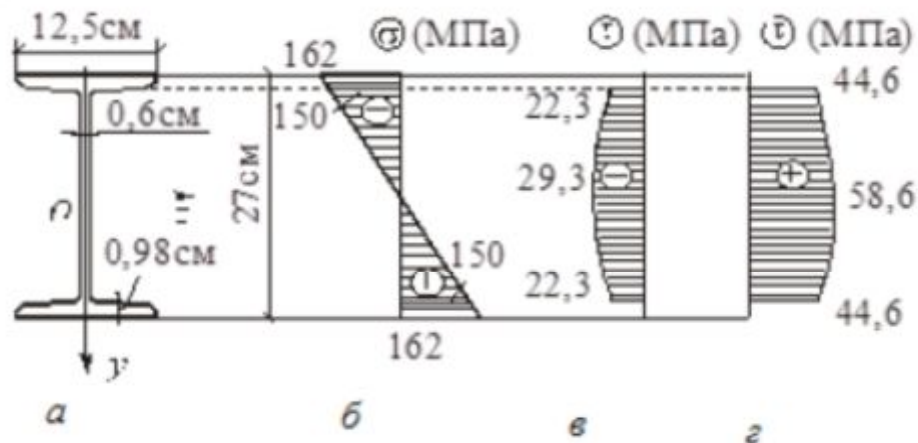


Рис. 45. Балка:

a — сечение балки, выбранное из условия прочности; $b, в$ — эпюры σ и τ в опасном сечении; $г$ — эпюра наибольших касательных напряжений

Для опасного сечения построим эпюры σ_x и τ_{yx} . Найдём наибольшее значение нормальных напряжений и проверим условие прочности:

$$\sigma_{\text{ноб}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W} = \frac{60 \cdot 10^3}{371} = 16,2 \text{ кН/см}^2 = 162 \text{ МПа} < \gamma_c R = 0,9 \cdot 210 = 189 \text{ МПа}$$

Найдём характерные значения касательных напряжений:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_{\text{расч}} S_{1/2}}{J_z d} = \frac{42 \cdot 210}{5010 \cdot 0,6} = 2,93 \text{ кН/см}^2 = 29,3 \text{ МПа}$$

$$\tau_1 = \frac{Q_{\text{расч}} S_n}{J_z d} = \frac{42 \cdot 159,4}{5010 \cdot 0,6} = 2,23 \text{ кН/см}^2 = 22,3 \text{ МПа}$$

Эпюры напряжений σ_x и τ_{yx} для опасного сечения ($x = 3,5$ м) приведены на рис. 45, б, в.

Для построения эпюры τ_{yx} в сечении $x = 1,5$ м, где Q_y имеет наибольшее значение, и проверки условия прочности по касательным напряжениям найдём $\tau_{нб}$ и τ_1 . Учитывая, что для этого сечения:

$$Q_{\text{расч}} = Q_{нб} \gamma_f = 70 \cdot 1,2 = 84 \text{ кН},$$

Получим:

$$\tau_{нб} = \frac{Q_{\text{расч}} S_{1/2}}{J_z d} = \frac{84 \cdot 210}{5010 \cdot 0,6} = 58,6 \text{ кН/см}^2 = 58,6 \text{ МПа} < \gamma_c R_s = 0,9 \cdot 130 = 117 \text{ МПа}$$

$$\tau_1 = \frac{Q_{\text{расч}} S_{II}}{J_z d} = \frac{84 \cdot 159,4}{5010 \cdot 0,6} = 4,46 \text{ кН/см}^2 = 4,46 \text{ МПа}.$$

Эпюра τ_{yx} для сечения $x = 1,5$ м показана на рис. 45, г.

Вычислим значения главных напряжений и углы наклона нормалей к главным площадкам в опасном сечении балки, в стенке, на уровне её сопряжения с полкой ($y = 13,5 - 0,98 = 12,52$ см) в зоне растяжения.

Учитывая, что в этом случае получим:

$$\sigma_x = \frac{M_{\text{расч}}}{J_z} y = \frac{60 \cdot 10^2}{5010} \cdot 12,52 = 15,0 \text{ кН/см}^2 = 150 \text{ МПа}, \tau_{xy} = \tau_1 = -22,3 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{150}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{150}{2}\right)^2 + (-22,3)^2} = 75 \pm 78,2;$$

$$\sigma_1 = 153,2 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -3,2 \text{ МПа};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_1} = \frac{-22,3}{153,2} = -0,146, \quad \alpha_1 = -8,3^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_2} = \frac{-22,3}{-3,2} = 6,969, \quad \alpha_2 = 81,7^\circ.$$

На рис. 46 показаны нормальные, касательные и главные напряжения, действующие на гранях бесконечно малых элементов, выделенных из стенки двутавра, на уровне сопряжения с полкой.

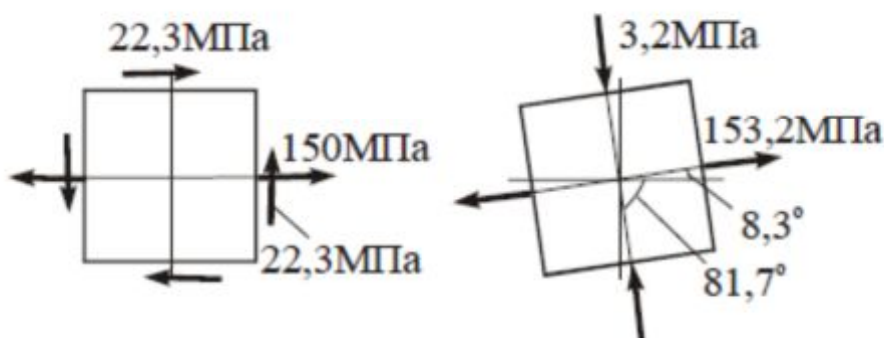


Рис. 46. Нормальные, касательные и главные напряжения

Проверяем условие прочности по главным напряжениям:

$$\sigma_1 = 153,2 \text{ МПа} < \gamma_c R = 0,9 \cdot 210 = 189 \text{ МПа} .$$

Вычисляем значение предельного момента в пластической стадии деформирования:

$$M_{\text{пред}} = 2\sigma_t S_{1/2} = 2 \cdot 23 \cdot 210 = 9660 \text{ кНсм} = 96,6 \text{ кНм} .$$

Пластический шарнир образуется в опасном сечении ($x = 3,5 \text{ м}$), где действует наибольший изгибающий момент.

Величина действительного коэффициента запаса равна:

$$n = \frac{M_{\text{пред}}}{M_{\text{нб}}} = \frac{96,6}{50} = 1,93. \quad n = \frac{M}{M_{\text{нб}}}$$

Задача 22.

Для стальной балки указанного на рис. 47 сечения определим из условия прочности по методу предельных состояний величину расчётной нагрузки q . Построим эпюру σ_x для опасного сечения. В расчетах примем $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_c = 0,9$.

Определяем опорные реакции:

$$\Sigma M_A = 0, -q \cdot 5 \cdot 2,5 - 2q \cdot 1 \cdot 5,5 + 5R_B = 0, R_B = 4,7q;$$

$$\Sigma M_B = 0, q \cdot 5 \cdot 2,5 - 2q \cdot 1 \cdot 0,5 - 5R_A = 0, R_A = 2,3q;$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, q \cdot 5 + 2q \cdot 1 - 2,3q - 4,7q = 7q - 7q = 0.$$

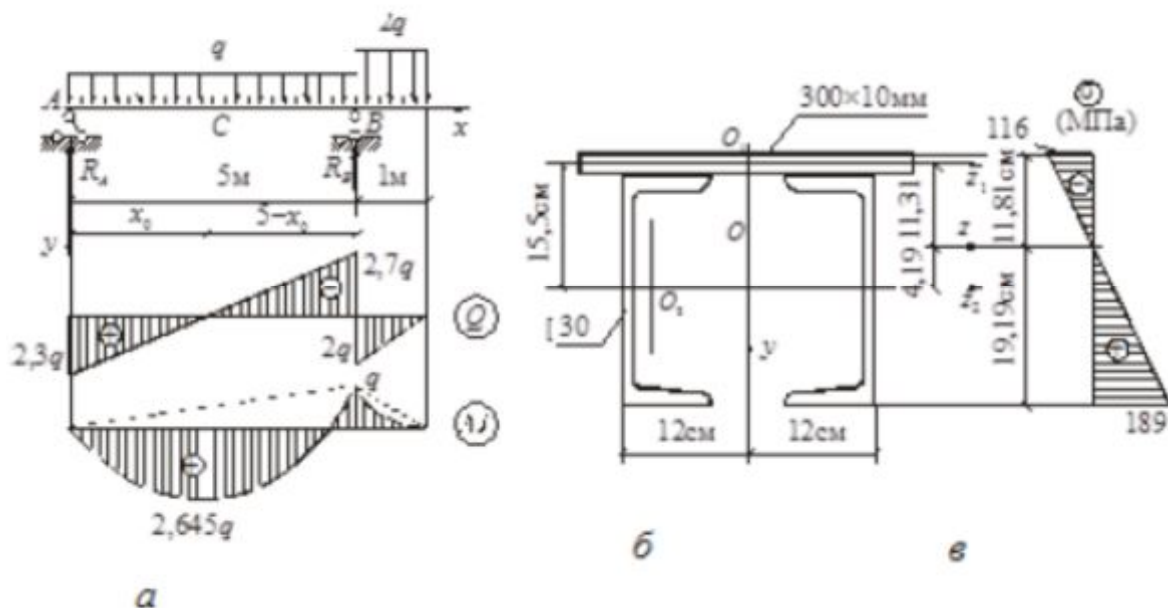


Рис. 47. Балка:
 а — схема балки, эпюры Q , M ; б — сечение балки;
 в — эпюра нормальных напряжений в опасном сечении

Строим эпюры Q , и M_z (рис. 47, а). Определяем экстремальное значение изгибающего момента в пролете. Из пропорции находим:

$$\frac{2,3q}{x_0} = \frac{2,7q}{5-x_0}, x_0 = 2,3 \text{ м};$$

$$M_{max} = M_z(2,3) = R_A x_0 - \frac{q x_0^2}{2} = 2,645q.$$

Определяем положение центра тяжести сечения и моменты сопротивления для верхних и нижних волокон балки (рис. 47, б). Данные для сечения прокатного швеллера [30 берем из сортамента:

$$S_{z_2} = 30 \cdot 1 \cdot (-15,5) = -465 \text{ см}^3;$$

$$y_0 = \frac{S_{z_2}}{F} = -\frac{465}{2 \cdot 40,5 + 30 \cdot 1} = -4,19 \text{ см};$$

$$J_z = 2(5810 + 40,5 \cdot 4,19^2) + \left(\frac{30 \cdot 1^3}{12} + 30 \cdot 11,31^2 \right) = 16882 \text{ см}^4;$$

$$W_n = \frac{16882}{11,81} = 1429 \text{ см}^3, \quad W_n = \frac{16882}{19,19} = 880 \text{ см}^3.$$

Поскольку материал балки одинаково сопротивляется растяжению и сжатию ($R_p = R_c = R$), то достаточно обеспечить выполнение одного условия прочности (14) в сечении с наибольшим изгибающим моментом (сечение С).

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_n} \leq \gamma_c R.$$

Из этого условия находим:

$$M_{\text{расч}} = M_{\text{max}} = 2,645 \cdot 10^4 q \leq W_n \gamma_c R = 880 \cdot 21 \cdot 0,9.$$

Отсюда находим величину расчётной нагрузки:

$$q = 0,629 \text{ кН/см} = 62,9 \text{ кН/м}.$$

Числовой коэффициент 2,645 в выражении для $M_{\text{расч}}$ имеет размерность м^2 . Поэтому для выражения $M_{\text{расч}}$ в кНсм надо ввести множитель 10^4 .

Определяем значения нормальных напряжений в крайних волокнах балки в сечении C:

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{M_C}{W_{\text{н}}} = \frac{2,645 \cdot 10^4 \cdot 0,629}{880} = 18,9 \text{ кН/см}^2 = 189 \text{ МПа} = \gamma_c R = 189 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{в}} = -\frac{M_C}{W_{\text{в}}} = -\frac{2,645 \cdot 10^4 \cdot 0,629}{1429} = -11,6 \text{ кН/см}^2 = -116 \text{ МПа}.$$

Прочность балки по нормальным напряжениям обеспечена.
Эпюра σ_x для сечения C приведена на рис. 48, в.

Задача 22.

Для балки указанного сечения (рис. 49) определим величину расчётной нагрузки q из условия прочности по нормальным напряжениям и построим эпюру σ в опасном сечении. В расчетах примем $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_c = 1,0$.

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0, q \cdot 1 \cdot 0,5 - q \cdot 2 \cdot 3 + 4R_B = 0, R_B = 1,375q;$$

$$\sum M_B = 0, q \cdot 1 \cdot 4,5 + q \cdot 2 \cdot 1 - 4R_A = 0, R_A = 1,625q;$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка)}, q \cdot 1 + q \cdot 2 - 1,625q - 1,375q = 3q - 3q = 0$$

Строим эпюры Q_y и M_z (рис. 49, а). Определяем экстремальное значение изгибающего момента в пролете. Из пропорции находим:

$$\frac{1,375q}{x_0} = \frac{0,625q}{2 - x_0}, x_0 = 1,375 \text{ м};$$

$$M_{\text{max}} = M_z(1,375) = R_B x_0 - \frac{q x_0^2}{2} = 0,9453q.$$

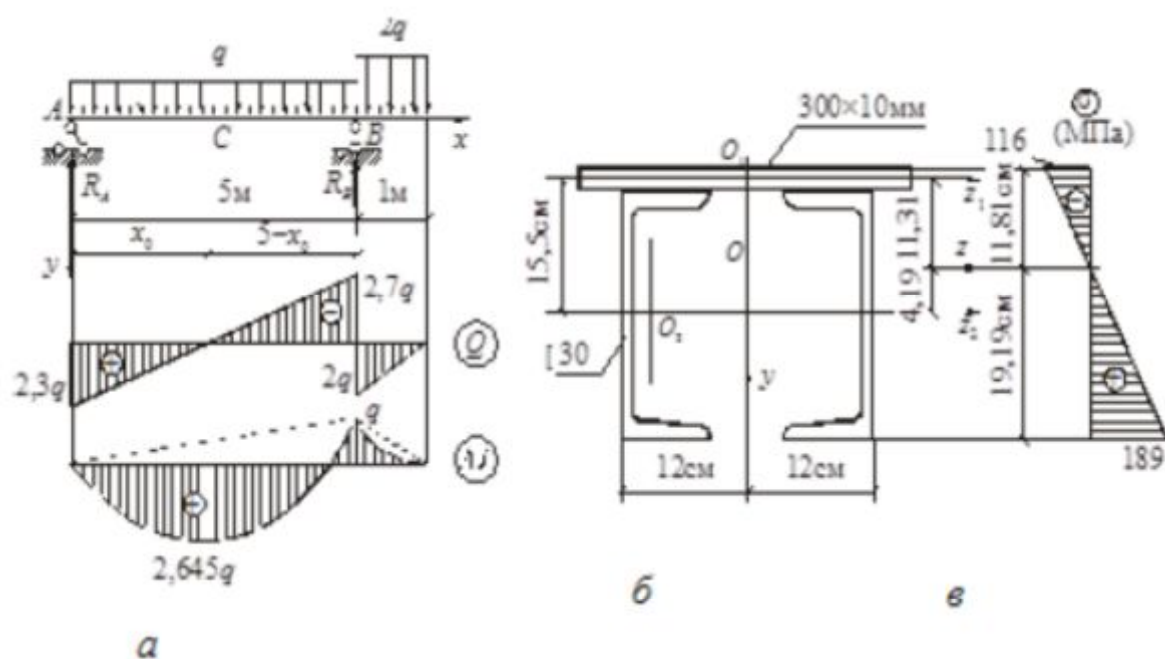


Рис. 49. Балка:

a — схема балки, эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
б — поперечное сечение балки, *в* — эпюра нормальных напряжений в опасном сечении

Числовые коэффициенты у изгибающих моментов имеют размерность м^2 .

Определяем положение центра тяжести сечения и моменты сопротивления для верхних и нижних волокон сечения (рис. 49, б).

$$S_{z_2} = 30 \cdot 1 \cdot (-18,5) + 15 \cdot 1 \cdot 18,5 = -277,5 \text{ см}^3;$$

$$y_0 = \frac{S_{z_2}}{F} = -\frac{277,5}{30 \cdot 1 + 36 \cdot 1 + 15 \cdot 1} = -3,43 \text{ см};$$

$$J_z = \frac{30 \cdot 1^3}{12} + 30 \cdot (18,5 - 3,43)^2 + \frac{1 \cdot 36^3}{12} + 36 \cdot 3,43^2 + \\ + \frac{15 \cdot 1^3}{12} + 15 \cdot (18,5 + 3,43)^2 \cdot 15 = 18364 \text{ см}^4;$$

$$W_{\text{н}} = \frac{J_z}{h_{\text{н}}} = \frac{18364}{15,57} = 1179 \text{ см}^3,$$

$$W_{\text{к}} = \frac{J_z}{h_{\text{к}}} = \frac{18364}{22,43} = 818,7 \text{ см}^3.$$

Поскольку материал балки одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, достаточно обеспечить выполнение одного условия прочности (рис. 50) в сечении с наибольшим изгибающим моментом:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_{\text{н}}} \leq \gamma_c R; \text{ К}$$

$$M_{\text{расч}} = M_{\text{max}} = 0,9453 \cdot 10^4 q \leq W_{\text{н}} \leq \gamma_c R = 818,7 \cdot 21 \cdot 1,0.$$

Отсюда находим: $q = 1,82 \text{ кН/см} = 182 \text{ кН/м}$. Размерность числового коэффициента у изгибающего момента переведена в сантиметры.

Определяем напряжения в крайних волокнах балки в сечении С.

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{M_C}{W_{\text{н}}} = \frac{0,9453 \cdot 10^4 \cdot 1,82}{818,7} = 21 \text{ кН/см}^2 = 210 \text{ МПа} = \gamma_c R = 210 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{к}} = -\frac{M_C}{W_{\text{к}}} = -\frac{0,9453 \cdot 10^4 \cdot 1,82}{1179} = -14,6 \text{ кН/см}^2 = -146 \text{ МПа}.$$

Прочность балки обеспечена. Эпюра σ_x приведена на рис. 49, в.

Задача 23.

Для чугунной балки указанного поперечного сечения (рис. 50) определим грузоподъемность и построим эпюру нормальных напряжений в опасном сечении. Допускаемые напряжения чугуна при растяжении и сжатии равны:

$$[\sigma_p] = 80 \text{ МПа} = 8 \text{ кН/см}^2, \quad [\sigma_c] = 150 \text{ МПа} = 15 \text{ кН/см}^2.$$

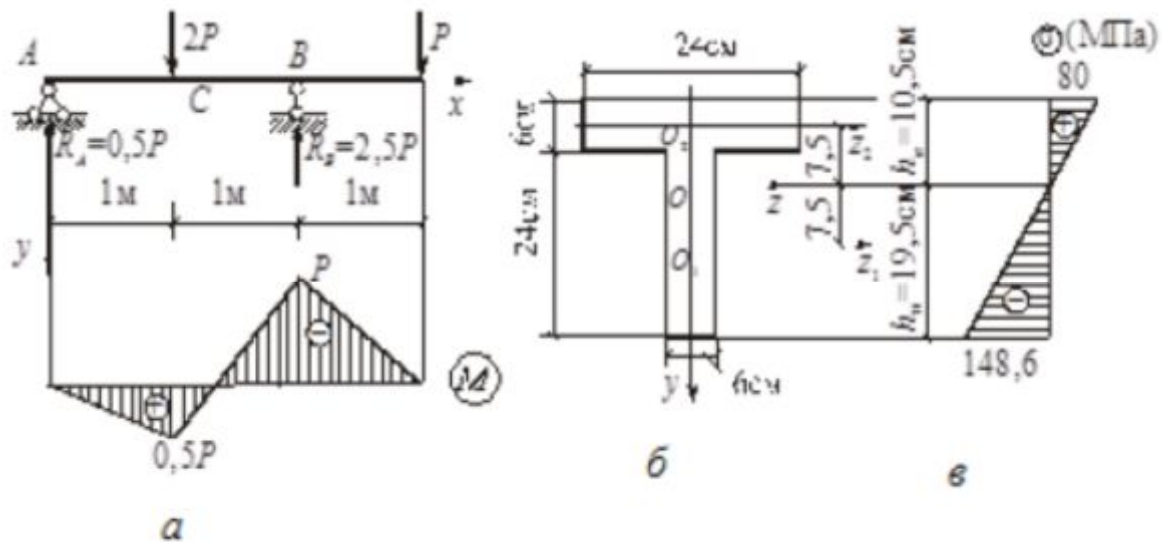


Рис. 50. Балка:

a — схема балки, эпюра изгибающих моментов; *б* — поперечное сечение балки;
в — эпюра нормальных напряжений в опасном сечении

Используя уравнения статики, определяем опорные реакции:

$$R_A = 0,5 P, R_B = 2,5 P,$$

и строим эпюру изгибающих моментов M_z (рис. 50, *a*).

Используя в качестве вспомогательной ось O_1z_1 , проходящую через центр тяжести нижнего прямоугольника (рис. 50, *б*), определим положение центра тяжести сечения:

$$y_0 = \frac{S_z}{F} = \frac{24 \cdot 6 \cdot 15}{2 \cdot 24 \cdot 6} = 7,5 \text{ см}.$$

Вычислим осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси Oz и моменты сопротивления для нижних и верхних волокон:

$$J_z = \frac{6 \cdot 24^3}{12} + \frac{24 \cdot 6^3}{12} + 2 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 7,5^2 = 23544 \text{ см}^4;$$

$$W_{\text{н}} = \frac{J_z}{h_{\text{н}}} = \frac{23544}{19,5} = 1207 \text{ см}^3,$$

$$W_{\text{в}} = \frac{J_z}{h_{\text{в}}} = \frac{23544}{10,5} = 2242 \text{ см}^3.$$

Для определения величины наибольшей допустимой силы P используем условия прочности по наибольшим растягивающим и наибольшим сжимающим напряжениям для двух сечений балки — сечения C , где действует наибольший изгибающий момент $M_C = 0,5P$, растягивающий нижние волокна, и сечения B , где действует наибольший изгибающий момент $M_B = P$, растягивающий верхние волокна.

В сечении C наибольшие растягивающие напряжения в нижних волокнах равны (рис. 50, в):

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_C}{W_{\text{н}}} = \frac{0,5P \cdot 100}{W_{\text{н}}} = \frac{50P}{W_{\text{н}}}.$$

Из условия прочности:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_C}{W_{\text{н}}} \leq [\sigma_{\text{р}}]$$

Находим:

$$50P \leq [\sigma_{\text{р}}] W_{\text{н}}, \quad P \leq \frac{8 \cdot 1207}{50} = 193,1 \text{ кН}.$$

Проверка прочности по наибольшим сжимающим напряжениям не требуется, так как в сечении C $|\sigma_{\text{с}}| < \sigma_{\text{н}}$, а $[\sigma_{\text{с}}] > [\sigma_{\text{р}}]$.

В сечении B наибольшие растягивающие напряжения возникают в верхних волокнах:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_B}{W_{\text{в}}} = \frac{P \cdot 100}{W_{\text{в}}}.$$

Из условия прочности:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_B}{W_{\text{в}}} \leq [\sigma_p]$$

Находим:

$$100P \leq [\sigma_p]W_{\text{в}}, \quad P \leq \frac{8 \cdot 2242}{100} = 179,36 \text{ кН}.$$

Наибольшие сжимающие напряжения в нижних волокнах равны:

$$\sigma_{\text{н}} = -\frac{M_B}{W_{\text{н}}} = -\frac{P \cdot 100}{W_{\text{н}}}.$$

Из условия прочности:

$$|\sigma_{\text{н}}| = \frac{M_B}{W_{\text{н}}} \leq [\sigma_c]$$

Находим:

$$100P \leq [\sigma_c]W_{\text{н}}, \quad P \leq \frac{15 \cdot 1207}{100} = 181,05 \text{ кН}.$$

Таким образом более опасным является сечение B , и допустимая величина силы равна $P = 179,36$ кН.

Определим напряжения в нижних и верхних волокнах опасного сечения:

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{M_B}{W_{\text{н}}} = -\frac{179,36 \cdot 100}{1207} = -14,86 \text{ кН/см}^2 = -148,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{в}} = -\frac{M_B}{W_{\text{в}}} = \frac{179,36 \cdot 100}{2242} = 8 \text{ кН/см}^2 = 80 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений в сечении B приведена на рис. 50, в.

Контрольные вопросы

1. Какой вид деформирования балки называется чистым изгибом? Какие внутренние усилия и напряжения действуют в поперечных сечениях балки при чистом изгибе и как они определяются?
2. Какие гипотезы принимаются при чистом изгибе?
3. Как определяются напряжения в поперечных сечениях балки при поперечном изгибе?
4. По каким законам изменяются нормальные и касательные напряжения в поперечных сечениях балки при изгибе?
5. Как определяются наибольшие напряжения в поперечных сечениях балки с одной и с двумя осями симметрии?
6. Какое сечение называется опасным сечением?
7. Как определяется момент сопротивления?
8. Как записывается условие прочности при изгибе балки?
9. Как определяются главные напряжения при изгибе?
10. Что такое пластический шарнир?

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ И РАМАХ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

При изгибе ось балки искривляется (рис. 51), что сопровождается появлением прогибов $v(x)$ и углов поворота поперечных сечений $\varphi(x) = v'(x)$, которые принимаются равными углом наклона касательной к изогнутой оси. Эти величины называются линейными и угловыми перемещениями.

Прогибы считаются положительными, если они происходят в положительном направлении оси Oy .

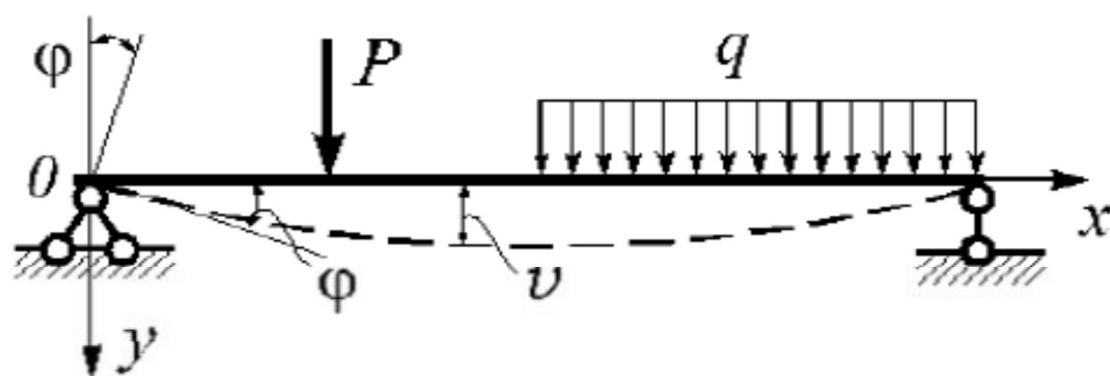


Рис. 51. Прогибы и углы поворота поперечных сечений балки

Углы поворота считаются положительными при повороте касательной к изогнутой оси по ходу часовой стрелки.

Для определения законов изменения прогибов балок $v(x)$ при прямом изгибе используются дифференциальные уравнения второго порядка:

$$EJv''(x) = -M(x), \quad (46)$$

Или четвертого порядка:

$$EJv^{IV}(x) = q(x), \quad (47)$$

где EJ — жёсткость балки при изгибе; $M(x)$ — изгибающий момент в поперечном сечении; $q(x)$ — распределённая поперечная нагрузка.

