

**ОПД.Ф.02.04 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
Краткое учебное пособие

# ВВЕДЕНИЕ

Основные понятия и определения  
Историческая справка  
Связь с другими дисциплинами  
Основные типы элементов конструкций  
Понятие о расчетной схеме сооружения  
Нагрузки. Силы внешние и внутренние  
Основные гипотезы сопротивления материалов  
Виды деформаций стержня  
Внутренние усилия. Метод сечений  
Понятия о напряжении

## **Основные понятия и определения**

Сопротивление материалов – учебная дисциплина о методах расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочность – это способность материала конструкции, не разрушаясь, сопротивляться воздействию нагрузок

Жесткость – это способность конструкции сопротивляться деформациям.

Устойчивость – это способность конструкции под воздействием нагрузок сохранять первоначальную форму равновесия.



Сопротивление материалов. Введение (2)



Сопротивление материалов. Введение (3)

## Историческая справка

Выделение дисциплины о сопротивлении материалов в самостоятельную науку относят к 1638 г. и связывают с именем знаменитого итальянского ученого Галилео Галилея



Галилео Галилей  
(1564-1642)



Роберт Гук  
(1635-1703)



Якоб Бернулли  
(1654-1705)

Сопротивление материалов. Введение (4)



Леонард Эйлер  
1707-1783

Симеон Дени Пуассон (1871-1840)

Кристиан Отто Мор (1835-1918)

Клод Луи Мари Анри Навье (1785-1836)

Феликс Станиславович Ясинский (1856-1899)

Дмитрий Иванович Журавский (1821-1891)

Сопротивление материалов. Введение (5)

## Связь с другими дисциплинами



Сопротивление материалов. Введение (6)

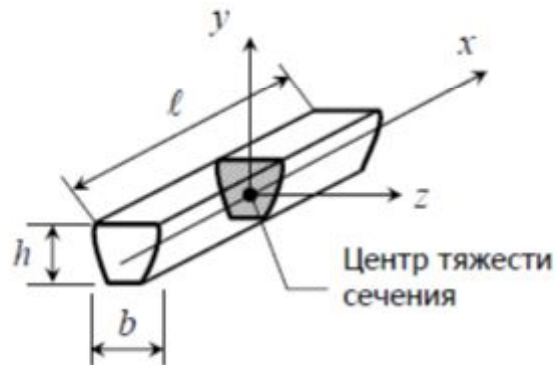


Сопротивление материалов. Введение (7)



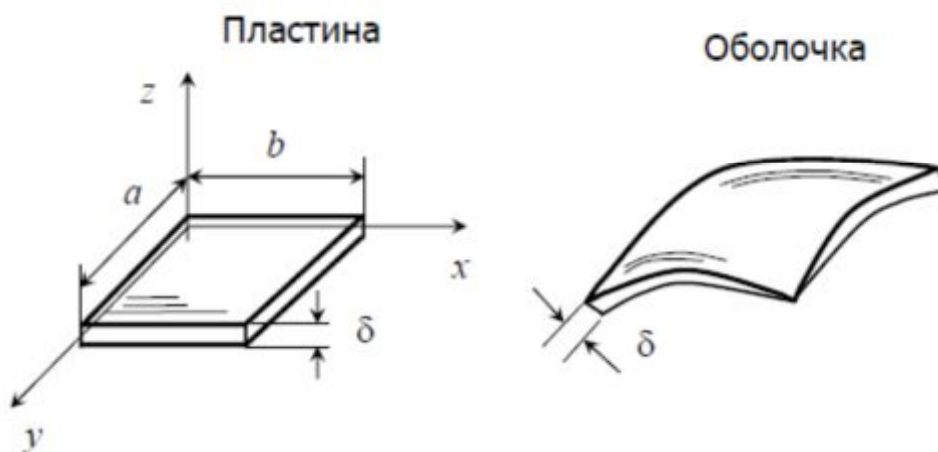
## Основные типы элементов конструкций

1. Стержни (брусья, балки, валы) - тела, один размер которых существенно больше двух других). Стержни могут быть прямолинейными или криволинейными, постоянного или переменного сечения



Сопротивление материалов. Введение (8)

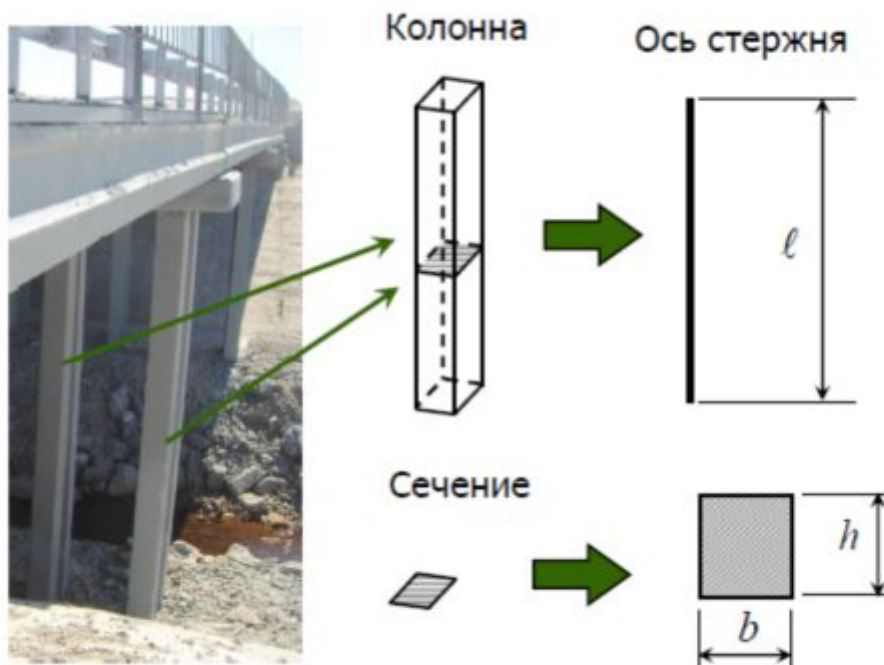
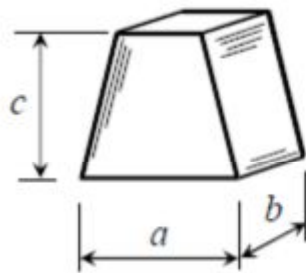
2. Пластины (или оболочки) - тела, два размера которых существенно больше третьего (плиты перекрытия, стены, резервуары, купола зданий)



Сопротивление материалов. Введение (9)

3. Массивные тела - все три взаимно перпендикулярных размера которых являются величинами одного порядка (фундаменты, катки, шаровые опоры и т. д.)

Массивное тело

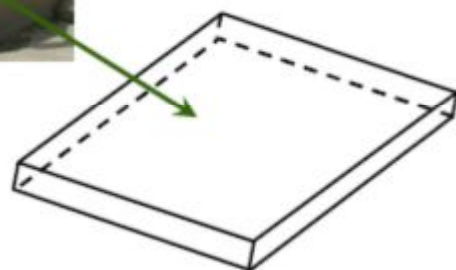




Балка



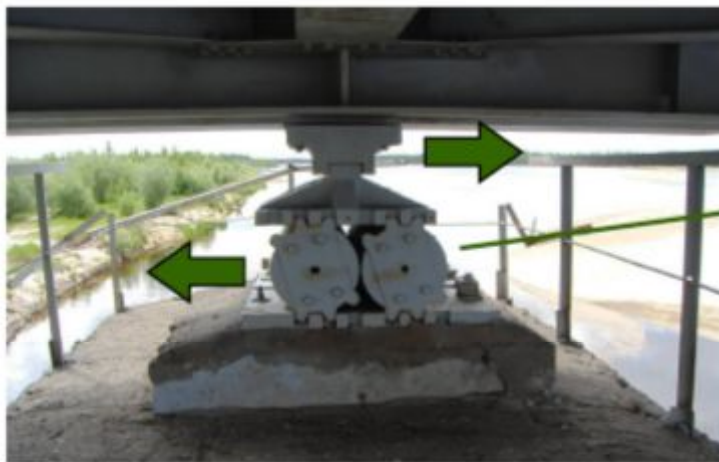
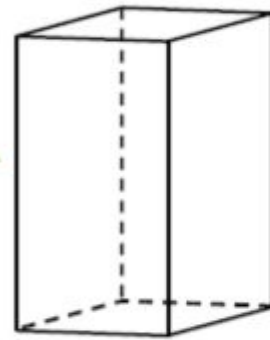
Плита



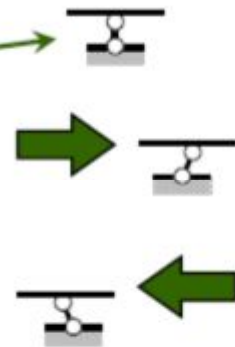




Массивное тело

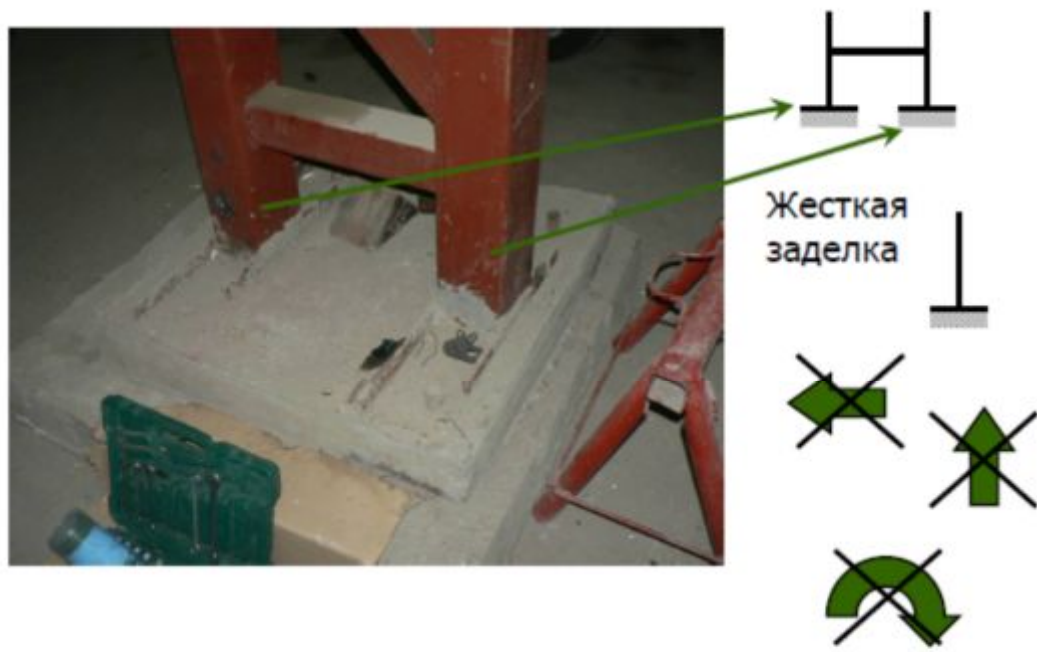


Шарнирно-подвижная опора





Сопротивление материалов. Введение (16)



Сопротивление материалов. Введение (17)

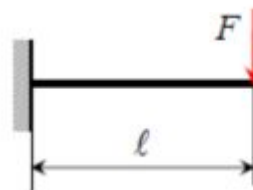
## Понятие о расчетной схеме сооружения

Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, носит название расчетной схемы

реальный объект



расчетная схема



## Примеры стержневых конструкций



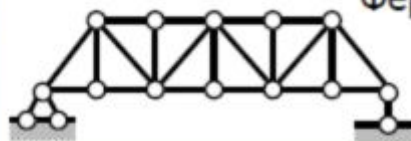
Балка



Рама

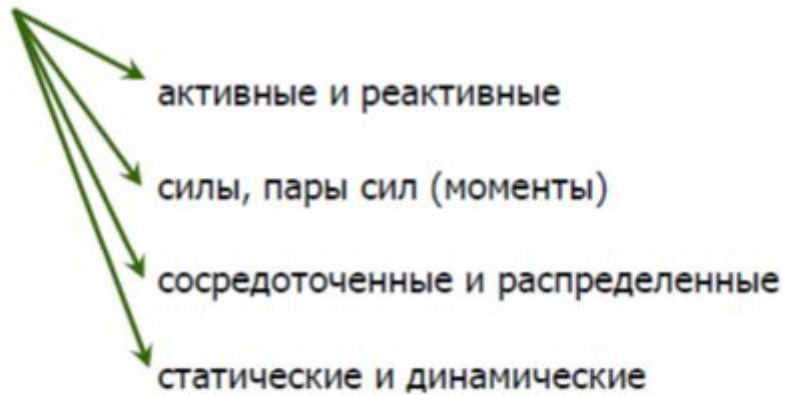


Ферма



## Нагрузки. Силы внешние и внутренние

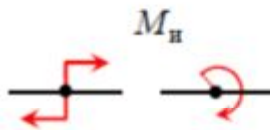
Внешние  
нагрузки:



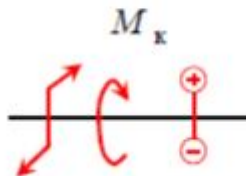
### Сосредоточенные нагрузки



$$[F] = 1 \text{ Н}; \quad 1 \text{ кН}$$

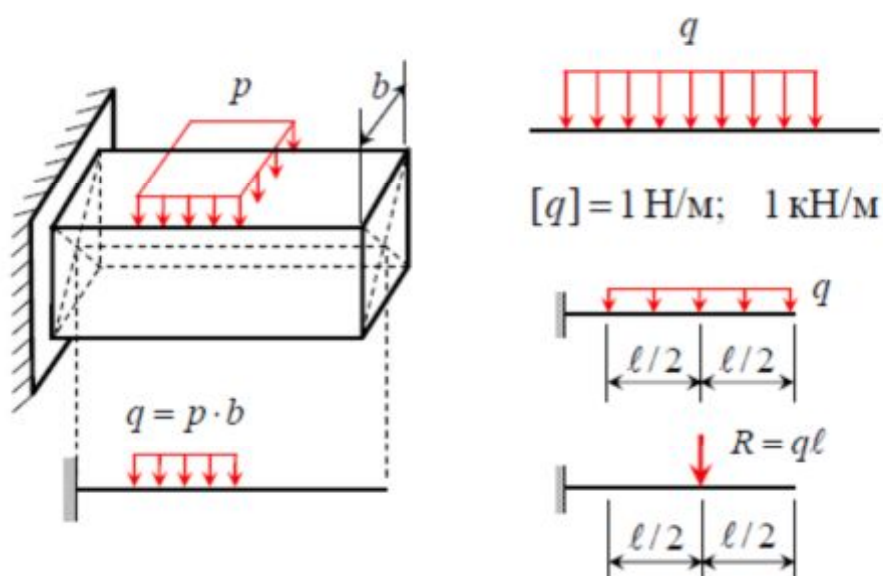


$$[M_n] = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

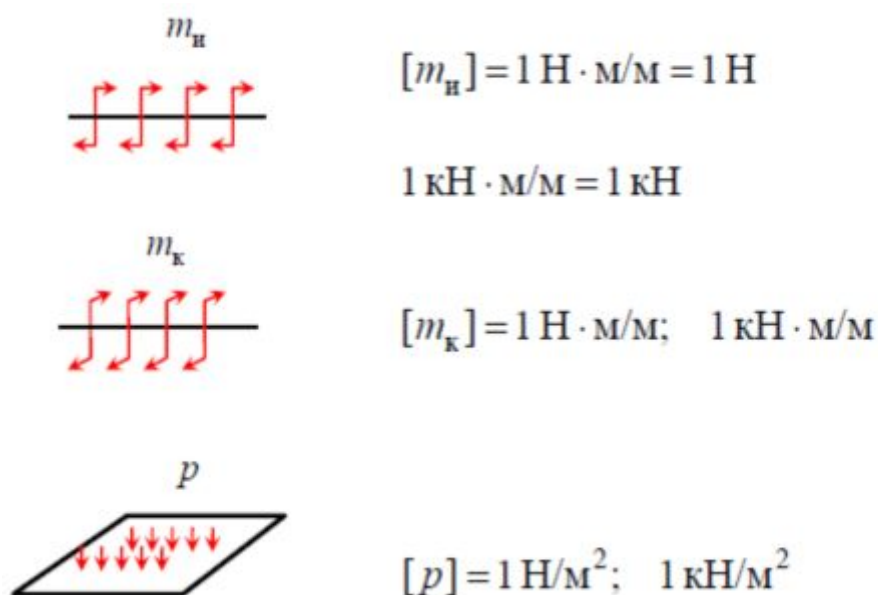


$$[M_k] = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

## Распределенные нагрузки



Сопротивление материалов. Введение (22)