При определении перемещений с помощью метода начальных параметров используется выражение:

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 + \Delta\varphi (x - a_1) \Big|_2 - \frac{M(x - a_2)^2}{2! EJ} \Big|_3 - \frac{P(x - a_3)^3}{3! EJ} \Big|_4 + \frac{q(x - a_4)^4}{4! EJ} \Big|_5 - \frac{q(x - a_5)^4}{4! EJ} \Big|_6. \quad (48)$$

Здесь v_0, φ_0, M_0, Q_0 — начальные параметры, представляющие собой прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу в начальном сечении $x = 0$, и $\Delta\varphi$ — скачок угла поворота в промежуточном шарнире.

Формула (48) соответствует воздействиям и участкам, показанным на рис. 52.

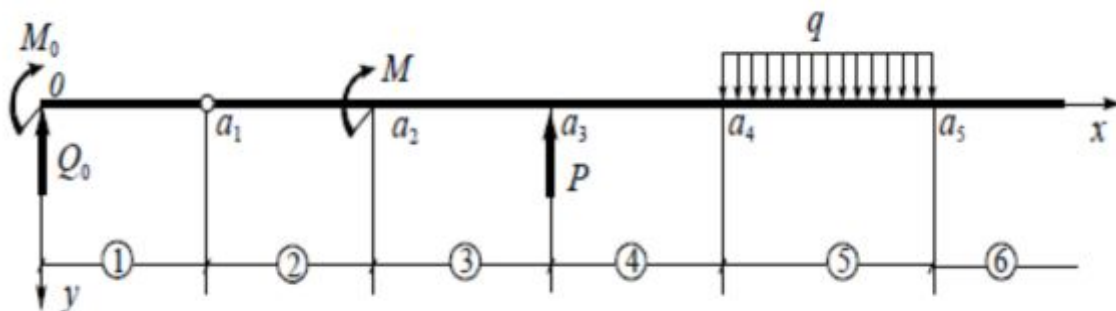


Рис. 52. Схема нагрузки при определении прогибов и углов поворота сечений методом начальных параметров

Неизвестные в начале расчёта начальные параметры и скачки $\Delta\varphi$ подлежат определению из соответствующих граничных условий.

Общим методом определения перемещений в стержневых системах является метод Мора. Метод Мора сводится к вычислению интегралов, которые представляют собой работу единичных сил $\bar{P} = 1$ или единичных моментов $\bar{M} = 1$ на искомым перемещениях.

Для балок и рам используется формула Мора, содержащая изгибающие моменты:

$$\Delta_{ik} = \sum_i \int_{z_i} \frac{\bar{M}_k M_P}{EJ} ds \quad (49)$$

Здесь \bar{M}_k — изгибающий момент от действия единичной силы или единичного момента, прикладываемых по направлению искомого перемещения; M_P — изгибающий момент от действия заданных нагрузок. При определении линейных перемещений прикладывается единичная сила, а при определении угловых перемещений — единичный момент.

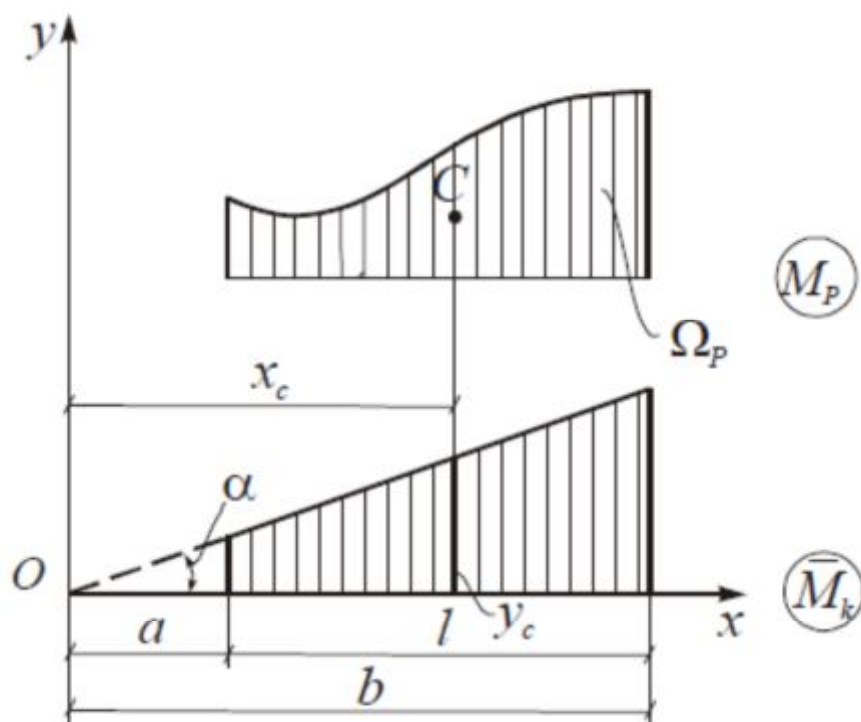


Рис. 53. К выводу правила А.К. Верещагина

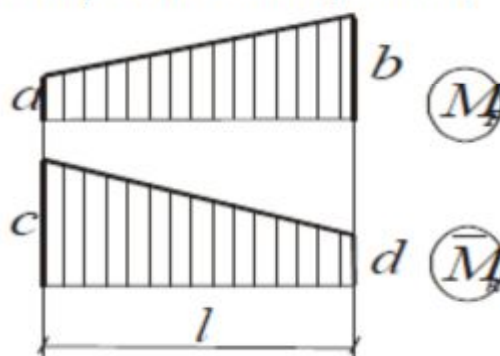
Для балок и стержневых систем, состоящих из прямых стержней с постоянной жёсткостью EJ , вычисление интегралов Мора можно произвести с помощью правила А.К. Верещагина (правило «перемножения» эпюр) по формуле:

$$\Delta_{kP} = \int_a^b \frac{\overline{M}_k M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} y_c \Omega_P, \quad (50)$$

где y_c — ордината в линейной эпюре \overline{M}_k под центром тяжести площади Ω_P криволинейной эпюры M_P (рис. 53). При использовании формулы (50) сложную эпюру надо разбить на простые фигуры, у которых известны площадь и положение центра тяжести. Наиболее часто элементами разбиения являются трапеции и квадратные параболы. Площадь квадратной параболы на участке длиной l с нулевыми начальным и конечным значениями определяется по формуле:

$$\Omega_q = \frac{ql^3}{12},$$

где q — интенсивность равномерно распределённой нагрузки. Если эпюры M_P и \overline{M}_k на участке длиной l представляют собой трапеции (рис. 54), то формулу (50) можно привести к следующему виду (формула «перемножения» трапеций):



$$\Delta_{kP} = \frac{l}{6EJ} (2ac + 2bd + ad + bc). \quad (51)$$

Рис. 54 К формуле «перемножения» трапеций

Если интеграл Мора имеет положительное значение, то направление перемещения совпадает с направлением действия соответствующих единичной силы или единичного момента. В противном случае перемещение противоположно этому направлению.

Решение задач

Задача 24.

Для шарнирно опертой балки (рис. 55, *a*) построим эпюры Q и M и подберем сечение из условия прочности в виде стального прокатного двутавра. Определим с помощью метода начальных параметров и метода Мора значения прогибов и углов поворота в характерных сечениях балки и построим эпюры ν и φ . Определим числовые значения $\nu_{\text{кб}}$ и $\varphi_{\text{кб}}$.

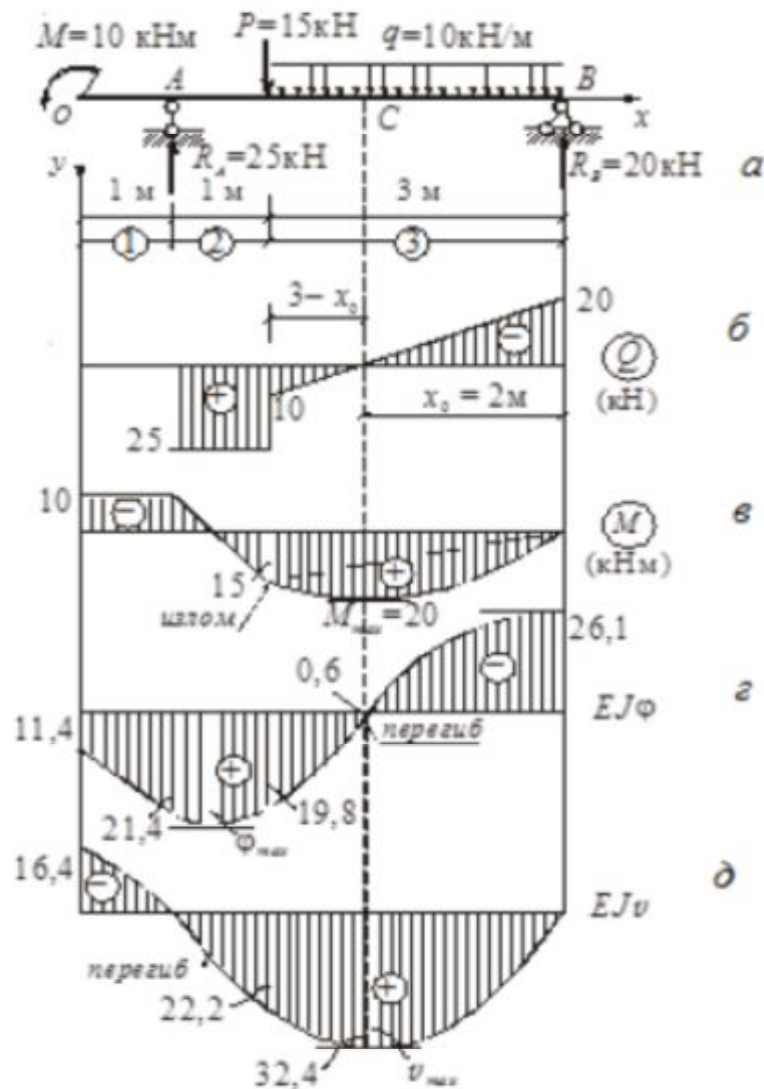


Рис. 55. Балка:

a — схема балки; *б* — эпюра поперечных сил; *в* — эпюра изгибающих моментов; *г* — эпюра углов поворота сечений; *д* — эпюра прогибов

В расчетах примем $R = 21 \text{ кН/см}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_f = 1,2$ и $\gamma_c = 0,9$.

Определяем опорные реакции:

$$\Sigma M_A = 0, 10 - 15 \cdot 1 - 10 \cdot 3 \cdot 2,5 + 4R_B = 0, R_B = 20 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0, 10 + 15 \cdot 3 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5 - 4R_A = 0, R_A = 25 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, 15 + 10 \cdot 3 - 25 - 20 = 45 - 45 = 0.$$

Определяем значения изгибающих моментов и поперечных сил в характерных сечениях балки и строим эпюры Q и M (рис. 55, б, в).

Определяем экстремальное значение M_{max} в пролете. Из пропорции находим положение сечения, где действует максимальный момент:

$$\frac{20}{x_0} = \frac{10}{3 - x_0}, x_0 = 2 \text{ м};$$

$$M_{max} = M_C = 20 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 20 \text{ кНм}.$$

Определяем расчетное значение наибольшего изгибающего момента:

$$M_p = M_n \gamma_f = 20 \cdot 1,2 = 24 \text{ кНм}.$$

Требуемый момент сопротивления сечения равен:

$$W_z \geq \frac{M}{\gamma_c R} = \frac{24 \cdot 10^2}{0,9 \cdot 21} = 127 \text{ см}^3.$$

По сортаменту принимаем: I 18, $W_z = 143 \text{ см}^3$, $J_z = 1290 \text{ см}^4$.

Составим с помощью формулы (48) выражение для прогиба балки в пределах трех характерных участков:

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 - \frac{R_A (x-1)^3}{3! EJ} \Big|_2 + \frac{P(x-2)^3}{3! EJ} + \frac{q(x-2)^4}{4! EJ} \Big|_3.$$

Начальные параметры равны:

$$x = 0, M_0 = -10 \text{ кНм}, Q_0 = 0.$$

Для определения неизвестных начальных параметров v_0 и φ_0 используем граничные условия:

$$x = 1 \text{ м}, \quad v = v_0 + 1 \cdot \varphi_0 + \frac{10 \cdot 1^2}{2 EJ} = 0;$$

$$x = 5 \text{ м}, \quad v = v_0 + 5\varphi_0 + \frac{10 \cdot 5^2}{2 EJ} - \frac{25 \cdot 4^3}{6 EJ} + \frac{15 \cdot 3^3}{6 EJ} + \frac{10 \cdot 3^4}{24 EJ} = 0.$$

Решаем систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} v_0 + \varphi_0 &= -\frac{5}{EJ}; \\ v_0 + 5\varphi_0 &= \frac{40,42}{EJ}. \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_0 = -\frac{16,4}{EJ}, \quad \varphi_0 = \frac{11,4}{EJ}.$$

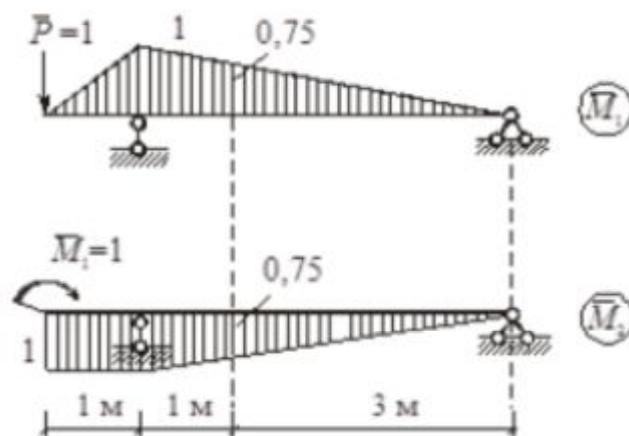


Рис. 56. Эпюры изгибающих моментов от единичных воздействий

В качестве проверки вычислим значения v_0 и φ_0 с помощью метода Мора. Построим единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 56) и вычислим интегралы Мора с помощью правила А.К. Верещагина, то есть «перемножим» единичные эпюры с эпюрой моментов от действия заданных нагрузок $M = M_P$:

$$v_0 = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 + \frac{1}{6} (2 \cdot 1 \cdot 10 - 2 \cdot 0,75 \cdot 15 + 10 \cdot 0,75 - 15 \cdot 1) - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 - \frac{10 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 \right] = -\frac{16,35}{EJ};$$

$$\varphi_0 = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[-10 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{6} (-2 \cdot 10 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 0,75 - 10 \cdot 0,75 + 15 \cdot 1) + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{10 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 \right] = \frac{11,35}{EJ}.$$

Результаты определения v_0 и φ_0 с помощью метода начальных параметров и метода Мора практически совпали. Запишем окончательные выражения для $v(x)$ и $\varphi(x)$.

$$v(x) = \frac{1}{EJ} \left[-16,4 + 11,4x + \frac{10x^2}{2!} \Big|_1 - \frac{25(x-1)^3}{3!} \Big|_2 + \frac{15(x-2)^3}{3!} + \frac{10(x-2)^4}{4!} \Big|_3 \right];$$

$$\varphi(x) = v'(x) = \frac{1}{EJ} \left[11,4 + 10x \Big|_1 - \frac{25(x-1)^2}{2!} \Big|_2 + \frac{15(x-2)^2}{2!} + \frac{10(x-2)^3}{3!} \Big|_3 \right].$$

Вычислим значения v и φ в характерных сечениях балки:

$$x=0, \quad v=v_0 = -\frac{16,4}{EJ}, \quad \varphi=\varphi_0 = \frac{11,4}{EJ};$$

$$x = 1 \text{ м}, \quad v = 0 \text{ (граничное условие)}, \quad \varphi = \frac{1}{EJ} (11,4 + 10 \cdot 1) = \frac{21,4}{EJ};$$

$$x = 2 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left(-16,4 + 11,4 \cdot 2 + \frac{10 \cdot 2^2}{2} - \frac{25 \cdot 1^3}{6} \right) = \frac{22,2}{EJ},$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left(11,4 + 10 \cdot 2 - \frac{25 \cdot 1^2}{2} \right) = \frac{18,9}{EJ};$$

$$x = 3 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left(-16,4 + 11,4 \cdot 3 + \frac{10 \cdot 3^2}{2} - \frac{25 \cdot 2^3}{6} + \frac{15 \cdot 1^3}{6} + \frac{10 \cdot 1^4}{24} \right) = \frac{32,4}{EJ},$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left(11,4 + 10 \cdot 3 - \frac{25 \cdot 2^2}{2} + \frac{15 \cdot 1^2}{2} + \frac{10 \cdot 1^3}{6} \right) = \frac{0,6}{EJ};$$

$$x = 5 \text{ м}, \quad v = 0 \text{ (граничное условие)},$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left(11,4 + 10 \cdot 5 - \frac{25 \cdot 4^2}{2} + \frac{15 \cdot 3^2}{2} + \frac{10 \cdot 3^3}{6} \right) = -\frac{26,1}{EJ}.$$

В качестве проверки вычислим некоторые значения v и φ с помощью метода Мора. Соответствующие единичные эпюры приведены на рис. 57.

$$\begin{aligned} v(2) &= \int_0^2 \frac{\overline{M}_3 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{6} (2 \cdot 15 \cdot 0,75 - 10 \cdot 0,75) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} 15 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 0,75 + \frac{10 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 0,75 \right] = \frac{22,19}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\varphi(5) = \int_0^l \frac{\bar{M}_4 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{6} (-2 \cdot 15 \cdot 0,25 + 10 \cdot 0,25) - \right. \\ \left. - \frac{3}{6} (2 \cdot 15 \cdot 0,25 + 15 \cdot 1) - \frac{10 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1 + 0,25}{2} \right] = -\frac{26,15}{EJ}.$$

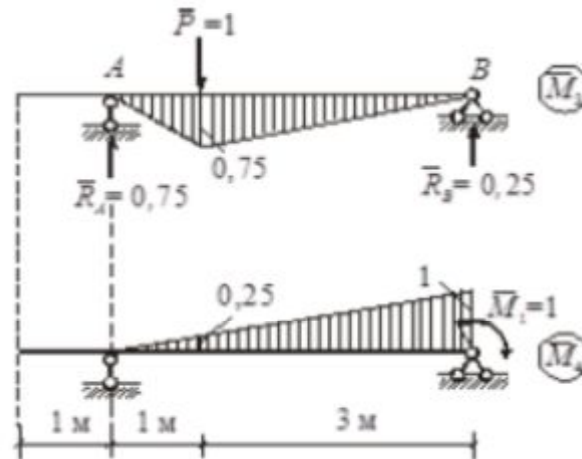


Рис. 57. Эпюры изгибающих моментов от единичных воздействий

Результаты вычислений практически совпали. Строим эпюры v и φ , отметив их особенности (рис. 55, ε , δ). Ординаты эпюр умножены на жесткость EJ .

В сечении, где Q обращается в нуль, на эпюре φ имеется точка перегиба. В сечении, где $M = 0$ (участок 2) на эпюре φ имеется экстремум φ_{max} , а на эпюре v — точка перегиба. В сечении, где $\varphi = 0$ (участок 3), прогиб имеет экстремальное значение v_{max} .

В пределах участка 1 φ изменяется по линейному закону. В сечении B касательная к эпюре φ параллельна оси.

Определим числовые значения v и φ . Размерность длины в числителе переведем в сантиметры:

$$v(3) = \frac{32,4}{EJ} = \frac{32,4 \cdot (10^2)^3}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 1290} = 1,2 \text{ см};$$

$$\varphi(5) = -\frac{26,1}{EJ} = -\frac{26,1 \cdot (10^2)^2}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 1290} = -0,00963 \text{ рад} = -0,55^\circ.$$

Задача 25.

Для балки с промежуточным шарниром (рис. 58, а) определим значения поперечных сил, изгибающих моментов, прогибов и углов поворота в характерных сечениях и построим эпюры этих величин.

Разбиваем балку на несомую BC и несущую AB части (балки). Производим статический расчет несомой балки BC (рис. 58, б):

$$\Sigma M_B = 0, -14 \cdot 3 \cdot 1,5 - 12 + 5R_C = 0, R_C = 15 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_C = 0, 14 \cdot 3 \cdot 3,5 - 12 - 5R_B = 0, R_B = 27 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, 14 \cdot 3 - 27 - 15 = 42 - 42 = 0$$

Эпюры Q и M приведены на рис. 58, в, г.

Определяем экстремальное значение изгибающего момента в пролете BC :

$$\frac{27}{x_0} = \frac{15}{3 - x_0}, x_0 = 1,93 \text{ м};$$

$$\begin{aligned} M_{max} &= 27 \cdot 1,93 - \frac{14 \cdot 1,93^2}{2} = \\ &= 26,04 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Запишем выражение для прогиба балки с помощью метода начальных параметров:

$$\begin{aligned} v(x) &= v_0 + \phi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \\ &- \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 + \Delta \phi_B (x - 2) - \\ &- \frac{P(x - 2)^3}{3! EJ} + \frac{q(x - 2)^4}{4! EJ} \Big|_2 - \\ &- \frac{q(x - 5)^4}{4! EJ} \Big|_3. \end{aligned}$$

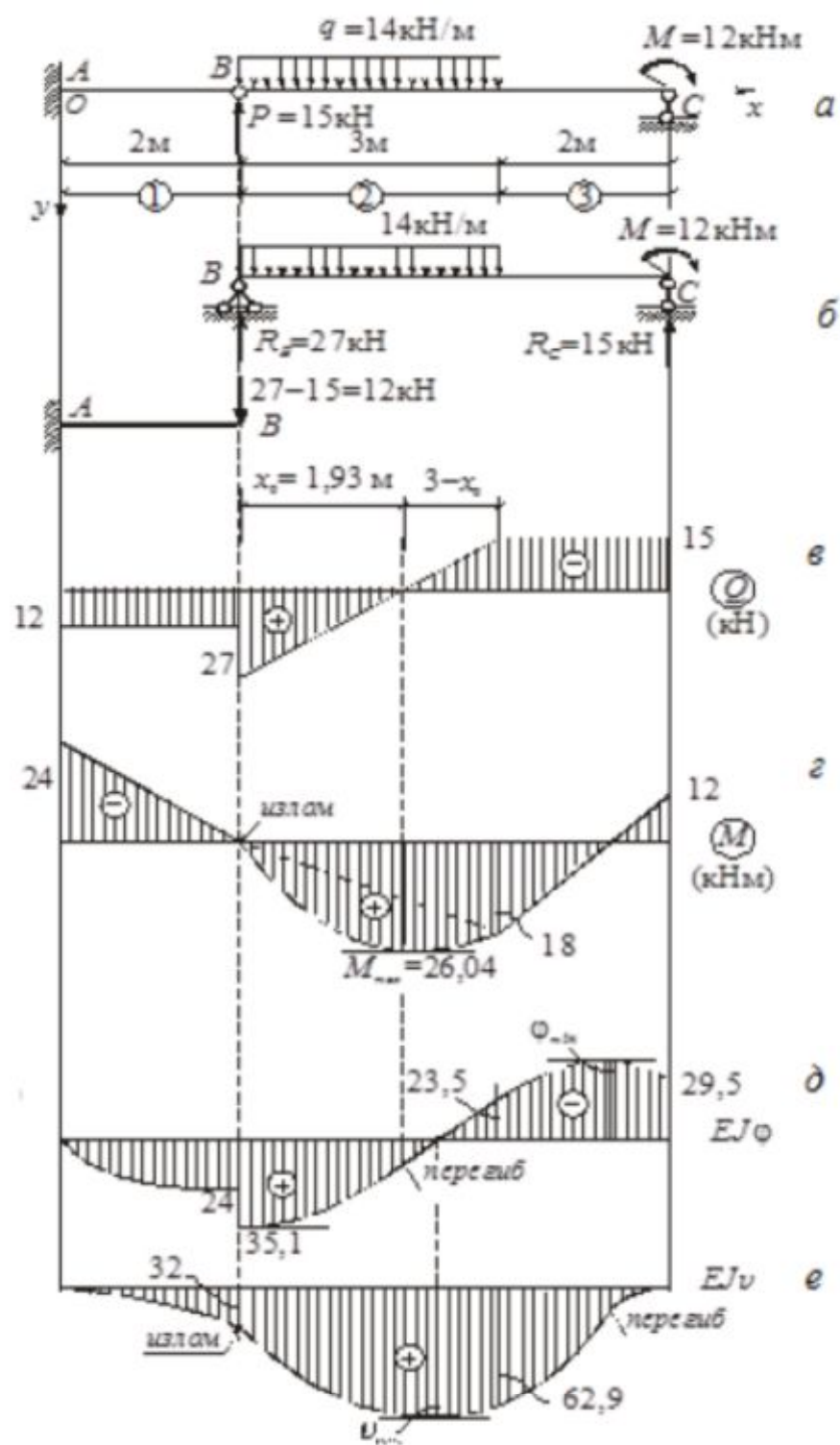


Рис. 58. Балка:

a, б — расчетная схема балки; *в* — эпюра поперечных сил; *г* — эпюра изгибающих моментов; *д* — эпюра углов поворота сечений; *е* — эпюра прогибов

Начальные параметры равны:

$$x = 0, v_0 = 0, \varphi_0 = 0,$$

$$M_0 = -24 \text{ кНм}, Q_0 = 12 \text{ кН}.$$

Для определения неизвестного скачка угла поворота $\Delta\varphi_B$ в промежуточном шарнире используем граничное условие:

$$x = 7\text{м}, v = \frac{24 \cdot 7^2}{2EJ} - \frac{12 \cdot 7^3}{6EJ} + 5\Delta\varphi_B - \frac{15 \cdot 5^3}{6EJ} + \frac{14 \cdot 5^4}{24EJ} - \frac{14 \cdot 2^4}{24EJ} = 0, \quad \Delta\varphi_B = \frac{11,1}{EJ}.$$

В качестве проверки определим значение $\Delta\varphi_B$ с помощью метода Мора. Поскольку $\Delta\varphi_B$ представляет собой взаимное угловое перемещение (угол поворота правого сечения в шарнире B относительно левого сечения), приложим в сечении B парный единичный момент. Соответствующая единичная эпюра изгибающих моментов приведена на рис. 59.

«Перемножаем» единичную и грузовую эпюры изгибающих моментов:

$$\Delta\varphi_B = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{2}{6}(2 \cdot 24 \cdot 1,4 + 24 \cdot 1) + \frac{3}{6}(2 \cdot 18 \cdot 0,4 + 18 \cdot 1) + \frac{14 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1+0,4}{2} + \frac{2}{6}(2 \cdot 18 \cdot 0,4 - 12 \cdot 0,4) \right] = \frac{11,05}{EJ}.$$

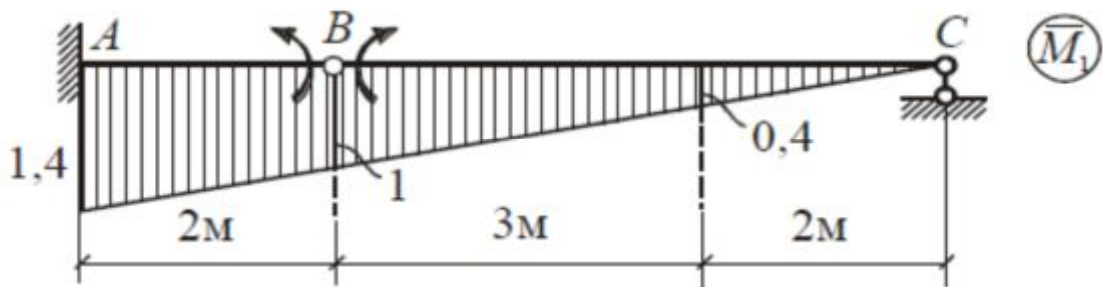


Рис. 59. Эпюра изгибающих моментов от единичного воздействия

Результаты вычисления практически совпали. Запишем окончательные выражения для $v(x)$ и $\varphi(x)$:

$$v(x) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{24x^2}{2!} - \frac{12x^3}{3!} \Big|_1 + 11,1(x-2) - \frac{15(x-2)^3}{3!} + \frac{14(x-2)^4}{4!} \Big|_2 - \frac{14(x-5)^4}{4!} \Big|_3 \right];$$

$$\varphi(x) = v'(x) = \frac{1}{EJ} \left[24x - \frac{12x^2}{2!} \Big|_1 + 11,1 - \frac{15(x-2)^2}{2!} + \frac{14(x-2)^3}{3!} \Big|_2 - \frac{14(x-5)^3}{3!} \Big|_3 \right].$$

Вычислим значения v и φ в характерных сечениях балки.

$$x = 0, \quad v = v_0 = 0, \quad \varphi = \varphi_0 = 0;$$

$$x = 2 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left(\frac{24 \cdot 2^2}{2} - \frac{12 \cdot 2^3}{6} \right) = \frac{32}{EJ},$$

$$\varphi_{\text{лев}} = \frac{1}{EJ} \left(24 \cdot 2 - \frac{12 \cdot 2^2}{2} \right) = \frac{24}{EJ};$$

$$\varphi_{\text{прав}} = \varphi_{\text{лев}} + \Delta\varphi_B = \frac{1}{EJ} (24 + 11,1) = \frac{35,1}{EJ};$$

$$x = 5 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left(\frac{24 \cdot 5^2}{2} - \frac{12 \cdot 5^3}{6} + 11,1 \cdot 3 - \frac{15 \cdot 3^3}{6} + \frac{14 \cdot 3^4}{24} \right) = \frac{62,9}{EJ},$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left(24 \cdot 5 - \frac{12 \cdot 5^2}{2} + 11,1 - \frac{15 \cdot 3^2}{2} + \frac{14 \cdot 3^3}{6} \right) = -\frac{23,5}{EJ}.$$

$$x = 7 \text{ м}, \quad v = 0 \text{ (граничное условие),}$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left(24 \cdot 7 - \frac{12 \cdot 7^2}{2} + 11,1 - \frac{15 \cdot 5^2}{2} + \frac{14 \cdot 5^3}{6} - \frac{14 \cdot 2^3}{6} \right) = -\frac{29,5}{EJ}.$$

В качестве проверки определим некоторые значения U и φ с помощью метода Мора. Соответствующие единичные эпюры приведены на рис. 60.

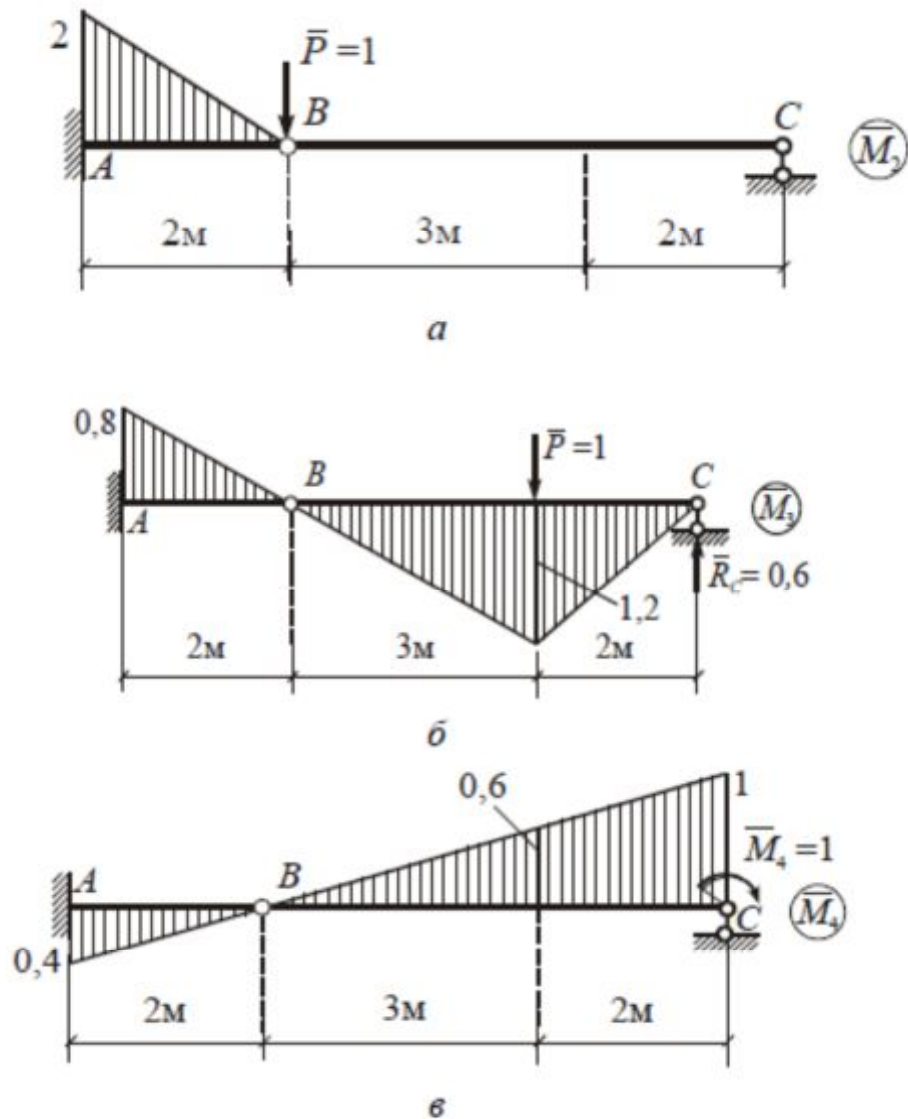


Рис. 60. Эпюры изгибающих моментов от единичных воздействий

$$v(5) = \int_0^l \frac{\bar{M}_3 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} 24 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 0,8 + \frac{1}{2} 18 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 1,2 + \right. \\ \left. + \frac{14 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 1,2 + \frac{2}{6} (2 \cdot 18 \cdot 1,2 - 12 \cdot 1,2) \right] = \frac{62,9}{EJ}.$$

$$v(2) = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{32}{EJ}.$$

$$\varphi(7) = \int_0^l \frac{\bar{M}_4 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{2} 24 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 0,4 - \frac{1}{2} 18 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 0,6 - \frac{14 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 0,6 + \right. \\ \left. + \frac{2}{6} (-2 \cdot 18 \cdot 0,6 + 2 \cdot 12 \cdot 1 - 18 \cdot 1 + 12 \cdot 0,6) \right] = -\frac{29,45}{EJ}.$$

Результаты вычислений практически совпали. Эпюры U и φ приведены на рис. 58, *д*, *е*. Отметим их особенности. В сечении B угол поворота имеет скачок, а касательные к эпюре φ параллельны оси. На эпюре U в этом сечении излом и смена знака кривизны. В сечении, где Q обращается в ноль, на эпюре φ точка перегиба. В сечении на третьем участке, где $M = 0$, угол поворота имеет экстремальное значение φ_{min} , а на эпюре U имеется точка перегиба. В сечении на втором участке, где $\varphi = 0$, прогиб имеет экстремальное значение U_{max} .

Задача 26.

Для балки (рис. 61, *а*) построим эпюры Q и M и определим прогиб и угол поворота в сечении C . Данная балка является статически неопределимой, поскольку для определения трех опорных реакций R_A , R_B и M_B можно использовать два уравнения равновесия $\Sigma Y = 0$ и $\Sigma M = 0$.

Составим выражение для прогиба балки с помощью метода начальных параметров:

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 + \frac{q(x-2)^4}{4! EJ} \Big|_2.$$

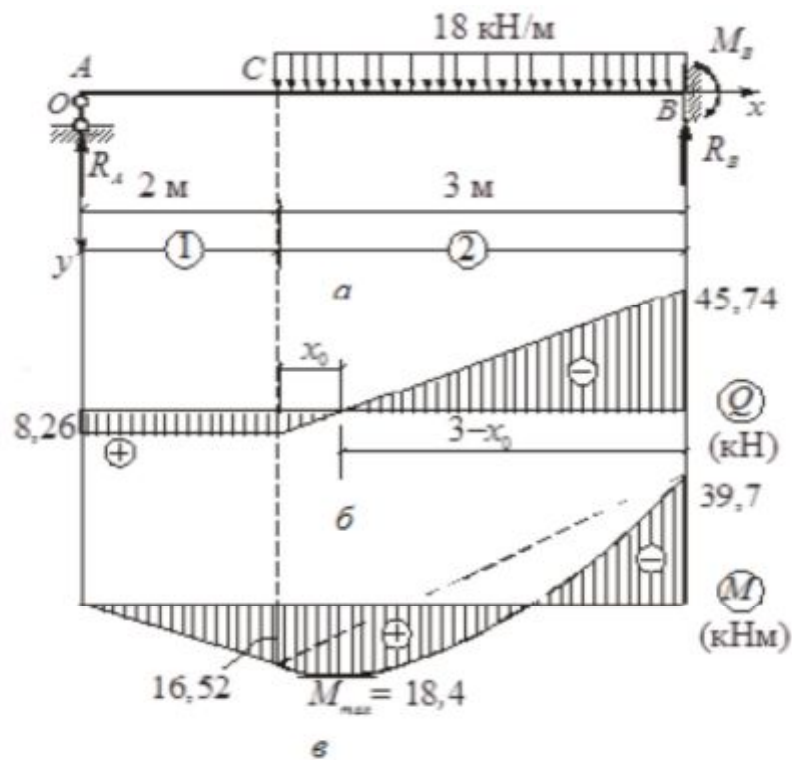


Рис. 61. Балка:
a — схема балки; *б* — эпюра поперечных сил; *в* — эпюра изгибающих моментов

Начальные параметры:

$$x = 0, U_0 = 0, M_0 = 0.$$

Для определения неизвестных начальных параметров φ_0 и Q_0 используем граничные условия:

$$x = 5 \text{ м}, U = 0, \varphi = 0.$$

Составим выражение для углов поворота:

$$\varphi(x) = v'(x) = \varphi_0 - \frac{Q_0 x^2}{2! EJ} \Big|_1 + \frac{q(x-2)^3}{3! EJ} \Big|_2.$$

$$v(5) = 5\varphi_0 - \frac{Q_0 \cdot 5^3}{6EJ} + \frac{18 \cdot 3^4}{24EJ} = 0;$$

$$\varphi(5) = \varphi_0 - \frac{Q_0 \cdot 5^2}{2EJ} + \frac{18 \cdot 3^3}{6EJ} = 0.$$

Решаем систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} 5\varphi_0 - \frac{20,83Q_0}{EJ} = -\frac{60,75}{EJ} \\ \varphi_0 - \frac{12,5Q_0}{EJ} = -\frac{81}{EJ} \end{array} \right\} \varphi_0 = \frac{22,3}{EJ}, \quad Q_0 = R_A = 8,26 \text{ кН}.$$

Определяем значения Q и M в характерных сечениях балки.

$$Q_A = Q_C = R_A = 8,26 \text{ кН}, \quad Q_B = 8,26 - 18 \cdot 3 = -45,74 \text{ кН},$$

$$M_A = M_0 = 0, \quad M_C = 8,26 \cdot 2 = 16,52 \text{ кНм},$$

$$M_B = 8,26 \cdot 5 - 18 \cdot 3 \cdot 1,5 = -39,7 \text{ кНм}.$$

Эпюры Q и M приведены на рис. 61, б, в. Определяем экстремальное значение момента:

$$\frac{8,26}{x_0} = \frac{45,74}{3 - x_0}, \quad x_0 = 0,46 \text{ м}.$$

$$M_{max} = 8,26 \cdot 2,46 - \frac{18 \cdot 0,46^2}{2} = 18,4 \text{ кНм}.$$

Определяем прогиб и угол поворота в сечении C :

$$v_c = v(2) = \frac{1}{EJ} \left(22,3 \cdot 2 - \frac{8,26 \cdot 2^3}{6} \right) = \frac{33,6}{EJ};$$

$$\varphi_c = \varphi(2) = \frac{1}{EJ} \left(22,3 - \frac{8,26 \cdot 2^2}{2} \right) = \frac{5,78}{EJ}.$$

Задача 27.

Для консольной рамы со стержнями различной жесткости (рис. 62, *а*) определим с помощью метода Мора перемещения точки K .

Построим грузовую и единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 62, *б, в, г, д*). Поскольку при определении перемещений в балках и рамах используется интеграл Мора, содержащий изгибающие моменты, построение эпюр Q и N не обязательно. Для определения вертикального и горизонтального перемещений точки K в этом сечении приложены единичные силы $\bar{P} = 1$, а для определения угла поворота приложен единичный момент $\bar{M} = 1$.

«Перемножаем» грузовую и единичные эпюры в пределах длины каждого стержня и суммируем результаты:

$$\Delta_{1P} = \sum_i \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 + \frac{1}{2EJ} \left(\frac{30-6}{2} \cdot 3 \cdot 2 - \frac{8 \cdot 3^3}{12} \cdot 2 \right) = \frac{6}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \sum_i \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \left[\frac{3}{6} (-2 \cdot 30 \cdot 3 + 6 \cdot 3) + \frac{8 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right] = -\frac{27}{EJ};$$

$$\Delta_{3P} = \sum_i \int_0^l \frac{\bar{M}_3 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2EJ} \left(\frac{30-6}{2} \cdot 3 \cdot 1 - \frac{8 \cdot 3^3}{12} \cdot 1 \right) = -\frac{3}{EJ}.$$

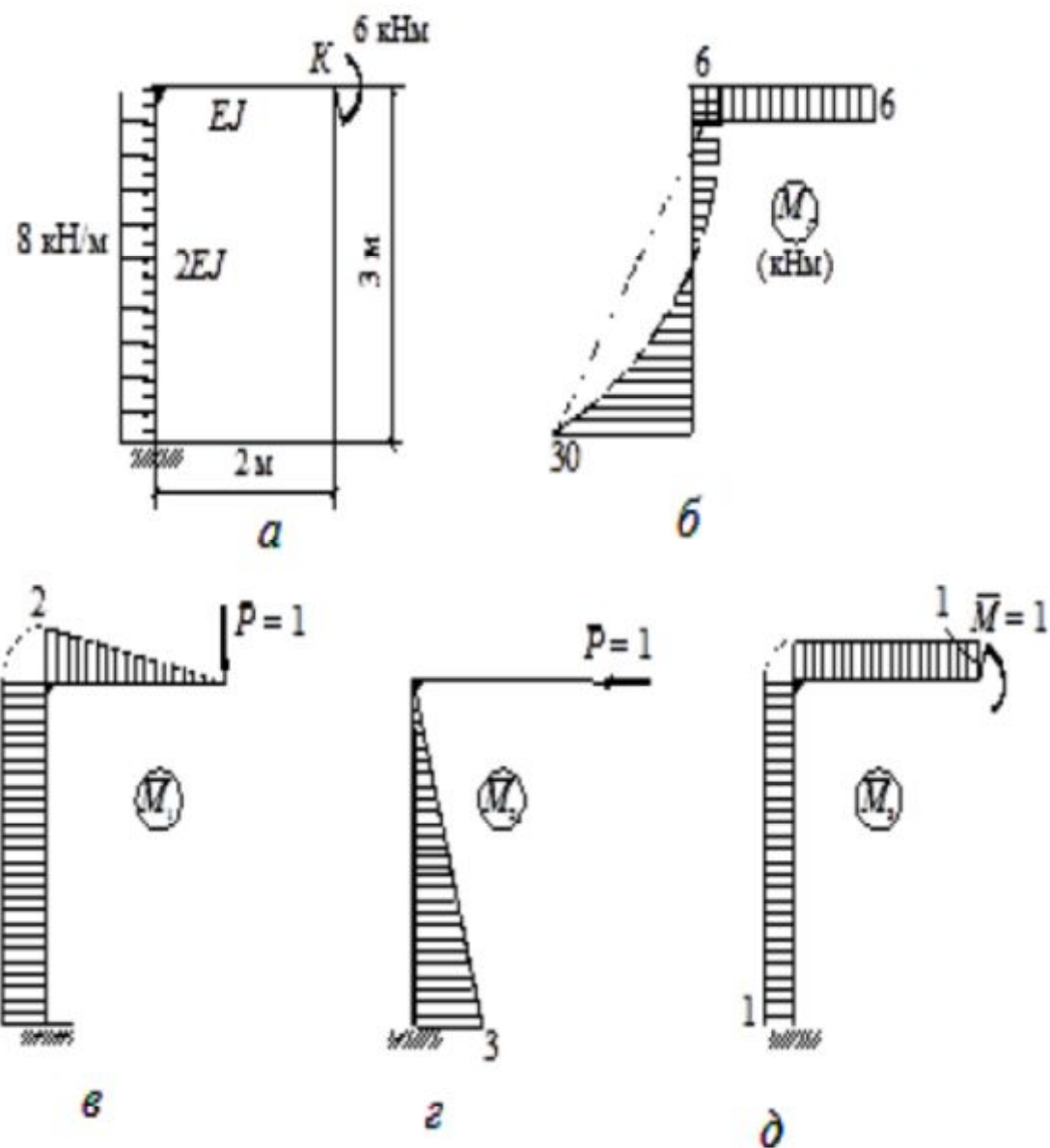


Рис. 62. Консольная рама:
a — схема консольной рамы, *б* — грузовая эпюра изгибающих моментов;
в, г, д — эпюры изгибающих моментов от единичных воздействий

Точка *K* перемещается вниз и вправо. Сечение *K* поворачивается против хода часовой стрелки.

Задача 28.

Для шарнирно-опертой рамы (рис. 63, *a*) определим с помощью метода Мора перемещения точки *K*.

Определяем опорные реакции от действия заданных нагрузок:

$$\Sigma X = 0, H_A = 6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_A = 0, -12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 6 \cdot 2 - 18 + 3V_B = 0, V_B = 28 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0, 12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 6 \cdot 2 - 18 - 3V_A = 0, V_A = 8 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, -12 \cdot 3 + 8 + 28 = -36 + 36 = 0.$$

Строим грузовую эпюру изгибающих моментов (рис. 63, б).

Точка K может иметь только горизонтальное перемещение. Приложим в точке K горизонтальную единичную силу $\bar{P} = 1$ и единичный момент $\bar{M} = 1$ и построим единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 63, в, г).

«Перемножив» эти эпюры с грузовой эпюрой M_P , получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx + \frac{1}{3EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 12 \cdot 2 \cdot 2 \right) + \\ &+ \frac{1}{EJ} \left[\frac{3}{6} (2 \cdot 12 \cdot 2 - 18 \cdot 2) + \frac{12 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right] = \frac{54,3}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} &= \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} = \frac{1}{3EJ} \cdot 12 \cdot 2 \cdot 1 + \\ &+ \frac{1}{EJ} \left[\frac{3}{6} (2 \cdot 12 \cdot 1 - 18 \cdot 1) + \frac{12 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right] = \frac{24,5}{EJ}. \end{aligned}$$

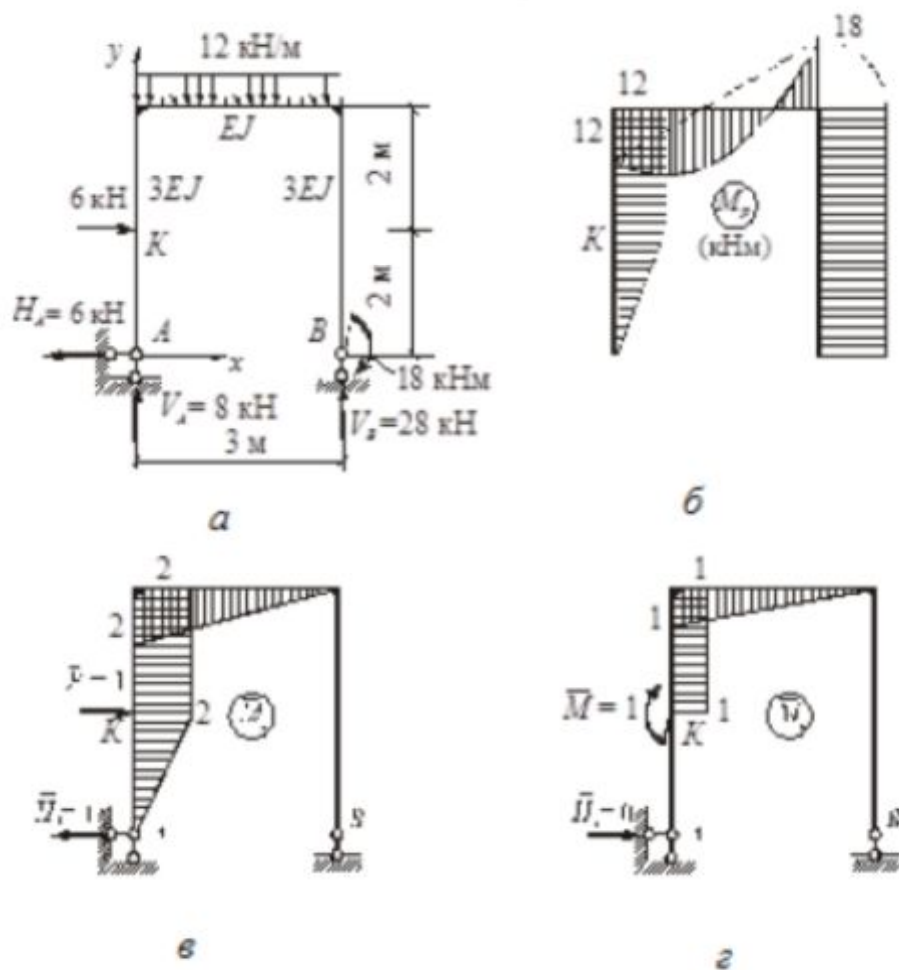


Рис. 63. Шарнирно-опертая рама:
 а — схема рамы; б — грузовая эпюра изгибающих моментов;
 в, г — эпюры изгибающих моментов от единичных воздействий

Точка K перемещается вправо, сечение K поворачивается по ходу часовой стрелки.

Контрольные вопросы

1. С помощью каких дифференциальных уравнений определяются перемещения при изгибе балок?
2. Какие методы используются для определения перемещений при изгибе балок?
3. Сколько начальных параметров содержит выражение для прогибов при использовании метода начальных параметров? Сколько из них известно в начале расчёта и как определяются остальные?

4. Эпюры каких внутренних усилий используются при определении перемещений методом Мора?
5. Какой физический смысл интегралов Мора?
6. Как выбираются направления действия единичных силы или момента при использовании метода Мора? Как определяется знак перемещений?
7. Как можно вычислить интегралы Мора при определении перемещений в прямых стержнях с постоянной жёсткостью?
8. В каком случае при вычислении интегралов Мора нельзя использовать правило А.К. Верещагина?

6. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В сопротивлении материалов, в отличие от теоретической механики, учитываются физические свойства материала. Чтобы произвести расчет на прочность, жесткость и устойчивость деталей конструкций или сооружения необходимо знать физико-механические свойства материала, из которого изготовлен каждый элемент сооружения. Физико-механические характеристики любого строительного материала определяются опытным путем.

Теоретические выводы и положения курса сопротивления материалов базируются на гипотезах, значительно упрощающих решение поставленных задач. Прежде чем использовать на практике полученные теоретическим путем формулы, необходимо проверить их достоверность с помощью эксперимента.

Таким образом, в курс сопротивления материалов в равной степени входят как теоретические выводы, так и экспериментальные данные.

При изучении курса сопротивления материалов проводятся лабораторные работы, целью которых являются:

- 1) определение физико-механических характеристик строительных материалов;
- 2) проверка выводов теории (подтверждение теоретических положений и выводов);
- 3) обучение основам методики постановки и проведения экспериментальных исследований, изучение принципа действия испытательных машин и приборов.

6.1. ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

Для измерения перемещений порядка $0...10$ мм при лабораторных испытаниях образцов материалов и элементов конструкций наибольшее распространение получили индикаторы часового типа:

- а) устройство индикатора часового типа. Принципиальная конструктивная схема индикатора приведена на рис. 64.

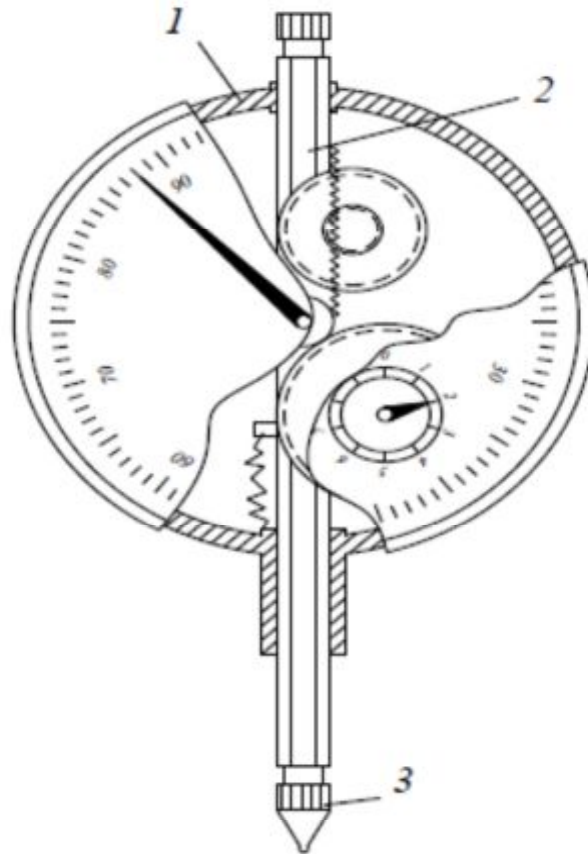


Рис. 64. Устройство индикатора часового типа:
 1 — корпус; 2 — зубчатая рейка; 3 — наконечник

Прибор состоит из корпуса 1, в котором имеются направляющие для подвижной зубчатой рейки 2. Зубчатая рейка при помощи высокоточной зубчатой передачи соединяется с осями большой и малой стрелок. Зубчатая

передача подобрана так, что малая стрелка показывает миллиметры, а большая - доли миллиметра при передвижении зубчатой рейки. На одном конце зубчатая рейка снабжена сменным наконечником 3. Наибольшее распространение получили индикаторы часового типа с ценой деления шкалы большой стрелки 0,01 мм. В научных экспериментах, требующих большой точности при определении перемещений, применяются индикаторы с ценой деления 0,001 мм (1 микрон). Для измерения перемещений корпус индикатора укрепляется на какой-либо неподвижной основе, а наконечник 3 упирается в заданную точку испытываемой конструкции.

Измерение деформаций на поверхности исследуемых конструкций осуществляется *тензомерами* различного типа: электрическими, оптическими, магнитными и др. Наиболее распространенными в практике экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния являются электрические тензомеры — *тензорезисторы* (*тензодатчики*).

В основу работы тензорезистора положена зависимость оммического сопротивления R проводника от его длины l , удельного омического сопротивления ρ и площади поперечного сечения F :

$$R = \rho \frac{l}{F}.$$

Для измерения относительных деформаций обычно используются различного типа тензорезисторы, среди которых наиболее распространены проволочные тензорезисторы;

б) устройство и принцип работы проволочного тензорезистора. Устройство проволочного тензорезистора показано на рис. 65. На бумажной основе (подложке) 1 с помощью специального клея укрепляется тонкая проволока 2, к концам которой припаяны выводы 3.