Сопротивление материалов. Введение (23)

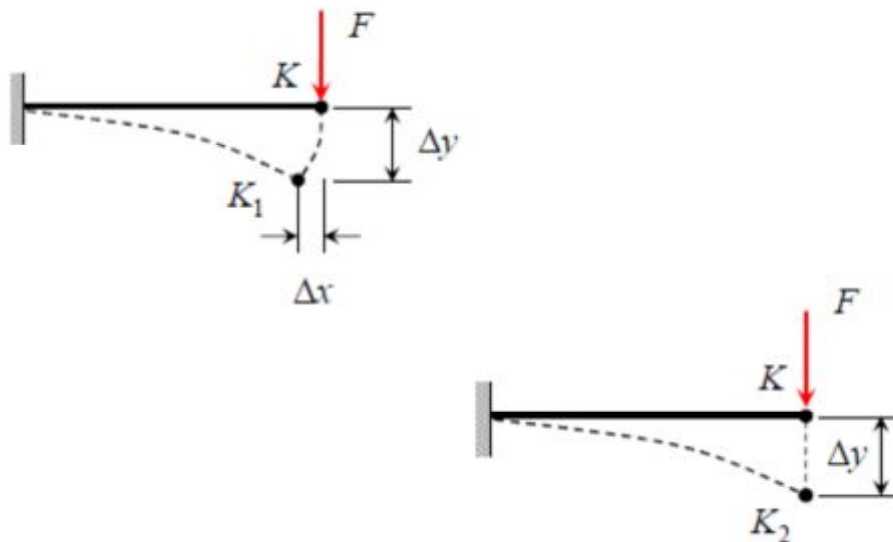


## Основные гипотезы сопротивления материалов

1. Гипотеза о сплошности материала
2. Гипотеза об однородности материала
3. Гипотеза об изотропности материала
4. Гипотеза об идеальной упругости
5. Гипотеза о линейной связи между нагрузкой и упругой деформацией
6. Гипотеза о свойствах малого элемента

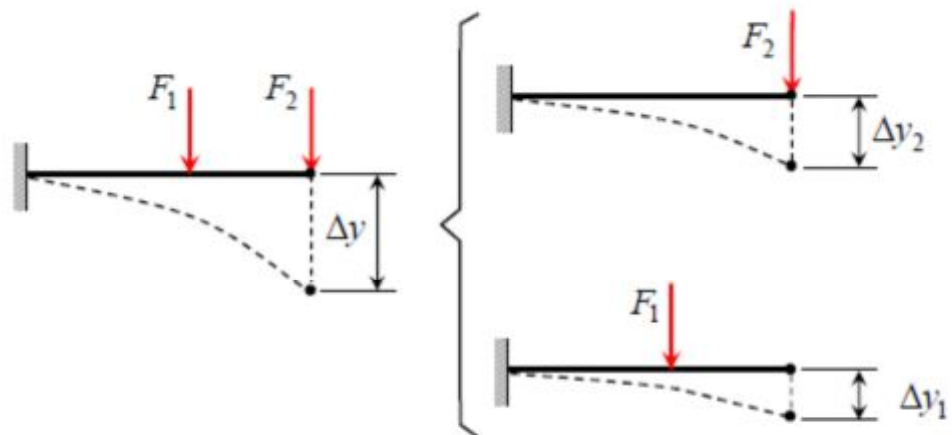
Сопротивление материалов. Введение (24)

7. Гипотеза о малости деформаций и перемещений



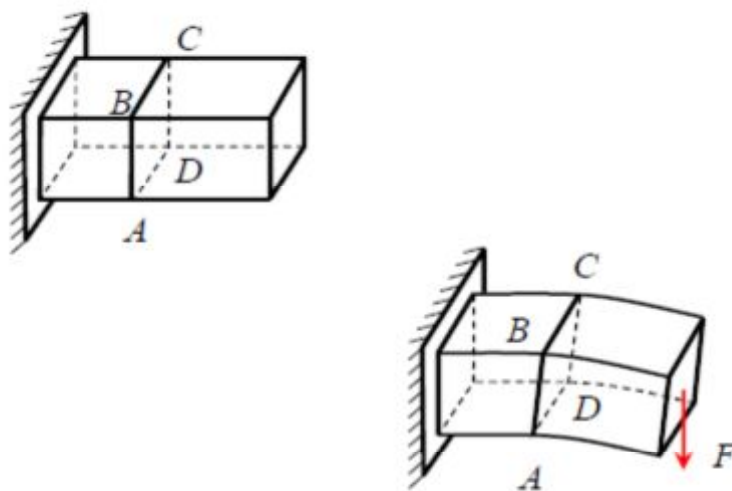
Сопротивление материалов. Введение (25)

8. Гипотеза о независимости действия сил (принцип суперпозиции)



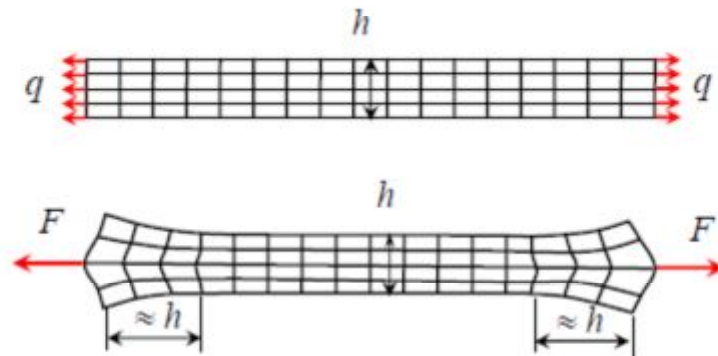
$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$$

9. Гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений)



## 10. Гипотеза Сен-Венана

В достаточно удаленных точках элемента от места приложения нагрузки, внутренние силовые факторы весьма мало зависят от способа приложения этой нагрузки



## Виды деформаций стержня

Под воздействием внешних сил тела изменяют свои размеры и форму. Это изменение носит общее название – деформация.

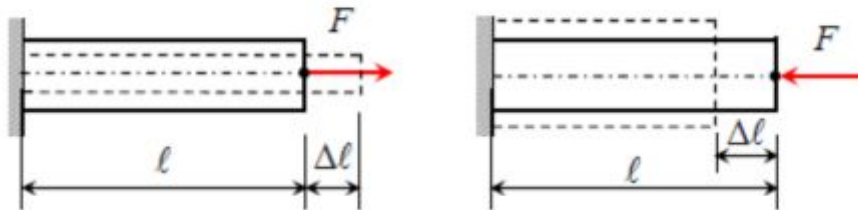
Деформации разделяют на упругие и пластические. Упругими деформациями называются такие изменения размеров и формы тела, которые исчезают после удаления внешних нагрузок (тело полностью восстанавливает свою прежнюю форму).

При пластической деформации после удаления внешних нагрузок формы и размеры тела не восстанавливаются. Оставшиеся разности размеров называют остаточными деформациями.

Основными видами деформации являются:

1. Растяжение или сжатие (например, работа тяг, канатов, тросов, колонн, стержней ферм).

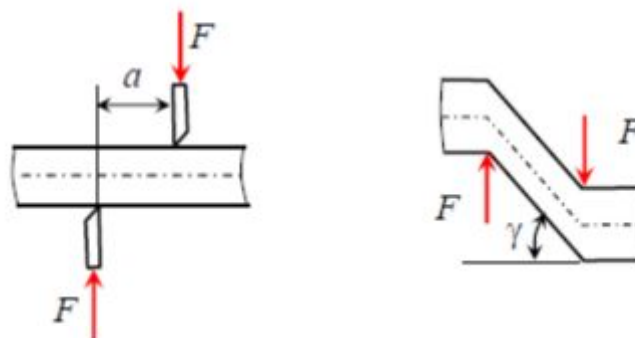
Брус, работающий на растяжение или сжатие, называется стержнем.



Под действием силы  $F$  стержни получают линейные деформации – удлинение или укорочение  $\Delta l$ .

2. Сдвиг или срез .

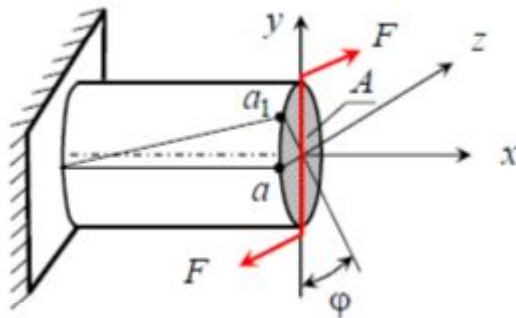
При срезе расстояние между приложенными силами близко к нулю (работа заклепок, болтов, ножниц для резки металла)



При сдвиге под действием сил  $F$  тело получает угловые деформации – угол сдвига  $\gamma$  .

### 3. Кручение (например, работа валов, торсионов, шпинделей различных машин)

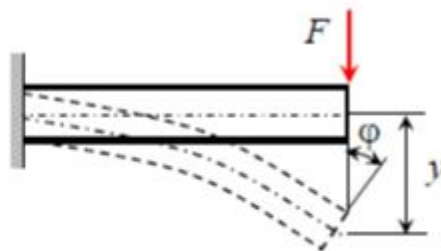
Брус круглого поперечного сечения, работающий на кручение, называют валом.



Под действием пары сил  $F$  вал получает угловые перемещения. Сечение  $A$  поворачивается на угол  $\varphi$ , а точка  $a$  занимает положение  $a_1$ .

### 4. Изгиб (работа различного вида балок)

Брус, работающий на изгиб, называют балкой.

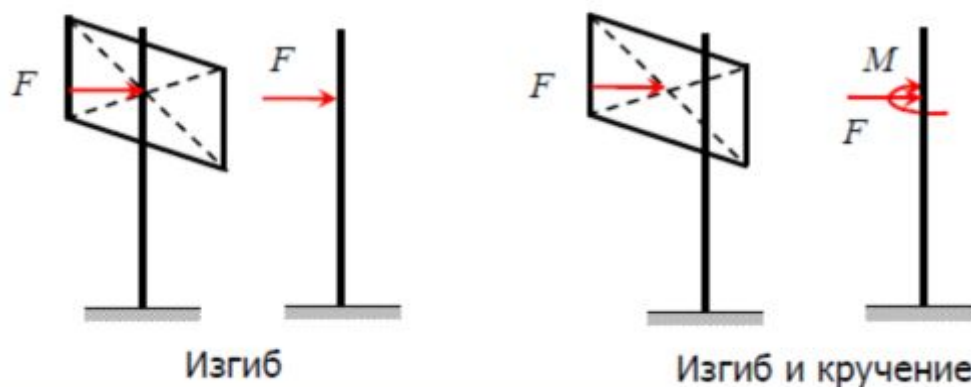


Под действием силы  $F$  балка получает линейные перемещения – прогиб  $y$  и угловые – угол поворота  $\varphi$ .

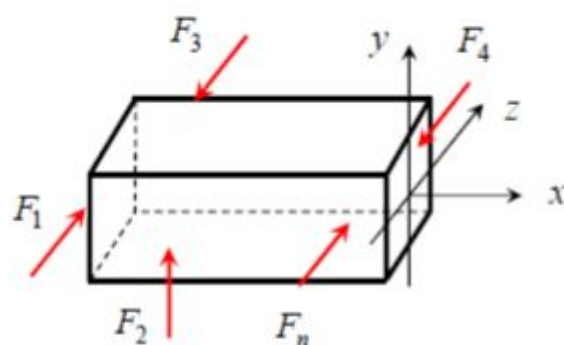


Эти виды деформации называются простыми. Сочетание простых видов деформаций может давать различные виды сложных.

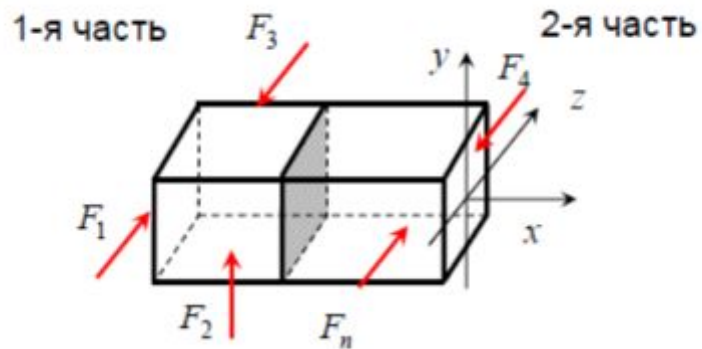
Например, совместное действие растяжения и изгиба, совместное действие кручения и сжатия, совместное действие изгиба с кручением и т. д.



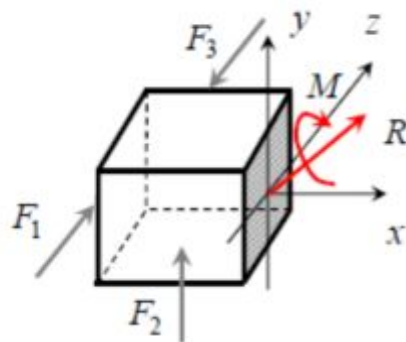
### Внутренние усилия. Метод сечений



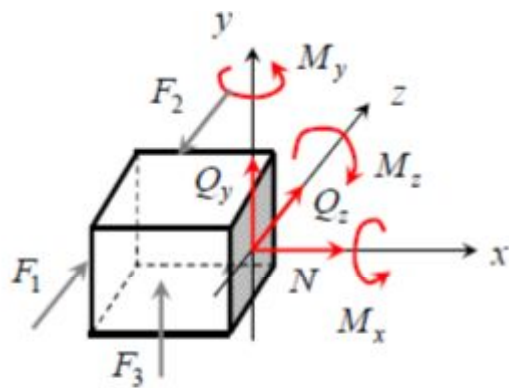
Мысленно рассечем тело некоторой плоскостью, перпендикулярной его оси, на две части.



На основании аксиомы статики о действии и противодействии, правая и левая части тела действуют друг на друга с одинаковыми силами.



В результате получим главный вектор  $R$  и главный момент  $M$

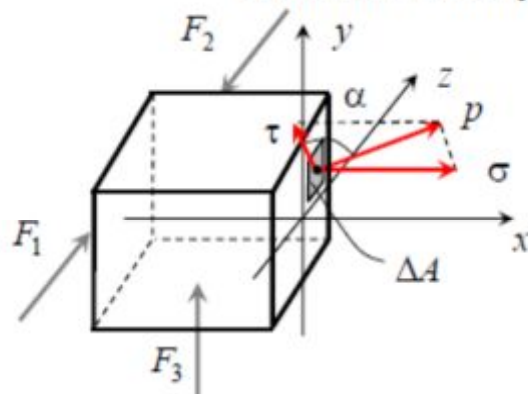


Значения внутренних усилий определяются из условий равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0 \qquad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0$$

### Понятия о напряжении



Составляющая  $\sigma$  - нормальное напряжение, стремящееся оторвать частицы тела друг от друга или сблизить их.

Составляющая  $\tau$  - касательное напряжение, стремящееся сдвинуть частицы тела относительно друг друга по плоскости сечения.

Эти напряжения, как и полное напряжение  $P$ , имеют размерность  $1\text{Па}=1\text{Н/м}^2$ .

При расчетах используют безопасные значения напряжений, меньшие тех, при которых может наступить появление больших деформаций или разрушение:

$$R = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}$$

$$R_{\text{ср}} = \frac{\tau_{\text{пред}}}{n}$$

$\sigma_{\text{пред}}$ ,  $\tau_{\text{пред}}$  предельные значения напряжений, приводящие к разрушению или необратимым пластическим деформациям, полученные экспериментально

$n$  коэффициент запаса прочности, зависящий от характера нагрузки, условий работы конструкции, назначения деталей и др.

Реальные напряжения в элементах работающих конструкций должны соответствовать условиям

$$\sigma \leq R$$

$$\tau \leq R_{\text{ср}}$$

# РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

Внутренние усилия при растяжении-сжатии

Напряжения при центральном растяжении-сжатии

Три типа задач сопротивления материалов

Определение деформаций при растяжении-сжатии

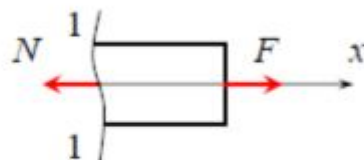
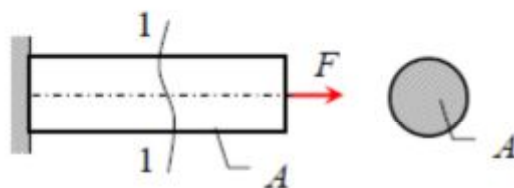
Связь между напряжениями и деформациями

Понятия о статически неопределимых системах

Расчет статически неопределимых систем

## Внутренние усилия при растяжении-сжатии

Центральным растяжением и сжатием называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях стержня возникает одно внутреннее усилие – продольная сила  $N$ .

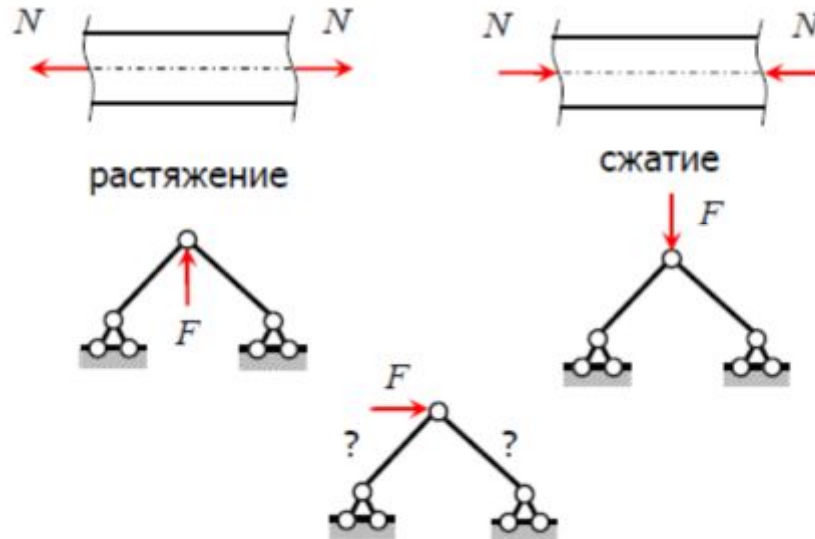


$$\sum F_x = 0; \quad -N + F = 0$$

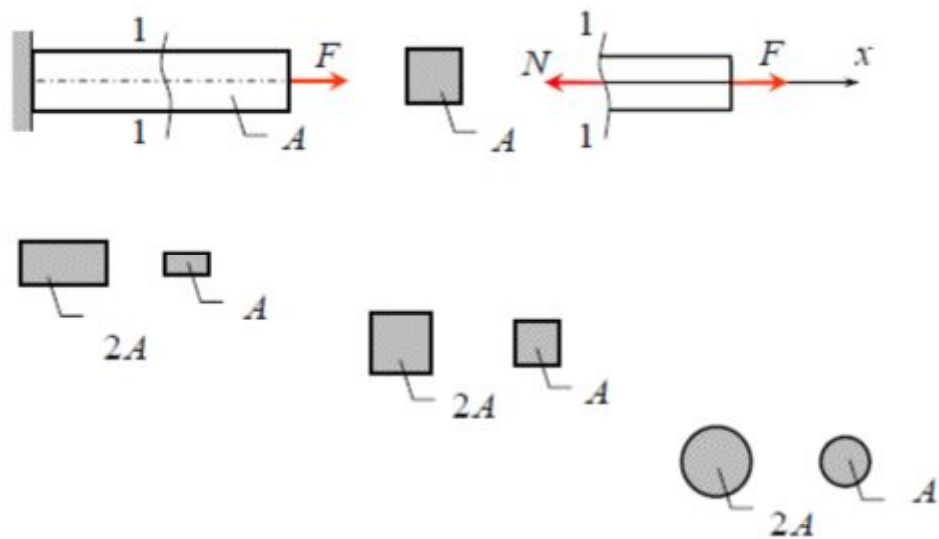
$$N = F$$



Продольная сила  $N$  считается положительной, если стержень растягивается, отрицательной – если стержень сжимается.



Сопротивление материалов. Растяжение-сжатие (2)

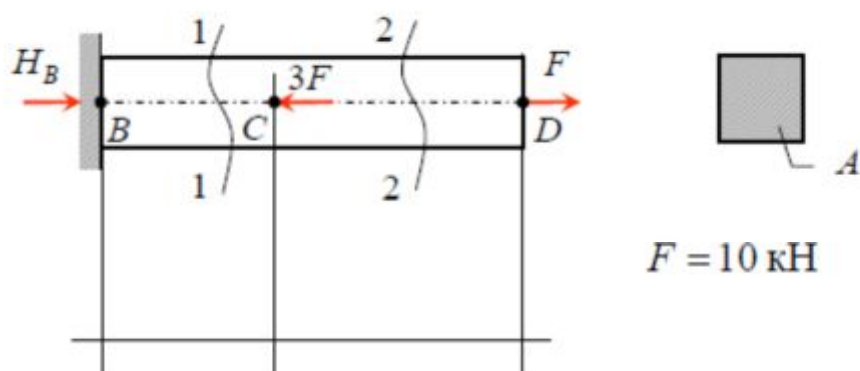


Величина внутренних усилий не зависит от формы и размеров поперечного сечения стержня.

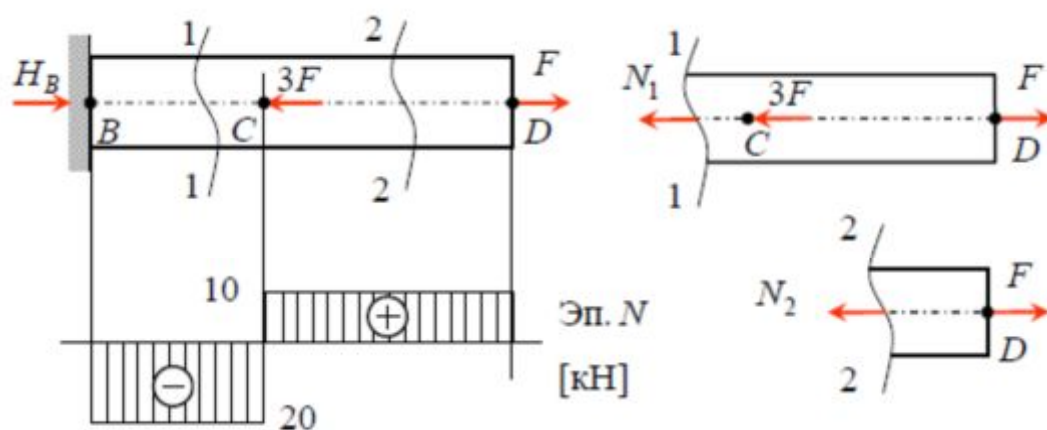
Сопротивление материалов. Растяжение-сжатие (3)

Эпюра – это график изменения какой-либо величины (усилия, напряжения) и т.д. по длине стержня).

Участком называется часть стержня, в пределах которого закон изменения усилий остается постоянным.



Сопротивление материалов. Растяжение-сжатие (4)

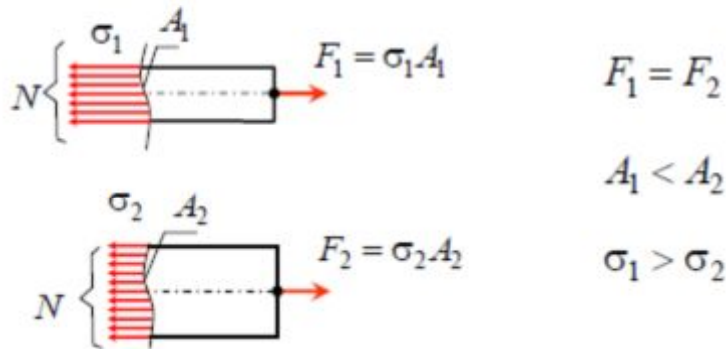


$$\sum F_x = 0 \quad -N_1 - 3F + F = 0; \quad N_1 = -2F = -20 \text{ кН}$$

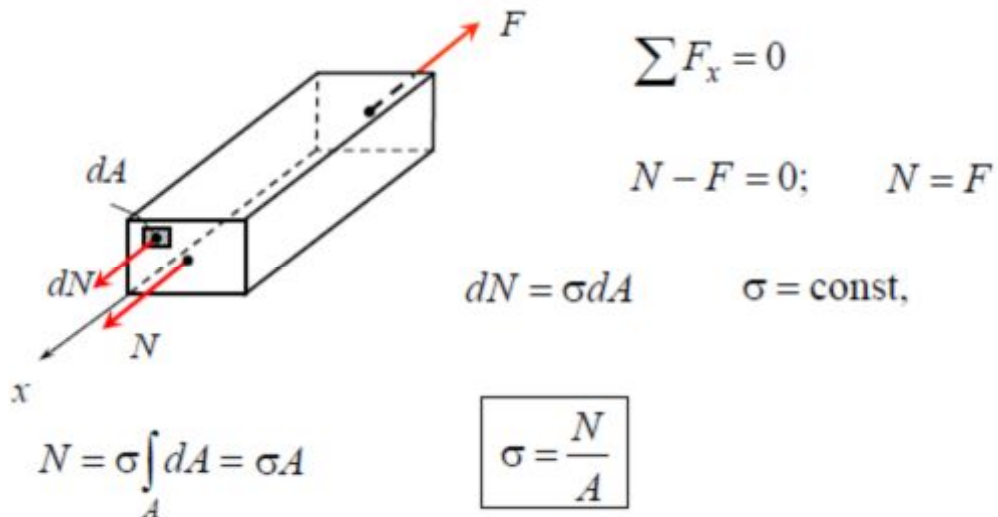
$$\sum F_x = 0 \quad -N_2 + F = 0; \quad N_2 = F = 10 \text{ кН}$$

Сопротивление материалов. Растяжение-сжатие (5)

## Напряжения при центральном растяжении (сжатии)



Сопротивление материалов. Растяжение-сжатие (6)



Условие прочности при растяжении и сжатии

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq R$$

Сопротивление материалов. Растяжение-сжатие (6)

## Три типа задач сопротивления материалов

### 1. Проверочный расчет

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq R$$

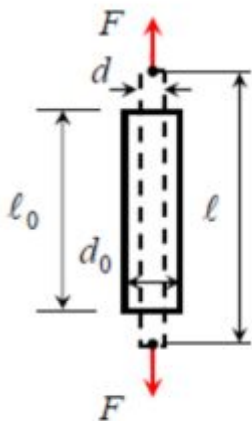
### 2. Проектный расчет

$$A \geq \frac{N_{\max}}{R}$$

### 3. Определение предельной нагрузки

$$N_{\max} \leq A \cdot R$$

## Определение деформаций при растяжении-сжатии



Величина  $l - l_0 = \Delta l$  называется абсолютным удлинением стержня (м, мм).

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$  относительное удлинение (безразмерная величина).

$d - d_0 = \Delta d$  абсолютное изменение диаметра: (м, мм).

$\Delta l$  и  $\varepsilon$  положительные, если стержень растягивается, и отрицательные, если стержень сжимается.

Относительное сужение  $\delta$  (относительная поперечная деформация)

$$\delta = \frac{\Delta d}{d_0}$$

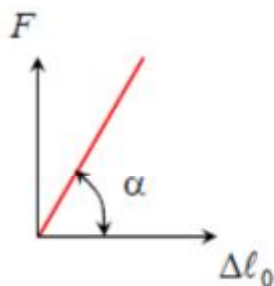
Коэффициент поперечной деформации, или коэффициент Пуассона  $\mu$  определяется экспериментально.

$$\mu = \left| \frac{\delta}{\varepsilon} \right|$$

Опыт показывает, что  $\delta = -\mu \cdot \varepsilon$

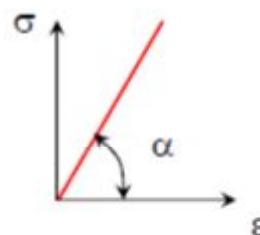
Для стали  $\mu = 0,25 \div 0,3$ . При приближении стали к пластическому состоянию можно принять, что коэффициент  $\mu$  приближается к 0,5.

### Связь между напряжениями и деформациями



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = E$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$E$  модуль упругости первого рода (модуль Юнга), имеет размерность Па

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

закон Гука



$$\sigma = E\varepsilon; \quad \sigma = \frac{N}{A}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}; \quad \frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

$EA$  называют жесткостью стержня при растяжении (сжатии)

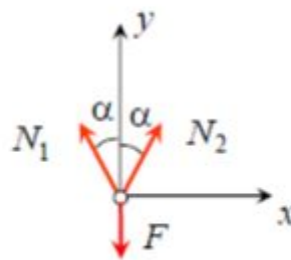
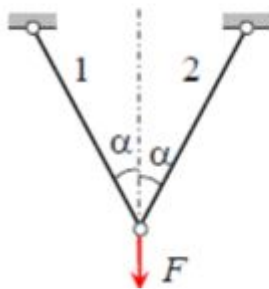
$$\Delta l = \sum_{i=1}^n (\Delta l_i); \quad \Delta l = \int_l \frac{N_x dx}{EA(x)}$$

Условие жесткости при растяжении и сжатии

$$u_{\max} \leq [u]$$

Перемещением  $u$  поперечного сечения стержня называют изменение положения данного сечения по отношению к закрепленному краю или другому сечению.

### Понятие о статически неопределимых системах



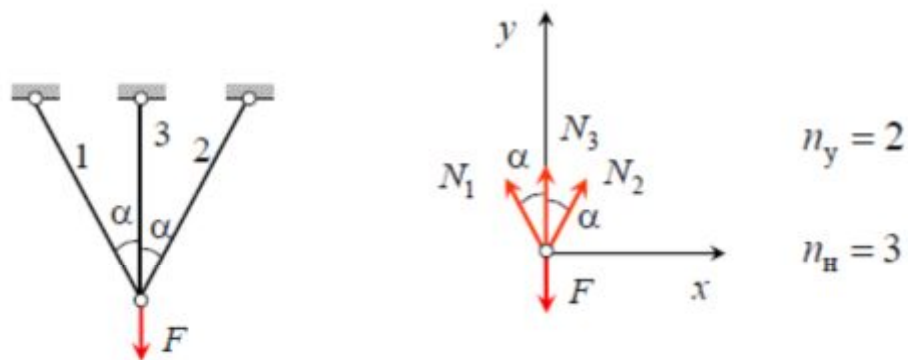
$$n_y = 2$$

$$n_H = 2$$

- 1)  $\sum F_x = N_2 \sin \alpha - N_1 \sin \alpha = 0$
- 2)  $\sum F_y = N_2 \cos \alpha + N_1 \cos \alpha - F = 0$

$n_y$  число уравнений статики

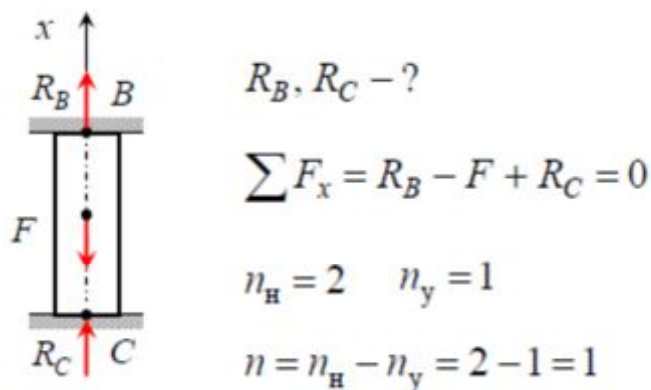
$n_H$  число неизвестных усилий



$$1) \sum F_x = N_2 \sin \alpha - N_1 \sin \alpha = 0$$

$$2) \sum F_y = N_2 \cos \alpha + N_1 \cos \alpha + N_3 - F = 0$$

$$n = n_H - n_y = 3 - 2 = 1$$



$$R_B, R_C - ?$$

$$\sum F_x = R_B - F + R_C = 0$$

$$n_H = 2 \quad n_y = 1$$

$$n = n_H - n_y = 2 - 1 = 1$$

### Расчет статически неопределимых систем

1. Статическая сторона. Для заданной системы записываются возможные уравнения статики, содержащие неизвестные усилия.