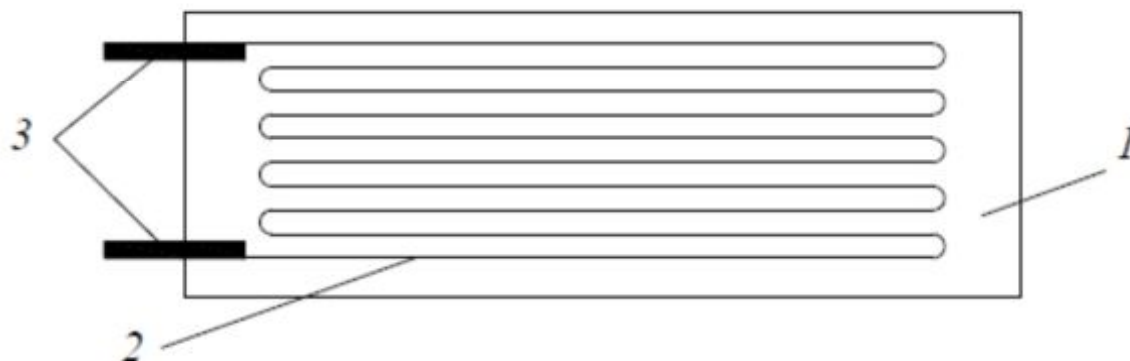


Рис. 65. Устройство проволочного тензорезистора:
1 — бумажная основа (подложка); 2 — проволока; 3 — выводы

Проволока выполнена из сплава с высоким удельным сопротивлением (обычно из константана), имеет диаметр 0,015...0,05 мм и укладывается на бумажную подложку петлеобразно. При этом длина петли l_0 является рабочей базой тензорезистора.

Выводные концы 3 обычно выполняются из медной луженой проволоки диаметром 0,2...0,3 мм. Промышленностью выпускаются тензорезисторы с базой 3, 5, 10, 15, 20, 50 и 100 мм сопротивлением от 50 до 400 Ом.

Наряду с описанным проволочным тензорезистором существуют так называемые фольговые или пленочные тензорезисторы. В них на подложку из специального клея укладывают металлическую фольгу или пленку, после чего протравливают петли, как и в проволочном тензорезисторе.

При испытаниях образца или конструкции последние деформируются под нагрузкой и передают эти деформации наклеенным на них тензорезисторам. При этом проволочные петли тензорезисторов удлиняются или укорачиваются в соответствии с деформациями в точке измерения.

Изменение длины проводника, как известно, приводит к изменению и его сопротивления. Это изменение сопротивления прямо пропорционально деформации образца и связано с последней соотношением:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Delta R}{R_0},$$

где ε — относительная деформация;

l_0 — база тензорезистора;

Δl — абсолютное удлинение базы;

R_0 — начальное сопротивление тензорезистора;

ΔR — абсолютное приращение сопротивления;

k — коэффициент тензочувствительности тензорезистора (для рассмотренных типов $k = 1,8 - 2,2$).

Изменение сопротивления проводника при деформировании положено в основу работы тензорезистора.

Относительное изменение сопротивления обычно очень мало, поэтому измерять его можно только с помощью специально приспособленных мостовых схем. Пример простейшей мостовой схемы приведен на рис. 66.

Четыре сопротивления соединены между собой в электрическую цепь, образующую замкнутый четырехугольник. Линии, соединяющие точки a, b или c, d , называются диагоналями моста. В одну из диагоналей (ab) включен источник питания $ИП$, в другую (cd) - измерительный прибор (ИЗП). Особенностью мостовой схемы является отсутствие тока в диагонали cd при определенном соотношении между сопротивлениями моста. При обозначениях рис. 66 это соотношение записывается следующим образом:

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}.$$

Нарушение этого соотношения, например, за счет небольшого изменения одного из сопротивлений моста приводит к появлению тока в диагонали cd , пропорционального относительному изменению сопротивления. Если вместо одного из сопротивлений моста, например R_1 , включить тензорезистор T_p , то ток в диагонали моста будет пропорционален измеряемой деформации.

Описанные выше проволочные тензорезисторы чувствительны и к изменению температуры, а поэтому во время опыта может возникнуть температурная погрешность. Чтобы избежать этого, используют схему с компенсационным тензорезистором T_k , который наклеивается на образец из такого же материала, что и испытуемый, и размещается рядом с ним. Компенсационный тензорезистор является нерабочим и включается в мостовую схему вместо сопротивления R_2 , образуя с рабочим тензорезистором T_p так называемый полумост.

В практических измерениях второй полумост, образуемый сопротивлениями R_3 и R_4 с источником питания $ИП$, монтируется внутри измерительного прибора (ИЗП).

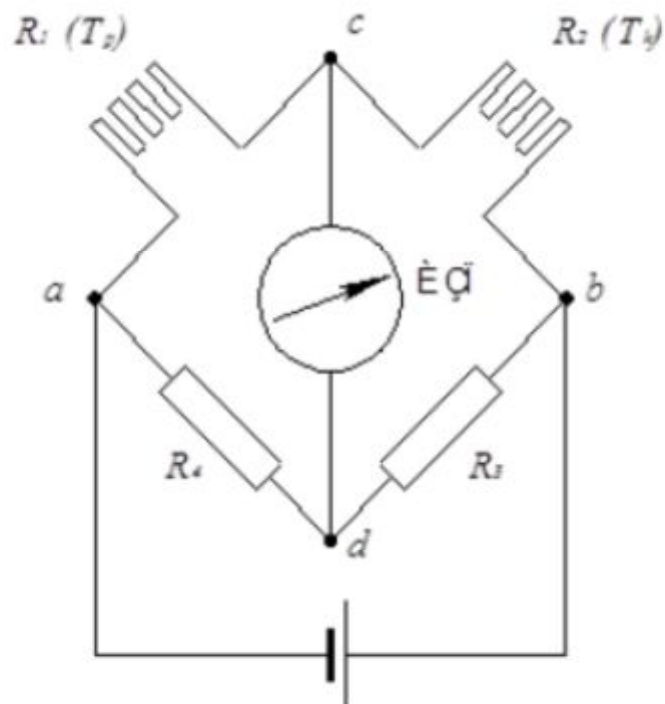


Рис. 66. Схема измерительного моста

Основными составными частями измерительного прибора являются: электронный усилитель для усиления слабого тока в диагонали моста и преобразования его в напряжение, обеспечивающее работу исполнительного механизма системы автоматического уравнивания; система автоматического уравнивания моста; система индикации показаний (цифровая или стрелочная).

Промышленностью выпускаются различные типы измерительных тензометрических приборов со стрелочной и цифровой индикацией. В лаборатории применяется прибор со стрелочной индикацией показаний типа АИД-2М (автоматический измеритель деформации второй модификации) и приборы с цифровой индикацией показаний типа ЦТМ-3, ЦТМ-5 (цифровой тензометрический мост), а также ИДЦ-1 (измеритель деформации цифровой). Все указанные приборы рассчитаны на тензорезисторы со средним коэффициентом тензочувствительности $k = 2$ и имеют цену единицы отсчета (цену единицы дискретности) по относительной деформации $1 \cdot 10^{-5}$. В комплект приборов обычно входит блок переключателей для последовательного снятия отсчетов с группы тензорезисторов, наклеенных на испытуемый объект.

6.2. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ОБРАБОТКА ИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Методика выполнения различных лабораторных работ имеет много общих положений, которые целесообразно изложить отдельным разделом, чтобы не повторять в каждой работе. Это в первую очередь относится к испытаниям материалов и элементов конструкций в упругой стадии, а также к математической обработке результатов измерений.

Методика выполнения лабораторных работ

Каждая лабораторная работа включает обычно три основных компонента:

- 1) испытуемый образец материала или элемент конструкции;
- 2) испытательную машину или приспособление для создания того или иного вида нагрузки;
- 3) измерительный комплекс (приборы для измерения нагрузки, деформаций, перемещений и т.д.).

Практическому выполнению лабораторной работы должно предшествовать теоретическое осмысление ее по всем трем указанным компонентам. Нужно ознакомиться с особенностями испытуемого объекта (образца материала, элемента конструкции) — его размерами, материалом, из которого он изготовлен, условиями закрепления и нагружения, параметрами, измеряемыми в процессе нагружения в определенных точках. Нужно также ознакомиться с испытательной машиной, которая используется в данной работе, — принципом ее работы, техническими характеристиками, конструктивными особенностями. Затем нужно ознакомиться с измерительными приборами — принципом их действия, пределами измерений, ценой единицы приращения показаний прибора.

После такого теоретического осмысления работы можно приступать к ее выполнению. Общий порядок выполнения лабораторных работ при определении физических характеристик материалов или проверке полученных теоретическим путем формул, при условии линейно-упругой работы материала испытуемого объекта, бывает следующим:

1. Испытуемый объект устанавливается на испытательной машине и оборудуется измерительными приборами.
2. Включается испытательная машина и дается небольшая начальная нагрузка на испытуемый объект для устранения возможных люфтов в захватах (спорах) машины. После этого регистрируются показания всех приборов, установленных на объекте, которые принимаются за начальные (при нулевой нагрузке).

3. Нагрузка увеличивается равными ступенями до некоторой максимальной величины, и на каждой ступени регистрируются показания приборов.

4. Производится плавная разгрузка объекта до начального значения (принятого за нулевое) и при этом проверяются показания всех приборов.

5. Испытуемый объект полностью разгружается, испытательная машина выключается.

Если лабораторная работа проводится с целью проверки какой-либо теоретической зависимости, то степень приращения нагрузки в опыте принимается обычно за величину расчетной внешней силы. Тогда по изменению измеряемых параметров на ступень нагрузки можно судить о линейной работе материала испытуемого объекта, стабильности работы измерительных приборов. С другой стороны, в пределах линейной работы материала каждую ступень нагрузки можно рассматривать как повторный опыт и при достаточно большом числе ступеней использовать полученные данные измерений для обработки их методами математической статистики.

6.3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА НЕКОТОРЫХ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Цель работы: определение экспериментальным путем физических характеристик — модуля упругости и коэффициента Пуассона стали.

Общие сведения

Для определения модуля упругости и коэффициента Пуассона стали и дюралюминия производятся испытания на центральное растяжение образцов в виде полосы прямоугольного поперечного сечения.

Центральное растяжение и сжатие прямого стержня вызывается действием осевых нагрузок.

При центральном растяжении и сжатии прямого стержня в поперечных сечениях возникает одно внутреннее усилие — продольная сила N . Для определения продольной силы в сечении используется метод сечений.

Продольная сила в поперечном сечении равна сумме осевых нагрузок, приложенных к одной из частей стержня, и имеет размерность сосредоточенной силы (N , кН и т.п.).

В процессе деформирования стержня при центральном растяжении и сжатии сечения, плоские и перпендикулярные к оси стержня до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к оси после деформации (гипотеза плоских сечений). На основании этой гипотезы при растяжении и сжатии длина всех продольных волокон стержня изменяется на одинаковую величину. Отсюда следует, что нормальные напряжения распределены по сечению равномерно и справедлива формула:

$$N = \sigma F \quad (52)$$

Отсюда получаем:

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad (53)$$

где F — площадь поперечного сечения стержня.

Размерность напряжения - кН/см^2 , МПа и т.п.

При растяжении и сжатии стержня изменяются его длина и размеры поперечного сечения. Относительные деформации вдоль оси стержня называются продольными и обозначаются буквой ε , а в направлениях, перпендикулярных к оси, — поперечными ε' . Они являются безразмерными величинами.

Относительные поперечные и продольные деформации связаны между собой соотношением:

$$\varepsilon' = -\nu \varepsilon \quad (54)$$

Входящая в это соотношение величина ν называется коэффициентом Пуассона. Коэффициент Пуассона есть отношение абсолютных величин относительной поперечной деформации и относительной продольной деформации:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (55)$$

Для различных материалов коэффициент Пуассона различен. В пределах упругих деформаций он может принимать значения от 0 до 0,5. Для малоуглеродистой стали соответственно от 0,25 до 0,35.

Для большинства конструкционных материалов при малых деформациях между напряжениями и деформациями существует линейная зависимость, называемая *законом Гука*:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (56)$$

Входящая в закон Гука постоянная E называется модулем упругости материала. Модуль упругости E характеризует его жесткость и имеет размерность напряжения.

При центральном растяжении и сжатии прямого стержня поперечные сечения, оставаясь плоскими, получают осевые перемещения, определяемые по формуле:

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{N}{EF} dx \quad (57)$$

Удлинение и укорочение стержня длиной l равно разности осевых перемещений его концов $x = 0$ и $x = l$: $\Delta l = u(l) - u(0)$. Если начальное сечение $x = 0$ закреплено, то $u_0 = 0$ и

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EF} dx \quad (58)$$

Для частного случая $EF = \text{const}$ и $N = \text{const}$ получим

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad (59)$$

Произведение EF называется жесткостью стержня при растяжении и сжатии. Чем больше эта величина, тем меньше удлинение (укорочение) стержня. Жесткость EF имеет размерность силы — H , kH и т. п.

Для стержней с постоянной жесткостью EF и линейным законом изменения продольной силы N при определении Δl удобно использовать геометрический смысл определенного интеграла и привести формулу (58) к следующему виду:

$$\Delta l = \frac{1}{EF} \int_0^l N \, dx = \frac{1}{EF} \Omega_N, \quad (60)$$

где Ω_N — площадь эпюры N на рассматриваемом участке.

Необходимость определения перемещений и удлинений (укорочений) возникает при решении статически неопределимых задач.

Напомним, что задача называется статически неопределимой, если из уравнений равновесия нельзя определить опорные реакции и внутренние усилия в стержнях. Для решения таких задач необходимо составить дополнительные уравнения исходя из рассмотрения деформированного состояния стержня.

Расчеты на прочность стержней и других элементов конструкций составляют одну из основных задач сопротивления материалов. Существуют три метода расчета на прочность:

- 1) метод допускаемых напряжений;
- 2) метод предельных состояний;
- 3) метод разрушающих нагрузок.

При расчете на прочность строительных конструкций применяется *метод предельных состояний*.

В методе предельных состояний вводятся несколько коэффициентов надежности, основными из которых при расчетах на прочность являются:

- 1) γ_f — коэффициент надежности по нагрузке, $\gamma_f = 1,05 \div 1,4$;
- 2) γ_m — коэффициент надежности по материалу, $\gamma_m = 1,025 \div 1,15$;
- 3) γ_c — коэффициент условий работ, $\gamma_c = 0,75 \div 1,0$.

Условие прочности ставится для опасного сечения. Сечение стержня, в котором действуют наибольшие напряжения, называется опасным сечением.

Условие прочности стержня при растяжении и сжатии по методу предельных состояний имеет следующий вид:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq \gamma_c R \quad (61)$$

С помощью условия прочности решаются следующие задачи:

- 1) проверка прочности;
- 2) подбор сечения;
- 3) определение несущей способности (грузоподъемности).

Для определения указанных физических величин (модуля упругости и коэффициента Пуассона) экспериментальным путем нужно при испытании образца определять на каждой ступени нагружения напряжения и относительные деформации (продольные и поперечные) в пределах линейно-упругой работы материала.

Для экспериментов со сталью и дюралюминием используются образцы прямоугольного сечения, предназначенные для испытания на растяжение (рис. 67, а). Для экспериментов с бетоном используются образцы-призмы квадратного сечения (рис. 67, б), предназначенные для испытаний на сжатие.

Измерительные приборы. Для определения нагрузки используются силовизмерительные механизмы испытательных машин. Нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma = \frac{P}{F}, \quad (62)$$

где P — заданная нагрузка;

F — площадь поперечного сечения образца.

Для определения относительных деформаций используются проводочные тензорезисторы, наклеиваемые на образец (см. рис. 67, а, б). При испытании бетонных образцов с помощью индикаторов часового типа на определенном участке замеряются абсолютные перемещения, а затем рассчитываются относительные деформации.

В первом случае тензорезисторы наклеиваются в средней части образца в продольном и поперечном направлениях (рис. 67). При этом чтобы исключить ошибки от возможного эксцентриситета приложения нагрузки на плоские образцы, тензорезисторы наклеиваются с двух сторон на противоположных гранях образца; на образцы квадратного сечения тензорезисторы наклеиваются на все четыре грани.

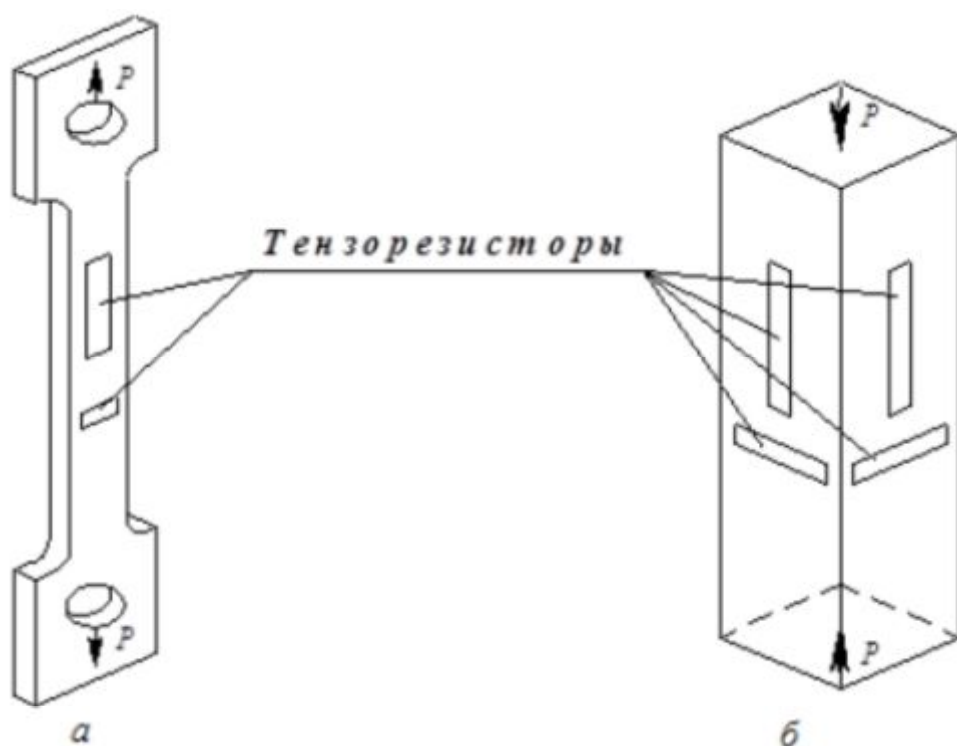


Рис. 67. Образцы для проведения испытаний:
a — на растяжение; *б* — на сжатие

При обработке опытных данных показания всех тензорезисторов в сходственных точках и по сходственным направлениям усредняются. Показания тензорезисторов регистрируются цифровым прибором типа ИДЦ-1 либо стрелочным типа АИД-2М. В случае использования индикаторов часового типа на образце с помощью винтов и клея укрепляются специальные рамки и упоры. Индикаторы крепятся на рамке, а накопечники их подвижных штоков опираются на упоры (рис. 68).

Расстояние между осями рамки и упора является базой измерения l_0 . Приращение перемещения на ступень нагрузки, определенное по индикаторам, обозначим Δl_0 . Тогда относительную деформацию можно вычислить по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_0}{l_0}, \quad (63)$$

где Δl_0 — приращение перемещения на ступень нагрузки;
 l_0 — база измерения.

Испытательные машины. Для испытания образцов на растяжение используется машина ZD-10, для испытания на сжатие — пресс П-50 или П-250 (для бетонных образцов).

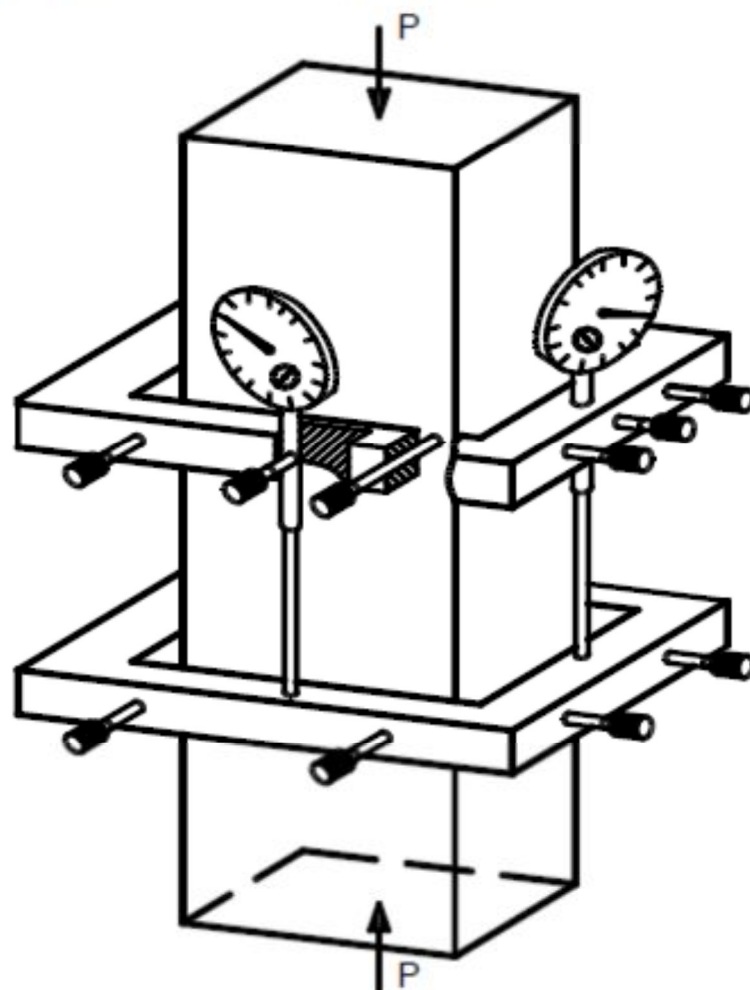


Рис. 68. Образец из бетона с приспособлением для определения продольных деформаций

Порядок проведения испытаний. Образец с наклеенными тензорезисторами (или укрепленными на нем индикаторами) закрепляют в захватах испытательной машины или устанавливают между плитами прессы. Тензорезисторы с помощью специального разъема соединяют с измерительным прибором. Согласно соответствующим инструкциям по использованию машины и прибором выполняют операции по подготовке к работе испытательной машины и измерительного прибора.

Затем производят нагружение образца равными ступенями нагрузки, регистрируя на каждой ступени показания силоизмерителя и тензорезисторов (или индикаторов) в специальном бланке испытаний. После достижения наибольшей для данного образца нагрузки (в пределах линейно-упругой работы материала) производят ее сброс (до нуля или небольшой начальной величины, обеспечивающей выборку возможных люфтов) и вновь снимают показания приборов. Если после сброса нагрузки показания приборов повторяют показания исходного состояния, значит, условия опыта были стабильными, и его можно закончить (выключить машину и снять образец). В случае существенной разницы в показаниях приборов при повторении исходного состояния опыта следует выяснить причину нестабильности, устранить ее и повторить опыт.

Порядок обработки результатов испытаний. Показания тензорезисторов (или индикаторов) заносят в бланк испытаний (табл. 1). Обработка заключается в вычислении средних значений относительных деформаций (продольных и поперечных) на ступень нагрузки. Для этого подсчитывают и заносят в соответствующую графу табл. 1 разность последующего и предыдущего показаний прибора по каждому тензорезистору (или индикатору). Эту разность обычно называют приращением и обозначают Δ_{ij} (i — номер тензорезистора или индикатора; j — номер ступени нагружения). После вычисления приращений определяют среднее приращение на ступень нагружения по каждому прибору:

$$\Delta_{i_{cp}} = \frac{\sum_{j=1}^n \Delta_{ij}}{n}, \quad (64)$$

где n — число ступеней нагрузки.

Затем вычисляют относительную деформацию на ступень нагрузки по тензорезисторам:

$$\varepsilon_i = k \Delta_{i_{cp}} \quad (65)$$

где k — цена единицы приращения показаний прибора по относительной деформации (или цена единицы деления прибора) обычно равная $(0,9 - 1,1) \cdot 10^{-5}$.

При замере деформации индикаторами часового типа относительная деформация определяется по формуле:

$$\varepsilon_i = \frac{k_u \Delta l_{i\varphi}}{l_0} = \frac{\Delta l_0}{l_0}, \quad (66)$$

где k_u — цена единицы деления прибора (обычно 0,01 или 0,001);
 l_0 — база измерения.

При наличии дублирующих тензорезисторов в сходственных точках на противоположных гранях образца производится еще одно осреднение деформаций по этим точкам:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^c \varepsilon_{i\varphi}}{c}, \quad (67)$$

где c — число тензорезисторов.

Зная напряжение на ступень нагрузки $\sigma = \frac{\Delta P}{F}$, определяем модуль упругости материала образца:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{cp}} \quad (68)$$

По определенным из опыта продольным (ε_{cp}) и поперечным (ε'_{cp}) относительным деформациям вычисляем коэффициент Пуассона материала:

$$\nu = \frac{|\varepsilon'|}{|\varepsilon|}. \quad (69)$$

Таблица для занесения показаний тензорезисторов

| Р кН | Продольная деформация | | | | | Поперечная деформация | | | | |
|---------------|-----------------------|------------|--------|------------|---|-----------------------|------------|--------|------------|--------------------------------------|
| | Т.1 | | Т.2 | | Среднее приращение Δ_{1-2} | Т.3 | | Т.4 | | Среднее приращение Δ_{3-4} |
| | Отсчет | Δ_1 | Отсчет | Δ_2 | | Отсчет | Δ_3 | Отсчет | Δ_4 | |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| $\Delta_{ср}$ | | | | | | | | | | |

Контрольные вопросы

1. Что такое коэффициент Пуассона и каковы пределы его изменения?
2. Какую размерность имеет модуль упругости?
3. Как влияет величина модуля упругости на деформацию стержня?
4. Какие приборы использовались для измерения деформаций? Каков принцип их действия?
5. Что понимается под жесткостью стержня при растяжении?
6. С какой целью при измерении деформации использовалось по два тензорезистора?
7. Как определяются нормальные напряжения?
8. Объясните устройство тензорезистора?

6.4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. ИСПЫТАНИЕ ОБРАЗЦА ИЗ МАЛОУТЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ НА РАЗРЫВ

Цель работы: определение основных механических характеристик материала: пределов пропорциональности, упругости, текучести, временного сопротивления (предела прочности), относительного удлинения образца, относительного уменьшения площади его поперечного сечения (относительного сужения).

Общие сведения

Как показала практика, результаты испытаний в значительной мере зависят от формы, размеров образца, чистоты обработки его поверхности. Для получения сопоставимых данных все образцы должны соответствовать требованиям ГОСТов. При испытаниях стали используются образцы круглого или прямоугольного сечения в соответствии с ГОСТ 1497-73. Основной особенностью этих образцов, изображенных на рис. 6.6, является наличие усиленных мест для закрепления образца в захватах и участка с постоянным поперечным сечением, который называется рабочим участком. Длина рабочего участка $l_{\text{раб}}$ для стандартных образцов составляет $20d$. В некоторых случаях разрешается применять короткие образцы, у которых $l_{\text{раб}} = 10d$.

Образец, предназначенный для испытаний, до установки его в машину обмеряется при помощи штангенциркуля. На рабочей части образца производится разметка на участки одинаковой длины. Наносимые на образец границы участков не должны создавать дефектов на поверхности образца, которые могут стать концентраторами напряжений.

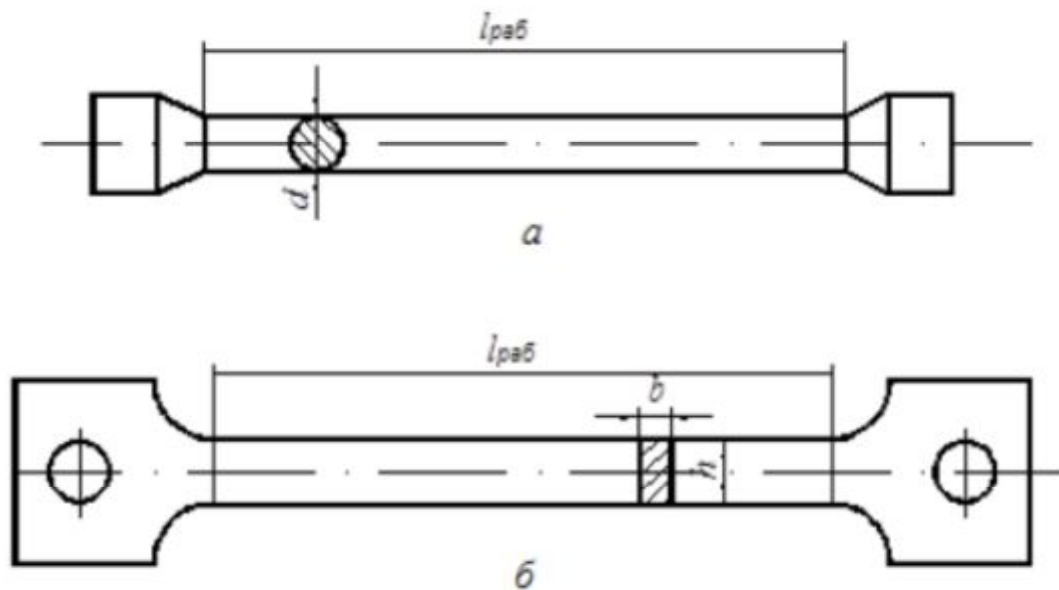


Рис. 69. Образцы для испытаний на разрыв:
 a — цилиндрический, b — плоский

Проведение испытаний. Для испытания образцов из малоуглеродистой стали марки ВСт.3 диаметром (d) 10 мм применяется универсальная разрывная машина Р-10. На этой машине установлен механизм записи диаграммы $P - \Delta l$.

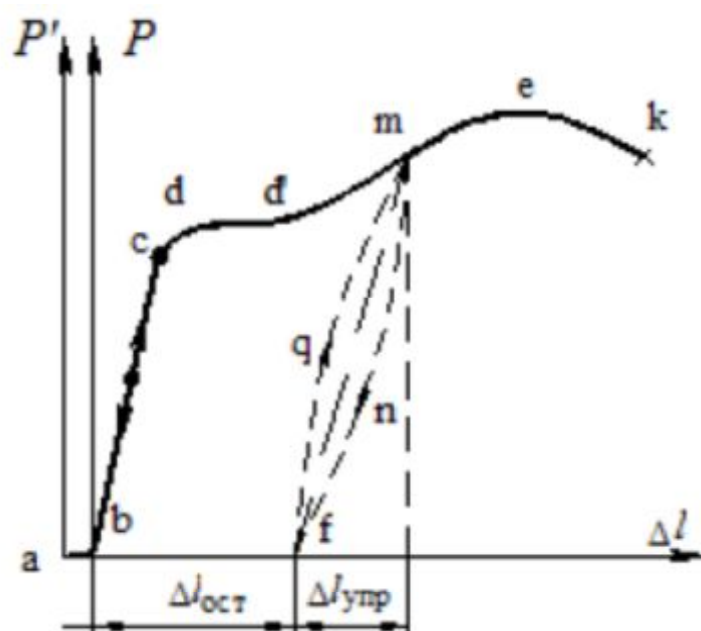


Рис. 70. Диаграмма растяжения $P - \Delta l$ для малоуглеродистой стали

Закрепив образец в захватах и установив механизм записи диаграммы в начальное положение, постепенно нагружаем образец. По ходу испытания ведется запись диаграммы $P - \Delta l$, и в конце испытания ведомая стрелка силоизмерительного механизма покажет максимальное значение нагрузки, которую выдержал образец.

Общие положения. Типичный вид диаграммы растяжения для малоуглеродистой стали представлен на рис. 70.

В начале записи диаграммы $P - \Delta l$ возможен небольшой криволинейный участок $a-b$, наличие которого объясняется существованием люфтов (свободных ходов) как в самой испытательной машине, так и в захватах. Этот криволинейный участок обычно исключают, продолжив следующий, прямолинейный участок $b-c$ до пересечения с

осью абсцисс. Полученную точку пересечения считают началом диаграммы, и через нее проводят новую ось ординат. Расстояние между осями будет соответствовать деформации за счет люфтов машины и захватов.

Прямолинейный участок $b - c$ соответствует закону Гука: удлинение стержня пропорционально приложенной растягивающей нагрузке. Если в пределах нагрузок, соответствующих этому участку, прекратить нагружение и начать разгрузку, то зависимость $P - \Delta l$ будет идентична зависимости при нагрузке образца. При некотором значении силы (точка c) зависимость $P - \Delta l$ отклоняется от линейной. После переходного участка $c - d$ наблюдается горизонтальный участок $d - d'$: удлинение растет при постоянном значении силы. Этот участок называется площадкой текучести. Наличие площадки текучести характерно для малоуглеродистых сталей.

Следующий участок диаграммы $d' - e$ называется участком упрочнения. Скорость роста нагрузки здесь значительно ниже, чем на прямолинейном участке $b - c$. Если при достижении какой-нибудь точки m на этом участке начать разгрузку образца, то получим кривую разгрузки $m - n - f$. При повторном нагружении этого образца линия нагружения будет представлена кривой $f - q - m$. Кривые $m - n - f$ и $f - q - m$ образуют так называемую петлю гистерезиса. Площадь, занимаемая петлей гистерезиса, определяет потери энергии, связанные с разгрузкой и нагрузкой образца. Следует отметить, что довольно часто линии, изображающие процессы разгрузки и нагружения образца, совпадают, они представляют собой прямую $m - f$, параллельную прямой $b - c$. Вблизи максимального значения нагрузки (точка e) на рабочем участке образца образуется так называемая шейка - заметное на глаз местное сужение образца. С увеличением нагрузки диаметр шейки уменьшается, следовательно, уменьшается и площадь поперечного сечения шейки. Нагрузка, приложенная к образцу, возрастает до тех пор, пока относительное увеличение нагрузки не превысит относительного уменьшения поперечного сечения шейки. При их равенстве образец будет выдерживать максимальную силу $P_{\text{нб}}$ или $P_{\text{вр}}$.

В дальнейшем удлинение образца происходит с уменьшением силы (участок $e - k$). Удлинение образца носит местный характер: наблюдаются большие пластические деформации в зоне шейки. Участок $e - k$ на диаграмме называется зоной местной текучести.

В точке k диаграммы при некоторой силе P_p происходит разрыв образца.

Обработка экспериментов. С помощью полученной диаграммы определяются следующие характеристики:

1. *Предел пропорциональности* — наибольшее напряжение, до которого материал подчиняется закону Гука:

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{P_{\text{пр}}}{F_0}, \quad (70)$$

где $P_{\text{пр}}$ — нагрузка на образец, при которой напряжения в образце достигают предела пропорциональности,

F_0 — площадь поперечного сечения образца до проведения эксперимента.

Величина $P_{\text{пр}}$ зависит от степени точности, при которой часть участка $c-d$ диаграммы можно рассматривать как прямую. Степень отклонения кривой $c-d$ от прямой $b-c$ определяют по величине угла, который составляет касательная к диаграмме с осью P . Для прямолинейного участка тангенс этого угла численно определяется величиной $\frac{l_{\text{раб}}}{EF_0}$. Считают, что если тангенс угла между касательной и осью

P на криволинейном участке $c-d$ оказался в 1,5 раза больше, чем вышеупомянутый, то предел пропорциональности достигнут.

На основе этого на диаграмме величина $P_{\text{пр}}$ графически характеризует нагрузку, при которой образец достигает предела пропорциональности (рис. 71).

2. *Предел упругости* — такое наибольшее напряжение, при котором в материале при разгрузке не возникают остаточные деформации. Эту характеристику просто определить, используя диаграмму $P - \Delta l$. Обычно остаточная деформация, соответствующая пределу упругости, определяется величиной $\varepsilon_{\text{уп}} = |1 \div 5| \cdot 10^{-8}$. Для определения нагрузки, при которой достигается предел упругости $P_{\text{уп}}$, на оси Δl откладывают величину $\Delta l_{\text{уп}} = \varepsilon_{\text{уп}} \cdot l_{\text{раб}}$, а затем проводят линию, параллельную прямолинейному участку диаграммы. Пересечение этой линии с кривой диаграммы определяет $P_{\text{уп}}$ (см. рис. 71).

Тогда предел упругости:

$$\sigma_{yn} = \frac{P_{yn}}{F_0}$$

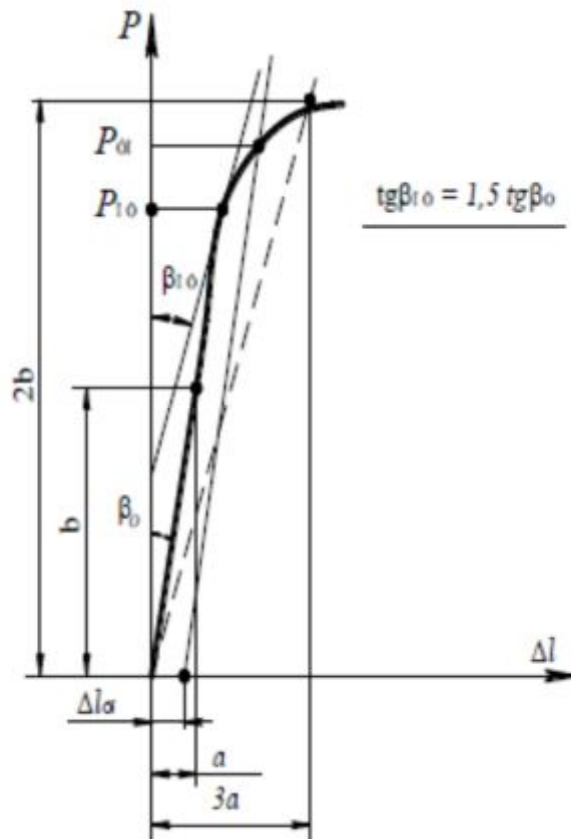


Рис. 71. Определение предела пропорциональности и предела упругости

3. *Предел текучести* — это напряжение, по достижении которого происходит рост деформации без существенного увеличения показаний силоизмерительного устройства. Предел текучести определяется по формуле

$$\sigma_{\tau} = \frac{P_{\tau}}{F_0}, \quad (71)$$

где P_{τ} — нагрузка, при которой напряжения в образце достигают предела текучести.

При напряжениях, равных пределу текучести, в малоуглеродистых сталях развиваются пластические деформации, связанные с необратимыми деформациями сдвига между кристаллами феррита.

Для материалов, имеющих диаграмму растяжения с явно выраженной площадкой текучести, определение P_T по диаграмме несложно. Если такой площадки нет, за предел текучести принимается величина напряжения, при которой в образце появляется остаточная деформация $\varepsilon = 0,002$. P_T в этом случае определяется так же, как и $P_{yп}$.

После развития определенных пластических деформаций и перестройки кристаллической решетки несущая способность стали увеличивается — рост деформаций сопровождается увеличением напряжений, происходит упрочнение стали.

4. *Временное сопротивление, или предел прочности*, — это отношение наибольшей силы, которую способен выдержать образец, к начальной площади его поперечного сечения:

$$\sigma_{в} = \frac{P_{нб}}{F_0} \quad (72)$$

где $P_{нб}$ — максимальная сила, которую выдерживает образец, определяемая по показаниям ведомой стрелки на испытательной машине или диаграмме растяжения.

5. *Нормальные напряжения в момент разрыва образца*:

$$\sigma_{р} = \frac{P_{р}}{F_0}, \quad (73)$$

где $P_{р}$ — значение силы в момент разрыва образца, определяемое по диаграмме $P - \Delta l$.

Истинные нормальные напряжения в момент разрыва образца определяются по формуле:

$$\sigma_{ист} = \frac{P_{р}}{F_{ш}}, \quad (74)$$

где $F_{ш}$ — площадь поперечного сечения шейки.

$$F_m = \frac{\pi d_m^2}{4}, \quad (75)$$

здесь d_m — диаметр шейки, определяемый замером образца после разрыва.

6. Абсолютное остаточное удлинение после разрыва:

$$\Delta l = l_1 - l_0 \quad (76)$$

7. Относительное остаточное удлинение после разрыва образца:

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\%, \quad (77)$$

где l_0 — длина рабочего участка до испытания;

l_1 — длина рабочего участка после разрыва.

Довольно часто разрыв образца происходит не посередине. В этом случае удлинение образца меньше обычного. Для определения относительного удлинения поступают следующим образом. От крайней риски, обозначенной на рис. 6.9 нулем, отмеряют четное количество n участков так, чтобы место разрыва находилось приблизительно посередине этих участков.

В рассматриваемом случае $n = 2$. Их длину обозначим a . Если образе разделен на m участков, то длина расчетного участка после разрыва будет:

$$l_p = a + b, \quad (78)$$

где b — длина $\frac{m - n}{2}$ участков.

В нашем случае эта длина четырех примыкающих участков $\left| \frac{10 - 2}{2} = 4 \right|$.

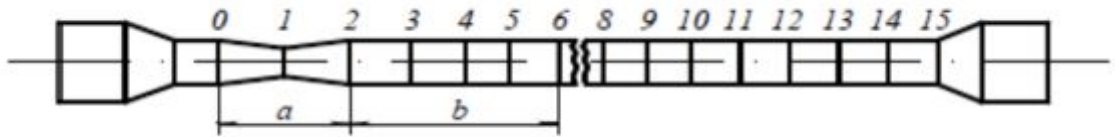


Рис. 72. Определение длины расчетного участка после разрыва

8. Абсолютное сужение площади поперечного сечения после разрыва:

$$\Delta F = F_0 - F_1 \quad (79)$$

где F_0 — площадь поперечного сечения до испытания;

F_1 — площадь поперечного сечения шейки.

9. Относительное сужение площади поперечного сечения (коэффициент пластичности):

$$\psi = \frac{F_0 - F_{\text{ш}}}{F_0} \cdot 100\% \quad (80)$$

Величины δ и ψ характеризуют пластические свойства стали. Для малоуглеродистых сталей $\delta = 25 \div 30 \%$ и $\psi = 50 \div 60\%$.

10. Работа, затраченная на разрыв образца:

$$A = \eta P_{\text{вр}} \cdot \Delta l_{\text{полн}}, \quad (81)$$

где η — коэффициент полноты диаграммы; для малоуглеродистой стали его можно принять равным 0,85;

$\Delta l_{\text{полн}}$ — полная деформация образца, определяемая в основном деформацией рабочего участка.

Удельная работа, затраченная на разрыв:

$$A_0 = \frac{A}{V_0} = \frac{A}{l_{\text{раб}} \cdot F_0} = \eta \sigma_{\text{в}} \cdot \varepsilon_{\text{полн}} \quad (82)$$

У пластичных сталей удельная работа, затрачиваемая на разрыв, как правило, бывает больше, чем у хрупких сталей, обладающих большим пределом прочности. Объясняется это тем, что величины деформаций пластичных сталей значительно больше.

По найденным выше характеристикам можно построить диаграмму «напряжение — относительная деформация» $\sigma - \varepsilon$ (рис. 73).

Эта диаграмма в основном имеет такой же характер, что и диаграмма $P - \Delta l$. Пунктирной линией показаны значения истинных нормальных напряжений.

Эта диаграмма называется *условной*, так как при ее построении не учитывается уменьшение площади поперечного сечения при растяжении образца, а также принимается среднее значение продольной деформации в пределах рабочего участка.

Диаграмма растяжения, построенная с учетом изменения площади поперечного сечения, называется *истинной диаграммой*.

Полная деформация, соответствующая точке, находящейся выше предела упругости, равна $\varepsilon = \varepsilon_{\text{ост}} + \varepsilon_{\text{уп}}$

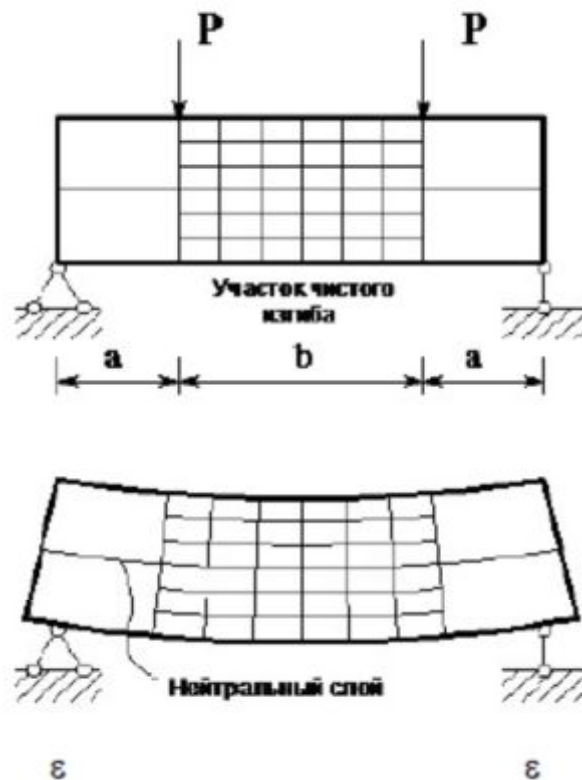


Рис. 73. Диаграмма растяжения $\sigma - \varepsilon$ для малоуглеродистой стали

Контрольные вопросы

1. Что является целью испытания материала на растяжение?
2. Что называется абсолютным удлинением и какова его размерность?
3. Какие деформации принято называть упругими и какие остаточными?
4. Какой участок диаграммы растяжения называется площадкой текучести и как определяется предел текучести?
5. Как определяется временное сопротивление (предел прочности)?
6. Чем объясняется уменьшение растягивающей силы за пределом прочности на условной диаграмме растяжения?
7. Как определяется истинное напряжение в момент разрыва?
8. Что такое условное напряжение?
9. Чем отличается истинная диаграмма растяжения от условной диаграммы?
10. Что такое относительное сужение после разрыва и как оно определяется?

6.5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В БАЛКЕ ПРИ ИЗГИБЕ

Цели работы:

- 1) проверка опытным путем закона распределения нормальных напряжений в поперечном сечении балки на участке чистого изгиба в стальной изгибаемой балке;
- 2) определение величины нормальных напряжений в характерных точках по высоте сечения на участке чистого изгиба;
- 3) определение величины наибольших касательных напряжений при поперечном изгибе балки на уровне нейтрального слоя;
- 4) сопоставление опытных данных с результатами аналитического расчета.

Общие сведения

Изгибом называется такой вид деформирования стержня, при котором внешние нагрузки (сосредоточенные силы, распределенные нагрузки, пары сил) действуют в плоскостях, перпендикулярных к его оси.

Если внешние нагрузки расположены в одной плоскости, проходящей через ось стержня, то изгиб называется плоским. Плоскость, в которой действуют нагрузки, называется силовой плоскостью.

Если силовая плоскость совпадает с одной из главных плоскостей инерции, то имеет место плоский прямой изгиб. Если же силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции, то изгиб называется плоским косым изгибом.

Когда нагрузки расположены в разных плоскостях, изгиб называется пространственным.

В данной лабораторной работе рассматривается наиболее простой вид изгиба — плоский прямой изгиб. Силовая плоскость содержит главную центральную ось Oy .

При плоском прямом изгибе в плоскости Oxy в поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия: изгибающий момент M_z и поперечная сила Q_y .

Участок балки, в пределах которого изгибающий момент имеет постоянное значение ($M_z = const$), а поперечная сила отсутствует ($Q_y = 0$), называется участком *чистого изгиба*.

Из рис. 74 видно, что продольные волокна балки, расположенные ниже некоторого слоя, растянуты, а выше этого слоя — сжаты. Такой слой называется *нейтральным слоем*. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной осью* (*нулевой линией*) сечения.

Экспериментальные и теоретические исследования чистого изгиба балок дают основание принять следующие гипотезы.

1. *Поперечные сечения балки, плоские до деформации, остаются плоскими и ортогональными к нейтральному слою после деформации* (гипотеза Я. Бернулли). При изгибе происходит поворот поперечных сечений на некоторый угол относительно нейтральной оси, и угловые деформации в продольных сечениях балки отсутствуют.

2. *Взаимное давление между продольными слоями отсутствует*. Продольные волокна испытывают одноосное растяжение и сжатие.

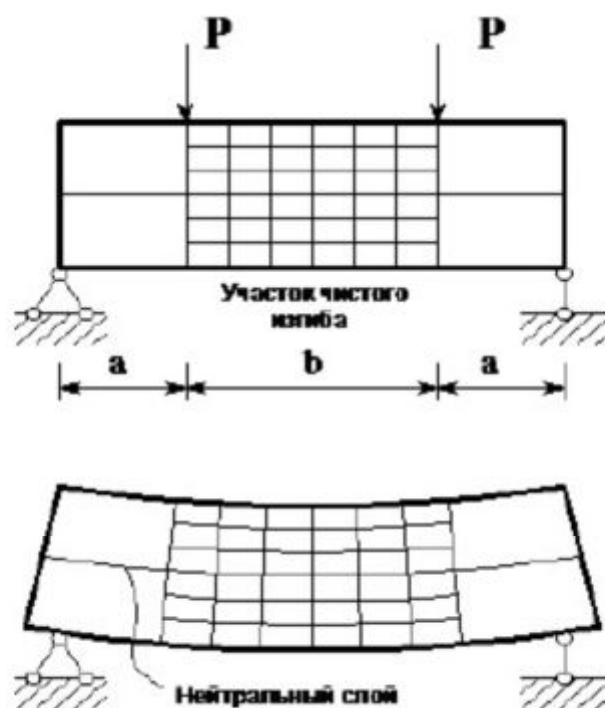


Рис. 74. Изгиб балки

При чистом изгибе в поперечных сечениях балки действуют только нормальные напряжения. При плоском прямом изгибе в плоскости Oxy они определяются по формуле:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y, \quad (83)$$

где M_x — изгибающий момент в рассматриваемом сечении;

J_z — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;

y — расстояние, отсчитываемое от нейтральной оси (нулевой линии).

Нормальные напряжения σ_x по высоте сечения изменяются по линейному закону. В точках нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю.

Наибольшие нормальные напряжения действуют в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси. Они определяются по формулам:

$$\sigma_n = \frac{M_z h_n}{J_z}; \quad \sigma_v = -\frac{M_z h_v}{J_z}, \quad (84)$$

где h_n и h_v — расстояния от нейтральной оси до крайних волокон.

Формулы (84) удобно представить в виде:

$$\sigma_n = \frac{M_z}{W_{zn}}; \quad \sigma_v = \frac{M_z}{W_{zv}}, \quad (85)$$

где:

$$W_{zn} = \frac{J_z}{h_n}; \quad W_{zv} = \frac{J_z}{h_v} \quad (86)$$

Величины W_{zn} и W_{zv} называются моментами сопротивления сечения относительно нейтральной оси Oz для нижних и верхних волокон.

Они являются положительными величинами. Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси, $h_x = h_y = \frac{h}{2}$, и момент сопротивления определяется по формуле $W_{zx} = W_{zy} = W_z = \frac{J_z}{0,5h}$. Наибольшие и наименьшие нормальные напряжения равны по абсолютной величине:

$$\sigma_{\text{нб}} = |\sigma_{\text{нм}}| = \frac{M_z}{W_z} \quad (87)$$

При поперечном изгибе, в отличие от чистого изгиба, сечения балки не остаются плоскими (нарушается гипотеза Я.Бернулли). В поперечных сечениях действуют нормальные и касательные напряжения. Как правило, влияние сдвигов мало влияет на величину нормальных напряжений. В силу этого при поперечном изгибе используется формула (83).

Касательные напряжения в поперечном сечении определяются по формуле:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y \cdot S_z^{\text{отс}}(y)}{J_z \cdot b(y)}, \quad (88)$$

где Q_y — поперечная сила в данном сечении;

$S_z^{\text{отс}}(y)$ — статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной оси;

$b(y)$ — ширина поперечного сечения на уровне рассматриваемой точки. Эта формула в отечественной литературе называется *формулой Д.И. Журавского*.

В пределах участка с постоянной шириной касательные напряжения изменяются по высоте сечения по закону квадратной параболы. В местах скачкообразного изменения ширины сечения касательные напряжения также имеют скачки или разрывы.

Наибольшие значения касательных напряжений для балки прямоугольного сечения равны:

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{3Q_y}{2F} \quad (89)$$

где $F = bh$ — площадь поперечного сечения.

При вычислении τ_{xy} в стенке двутаврового сечения в формуле (88) нужно принять $b(y) = d$, где d — толщина стенки двутавра. При этом имеем:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z d} \quad (90)$$

$S_z^{\text{отс}}$ вычисляется как сумма статических моментов относительно оси Oz площадей сечений полки $F_{\text{п}}$ и части стенки $F_{\text{с}}$:

$$S_z^{\text{отс}} = F_{\text{п}} y_1 + F_{\text{с}} y_2. \quad (91)$$

Наибольшее значение касательные напряжения τ_{xy} имеют на уровне нейтральной оси при $y = 0$:

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{Q_y S_z^{1/2}}{J_z d}, \quad (92)$$

где $S_z^{1/2}$ — статический момент площади половины сечения относительно нейтральной оси:

$$S_z^{1/2} = \left(\frac{h}{2} - t\right) d \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - t\right) + bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) \quad (93)$$

где h — высота двутавра;
 d — толщина стенки;
 b — ширина полки;
 t — средняя толщина полки.

Для сечений прокатных двутавров и швеллеров значения $S_z^{1/2}$ приведены в сортаменте.

На уровне примыкания стенки к полкам касательные напряжения τ_{xy} равны:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^\pi}{J_z d} \quad (94)$$

где S_z^π — статический момент площади сечения полки относительно нейтральной оси:

$$S_z^\pi = \frac{bt}{2}(h-t) \quad (95)$$

Величины и направления главных напряжений при изгибе балки определяются по формулам:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\tau}{\sigma_1}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\tau}{\sigma_2}. \quad (96)$$

На уровне нейтральной оси $\sigma_x = 0$, $\tau = \tau_{нб}$. При этом главные напряжения по величине равны наибольшим касательным напряжениям: $\sigma_{1,2} = \pm \tau_{нб}$, $\alpha_{1,2} = \pm 45^\circ$.

Расчет балок строительных конструкций на прочность при изгибе проводится по методу предельных состояний. В большинстве случаев основное значение при оценке прочности элементов конструкций имеют нормальные напряжения. При этом наибольшие нормальные напряжения, действующие в крайних волокнах балок, не должны превышать некоторой допустимой для данного материала величины. При расчете по методу предельных состояний эта величина принимается равной расчетному сопротивлению R , умноженному на коэффициент условий работы γ_c .

Условие прочности записывается в виде:

$$\sigma_{нб} \leq \gamma_c R. \quad (97)$$

Для балок с симметричным сечением из пластичного материала, одинаково хорошо сопротивляющегося растяжению и сжатию, условие прочности записывается в виде:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{нб}}}{W} \leq \gamma_c R. \quad (98)$$

Для несимметричных сечений имеем:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{нб}}}{W_{\text{нм}}} \leq \gamma_c R, \quad (99)$$

где $M_{\text{нб}}$ — наибольший по абсолютной величине изгибающий момент от действия расчетных нагрузок;

W и $W_{\text{нм}}$ — моменты сопротивления сечения относительно нейтральной оси Oz .