2. Геометрическая сторона. Рассматривается схема деформирования системы, и записываются уравнения совместности деформаций, связывающие перемещения характерных сечений и деформации соответствующих элементов системы.

3. Физическая сторона. Используя закон Гука, деформации отдельных элементов системы в уравнениях совместности деформаций выражаются через искомые усилия.

4. Синтез. Решением полученной системы статических, геометрических и физических уравнений, находятся неизвестные усилия.

При рассмотрении статической стороны задачи схему сил и их направления нужно принимать в соответствии с предполагаемой схемой перемещений.

# МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

Основные определения

Испытания материалов на растяжение

Понятие о наклепе

Диаграммы растяжения различных материалов

Основные механические характеристики материалов

Испытания материалов на сжатие

Анализ диаграмм различных материалов

Сжатие деревянных образцов вдоль и поперек волокон

## Основные определения

Упругость – это свойство материала полностью восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки.

Прочность – это свойство материала сопротивляться действию внешних нагрузок, не разрушаясь.

Разрушение – это свойство материала под воздействием внешних нагрузок накапливать трещины, приводящие к потере работоспособности конструкции или полной потере прочности.



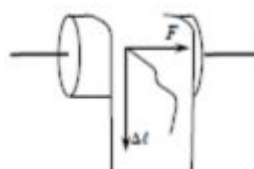
Пластичность – это свойство материала под воздействием внешних нагрузок накапливать значительные остаточные деформации, не разрушаясь.

Упрочнение – это свойство материала повышать прочность и понижать пластичность после достаточной предварительной пластической деформации.

### Испытание материалов на растяжение



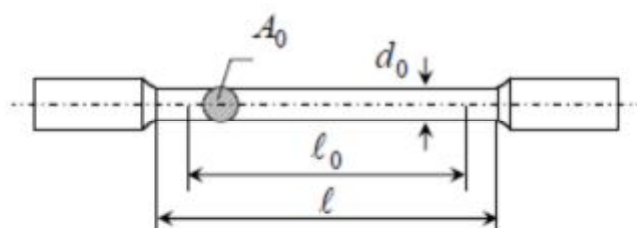
Сопротивление материалов. Механические свойства материалов (2)



Сопротивление материалов. Механические свойства материалов (3)



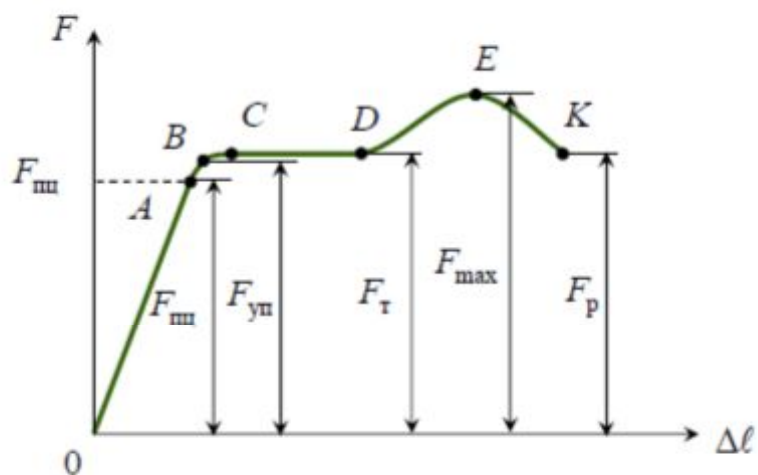
### Образец для испытания



Для коротких образцов  $l_0 = 5d_0$  для длинных  $l_0 = 10d_0$

Сопротивление материалов. Механические свойства материалов (4)

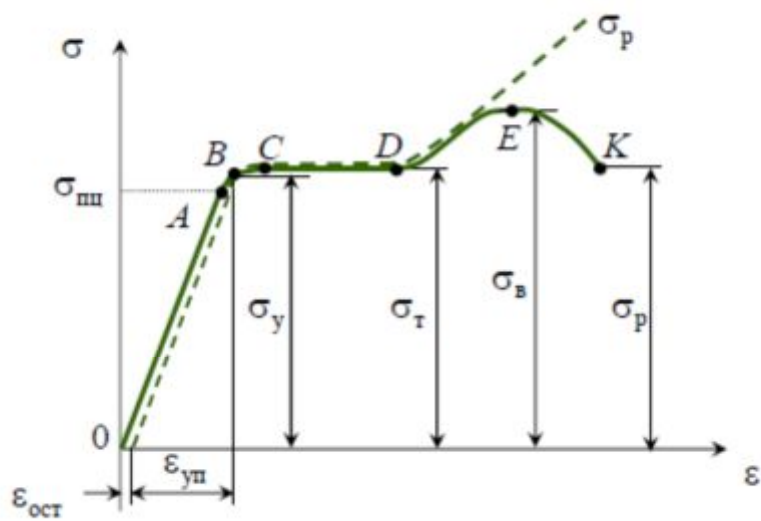
### Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали



$$\sigma = \frac{F}{A_0};$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Сопротивление материалов. Механические свойства материалов (5)



--- истинная диаграмма

Сопротивление материалов. Механические свойства материалов (6)

$\sigma_{шц}$  – предел пропорциональности

$\sigma_y$  – предел упругости

$CD$  – площадка текучести

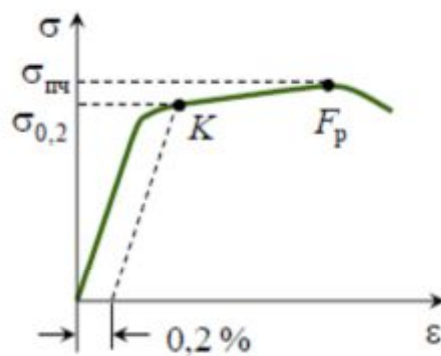
$\sigma_t$  – предел текучести

$\left. \begin{matrix} \sigma_b \\ (\sigma_{пч}) \end{matrix} \right\}$  – предел прочности (временное сопротивление)

$\sigma_p$  – напряжение разрушения

Сопротивление материалов. Механические свойства материалов (7)

Линии Чернова-Людерса



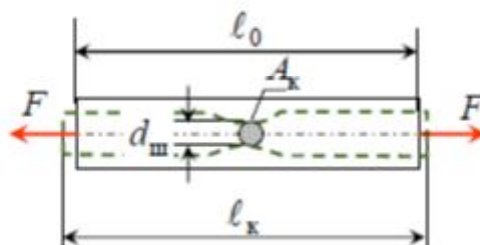
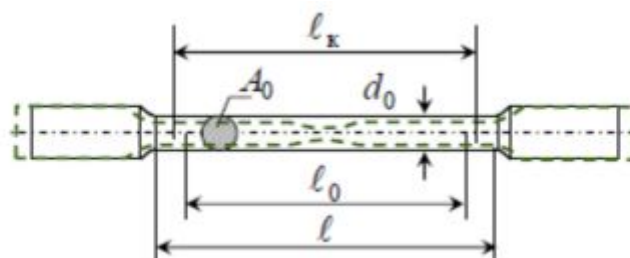
Условный предел текучести

$$\sigma_{\tau} = \sigma_{0,2}$$

предел прочности

$$\sigma_{пч}$$

Сопротивление материалов. Механические свойства материалов (8)



Сопротивление материалов. Механические свойства материалов (9)

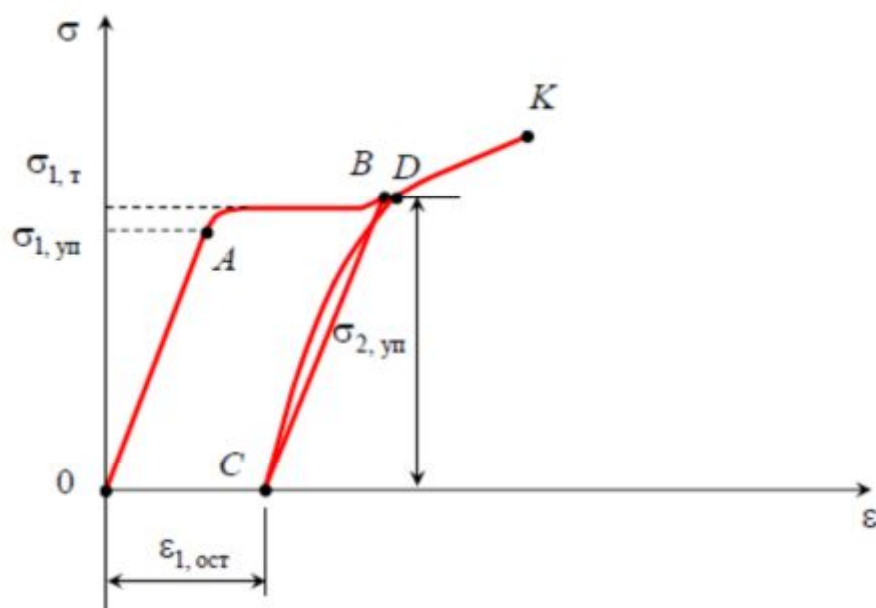
Относительное удлинение  $\varepsilon_p = \frac{l_0 - l_k}{l_0} 100\%$

Относительное сужение  $\delta_p$

$$A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}; \quad A_k = \frac{\pi d_{ш}^2}{4}; \quad \delta_p = \frac{A_0 - A_k}{A_0} 100\%$$

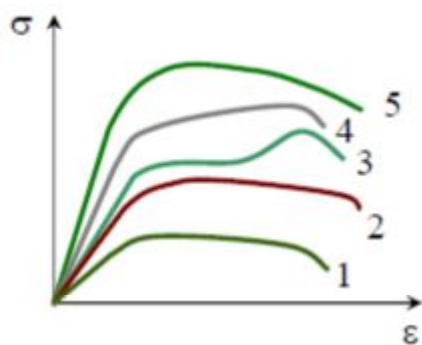
Если  $\varepsilon_p > 5\%$ , то материал считается пластичным,  
если  $\varepsilon_p < 5\%$ , то материал считается хрупким.

### Понятие о наклепе



## Диаграммы растяжения различных материалов

Общий вид диаграмм растяжения  
пластичных материалов



Цинк (1)

Латунь (2)

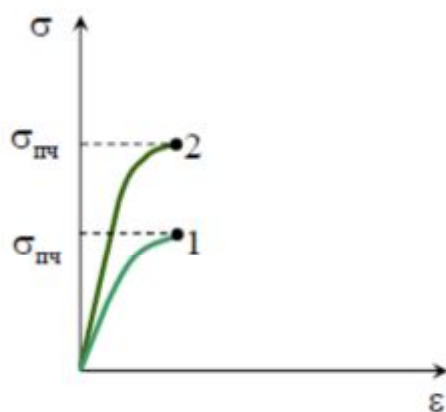
Малоуглеродистая сталь (3)

Сталь (4)

Титан (5)

Сопротивление материалов. Механические свойства материалов (12)

Общий вид диаграмм растяжения  
хрупких материалов



Чугун (1)

Высокоуглеродистая сталь (2)

Сопротивление материалов. Механические свойства материалов (13)



## Основные механические характеристики материалов

1. Модуль упругости  $E = \operatorname{tg}\alpha$  – величина, характеризующая способность материала упруго сопротивляться линейным деформациям;
2. Предел пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}}$  – наибольшее напряжение, до достижения которого материал подчиняется закону Гука;
3. Предел упругости  $\sigma_y$  – наибольшее напряжение, до достижения которого не наблюдается появление значительных остаточных деформаций;

Сопротивление материалов. Механические свойства материалов (14)

4. Предел текучести  $\sigma_T$  – напряжение, при котором рост деформаций происходит без увеличения нагрузки;
5. Предел прочности  $\sigma_{\text{пч}}$  (или временное сопротивление  $\sigma_B$ ) – напряжение, найденное как отношение наибольшей нагрузки, которую может выдержать материал, к первоначальной площади поперечного сечения;
6. Относительное удлинение  $\varepsilon_p$  и относительное сужение  $\delta_p$  образца после разрыва – величины, характеризующие пластичность материала.

Сопротивление материалов. Механические свойства материалов (15)

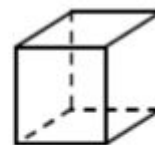
$\sigma_{\text{пред}}$  – предельное напряжение, приводящее к разрушению или необратимой пластической деформации;

Для пластичных материалов (свинец, алюминий, латунь, обожженная сталь и др.) за предельное напряжение  $\sigma_{\text{пред}}$  принимают предел текучести  $\sigma_T$  или условный предел текучести  $\sigma_{0,2}$ .

Для хрупких материалов (белый чугун, серый чугун, инструментальная закаленная без отпуска сталь и др.) за предельное напряжение  $\sigma_{\text{пред}}$  принимают предел прочности  $\sigma_{\text{пч}}$ .

## Испытание материалов на сжатие

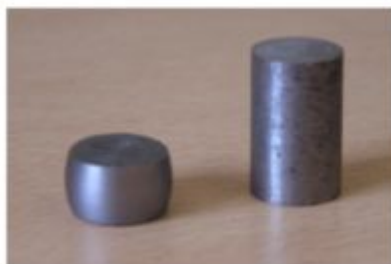
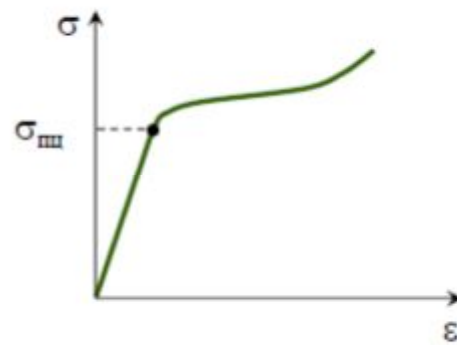
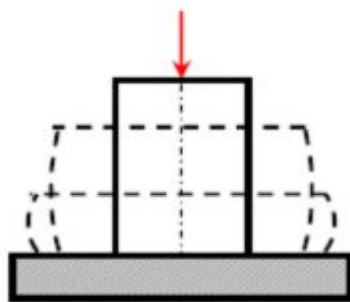
Образцы для испытаний



На характер деформации образца при сжатии большое влияние оказывает трение, возникающее при испытании между пластинками испытательной машины и торцами образца

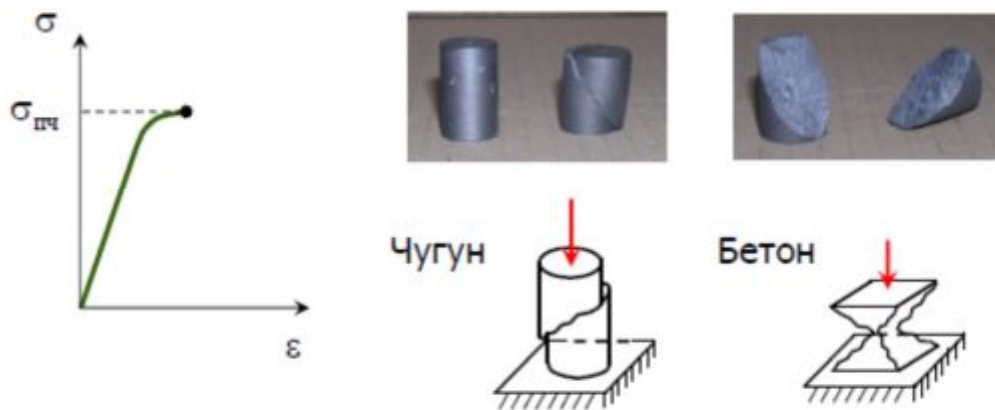


### Сжатие пластичного материала



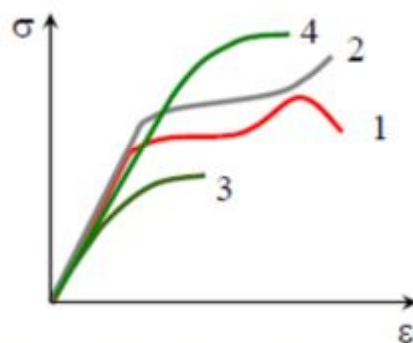
$$\sigma_{\text{шц}}^p = \sigma_{\text{шц}}^c$$

## Сжатие хрупкого материала



Для хрупких материалов  $\sigma_{пч}^c = (3 \div 4,5)\sigma_{пч}^p$

## Анализ диаграмм пластичных и хрупких материалов



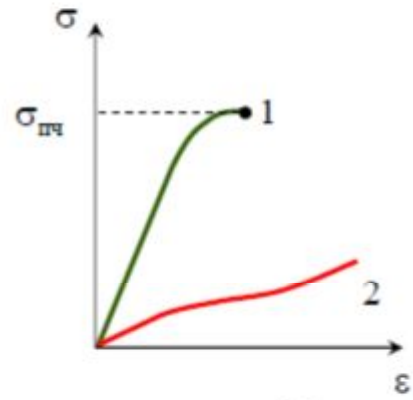
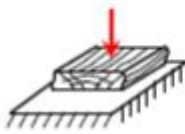
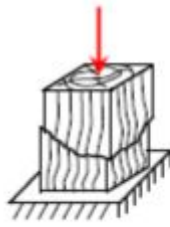
Растяжение малоуглеродистой стали (1)

Сжатие малоуглеродистой стали (2)

Растяжение чугуна (3)

Сжатие чугуна (4)

## Сжатие деревянных образцов вдоль и поперек волокон



Вдоль волокон (1)

Поперек волокон (2)



# СДВИГ, СРЕЗ, СМЯТИЕ

Чистый сдвиг

Закон Гука при сдвиге

Элементы конструкций, работающие на срез

Болтовые и заклепочные соединения

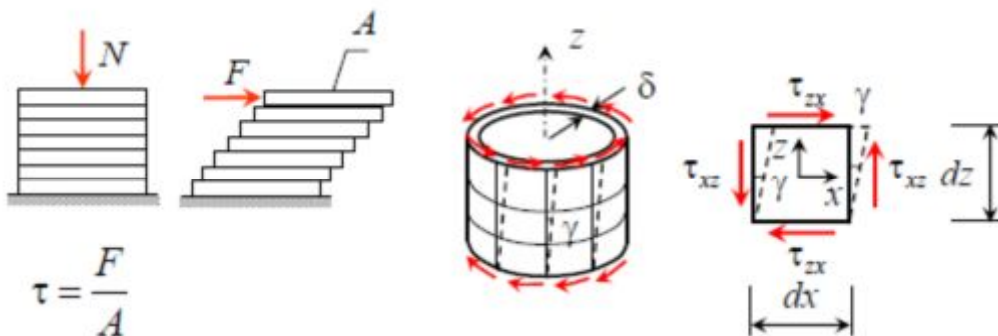
Соединения на высокопрочных болтах

Примеры соединений

Расчет болтовых и заклепочных соединений

Расчет сварных соединений

## Чистый сдвиг

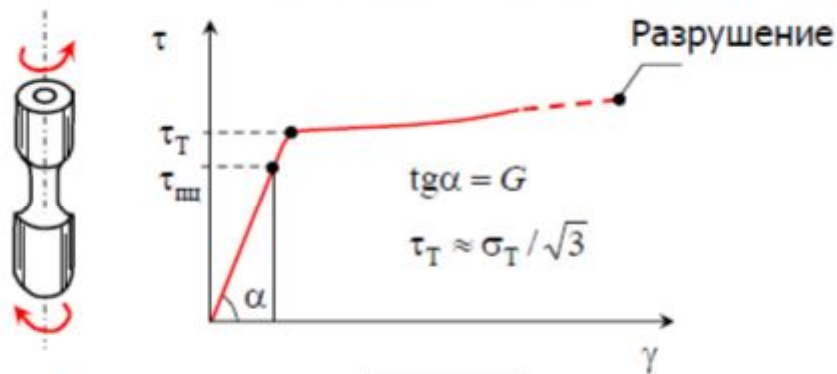


Уравнение равновесия  $(\tau_{xz} dz \delta) \cdot dx - (\tau_{zx} dx \delta) \cdot dz = 0$

Закон парности касательных напряжений

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

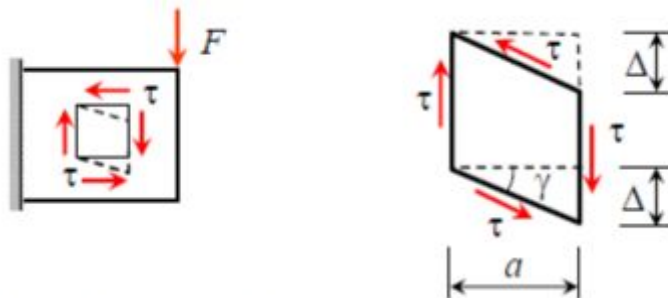
## Закон Гука при сдвиге



Закона Гука при сдвиге  $\tau = G \cdot \gamma$

$\tau_{\text{Т}}$ ,  $\tau_{\text{ш}}$  предел текучести и предел пропорциональности при сдвиге

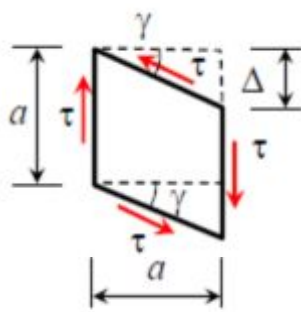
$G$  модуль упругости материала при сдвиге (Па)



$\Delta$  абсолютный сдвиг

$\frac{\Delta}{a} = \text{tg} \gamma \approx \gamma$  относительный сдвиг (угол сдвига)

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad \left| \quad \begin{array}{l} E = 200 \text{ ГПа}; \quad \mu = 0,25 \\ G = \frac{200}{2(1 + 0,25)} = 80 \text{ ГПа} \end{array} \right.$$



$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$\tau = \frac{F}{A}$$

$$\frac{F}{A} = G \frac{\Delta}{a}$$

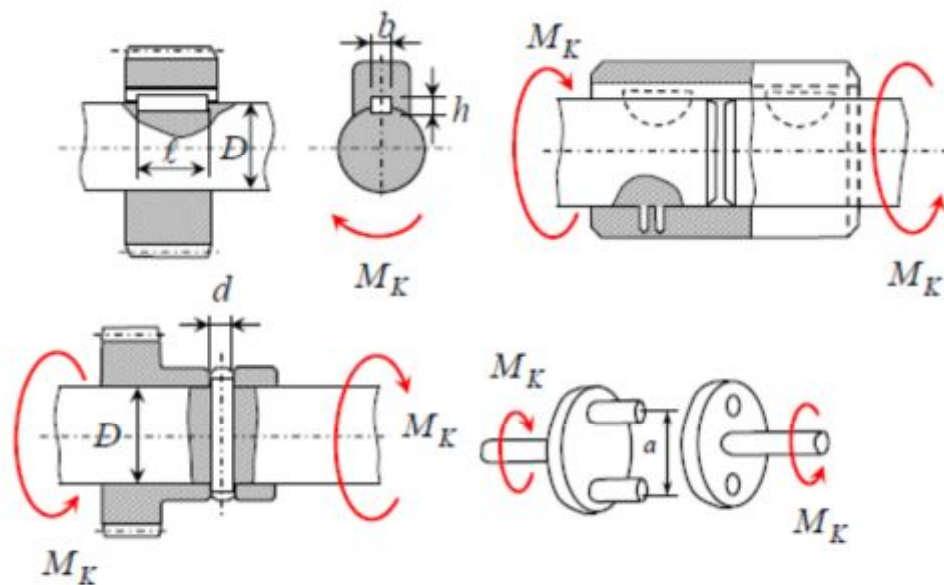
$$\gamma = \frac{\Delta}{a}$$

$$\Delta = \frac{Fa}{GA}$$

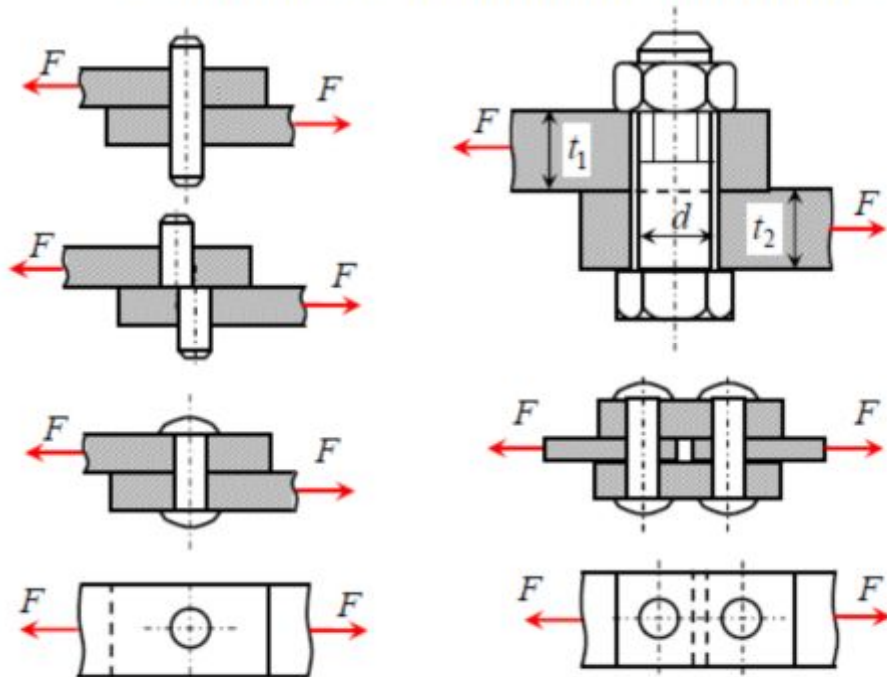
$GA$  жесткость сечения при сдвиге

при растяжении (сжатии)  $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$

### Элементы конструкций, работающие на срез

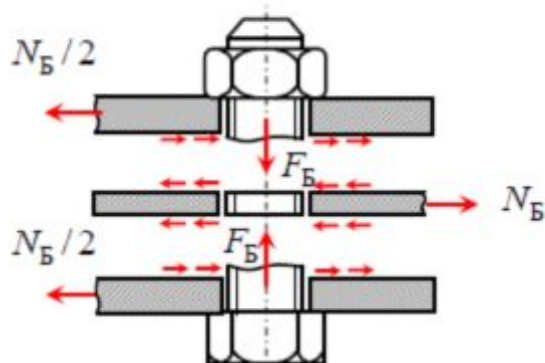


## Болтовые и заклепочные соединения



Сопротивление материалов. Сдвиг, срез, смятие (6)

## Соединения на высокопрочных болтах



Высокопрочный болт, обжимающий пакет листов с силой  $F_B$ , передает усилия  $N_B$  за счет сил трения.

Сопротивление материалов. Сдвиг, срез, смятие (7)

## Примеры соединений

Болтовое соединение



Заклепочное соединение



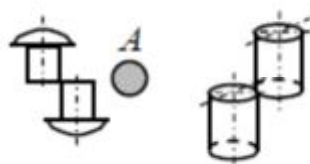
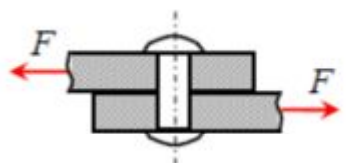
Сварные соединения



Сопротивление материалов. Сдвиг, срез, смятие (8)

## Расчет болтовых и заклепочных соединений

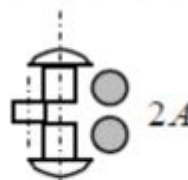
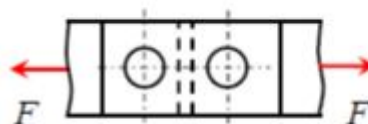
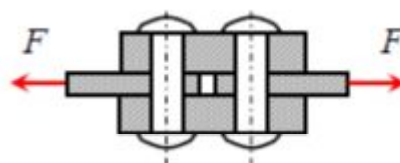
Односрезное



$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

площадь среза заклепки (болта)

Двухсрезное



Сопротивление материалов. Сдвиг, срез, смятие (9)



## 1. Расчет на срез

Условие прочности на срез

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{4F}{n \cdot n_s \pi d^2} \leq R_{\text{ср}}$$

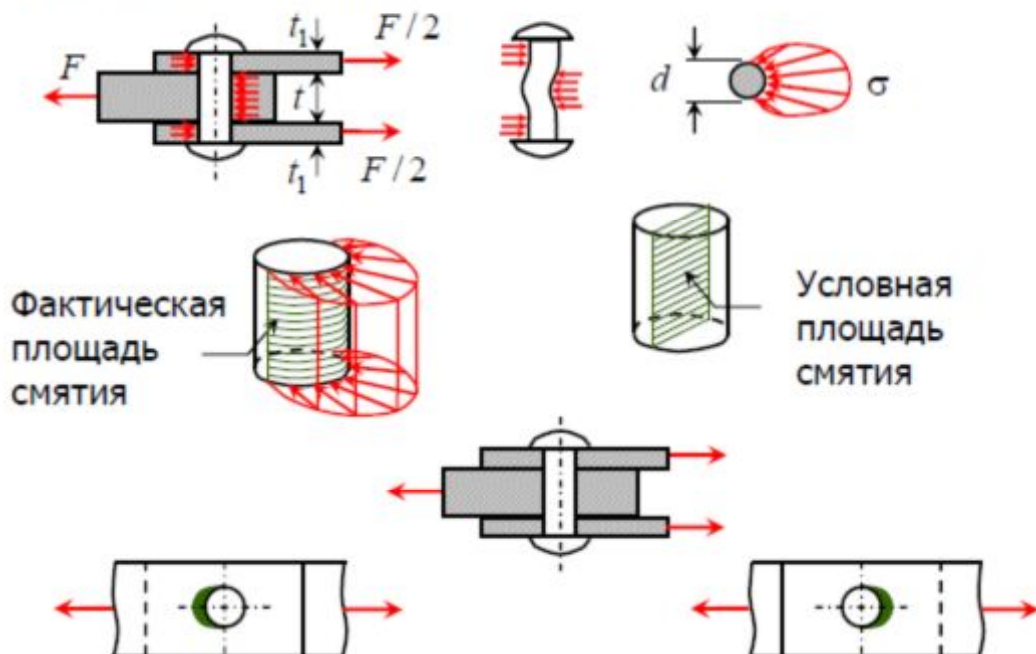
$n$  число заклепок (болтов)

$n_s$  число плоскостей среза заклепки (болта)

$d$  диаметр заклепки (болта)

$R_{\text{ср}}$  расчетное сопротивление срезу

## 2. Расчет на смятие



Условие прочности на смятие

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F_{\text{см}}}{A_{\text{см}}} \leq R_{\text{см}}$$

$A_{\text{см}} = d \cdot t$  условная площадь смятия

$t$  толщина сминаемой пластины

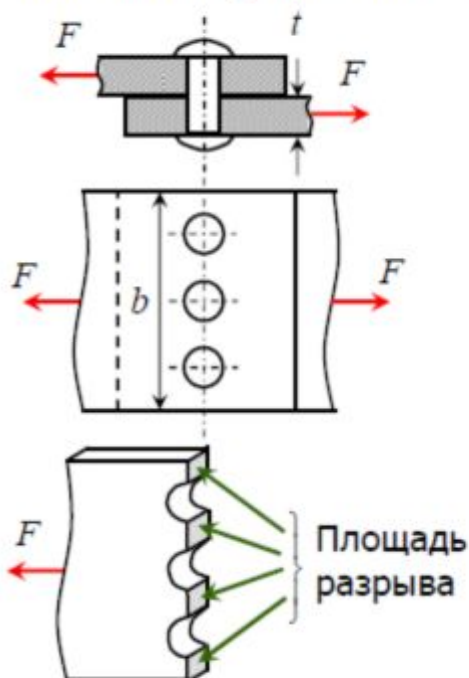
Условие прочности на смятие в общем случае

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F_{\text{см}}}{nd \sum t} \leq R_{\text{см}}$$

$n$  число заклепок (болтов)

$\sum t$  наименьшая суммарная толщина элементов, сминаемых в одном направлении

### 3. Расчет на разрыв по ослабленному сечению



Условие прочности

$$\sigma_p = \frac{F}{A_p} \leq R$$

$n$  число заклепок

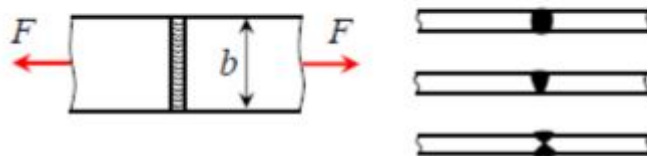
Площадь ослабленного сечения

$$A_p = (b - nd) \cdot t$$

Из условия прочности можно производить три типа расчетов:

- 1) проверочный – определение напряжений и сравнение их с допускаемыми
- 2) проектировочный – определение числа соединяемых деталей (т. е. количество заклепок (болтов), количество соединяемых пластин), либо определение размеров деталей при заданном их числе
- 3) определение допускаемой нагрузки

### Расчет сварных соединений



#### 1. Стыковое соединение

Условие прочности

$$\sigma = \frac{F}{\ell \cdot t} \leq R_{\text{ш}}$$

$\ell = b - 10$  (мм) расчетная длина шва

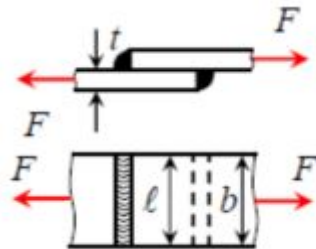
$b$  ширина листа

$t$  расчетная высота шва

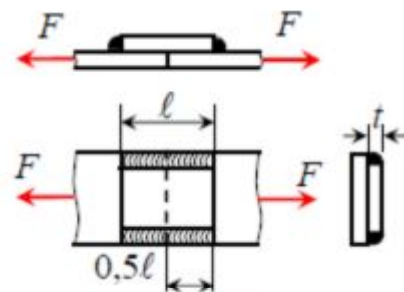
$R_{\text{ш}}$  расчетное сопротивление при сварке

## 2. Соединение внахлестку

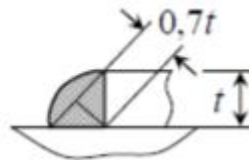
### Лобовой шов



### Фланговый шов



Расчет производится на срез по наиболее слабому (наклонному) сечению, без учета выпуклости шва



Площадь условного сечения  $A = \ell \cdot h$

$$h = t \cdot \cos 45^\circ \approx 0,7t$$

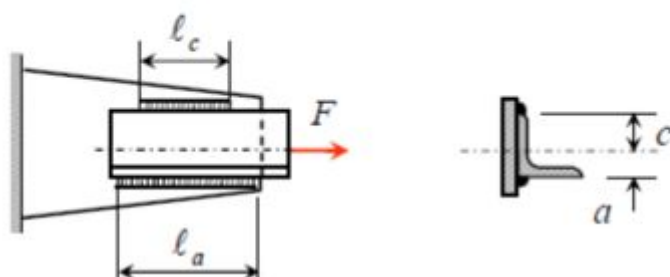
$$A = 0,7t \cdot \ell$$

$$\ell = b - 10 \text{ (мм)}$$

Условие прочности

$$\tau = \frac{F}{0,7t \cdot \ell} \leq R_{\text{ср.ш}}$$

## Приварка элементов с несимметричным сечением



Длина швов с каждой стороны определяется по формулам:

$$l_a = \frac{F \cdot c}{0,7t(a+c)R_{св,ш}}; \quad l_c = \frac{F \cdot a}{0,7t(a+c)R_{св,ш}}$$



# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

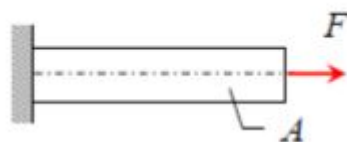
Геометрические характеристики сечения

Моменты инерции при параллельном переносе осей

Моменты инерции относительно повернутых осей

Главные оси инерции сечения

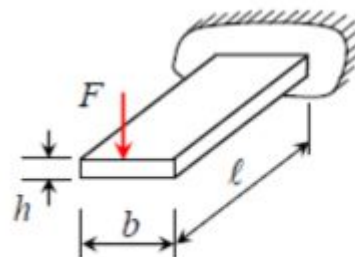
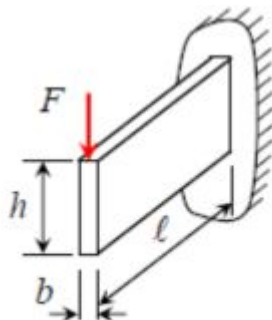
Моменты инерции и моменты сопротивления простых фигур

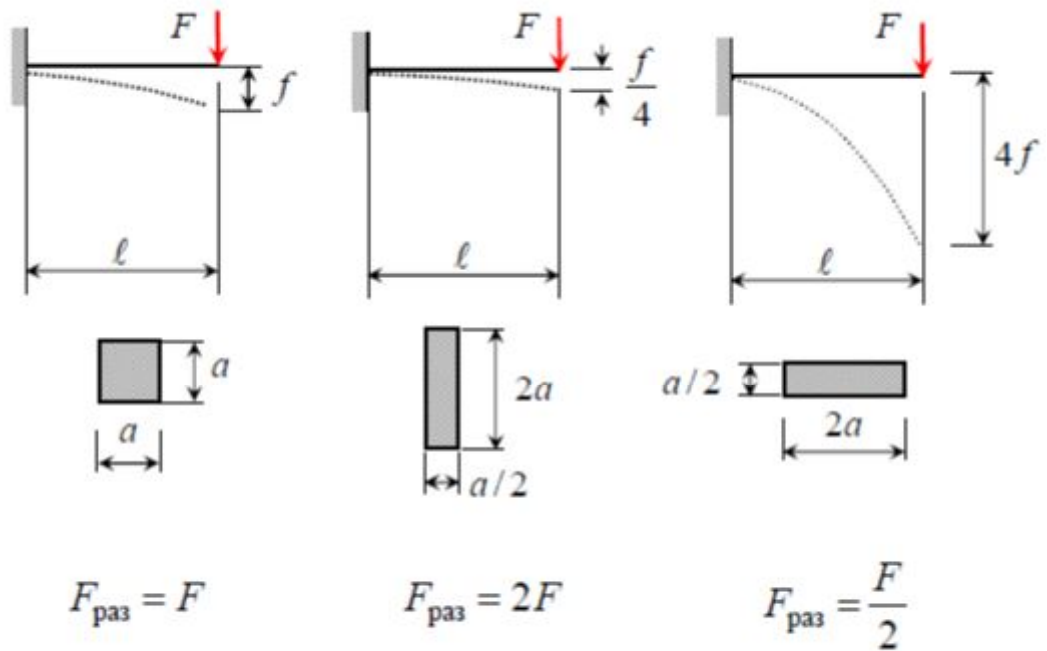


При растяжении (сжатии)

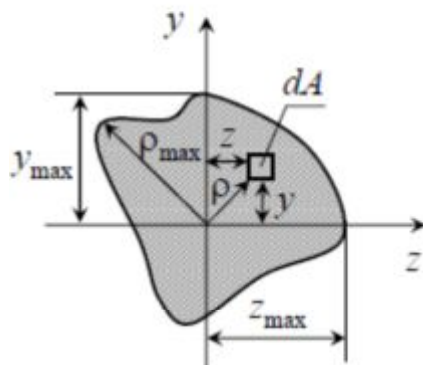
$$F_{\max} \leq A \cdot [\sigma]$$

$A$  - геометрическая характеристика (площадь поперечного сечения)





### Геометрические характеристики сечения



1. Площадь поперечного сечения  $A$

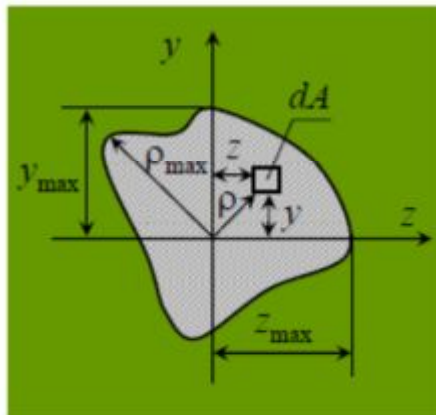
$$\int_A dA = A, \text{ (мм}^2, \text{ см}^2, \text{ м}^2\text{)}$$

Всегда положительная (+)

При вычислениях можно суммировать  $\Sigma$

Используется при растяжении (сжатии)

## 2. Статические моменты площади $S_z, S_y$

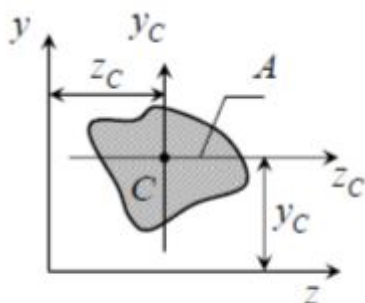


$$\left. \begin{aligned} \int_A y dA &= S_z \\ \int_A z dA &= S_y \end{aligned} \right\} (\text{мм}^3, \text{см}^3, \text{м}^3)$$

Знак может быть любой (+, -)



Используется для определения положения центра тяжести сечения

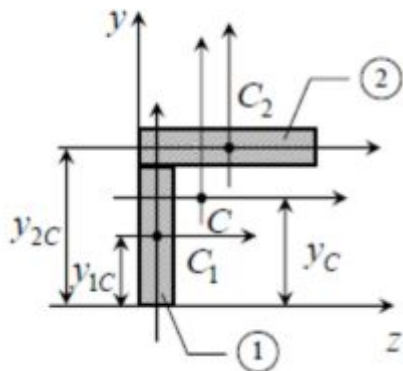


$$S_z = A \cdot y_c; \quad y_c = \frac{S_z}{A}$$

$$S_z = S_{1z} + S_{2z} + \dots + S_{nz} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i$$

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

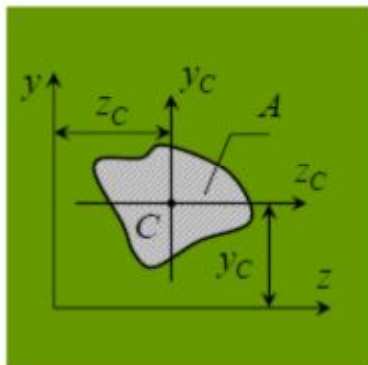


$$y_C = \frac{A_1 \cdot y_{1C} + A_2 \cdot y_{2C}}{A_1 + A_2}$$

$$z_C = \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} y_C = 0; \quad S_z = 0 \\ z_C = 0; \quad S_y = 0 \end{array} \right\}$$

### 3. Осевые моменты инерции $J_z, J_y$



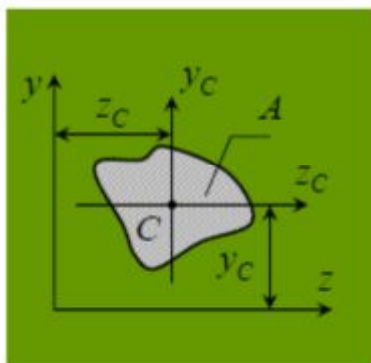
$$\left. \begin{array}{l} \int_A y^2 dA = J_z \\ \int_A z^2 dA = J_y \end{array} \right\} \quad (\text{мм}^4, \text{см}^4, \text{м}^4)$$

(+)

(Σ)

Используются в расчетах на прочность и жесткость при изгибе

#### 4. Центробежный момент инерции $J_{zy}$



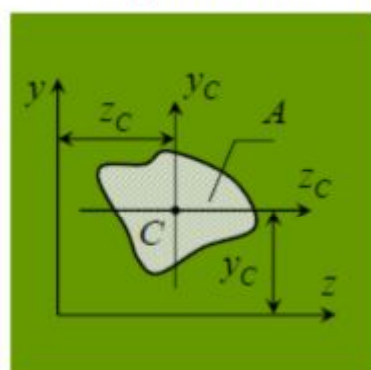
$$\int_A zy dA = J_{zy}, (\text{мм}^4, \text{см}^4, \text{м}^4)$$

(+,-)

$\Sigma$

Используется для определения положения главных осей инерции сечения

#### 5. Полярный момент инерции $J_\rho$



$$\int_A \rho^2 dA = J_\rho, (\text{мм}^4, \text{см}^4, \text{м}^4)$$

(+)

$\Sigma$

Используется в расчетах на прочность и жесткость при кручении

$$\rho^2 = y^2 + z^2; \quad \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = J_z + J_y$$

$$J_\rho = J_z + J_y$$



6. Радиусы инерции сечения  $i_z, i_y$

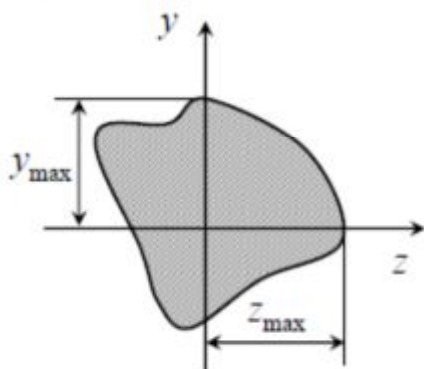
$$\frac{J_z}{A} = i_z^2; \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}$$

$$\frac{J_y}{A} = i_y^2; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$$

Используются в расчетах на устойчивость сжатых стержней и при продольном изгибе стержня

7. Осевые или экваториальные моменты сопротивления

$W_z, W_y$

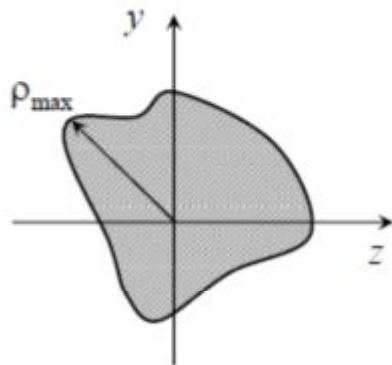

$$\left. \begin{array}{l} \frac{J_z}{y_{\max}} = W_z \\ \frac{J_y}{z_{\max}} = W_y \end{array} \right\} \quad (\text{мм}^3, \text{см}^3, \text{м}^3)$$

(+)

При вычислениях нельзя суммировать  $\Sigma$

Используются в расчетах на прочность при изгибе

## 8. Полярный момент сопротивления



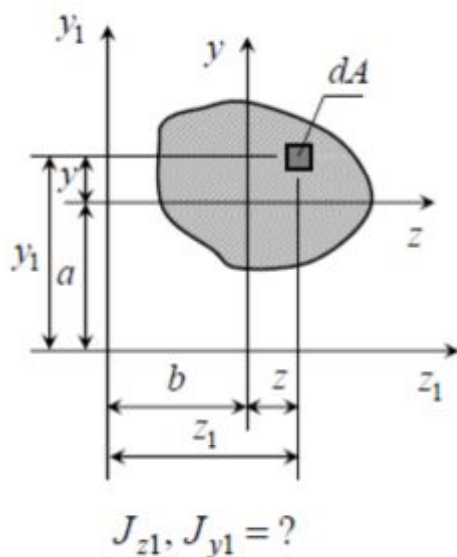
$$\frac{J_{\rho}}{\rho_{\max}} = W_{\rho} \quad (\text{мм}^3, \text{см}^3, \text{м}^3)$$

(+)



Используется в расчетах на прочность при кручении

## Моменты инерции при параллельном переносе осей



### 1. Осевые моменты инерции

$$y_1 = y + a \quad z_1 = z + b$$

$$J_{z1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA =$$

$$= \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA =$$

$$= \int_A (y^2 + 2ay + a^2) dA =$$

$$= J_z + 2a \cdot 0 + a^2 A$$

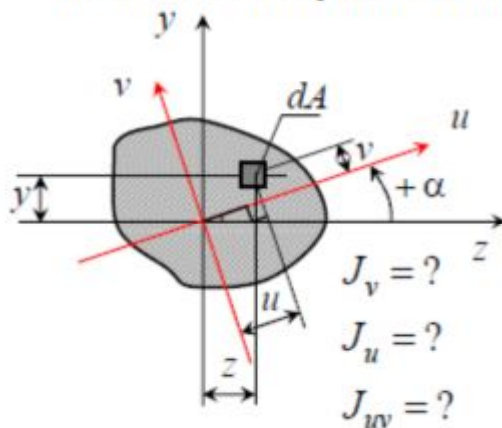
$$\begin{aligned} J_{z1} &= J_z + a^2 A \\ J_{y1} &= J_y + b^2 A \end{aligned} \quad (+)$$