Сечение балки, в котором действует наибольший по абсолютной величине изгибающий момент, называется опасным сечением.

С использованием условий прочности для элементов конструкций, работающих на изгиб, решаются следующие задачи: проверка прочности балки; подбор сечения; определение несущей способности (грузоподъемности) балки.

В балках, нагруженных большими по величине сосредоточенными силами, близко расположенными к опорам, изгибающий момент $M_{\text{нб}}$ может оказаться сравнительно небольшим, а поперечная сила $Q_{\text{нб}}$ по абсолютной величине значительной. В этих случаях необходимо производить проверку по наибольшим касательным напряжениям $\tau_{\text{нб}}$.

Условие прочности по наибольшим касательным напряжениям имеет вид:

$$\tau_{\text{нб}} \leq \gamma_c R_s, \quad (100)$$

где R_s — расчетное сопротивление материала балки при сдвиге.

В стенке двутавровых балок, в местах перехода к полке, главные напряжения, возникающие на наклонных площадках, могут оказаться по абсолютной величине больше, чем наибольшие напряжения в поперечных сечениях. В таких случаях необходимо проверять *условие прочности по наибольшим главным напряжениям* для тех сечений балки, в которых M и Q одновременно велики по абсолютной величине:

$$|\sigma_{1,2}| = \left| \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \right| \leq \gamma_c R. \quad (101)$$

Схема установки

Эксперимент проводится на стальной двутавровой балке, нагруженной двумя симметрично расположенными относительно середины пролета силами P (рис. 75).

Для балок небольших пролетов (0,8...1,2 м) нагружение может осуществляться с помощью какой-либо испытательной машины. Пролет балки зависит от размера испытательного стола машины.

Значительно удобнее и нагляднее можно проводить такой эксперимент на специальной стационарной установке, а нагрузку осуществлять с помощью гидравлического или винтового домкрата. Пролет балки в этом случае может быть 2 м и более.

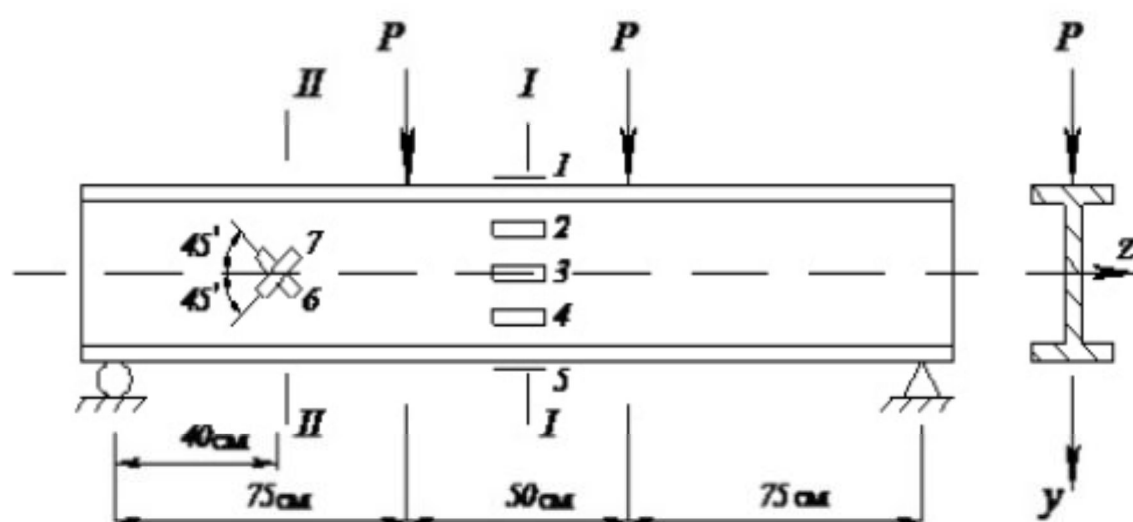


Рис. 75. Схема нагружения балки

Порядок проведения испытаний

Рекомендуется сначала дать некоторую нагрузку для устранения зазоров в опорах и нагружающем приспособлении. Эту нагрузку принять за нулевую, а затем вести нагружение ступенями (4—5 ступеней) с таким расчетом, чтобы при максимальной

нагрузке напряжения не превосходили бы предела пропорциональности. Чтобы удостовериться в правильности проведения эксперимента, рекомендуется в конце испытания для контроля регистрации отсчетов разгрузить балку и снова дать начальную нагрузку, а затем сверить отсчеты по приборам с первоначальными.

Для определения напряжений с помощью тензорезисторов определяются деформации, а затем с помощью закона Гука — напряжения. Нормальные напряжения определяются в зоне чистого изгиба (сечение I-I на рис. 75). По высоте сечения наклеивают 5 тензорезисторов (рис. 76). Тензорезисторы № 1 и № 5 наклеиваются в серединах полков (крайние волокна балки), тензорезисторы № 2 и № 4 — на расстоянии четверти высоты от нейтрального слоя, тензорезистор № 3 — на уровне нейтрального слоя.

Для всех тензорезисторов на каждую ступень нагружения (начиная с нулевого) записываются отсчеты по регистрирующему прибору, вычитая из последующего отсчета предыдущий, и подсчитываются приращения показаний прибора на ступень нагрузки (Δ). Число приращений показаний равно числу ступеней нагружения. Затем определяется среднее (среднеарифметическое) значение приращения для каждого тензометра на ступень нагрузки ($\Delta_{\text{ср}}$).

По полученным средним приращениям вычисляются относительные деформации:

$$\varepsilon = k \Delta_{\text{ср}}, \quad (102)$$

где k — цена единицы приращения показаний измерительного прибора по относительной деформации ($k = 1 \cdot 10^{-5}$).

На основании второй гипотезы продольные волокна балки при изгибе находятся в условиях центрального растяжения или сжатия, поэтому для определения напряжений используется закон Гука для одноосного напряженного состояния:

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (103)$$

где E — модуль упругости стали.

По полученным результатам строится в определенном масштабе эпюра нормальных напряжений σ (см. рис. 76). Точки 1, 2, 3, 4, 5 теоретически должны находиться на прямой линии, экспериментально же они окажутся на ломаной линии, близкой к прямой. Величины напряжений сравниваются со значениями σ , подсчитанными по формуле (83). За величину нагрузки P принимается степень нагружения.

Касательные напряжения на уровне нейтрального слоя определяются в сечении II-II (рис. 75), в котором кроме изгибающего момента имеется еще поперечная сила $Q_y = P$.

В поперечном сечении на уровне нейтрального слоя действуют только касательные напряжения τ . Напряженное состояние показано на рис. 77.

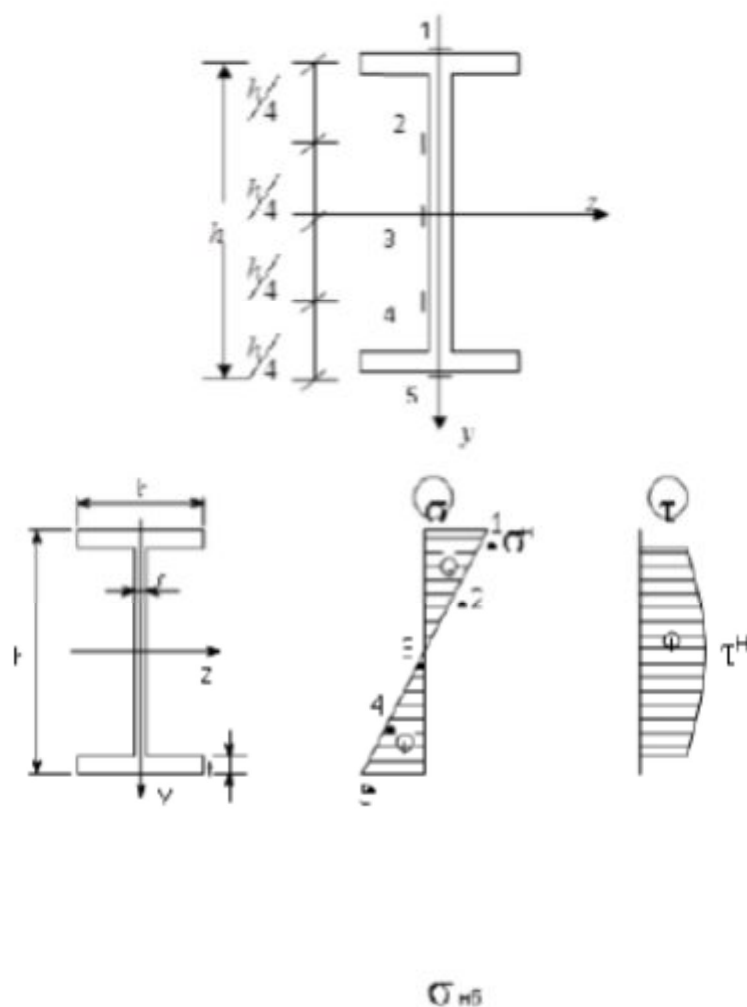


Рис. 76. Расположение тензорезисторов по высоте сечения балки и эпюры нормальных и касательных напряжений

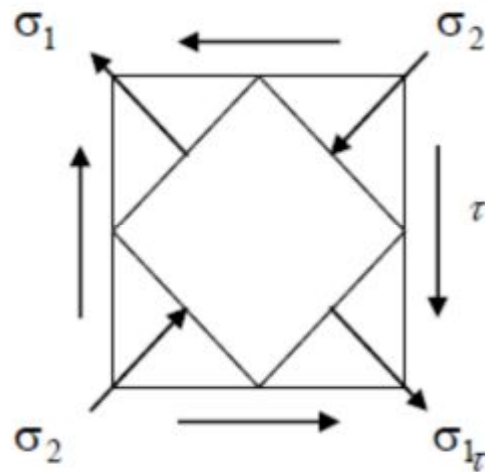


Рис. 77. Напряженное состояние в нейтральном слое в сечении II-II

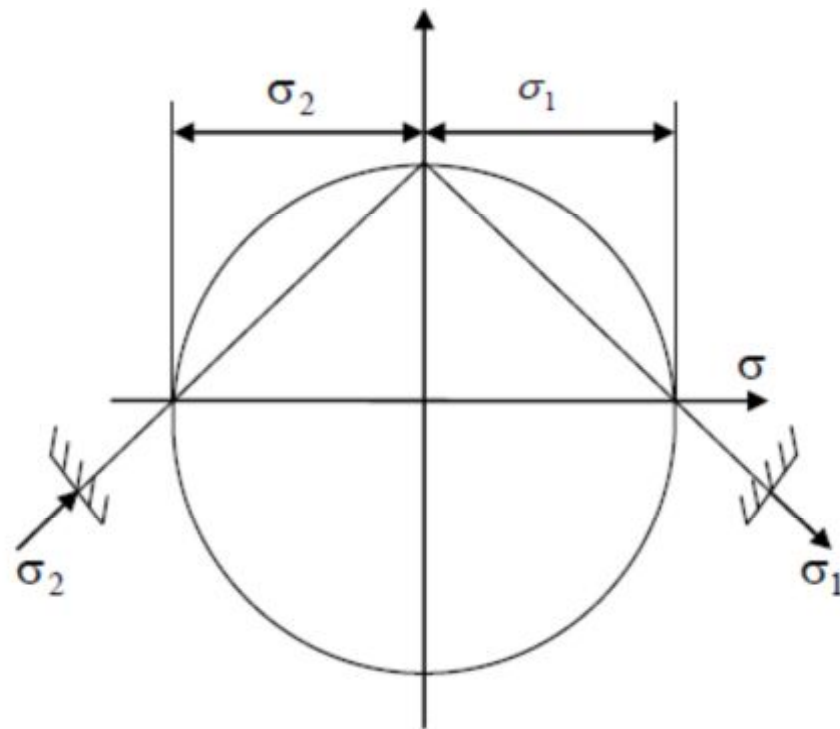


Рис. 78. Круг напряжений

Формулы (96) и круг напряжений (рис. 78) показывают, что главные напряжения $|\sigma_1| = |\sigma_2| = \tau_{\text{нб}}$ и направлены под углами 45° к оси балки.

Касательные напряжения $\tau_{н6}$ аналитически определяются по формуле (87). Тензорезисторы № 6 и № 7 наклеиваются на уровне нейтрального слоя в сечении II-II в направлении главных напряжений (под углами 45°) (рис. 78).

Относительные деформации в направлении тензорезисторов № 6 и № 7 подсчитываются по ранее изложенной методике.

Для определения величин главных напряжений используется закон Гука для плоского напряженного состояния:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2),$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1),$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Отсюда с учетом равенств $\sigma_2 = -\sigma_1$ и $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ получим:

$$\tau_{н6} = \frac{E\varepsilon}{1+\nu}, \text{ где } \varepsilon = \frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|}{2}.$$

В нашем случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_7$, а $\varepsilon_2 = \varepsilon_6$.

Полученные значения сравниваются с ранее вычисленными по формуле (87).

Для удобства результаты записываются в табл. 2.

Таблица 2

Нормальные напряжения в сечении I-I

| Номера точек | Из опыта | Теоретические | Расхождение, % |
|--------------|----------|---------------|----------------|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |

Касательные напряжения в сечении II - II

- а) из опыта _____
- б) теоретические _____

Контрольные вопросы

1. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях при поперечном и чистом изгибах?
2. Как формулируется гипотеза плоских сечений?
3. С какой целью наклеиваются тензорезисторы на нейтральной оси под углом 45° ?
4. Запишите закон Гука при плоском напряженном состоянии.
5. Запишите формулы для определения нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении при изгибе.
6. По какому закону изменяются нормальные напряжения по высоте в поперечном сечении балки?
7. По какому закону изменяются касательные напряжения по высоте в поперечном сечении балки?
8. Как направлены главные площадки на уровне нейтрального слоя и в точках, наиболее удаленных от этого слоя?
9. Каков принцип действия тензорезисторов?

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

Расчетно-графическая работа № 1. Геометрические характеристики поперечных сечений стержней

Задача № 1

Для сечений, имеющих одну ось симметрии, по схемам № 1—16 при размерах, указанных в табл. 1, требуется определить:

- 1) положение центра тяжести;
- 2) положение главных центральных осей инерции и величины главных моментов инерции.

Задача № 2

Для несимметричных сечений по схемам № 17—32 при размерах, указанных в табл. 1, требуется:

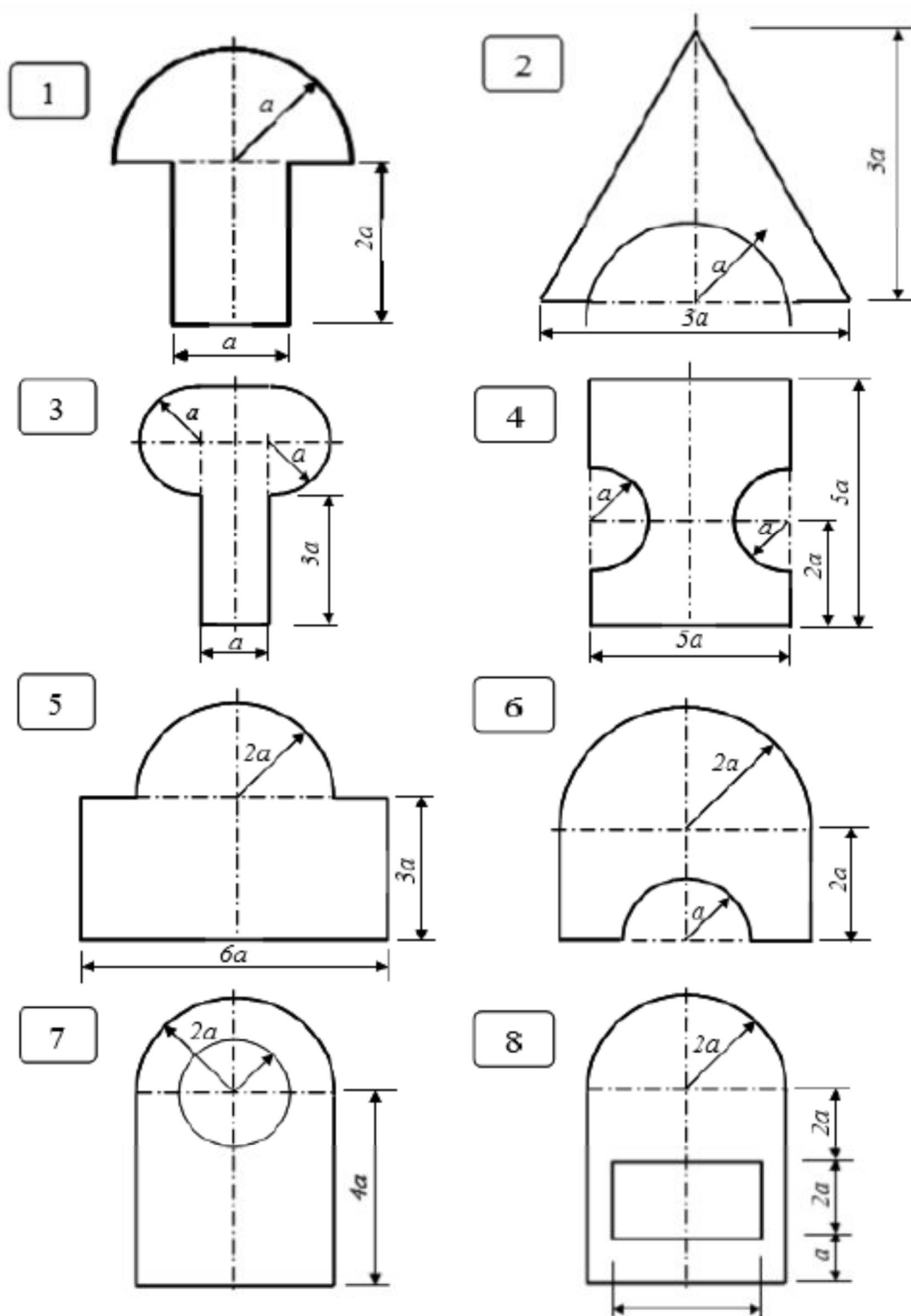
- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) вычислить осевые и центробежные моменты инерции относительно центральных осей;
- 3) определить положение главных центральных осей инерции и величины главных моментов инерции;
- 4) построить круг инерции и определить графически величины главных моментов инерции и направления главных центральных осей;
- 5) сравнить результаты аналитического и графического расчетов.

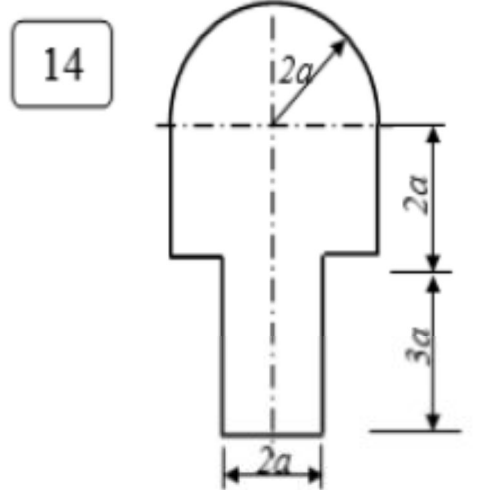
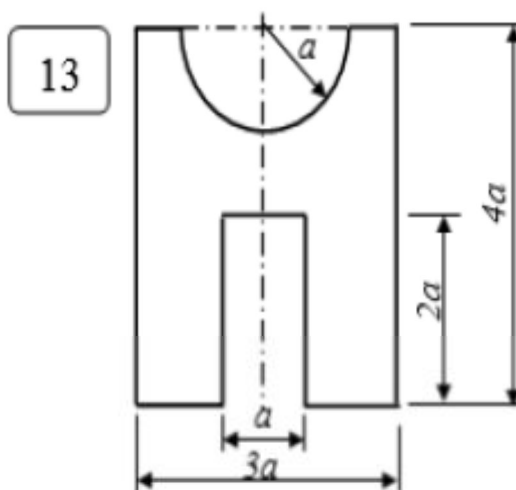
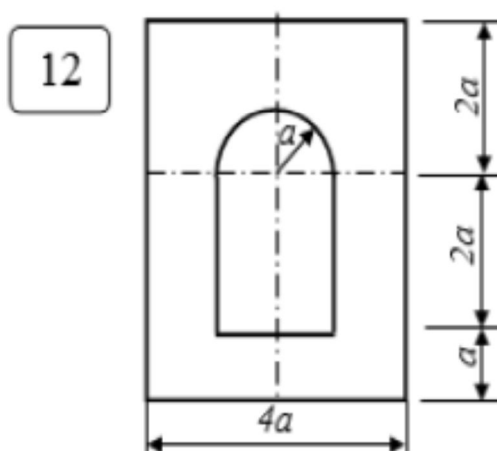
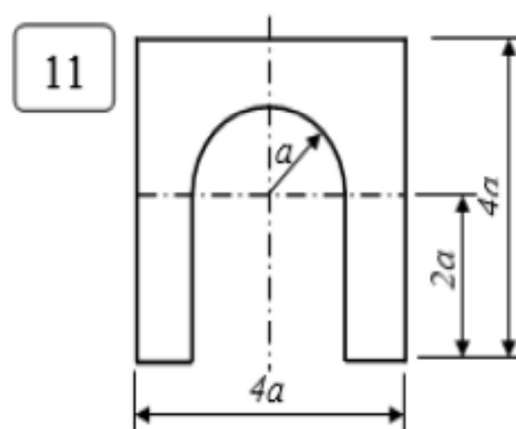
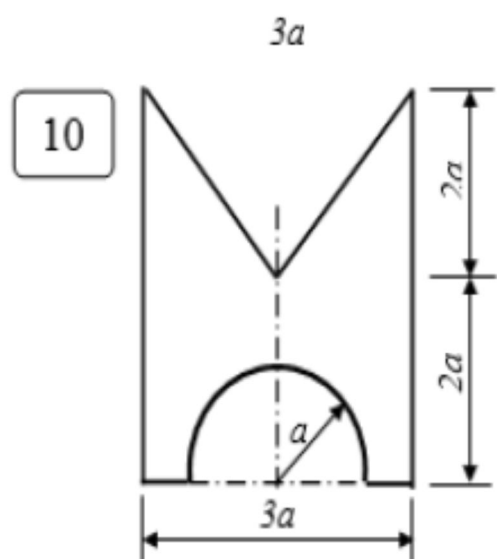
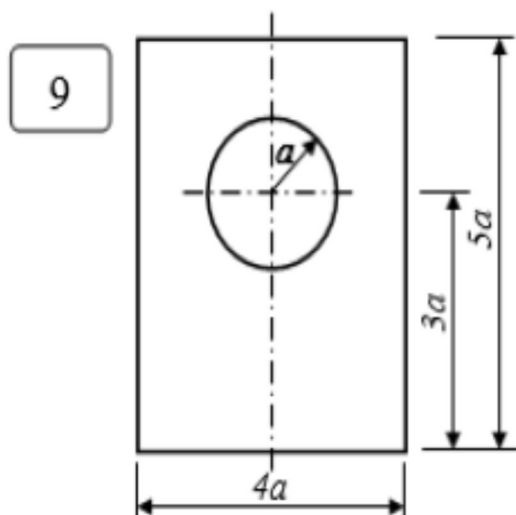
Таблица 1

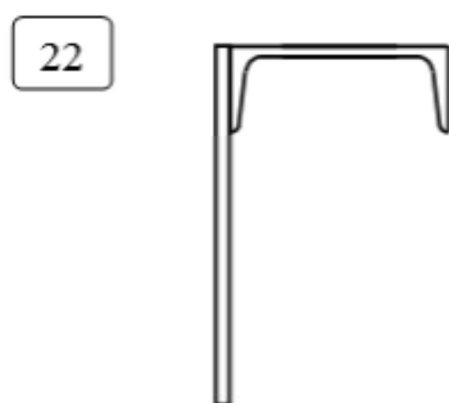
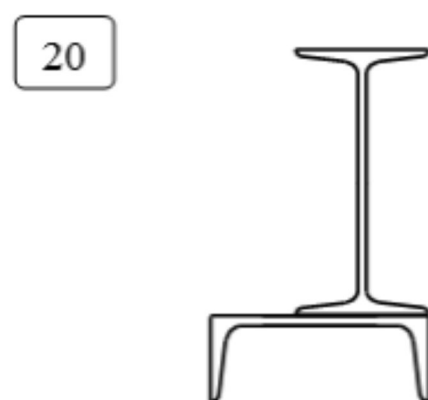
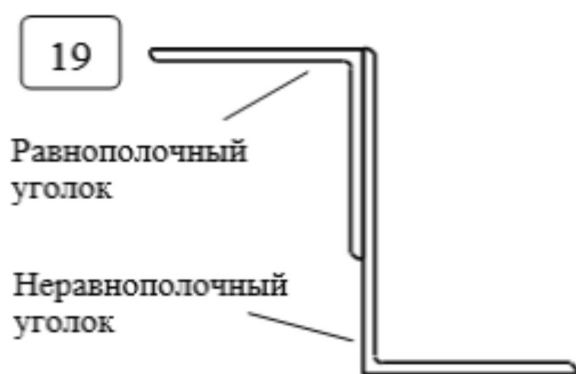
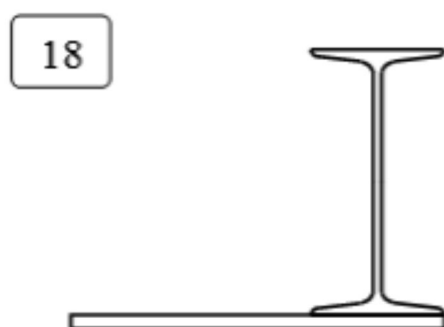
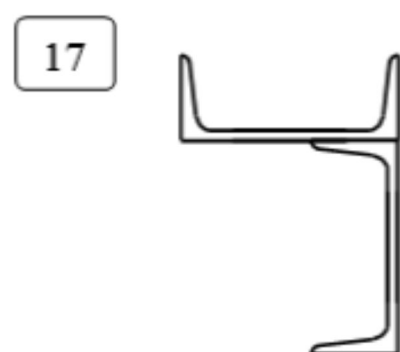
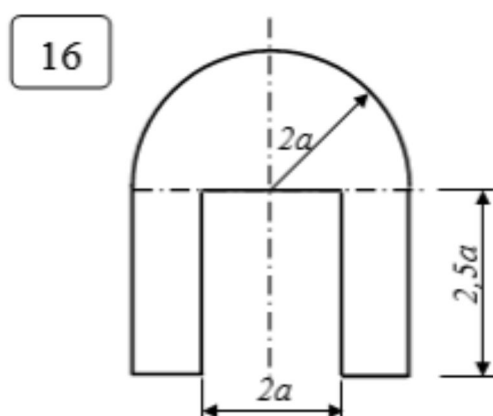
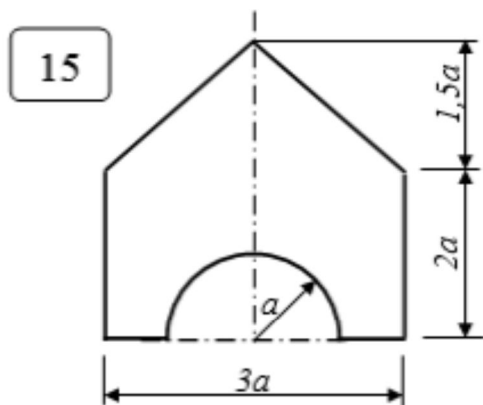
Размеры поперечных сечений стержней