## 2. Центробежный момент инерции $J_{z1y1}$

$$\begin{aligned} J_{z1y1} &= \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z+b)(y+a) dA = \\ &= \int_A (z \cdot y + z \cdot a + y \cdot b + a \cdot b) dA = J_{zy} + 0 + 0 + abA \end{aligned}$$

$$J_{z1y1} = J_{zy} + abA \quad (+, -)$$

## Моменты инерции относительно повернутых осей



Известны  $z, y, J_z, J_y, J_{zy}$

$$v = y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha$$

$$u = z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$$

$$J_u = \int_A v^2 dA =$$

$$= \int_A (y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha)^2 dA =$$

$$= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_A yz dA + \sin^2 \alpha \int_A z^2 dA$$

$$J_u = J_z \cos^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha$$

$$J_v = \int_A u^2 dA = \dots$$

$$J_v = J_y \cos^2 \alpha + J_{zy} \sin 2\alpha + J_z \sin^2 \alpha$$

$$J_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha) (y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha) dA =$$

$$= \cos^2 \alpha \int_A zy dA - \sin^2 \alpha \int_A zy dA - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \int_A z^2 dA = \dots$$

$$J_{uv} = J_{zy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (J_y - J_z) \sin 2\alpha$$

Сопротивление материалов. Геометрические характеристики плоских сечений (16)

$$J_u + J_v = J_z \cos^2 \alpha + J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha =$$

$$= J_z (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + J_y (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = J_z + J_y$$

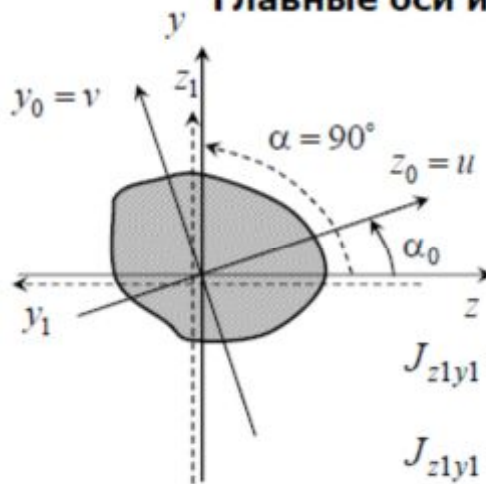
$$J_u + J_v = J_z + J_y$$

$$\Sigma = \text{const}$$

Используется для проверки

Сопротивление материалов. Геометрические характеристики плоских сечений (17)

## Главные оси инерции сечения



$$J_{zy} \quad (+, -);$$

$$0 < J_{uv} < 0$$

$$(+ \quad -)$$

$$J_{z_1 y_1} = \int z_1 y_1 dA; \quad z_1 = +y; \quad y_1 = -z$$

$$J_{z_1 y_1} = \int_A y(-z) dA = - \int_A yz dA = -J_{zy}$$

$$\alpha = 90^\circ: \quad J_{z_1 y_1} = -J_{zy}$$

$$\alpha = \alpha_0: \quad J_{zy} = J_{uv} = 0$$

$$z_0 = u: \quad y_0 = v \quad J_{z_0 y_0} = J_{uv} = 0$$

$u, v$  — главные оси инерции сечения,

относительно которых центробежный момент инерции равен нулю  $J_{uv} = 0$

Положение главных осей инерции сечения  $\alpha_0$

$$J_{uv} = J_{zy} \cos 2\alpha_0 - \frac{1}{2}(J_y - J_z) \sin 2\alpha_0 = 0$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z}}$$

Ось симметрии и перпендикулярная ей ось, проходящая через центр тяжести сечения, являются главными осями



Анализ на экстремум

$$\begin{aligned} \frac{dJ_u}{d\alpha} &= -J_z \sin 2\alpha + J_y \sin 2\alpha - 2J_{zy} \cos 2\alpha = \\ &= -2 \left( J_{zy} \cos 2\alpha - \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha \right) = -2J_{uv} = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha = \alpha_0 \quad J_u = J_{\max}; \quad J_v = J_{\min}$$

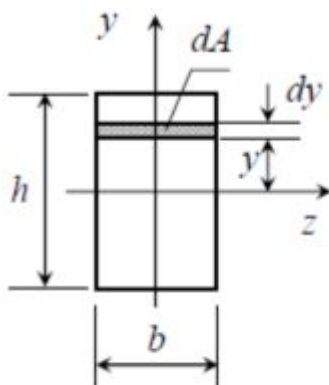
Моменты инерции имеют экстремальные значения

$J_u$   $J_v$  главные моменты инерции

$$J_{u,v} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}$$

Сопротивление материалов. Геометрические характеристики плоских сечений (20)

### Моменты инерции и моменты сопротивления простых фигур



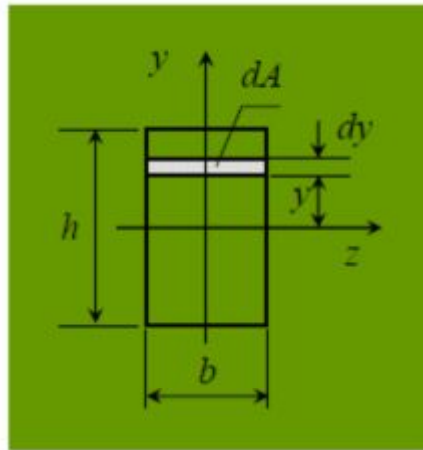
1. Прямоугольное сечение

$$dA = b dy;$$

$$\begin{aligned} J_z &= \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b y^2 dy = \\ &= \frac{b y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \left[ \frac{h^3}{8} - \left( -\frac{h^3}{8} \right) \right] = \frac{bh^3}{12} \end{aligned}$$

$$J_z = \frac{bh^3}{12} \quad J_y = \frac{hb^3}{12}$$

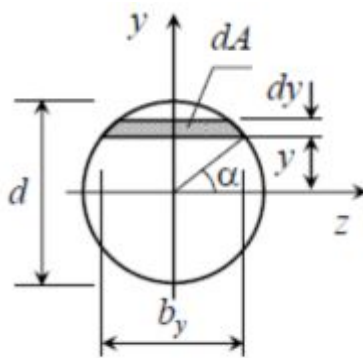
Сопротивление материалов. Геометрические характеристики плоских сечений (21)



$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{J_z}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12} \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \quad W_y = \frac{hb^2}{6}$$

Сопротивление материалов. Геометрические характеристики плоских сечений (22)

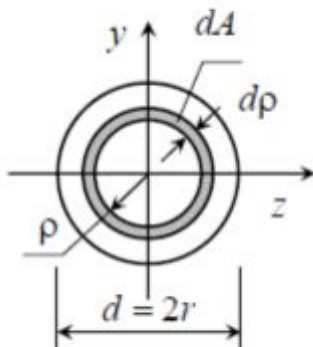


## 2. Круглое сечение

$$\frac{b_y}{2} = \frac{d}{2} \cos \alpha; \quad b_y = d \cos \alpha$$

$$dA = b_y dy$$

$$J_\rho = J_z + J_y; \quad J_z = J_y = \frac{J_\rho}{2}$$



$$dA = 2\pi\rho d\rho; \quad J_\rho = \int_A \rho^2 dA;$$

$$J_\rho = \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{2\pi\rho^4}{4} \Big|_0^r = \frac{\pi r^4}{2}$$

Сопротивление материалов. Геометрические характеристики плоских сечений (23)

$$J_{\rho} = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$J_z = J_y = \frac{J_{\rho}}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$$

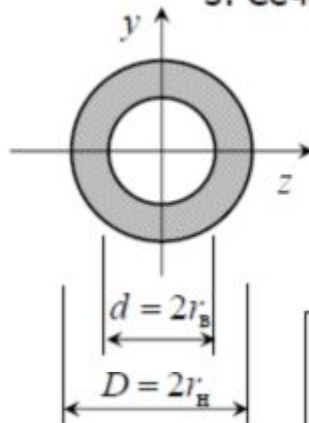
$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{\rho_{\max}} = \frac{J_{\rho}}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}$$

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}$$

$$W_z = W_y = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{J_z}{r} = \frac{\pi d^4}{64} \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32}$$

### 3. Сечение пустотелого вала



$$dA = 2\pi\rho d\rho$$

$$J_{\rho} = \int_{r_{\text{в}}}^{r_{\text{к}}} 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{2\pi\rho^4}{4} \Big|_{r_{\text{в}}}^{r_{\text{к}}} = \dots$$

$$J_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$$

$$\alpha = \frac{d}{D}$$

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

# КРУЧЕНИЕ

Общие сведения

Внутренние силовые факторы при кручении

Три типа задач при кручении

Рациональная форма сечения вала

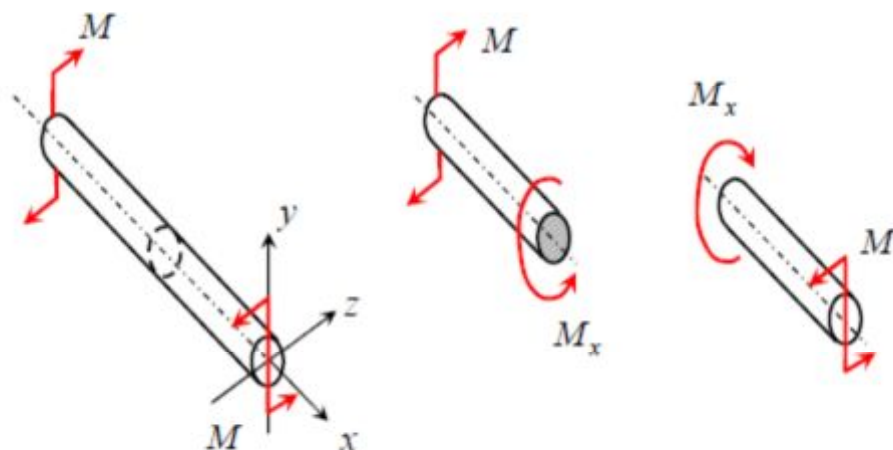
Разрушение при кручении

Статически неопределимые задачи при кручении

Кручение некруглых стержней

## Общие сведения

Вал - стержень, испытывающий деформацию кручения



$$M = \frac{N}{\omega} \quad \text{скручивающий момент}$$

$N$  (Вт)      мощность

$\omega$  (рад/сек)      угловая скорость

$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

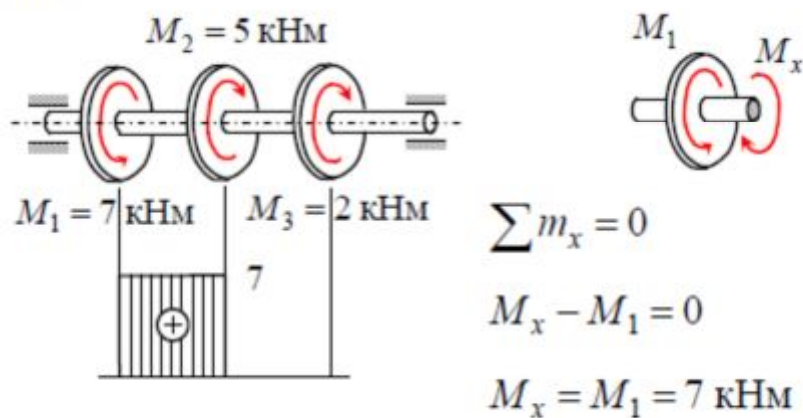
$n$  (об/мин)      число оборотов

$$M = 716,2 \frac{N^*}{n}$$

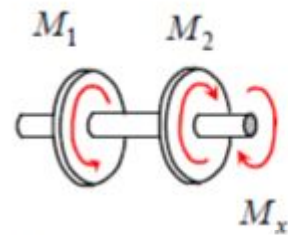
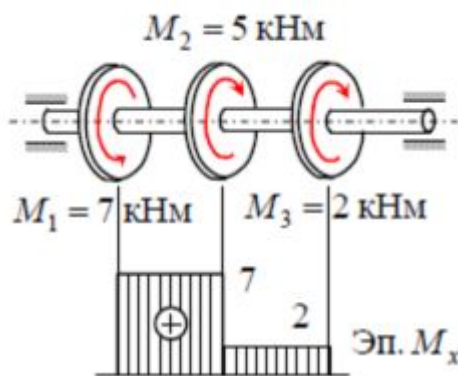
$N^*$  (л.с.)      мощность

### Внутренние силовые факторы при кручении

Правило знаков - крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец вала действующий на него момент направлен по часовой стрелке





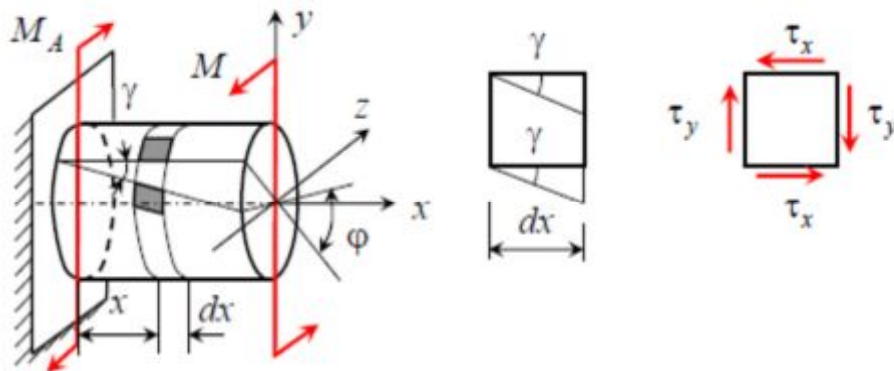


$$\sum m_x = 0$$

$$M_x - M_1 + M_2 = 0$$

$$M_x = M_1 - M_2 = 2 \text{ кНм}$$

## Напряжения и деформации при кручении

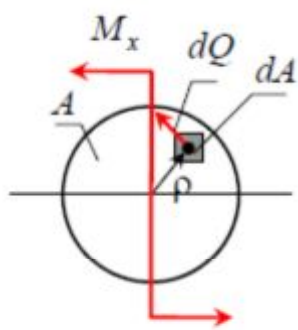


### Гипотезы

Плоских сечений

Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину

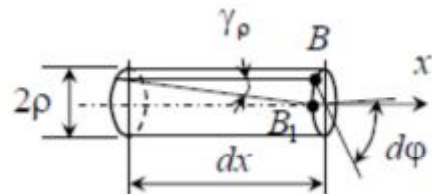
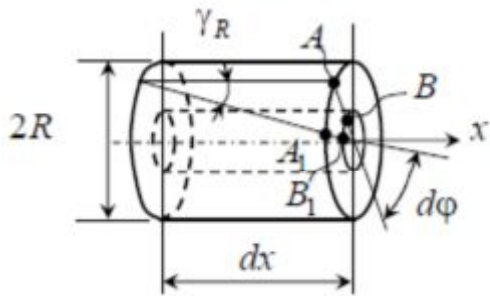
Расстояния между поперечными сечениями не меняются



$$dQ = \tau dA$$

$$dM_x = \rho \cdot dQ = \rho \cdot \tau dA$$

$$M_x = \int_A \rho \cdot \tau dA$$



условие совместности деформаций  $BB_1 = dx \cdot \gamma_\rho = \rho d\phi$

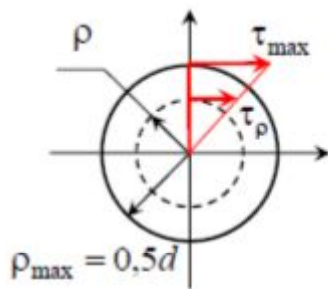
$$\left. \begin{aligned} \gamma_\rho &= \rho \frac{d\phi}{dx} \\ \theta &= \frac{d\phi}{dx} \end{aligned} \right\} \gamma_\rho = \rho \cdot \theta \quad \left. \begin{aligned} \tau &= G \cdot \gamma_\rho \\ \gamma_\rho &= \rho \cdot \theta \end{aligned} \right\} \tau = G \cdot \rho \cdot \theta$$

$$M_x = \int_A \rho \cdot \tau dA = \int_A G \rho^2 \theta dA = G \cdot \theta \underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{J_\rho} = G \cdot \theta \cdot J_\rho$$

$$\boxed{\theta = \frac{M_x}{GJ_\rho}}$$

$$\tau_\rho = G \cdot \rho \cdot \theta = G \cdot \rho \cdot \frac{M_x}{GJ_\rho} = \frac{M_x}{J_\rho} \rho$$

$$\boxed{\tau = \frac{M_x}{J_\rho} \rho}$$



При  $\rho = \rho_{\max} = 0,5d$

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{M_x}{J_\rho} \rho_{\max} = \frac{M_x}{W_\rho}$$