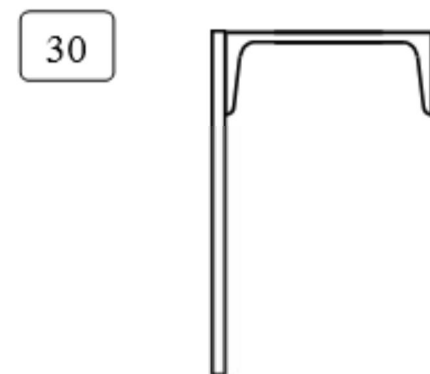
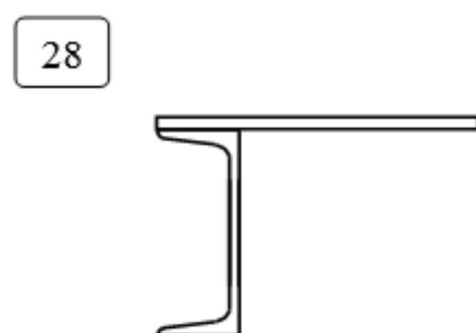
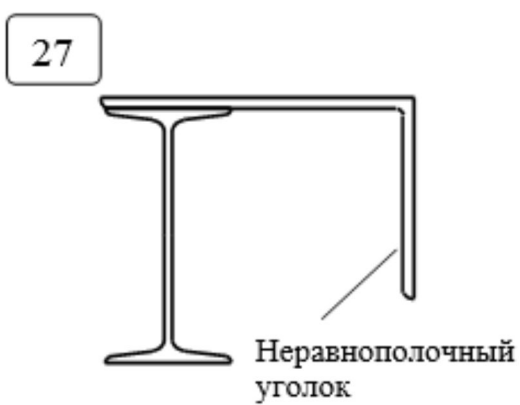
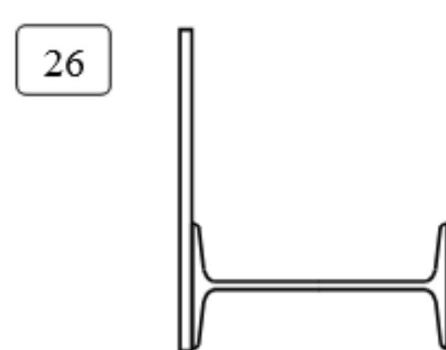
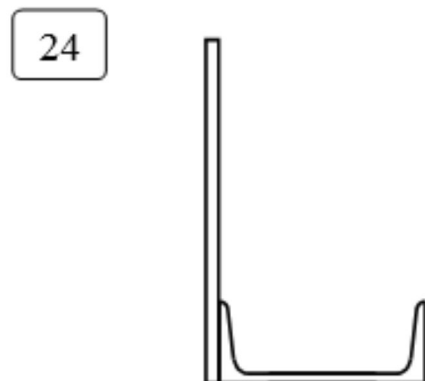
| № | Номер двутавра | Номер швеллера | Равнобокий уголок, мм | Неравнобокий уголок, мм | Лист, мм | a, см |
|----|----------------|----------------|-----------------------|-------------------------|----------|-------|
| 1 | 10 | 10 | 80x80x6 | 100x63x8 | 160x10 | 5 |
| 2 | 12 | 12 | 90x90x6 | 110x70x8 | 160x12 | 6 |
| 3 | 14 | 14 | 90x90x8 | 125x80x7 | 180x10 | 8 |
| 4 | 16 | 16 | 100x100x8 | 125x80x8 | 180x12 | 10 |
| 5 | 18 | 18 | 100x100x12 | 125x80x10 | 200x10 | 12 |
| 6 | 20 | 20 | 110x110x7 | 140x90x8 | 200x12 | 4 |
| 7 | 22 | 22 | 110x110x8 | 140x90x10 | 200x16 | 16 |
| 8 | 24 | 24 | 125x125x8 | 160x100x10 | 220x12 | 15 |
| 9 | 27 | 27 | 125x125x10 | 180x110x10 | 220x14 | 18 |
| 10 | 30 | 30 | 140x140x12 | 180x110x12 | 240x16 | 20 |
| 11 | 33 | 33 | 160x160x12 | 200x125x14 | 240x20 | 7 |
| 12 | 36 | 36 | 160x160x16 | 200x125x16 | 300x16 | 9 |
| 13 | 40 | 36 | 200x200x16 | 250x160x12 | 350x16 | 11 |
| 14 | 45 | 40 | 220x220x16 | 250x160x16 | 400x20 | 14 |

Виды поперечных сечений





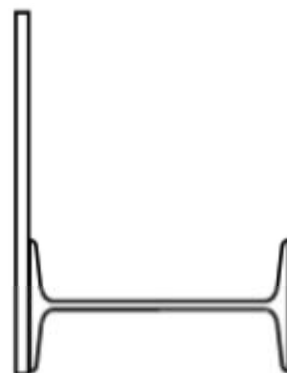




31



32



Методические указания к решению задач № 1 и № 2

В задачах № 1 и № 2 требуется найти положение главных центральных осей и вычислить значения главных центральных моментов инерции.

Главными центральными называются оси, проходящие через центр тяжести, относительно которых осевые моменты инерции имеют экстремальные значения, а центробежный момент инерции обращается в ноль. Моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции и обозначаются $J_1 = J_{max}$, $J_2 = J_{min}$.

Ось симметрии и любая ось, ей перпендикулярная, составляют пару главных осей.

В задаче № 1 необходимо найти положение центра тяжести сечения и провести через центр тяжести главные центральные оси Ox и Oy . Далее с помощью зависимостей между моментами инерции относительно параллельных осей необходимо найти осевые моменты инерции J_x , J_y и по их значениям определить, какая из осей является осью максимального момента инерции, а какая осью минимального момента инерции, например $J_x = J_1$, $J_y = J_2$.

В задаче № 2 сечение не имеет осей симметрии. Поэтому величины главных моментов инерции и положение главных центральных осей определяются по формулам:

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_1} \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_2},$$

где α_1, α_2 — углы, определяющие положение главных осей; J_x, J_y, J_{xy} — осевые и центробежный моменты инерции относительно произвольных осей, проходящих через центр тяжести.

Решение задачи № 2 проводится в следующем порядке:

1) сечение разбивается на элементы, для которых вычисляются необходимые геометрические характеристики — площади и моменты инерции относительно осей, проходящих через центры тяжести элементов;

2) находится положение центра тяжести сечения;

3) через центр тяжести проводятся произвольные оси Ox, Oy и при помощи зависимостей между моментами инерции относительно параллельных осей находятся осевые J_x, J_y и центробежный J_{xy} моменты инерции;

4) по формулам, приведенным выше, вычисляются величины главных моментов инерции и находится положение главных осей сечения.

В графической части работы необходимо начертить в масштабе сечение и указать основные размеры. Представить разбиение сечения на простые элементы, через центры тяжести которых провести оси Ox_i, Oy_i и показать главные центральные оси Ox, Oy . При решении следует отдельно начертить элементы, входящие в состав сечения, для которых необходимо записать геометрические характеристики с учетом положения в сечении и принятой системы координат. Графическое определение главных моментов инерции производится с помощью круга Мора, который должен быть построен на отдельном листе формата А4.

Контрольные вопросы

1. Назовите основные геометрические характеристики поперечных сечений.
2. Как определяется положение центра тяжести сечения?
3. Какие оси называются центральными осями?
4. Напишите зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей.
5. Как изменяются моменты инерции при повороте координатных осей?
6. Какие оси и какие моменты инерции называются главными?
7. Напишите значения моментов инерции для простых сечений: прямоугольника, треугольника, круга, полукруга.
8. В какой последовательности определяется положение главных центральных осей для составных сечений?

Расчетно-графическая работа № 2.
Определение усилий, напряжений и деформаций
в элементах, работающих на растяжение и сжатие

Задача № 1

Для статически определимого стержня ступенчато постоянного сечения по схеме №... при осевых нагрузках и геометрических размерах по строке №... требуется:

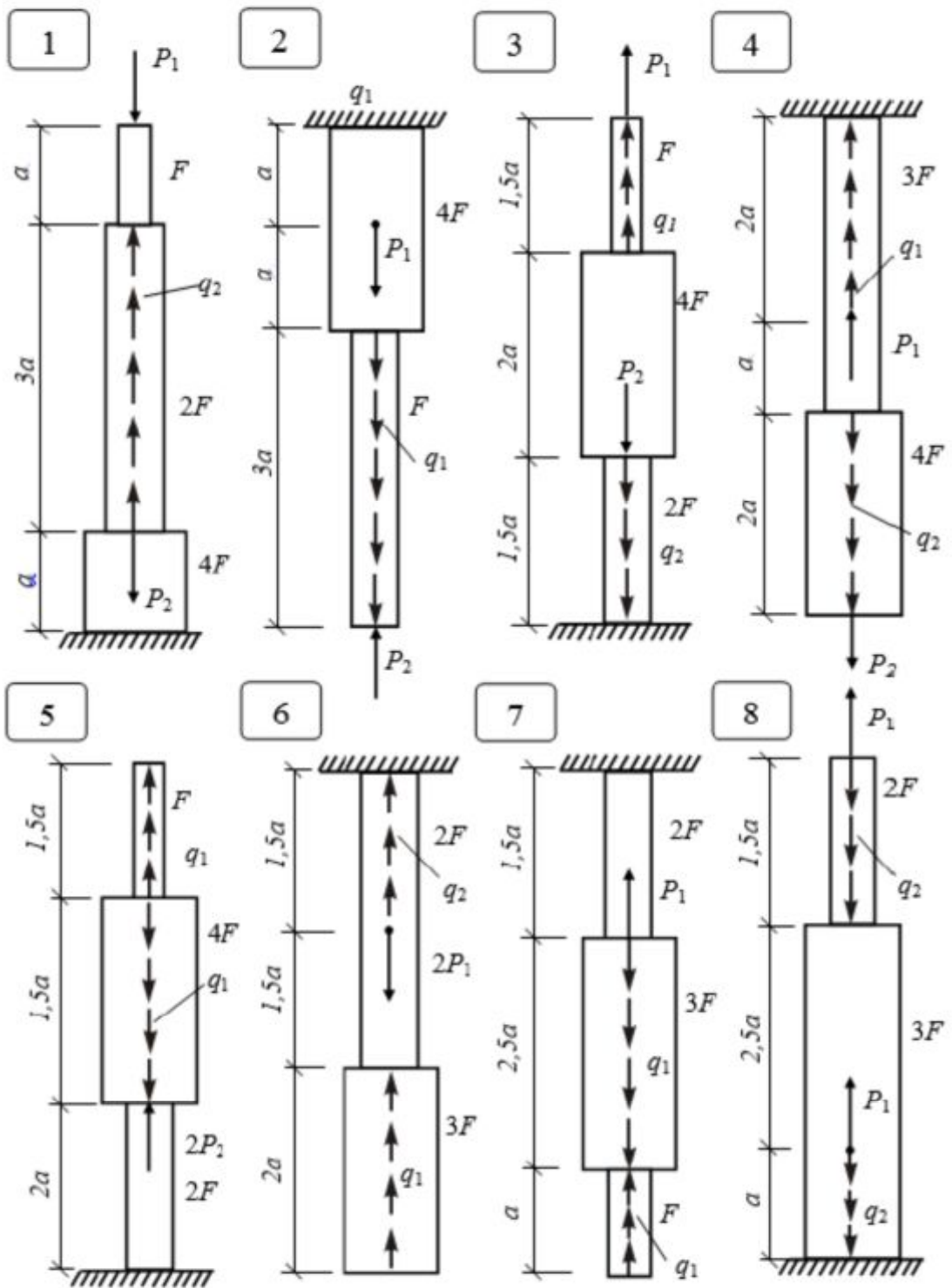
1. Определить опорную реакцию в месте закрепления стержня.
2. Вычислить значения продольных сил и нормальных напряжений в характерных сечениях и построить эпюры этих величин.
3. Найти величины абсолютных удлинений (укорочений) участков стержня и величину общего удлинения (укорочения) стержня в целом.

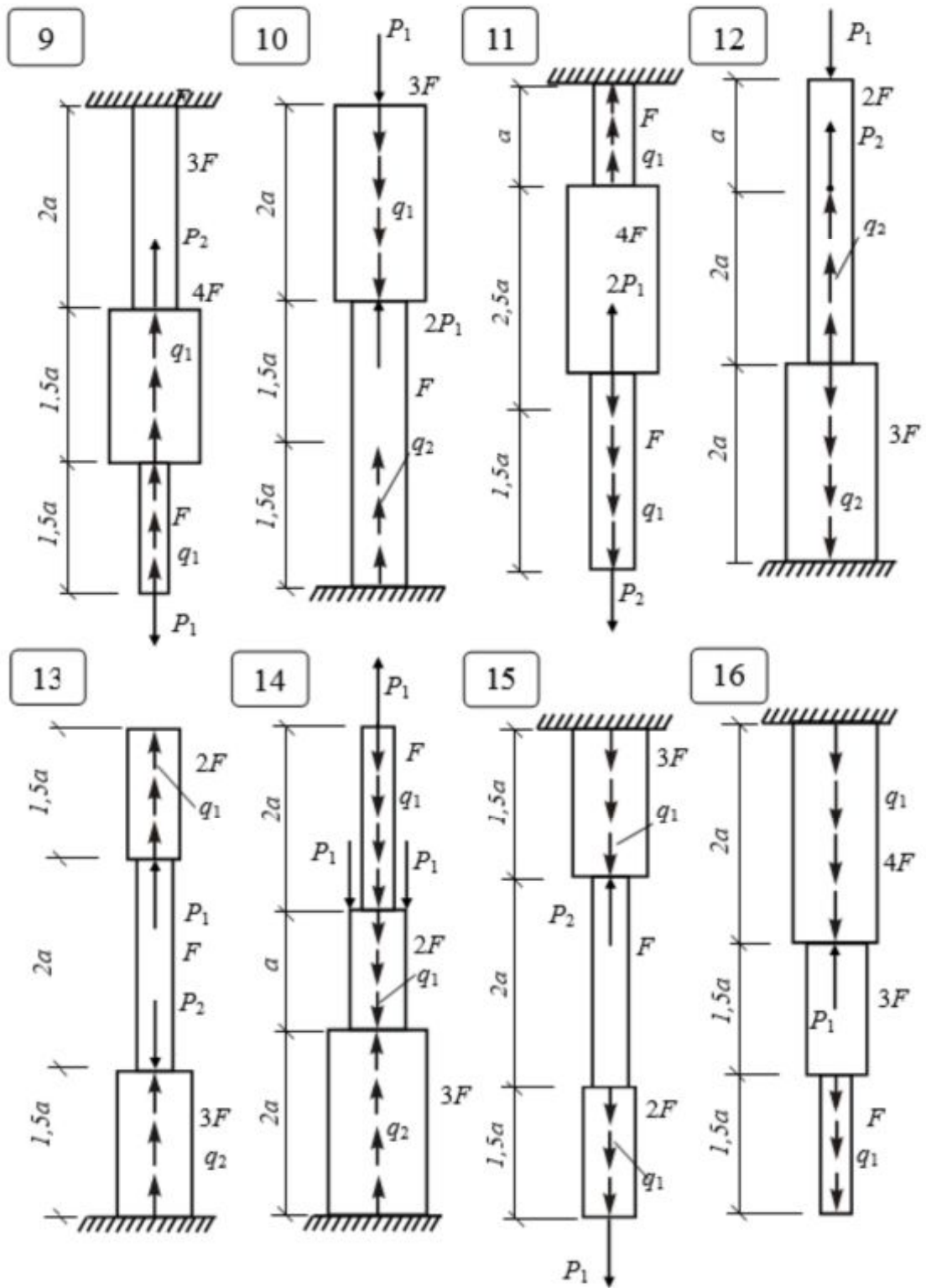
Таблица 2

Геометрические параметры и нагрузки

| № | $a, \text{ м}$ | $F, \text{ см}^2$ | $P_1, \text{ кН}$ | $P_2, \text{ кН}$ | $q_1, \text{ кН/м}$ | $q_2, \text{ кН/м}$ | $E, \text{ МПа}$ |
|----|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------|---------------------|------------------|
| 1 | 0,4 | 18 | 28 | 40 | 8 | 24 | $2,0 \cdot 10^5$ |
| 2 | 0,6 | 12 | 15 | 35 | 10 | 22 | $0,7 \cdot 10^5$ |
| 3 | 0,8 | 24 | 20 | 30 | 12 | 20 | $1,0 \cdot 10^5$ |
| 4 | 1,0 | 26 | 25 | 10 | 14 | 18 | $2,0 \cdot 10^5$ |
| 5 | 1,2 | 28 | 30 | 20 | 16 | 8 | $0,7 \cdot 10^5$ |
| 6 | 0,4 | 30 | 35 | 25 | 18 | 10 | $1,0 \cdot 10^5$ |
| 7 | 0,6 | 32 | 40 | 8 | 20 | 8 | $2,0 \cdot 10^5$ |
| 8 | 0,8 | 18 | 10 | 16 | 22 | 6 | $0,7 \cdot 10^5$ |
| 9 | 1,0 | 20 | 16 | 40 | 24 | 14 | $1,0 \cdot 10^5$ |
| 10 | 1,2 | 22 | 21 | 35 | 8 | 18 | $2,0 \cdot 10^5$ |
| 11 | 0,4 | 24 | 34 | 14 | 10 | 16 | $0,7 \cdot 10^5$ |
| 12 | 0,6 | 26 | 30 | 16 | 12 | 20 | $1,0 \cdot 10^5$ |
| 13 | 0,8 | 28 | 26 | 18 | 14 | 22 | $2,0 \cdot 10^5$ |
| 14 | 1,0 | 30 | 20 | 12 | 16 | 24 | $0,7 \cdot 10^5$ |
| 15 | 1,2 | 32 | 24 | 10 | 18 | 12 | $1,0 \cdot 10^5$ |
| 16 | 0,4 | 15 | 33 | 20 | 10 | 24 | $2,0 \cdot 10^5$ |
| 17 | 0,8 | 25 | 30 | 12 | 15 | 20 | $0,7 \cdot 10^5$ |
| 18 | 1,6 | 30 | 20 | 40 | 18 | 12 | $1,0 \cdot 10^5$ |
| 19 | 0,9 | 25 | 40 | 36 | 16 | 25 | $2,0 \cdot 10^5$ |
| 20 | 1,0 | 12 | 28 | 45 | 18 | 20 | $0,7 \cdot 10^5$ |
| 21 | 0,5 | 20 | 45 | 60 | 35 | 20 | $1,0 \cdot 10^5$ |
| 22 | 1,0 | 15 | 20 | 32 | 16 | 24 | $2,0 \cdot 10^5$ |

Стержни ступенчато-постоянного сечения





Задача № 2

Для статически неопределимой стержневой системы, состоящей из абсолютно жесткой балки AB и поддерживающих ее стальных стержней 1 и 2 по схеме №.... при геометрических размерах, соотношениях площадей поперечных сечений стержней F_2/F_1 и величине нормативной нагрузки P , указанных в строке № табл. 3, требуется:

1. Определить расчетное значение нагрузки, приняв коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$.

2. Определить усилия в стержнях системы. Собственную массу элементов стержневой системы не учитывать.

3. Подобрать сечения стержней в виде двух стальных прокатных равнобоких уголков, используя метод расчета по предельным состояниям. При подборе сечений обеспечить заданное соотношение площадей F_2/F_1 . Расчетное сопротивление по пределу текучести стали марки ВСт3 принять равным 210 МПа, коэффициент условий работы $\gamma_c = 0,9$.

4. Определить величины нормальных напряжений в поперечных сечениях стержней и проверить выполнение условий прочности.

5. Определить величины удлинений стержней, приняв $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

6. Определить нагрузку P_τ , при которой в системе возникают первые пластические деформации, считая, что материал стержней следует диаграмме Прандтля и имеет предел текучести $\sigma_\tau = 240$ МПа.

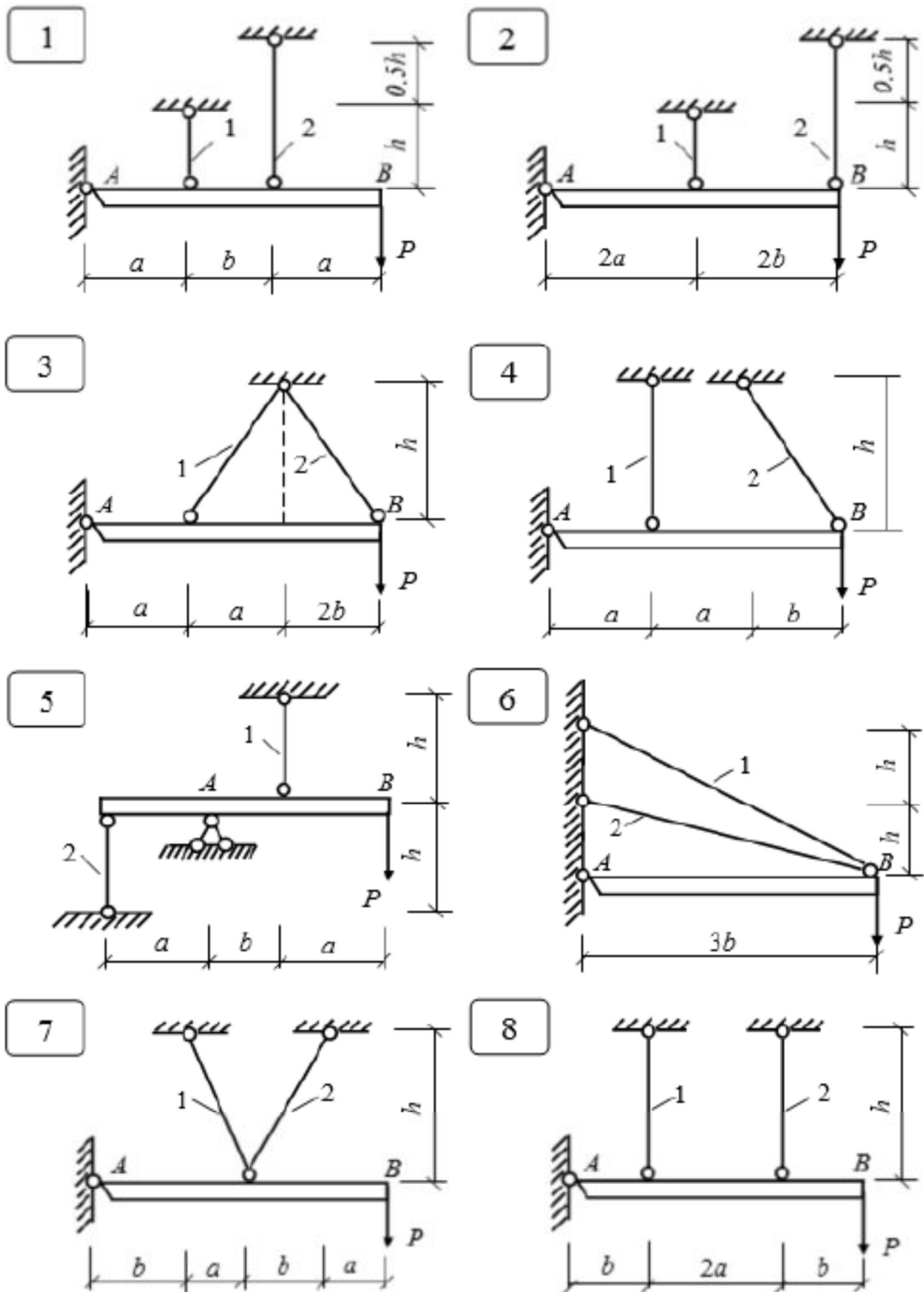
7. Определить разрушающую нагрузку $P_{\text{разр}}$, при которой система полностью исчерпывает свою несущую способность.

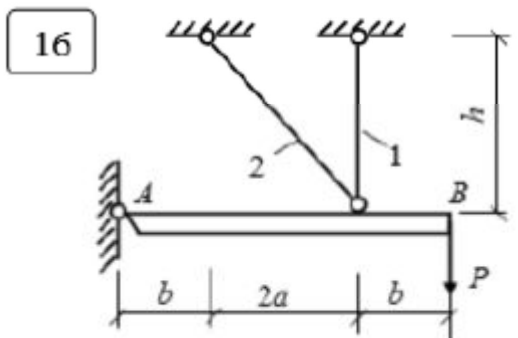
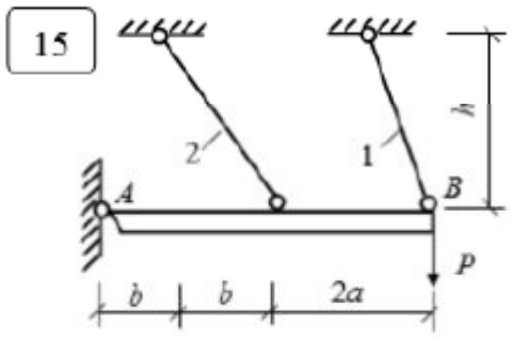
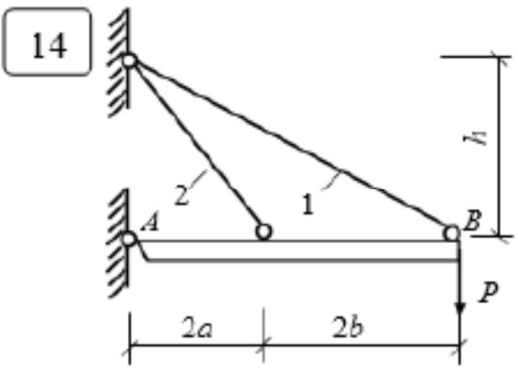
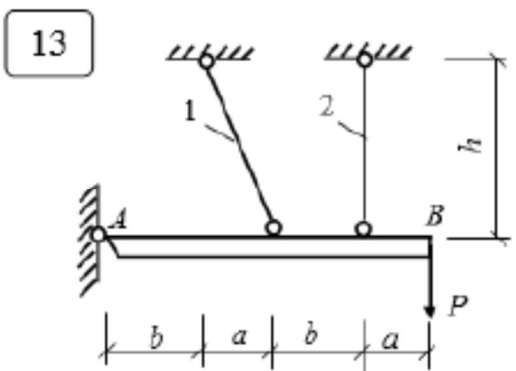
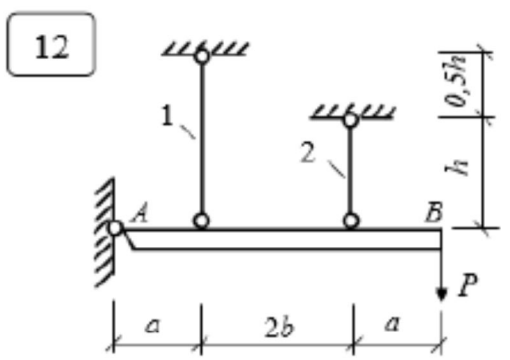
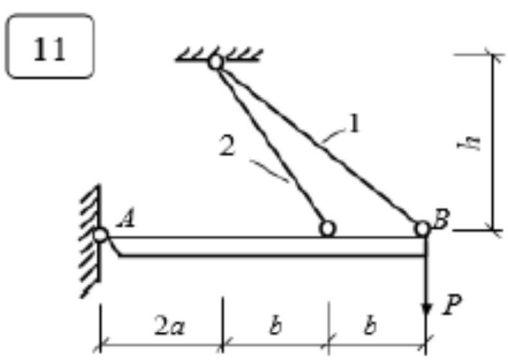
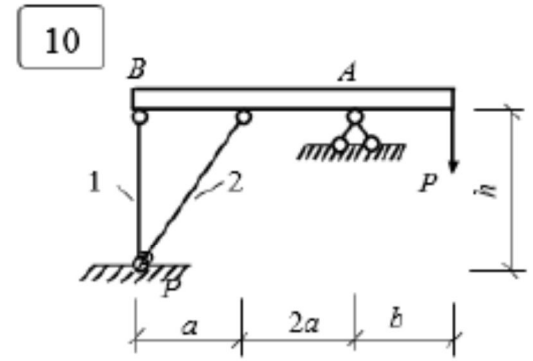
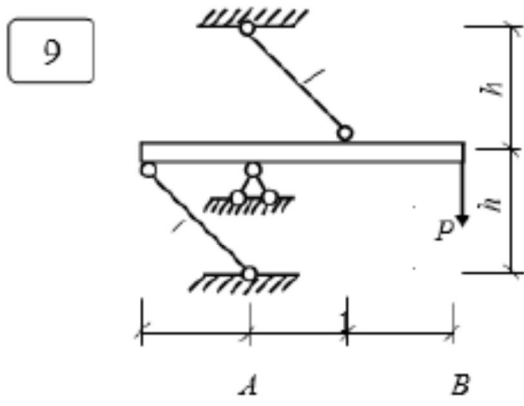
Таблица 3

Размеры и нагрузки на стержневую систему

| № | $a, \text{ м}$ | $b, \text{ м}$ | $h, \text{ м}$ | F_2/F_1 | $P, \text{ кН}$ |
|----|----------------|----------------|----------------|-----------|-----------------|
| 1 | 1,3 | 0,9 | 1,1 | 1,2 | 420 |
| 2 | 1,0 | 0,7 | 0,8 | 1,3 | 440 |
| 3 | 1,2 | 0,9 | 0,9 | 1,1 | 460 |
| 4 | 1,4 | 0,8 | 1,0 | 1,5 | 480 |
| 5 | 1,5 | 0,7 | 1,4 | 1,2 | 500 |
| 6 | 1,1 | 0,8 | 1,0 | 1,5 | 520 |
| 7 | 1,0 | 0,8 | 0,9 | 2,0 | 540 |
| 8 | 1,2 | 0,8 | 1,2 | 1,4 | 560 |
| 9 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 1,8 | 580 |
| 10 | 1,0 | 1,0 | 0,7 | 2,0 | 420 |
| 11 | 1,3 | 1,0 | 0,8 | 1,0 | 440 |
| 12 | 1,2 | 0,7 | 1,0 | 1,7 | 460 |
| 13 | 1,4 | 0,8 | 1,3 | 1,3 | 480 |
| 14 | 1,2 | 1,0 | 0,8 | 1,9 | 500 |
| 15 | 0,9 | 0,9 | 1,1 | 1,0 | 520 |

Стержневые системы





Методические указания к решению задач № 1 и № 2

При решении задачи № 1 расчет стержня ступенчато постоянного сечения следует начинать с определения опорной реакции с использованием уравнения равновесия $\sum X = 0$, а начало координат расположить в опорном сечении.

Эпюра продольных сил N строится при помощи метода сечений, для чего необходимо показать характерные сечения по длине стержня. В отсеченной части стержня должна быть показана положительная (растягивающая) продольная сила. Контроль правильности построенной эпюры N следует проводить с использованием дифференциальной зависимости $dN/dx = -q(x)$. На участках, где $q(x) = 0$, продольная сила N должна быть постоянной, а на участках, где $q(x) = const$, продольная сила изменяется по линейному закону.

Эпюра нормальных напряжений строится с использованием формулы:

$$\sigma = N/F.$$

Значения N и σ , полученные в начале и конце характерных сечений, откладываются от оси стержня с указанием знака; производится штриховка эпюр.

Для определения осевого перемещения в сечении с координатой « x » необходимо вычислить площадь эпюры нормальных напряжений $\Omega\sigma(x)$ между опорным сечением и рассматриваемым сечением. Для определения абсолютного удлинения стержня Δl необходимо вычислить всю площадь эпюры нормальных напряжений: $\Delta l = \Omega_{\sigma}(l)/E$.

При оформлении графической части работы на листе формата А 4 необходимо изобразить стержень с геометрическими размерами и нагрузками, указать характерные сечения и в выбранном масштабе построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ .

В задаче № 2 необходимо определить усилия N_1 и N_2 в стержнях 1 и 2 по методу предельных состояний от действия расчетной нагрузки $P_{расч} = P_n \gamma_f$, где P_n - нормативная нагрузка, γ_f — коэффициент надежности по нагрузке.

Так как задача является статически неопределимой и уравнений равновесия недостаточно для определения неизвестных усилий, то для решения задачи необходимо рассмотреть геометрическую схему деформаций и получить зависимость между абсолютными удлинениями $\Delta l_1, \Delta l_2$: $\Delta l_1 = k_1 \Delta l_2$.

Абсолютные удлинения стержней Δl_1 , Δl_2 нужно выразить через усилия в стержнях N_1 , N_2 и получить дополнительное уравнение, связывающее между собой усилия в стержнях:

$$N_1 = k_2 N_2,$$

где k_2 — коэффициент, зависящий от геометрических параметров системы и соотношения площадей стержней F_2 / F_1 .

Для определения усилий в стержнях 1 и 2 следует воспользоваться уравнением равновесия:

$$\Sigma M_A = 0$$

и уравнением:

$$N_1 = k_2 N_2.$$

Подбор сечений стержней 1 и 2 производится по формулам:

$$F_1 \geq \frac{N_1}{\gamma_c R} \qquad F_2 \geq \frac{N_2}{\gamma_c R}$$

После определения площадей сечений необходимо проверить заданное отношение площадей стержней F_2 / F_1 . Изменив площади поперечных сечений при невыполнении заданного отношения F_2 / F_1 , подбираем по сортаменту сечения стержней 1 и 2 в виде двух равнобоких уголков.

Проверка выполнения условий прочности производится по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} \leq \gamma_c R \qquad \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} \leq \gamma_c R$$

Абсолютные удлинения определяются по формулам:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}$$

При выполнении пунктов 6, 7 принимается упрощенная диаграмма зависимости между напряжениями σ и деформациями ϵ (диаграмма Прандтля). Согласно диаграмме Прандтля (рис. 1) при напряжениях в стержнях, равных пределу текучести σ_T , деформации неограниченно возрастают.

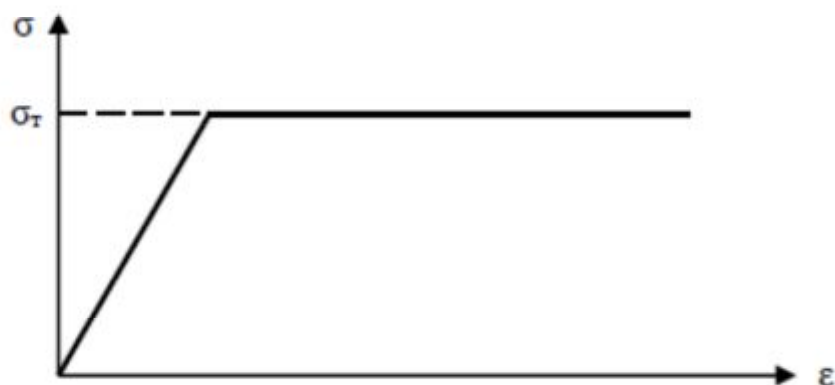


Рис. 1. Диаграмма Прандтля

Для определения нагрузки P_T , при которой в системе возникают первые пластические деформации, необходимо установить наиболее напряженный стержень, в котором при возрастании нагрузки возникнут напряжения, равные пределу текучести. Соответствующее усилие $N = \sigma_T F$. Тогда усилие во втором стержне определится из равенства $N_1 = k_2 N_2$, а нагрузка P_T - из уравнения равновесия системы $\Sigma M_A = 0$.

Для определения разрушающей нагрузки $P_{\text{разр}}$ необходимо рассмотреть предельное состояние системы, при котором в обоих стержнях возникают напряжения, равные пределу текучести $\sigma_1 = \sigma_T$, $\sigma_2 = \sigma_T$ и соответствующие усилия $N_1^T = \sigma_T F_1$, $N_2^T = \sigma_T F_2$. Разрушающая нагрузка определяется из уравнения равновесия системы в предельном состоянии $\Sigma M_A = 0$.

В графической части работы необходимо на листе формата А4 изобразить схему статически неопределимой системы с необходимыми геометрическими размерами, показать нагрузку P , горизонтальную и вертикальную составляющие опорной реакции в шарнире A и усилия в стержнях N_1 , N_2 ; показать геометрическую схему деформации; начертить диаграмму Прандтля; изобразить схему стержневой системы с необходимыми геометрическими размерами, показать нагрузку $P_{\text{разр}}$, усилия в стержнях N_1^T и N_2^T , действующие в предельном состоянии.

Контрольные вопросы

1. Что такое центральное растяжение (сжатие) стержня?
2. Как определяются продольные усилия и нормальные напряжения в стержне?
3. Как вычислить абсолютные удлинения (укорочения) и осевые перемещения поперечных сечений стержня?
4. Перечислите основные механические характеристики материалов.
5. Каким соотношением связаны между собой продольные и поперечные деформации?
6. Запишите закон Гука.
7. Назовите методы расчета конструкций на прочность.
8. Что такое допускаемое напряжение и расчетное сопротивление?
9. Какие коэффициенты используются в методе расчета на прочность по предельным состояниям?
10. Что такое жесткость стержня при растяжении (сжатии) и какова ее размерность?
11. Какие задачи называются статически неопределимыми? Назовите основные принципы решения статически неопределимых задач.
12. Нарисуйте диаграмму Прандтля.
13. Как определить несущую способность системы исходя из условий прочности?
14. Как определяется разрушающая нагрузка для стержневой системы в пластической стадии работы материала?

Расчетно-графическая работа № 3.
Внутренние усилия, напряжения и перемещения
в балках при прямом изгибе

Для балки по схеме №... с нагрузкой в пролете по схеме №... и при числовых значениях размеров балки и нагрузок по строке №... таблицы требуется:

1) построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от заданных нормативных нагрузок;

2) подобрать сечение балки из двутавра, используя условие прочности по первой группе предельных состояний.

Материал балки сталь ВСт 3. Предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа, расчетное сопротивление по пределу текучести $R = 210$ МПа, расчетное сопротивление при сдвиге $R_s = 130$ МПа. Коэффициент условий работы $\gamma_c = 0,9$. В табл. 4 приведены нормативные значения нагрузок. Коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$;

3) для сечения балки, в котором действует наибольший изгибающий момент, построить эпюру нормальных напряжений и проверить выполнение условия прочности по нормальным напряжениям.

Для сечения, в котором действует наибольшая поперечная сила, построить эпюру касательных напряжений и проверить выполнение условий прочности по касательным напряжениям;

4) определить с помощью метода Мора величины прогибов и углов поворота в характерных сечениях балки.

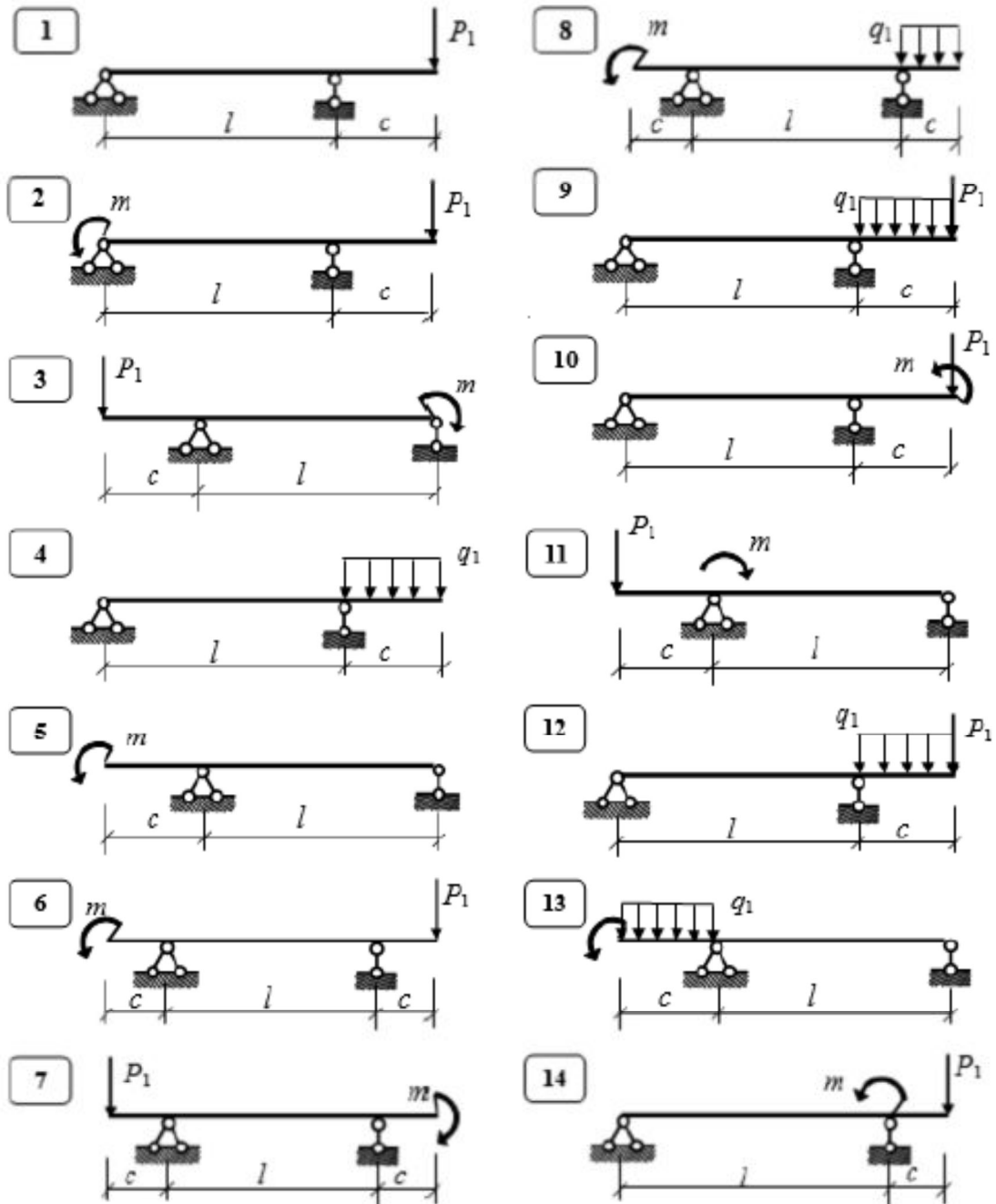
Таблица 4

Размеры и нагрузка на балку

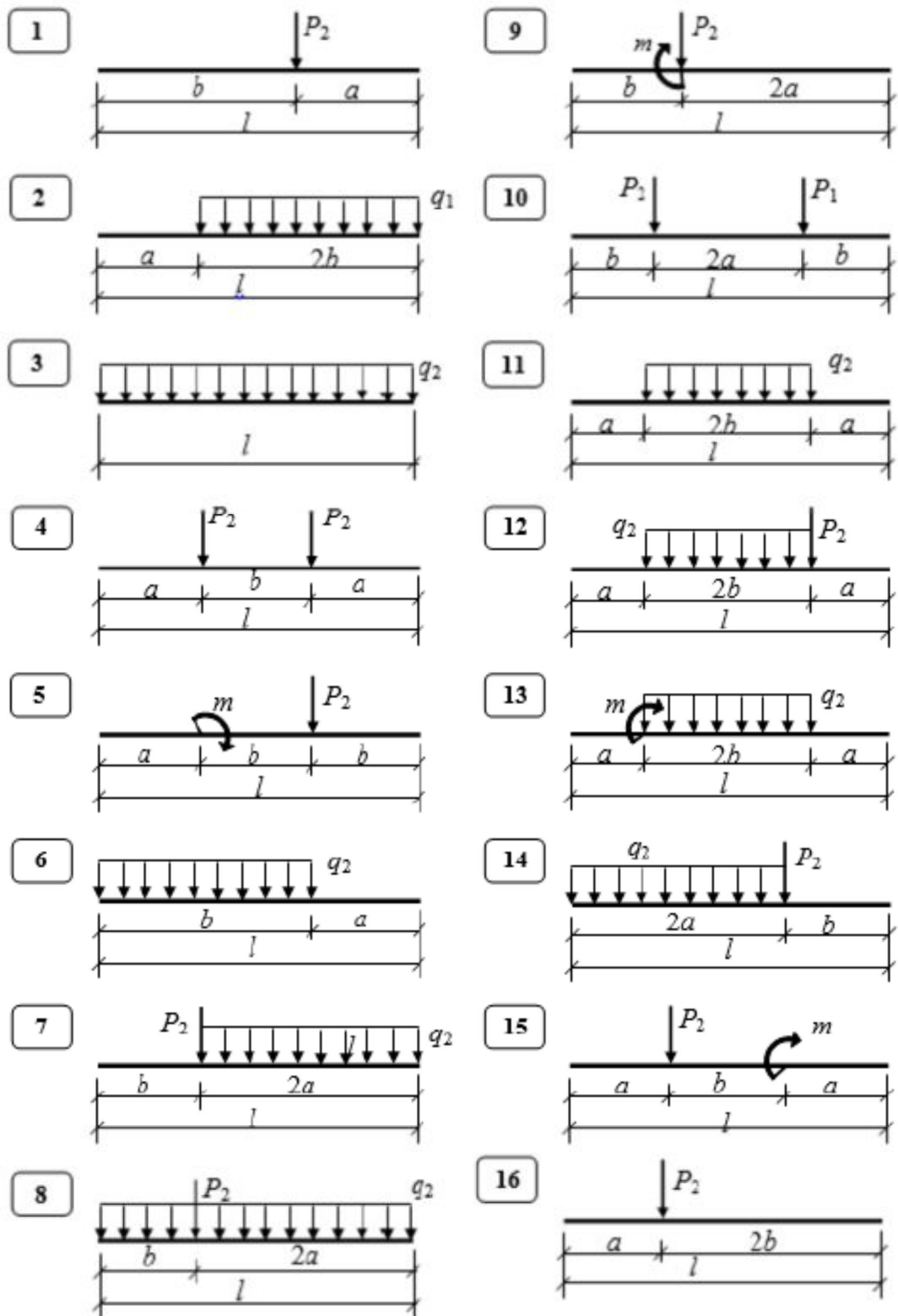
| № | <i>a</i> , м | <i>b</i> , м | <i>c</i> , м | <i>P</i> ₁ , кН | <i>P</i> ₂ , кН | <i>q</i> ₁ , кН/м | <i>q</i> ₂ , кН/м | <i>m</i> , кН·м |
|----|--------------|--------------|--------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------|
| 1 | 1,4 | 2,0 | 1,0 | 18 | 24 | 14 | 30 | 16 |
| 2 | 2,2 | 1,2 | 1,2 | 10 | 16 | 12 | 20 | 18 |
| 3 | 1,2 | 2,2 | 1,4 | 15 | 24 | 14 | 18 | 15 |
| 4 | 1,6 | 1,6 | 1,4 | 16 | 22 | 10 | 24 | 18 |
| 5 | 1,8 | 1,4 | 1,0 | 18 | 18 | 14 | 26 | 14 |
| 6 | 1,4 | 2,2 | 1,4 | 16 | 12 | 10 | 32 | 12 |
| 7 | 1,8 | 2,4 | 1,2 | 18 | 20 | 12 | 30 | 10 |
| 8 | 2,0 | 1,2 | 1,4 | 14 | 30 | 16 | 28 | 12 |
| 9 | 2,4 | 1,4 | 1,0 | 16 | 36 | 10 | 24 | 14 |
| 10 | 1,8 | 1,6 | 1,2 | 18 | 34 | 12 | 36 | 16 |
| 11 | 2,4 | 1,2 | 1,4 | 20 | 28 | 16 | 20 | 18 |

| № | $a, \text{ м}$ | $b, \text{ м}$ | $c, \text{ м}$ | $P_1, \text{ кН}$ | $P_2, \text{ кН}$ | $q_1, \text{ кН/м}$ | $q_2, \text{ кН/м}$ | $m, \text{ кН}\cdot\text{м}$ |
|----|----------------|----------------|----------------|-------------------|-------------------|---------------------|---------------------|------------------------------|
| 12 | 1,6 | 1,8 | 1,0 | 10 | 20 | 14 | 18 | 20 |
| 13 | 1,8 | 1,2 | 1,2 | 16 | 30 | 12 | 26 | 15 |
| 14 | 2,4 | 1,6 | 1,0 | 18 | 18 | 10 | 20 | 14 |
| 15 | 1,8 | 2,2 | 1,6 | 16 | 30 | 14 | 18 | 12 |

Схемы балок



Схемы нагрузки в пролете



Методические указания к решению задачи

Расчет статически определимых стержней на изгиб следует начинать с определения опорных реакций из уравнений статики, которые нужно составлять таким образом, чтобы в каждое из них входила бы одна опорная реакция.

Эпюры внутренних усилий - изгибающих моментов M , поперечных Q и продольных сил N — строятся с использованием метода сечений, устанавливая их законы изменения в пределах рассматриваемых участков стержня, или вычисляя значения M , Q , N на границах участков и следуя следующим правилам.

1. На участках, где $q = 0$, поперечная сила $Q = const$, а изгибающий момент M изменяется по линейному закону.

2. На участках, где $q = const$, поперечная сила Q изменяется по линейному закону, а изгибающий момент M - по квадратной параболе, обращенной выпуклостью в сторону действия нагрузки q .

3. В сечениях, где $Q = 0$, изгибающий момент M может иметь экстремум.

4. В точке приложения сосредоточенной силы эпюра Q имеет скачок, равный по величине, приложенной в этой точке силе, а эпюра моментов M имеет излом.

5. В точке приложения сосредоточенного момента эпюра M имеет скачок, равный по величине приложенному моменту.

В графической части задания необходимо на отдельном листе формата А4 изобразить схему стержня с геометрическими размерами и приложенными нагрузками, а также определенные из уравнений статики опорные реакции.

Эпюры штрихуются прямыми линиями, перпендикулярными к оси стержня и указываются знаки внутренних усилий. В пояснительной записке приводятся необходимые расчеты по определению опорных реакций и вычислению значений внутренних усилий в рассматриваемых сечениях стержней.

Сечение балки в виде стального прокатного двутавра подбирается по требуемому из условия прочности моменту сопротивления $W_z \geq M_{расч}/\gamma_c R$, где $M_{расч} = M_{норм}\gamma_f$ — расчетное значение наибольшего изгибающего момента, γ_f — коэффициент надежности по нагрузке, γ_c — коэффициент условий работы, R — расчетное сопротивление по пределу текучести. По величине требуемого момента сопротивления по

сортаменту прокатных профилей подбирается номер двутавра, для которого выписываются необходимые геометрические характеристики: h — высота двутавра, b — ширина полки, d — толщина стенки, t — толщина полки, J_z — момент инерции, W_z — момент сопротивления сечения и статический момент S_z половины сечения.

Двутавровое сечение с указанными размерами следует начертить в масштабе и построить рядом с сечением эпюры нормальных σ и касательных τ напряжений по формулам для сечений с наибольшим изгибающим моментом и с наибольшей поперечной силой.

Нормальные и касательные напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y \quad \tau = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{J_z b(y)}$$

где M и Q — расчетные значения изгибающего момента и поперечной силы в рассматриваемых сечениях.

Проверка условий прочности по нормальным и касательным напряжениям производится по формулам:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M}{W_z} \leq \gamma_c R \quad \tau_{\text{нб}} = \frac{Q S_z}{J_z d} \leq \gamma_c R_s,$$

где W_z — момент сопротивления сечения, S_z — статический момент половины сечения относительно нейтральной оси.

При решении задачи методом Мора необходимо изобразить:

- схему балки с геометрическими размерами и заданной нормативной нагрузкой;
- эпюру изгибающих моментов M от заданной нормативной нагрузки;
- схему балки с единичным воздействием, приложенным в точке, где необходимо определить прогиб или угол поворота;
- эпюру изгибающих моментов от единичного воздействия.

На участке с распределенной нагрузкой эпюру изгибающих моментов следует разбить на простые фигуры, у которых известны площадь и положение центра тяжести, и показать их на чертеже.

Контрольные вопросы

1. Какие внешние нагрузки вызывают изгиб стержня?
2. Назовите основные типы опор. Какие опорные реакции в них возникают?
3. Какая балка называется статически определимой и статически неопределимой? Назовите основные типы статически определимых балок.
4. Какие внутренние усилия возникают при изгибе стержня?
5. Какими дифференциальными зависимостями связаны между собой внутренние усилия и распределенные нагрузки?
6. Какие особенности имеют эпюры внутренних усилий при действии на стержень сосредоточенной силы, сосредоточенного момента, распределенной нагрузки?
7. Какой вид деформирования стержня называется чистым изгибом и поперечным изгибом?
8. Напишите формулы для нормальных и касательных напряжений при изгибе.
9. В каких волокнах балки при изгибе возникают наибольшие по абсолютной величине напряжения?
10. Что такое момент сопротивления сечения и как он определяется для симметричных и несимметричных сечений?
11. Как определяются величины главных напряжений и углы наклона нормалей к главным площадкам при изгибе?
12. Как производится расчет балок на прочность при изгибе?
13. В каком случае прогибы и углы поворота сечений считаются положительными и отрицательными?
14. Напишите дифференциальное уравнение изогнутой оси при малых и больших прогибах балки.
15. Как определяются прогибы и углы поворота сечений методом непосредственного интегрирования?
16. Напишите универсальное уравнение изогнутой оси балки при воздействии на балку сосредоточенного момента; сосредоточенной силы; равномерно распределенной нагрузки; при наличии промежуточных шарниров.
17. Как определяются начальные параметры для статически определимых балок?
18. Напишите формулу Мора для определения перемещений упругой системы от действия внешней нагрузки и расскажите порядок определения перемещения этим методом.
19. Объясните правило Верещагина и правило «перемножения» двух линейных эпюр (трапеций).

При выполнении расчетно-графических работ варианты задач выбираются по номеру, соответствующему номеру студента-заочника по списку в группе.

Примеры

1. Расчетно-графическая работа № 1:

а) номер по списку группы — 3; строка табл. 1—3, № схемы задачи № 1—3, № схемы задачи № 2—3;

б) номер по списку группы — 21; строка табл. 1—7 (14+7), № схемы задачи № 1—5 (16+5), № схемы задачи № 2—5 (16+5).

2. Расчетно-графическая работа №2:

а) номер по списку группы — 3.

Задача № 1: строка табл. 1—3, № схемы — 3;

б) номер по списку группы — 28.

Задача №1: строка табл. 1—6 (22+6), № схемы — 12 (16+12).

3. Расчетно-графическая работа №3.

При выполнении расчетно-графической работы № 4 студент должен решить 1 задачу:

а) номер по списку группы — 3.

Строка табл. 1—3, № схемы балки — 3, схема нагрузки в пролете — 3;

б) номер по списку группы — 21.

Строка табл. 1—6 (15+6), № схемы балки — 5 (16+5), схема нагрузки в пролете — 5 (16+5).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Агаханов, М.К.* Лабораторный практикум по сопротивлению материалов / М.К. Агаханов, В.В. Кузнецов. М. : МГСУ, 2008.
2. *Атаров, Н.М.* Сопротивление материалов в примерах и задачах. М. : Инфра-М, 2010.
3. *Беляев, Н.М.* Лабораторные работы по сопротивлению материалов. М. : ГИТТЛ, 1954.
4. *Варданян, Г.С.* Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / В.И. Андреев, Н.М. Атаров, Г.С. Варданян, А.А. Горшков. М. : Инфра-М, 2010.
5. *Варданян, Г.С.* Сопротивление материалов с основами строительной механики / Н.М. Атаров, Г.С. Варданян, А.А. Горшков. М. : Инфра-М, 2011.