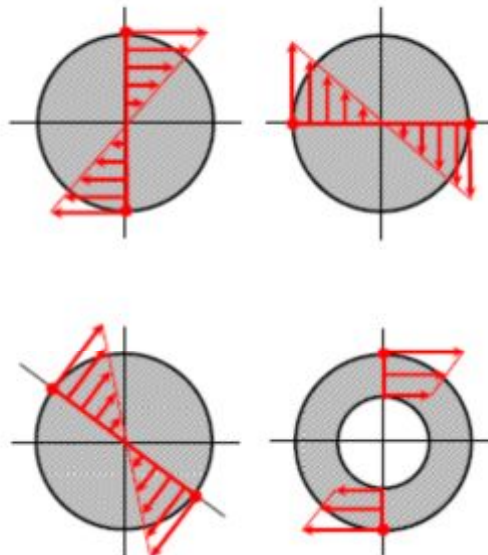
$$W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}} \quad \text{полярный момент сопротивления}$$

Условие прочности при кручении

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_\rho} \leq R_{\text{ср}}$$

Сопротивление материалов. Кручение (8)

$$\tau = \frac{M_x}{J_\rho} \rho$$



Сопротивление материалов. Кручение (9)

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{d\varphi}{dx} \\ \theta &= \frac{M_x}{GJ_\rho} \end{aligned} \right\} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GJ_\rho}$$

$$\varphi = \int_{\ell} \frac{M_x}{GJ_\rho} dx = \frac{M_x \ell}{GJ_\rho}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{M_x \ell}{GJ_\rho}}$$

Сравним с

$$\Delta \ell = \frac{N\ell}{EA}$$

Условие жесткости при кручении

$$\theta = \frac{M_x}{GJ_\rho} \leq [\theta]$$

$GJ_\rho$  жесткость вала при кручении

### Три типа задач при кручении

1. Проверочный расчет

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_\rho} \leq R_{\text{ср}}$$

2. Определение размеров поперечного сечения вала (проектный расчет)

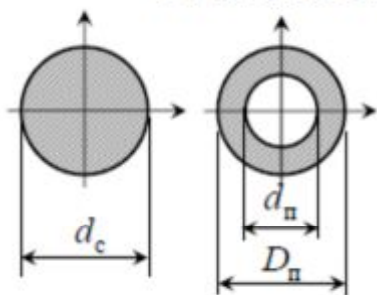
$$W_\rho \geq \frac{M_{x, \max}}{R_{\text{ср}}}$$

3. Определение допускаемой нагрузки  $M_x \leq W_\rho \cdot R_{\text{ср}}$

Аналогично решаются задачи из условия жесткости

$$\theta_{\max} = \frac{M_x}{GJ_\rho} \leq [\theta]$$

## Рациональная форма сечения вала



Требуется заменить сплошной вал равнопрочным пустотелым

$$\alpha = \frac{d_{\text{п}}}{D_{\text{п}}} = 0,7 \quad d_c = 200 \text{ мм}$$

$$W_{\rho, c} = W_{\rho, \text{п}}; \quad d_c^3 = D_{\text{п}}^3(1 - \alpha^4)$$

$$D_{\text{п}} = \frac{d_c}{\sqrt[3]{1 - \alpha^4}} = \frac{200}{\sqrt[3]{1 - 0,7^4}} = 220 \text{ мм}$$

$$d_{\text{п}} = 0,7 D_{\text{п}} = 0,7 \cdot 220 = 154 \text{ мм}$$

Сопротивление материалов. Кручение (12)

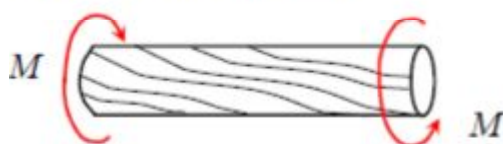
$$A_c = \frac{\pi d_c^2}{4} = 31400 \text{ мм}^2; \quad A_{\text{п}} = \dots = 19380 \text{ мм}^2$$

Экономия материала составит

$$\frac{31400 - 19380}{31400} 100 \% = 38 \%$$

## Разрушение при кручении

### 1. Деревянный образец

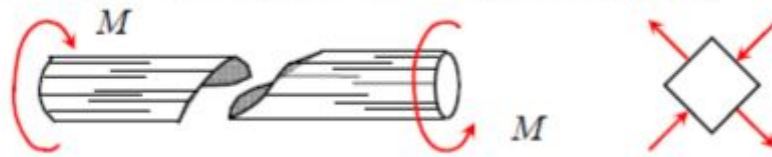


Разрушение вдоль волокон

Сопротивление материалов. Кручение (13)

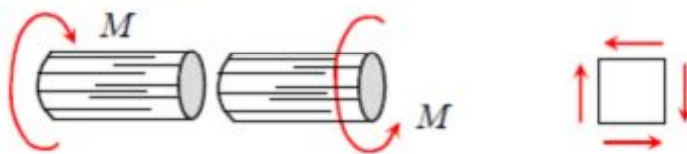


2. Образец из хрупкого материала (чугун)



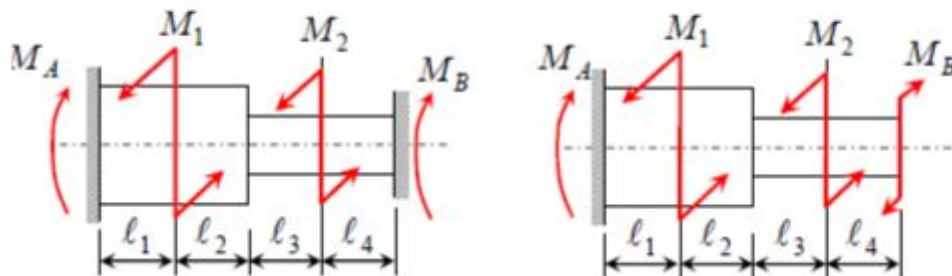
Разрушение от действия главных растягивающих напряжений по винтовой поверхности, наклоненной к оси стержня под углом  $45^\circ$ .

3. Образец из пластичного материала (сталь, медь, латунь и др.)



Разрушение в виде среза от действия максимальных касательных напряжений  $\tau_\alpha$  в поперечном сечении

Статически неопределимые задачи при кручении



Уравнение статики  $M_A - M_1 - M_2 + M_B = 0$

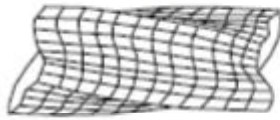
$M_A - ?$ ;  $M_B - ?$

Уравнение совместности деформаций  $\varphi_B = 0$

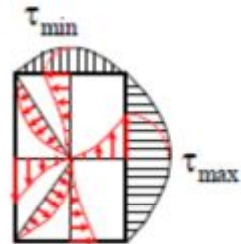
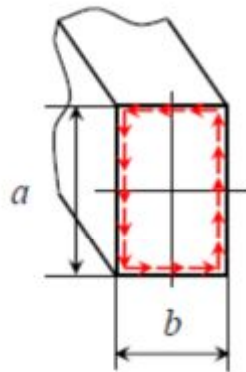
$\varphi_B(M_1) + \varphi_B(M_2) + \varphi_B(M_B) = 0$

## Кручение некруглых стержней

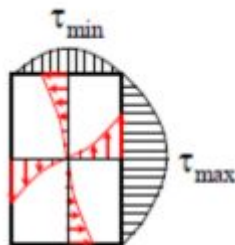
Чистое кручение



Гипотеза плоских сечений не применима вследствие депланации сечений



Сопротивление материалов. Кручение (16)



$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_K}$$

$$W_K = \alpha \cdot ab^2 \quad J_K = \beta \cdot ab^3$$

$$\tau_{\min} = \eta \tau_{\max}$$

$$\alpha, \beta, \eta = f\left(\frac{a}{b}\right)$$

Сопротивление материалов. Кручение (17)

# ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Внутренние силовые факторы при изгибе

Дифференциальные зависимости при изгибе

Действие сосредоточенной силы

Действие сосредоточенного момента

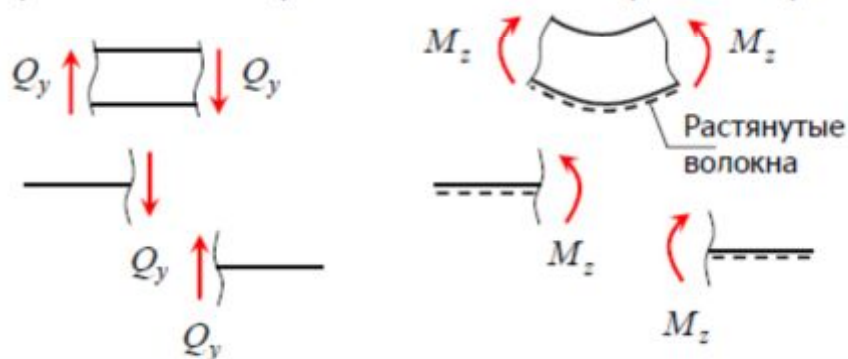
Действие распределенной нагрузки

## Внутренние силовые факторы при изгибе

Плоский изгиб – плоскость действия изгибающего момента совпадает с одной из главных осей инерции сечения.

$Q_y$  поперечная сила  $M_z$  изгибающий момент

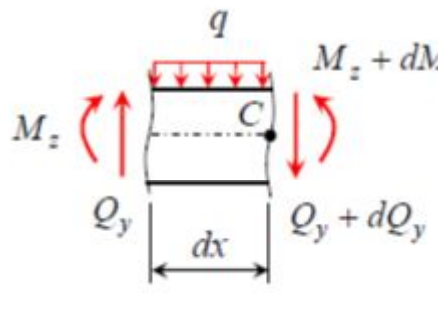
Правила знаков (положительные направления):



## Правила определения внутренних силовых факторов

1. Поперечная сила в каком-либо сечении равна алгебраической сумме всех внешних сил по одну, любую, сторону от сечения.
2. Изгибающий момент в каком-либо сечении равен алгебраической сумме моментов от всех внешних нагрузок по одну, любую, сторону от сечения.

## Дифференциальные зависимости при изгибе


$$\sum F_y = 0:$$
$$Q_y - (Q_y + dQ_y) - qdx = 0$$
$$\boxed{q = \frac{dQ_y}{dx}}$$

$$\sum M_{(C)} = 0: M_z - (M_z + dM_z) + Q_y dx - q \frac{(dx)^2}{2} = 0$$
$$-dM_z + Q_y dx = 0 \quad \boxed{Q_y = \frac{dM_z}{dx}}$$

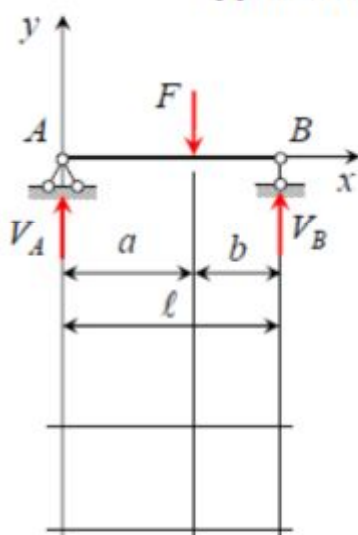
$$Q_y = \frac{dM_z}{dx}$$

$$q = \frac{dQ_y}{dx}$$

Первая производная от изгибающего момента в некотором сечении по координате сечения – есть поперечная сила в этом сечении.

Первая производная от поперечной силы в некотором сечении по координате сечения – есть распределенная нагрузка.

### Действие сосредоточенной силы



Определение опорных реакций

$$\sum M_{(B)} = 0 \quad V_A \cdot l - F \cdot b = 0$$

$$V_A = \frac{F \cdot b}{l}$$

$$\sum M_{(A)} = 0 \quad -V_B \cdot l + F \cdot a = 0$$

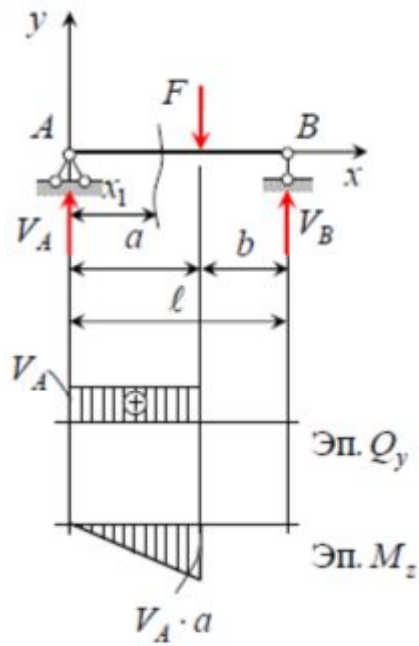
$$V_B = \frac{F \cdot a}{l}$$

Проверка

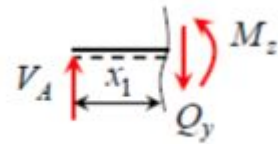
$$\sum F_y = 0 \quad V_A + V_B - F = 0$$

$$\frac{F \cdot b}{l} + \frac{F \cdot a}{l} - F = 0$$





1 участок



$$0 \leq x_1 \leq a$$

$$\sum F_y = 0: V_A - Q_y = 0$$

$$Q_y = V_A$$

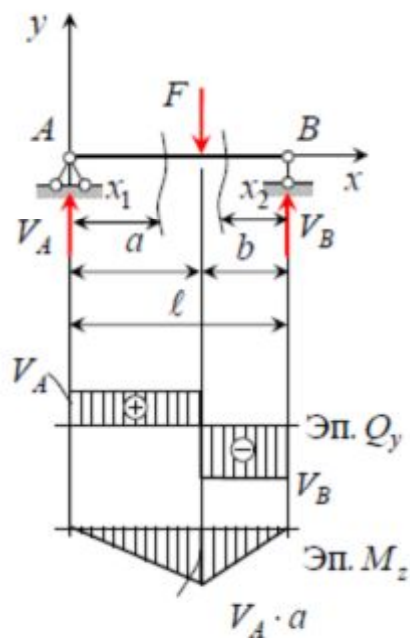
$$\sum M = 0: V_A \cdot x_1 - M_z = 0$$

$$M_z = V_A \cdot x_1$$

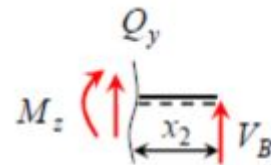
$$x_1 = 0: M_z = V_A \cdot 0 = 0$$

$$x_1 = a: M_z = V_A \cdot a$$

Сопротивление материалов. Внутренние усилия при изгибе (6)



2 участок



$$0 \leq x_2 \leq b$$

$$\sum F_y = 0: Q_y + V_B = 0$$

$$Q_y = -V_B$$

$$\sum M = 0: M_z - V_B \cdot x_2 = 0$$

$$M_z = V_B \cdot x_2$$

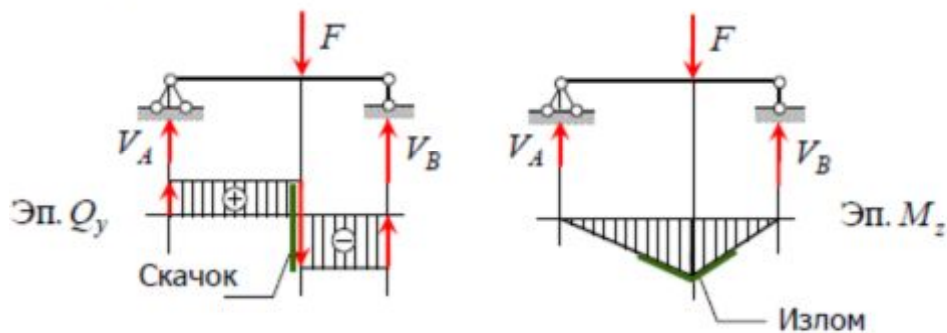
$$x_2 = 0: M_z = V_B \cdot 0 = 0$$

$$x_2 = b: M_z = V_B \cdot b = V_A \cdot a$$

Сопротивление материалов. Внутренние усилия при изгибе (7)

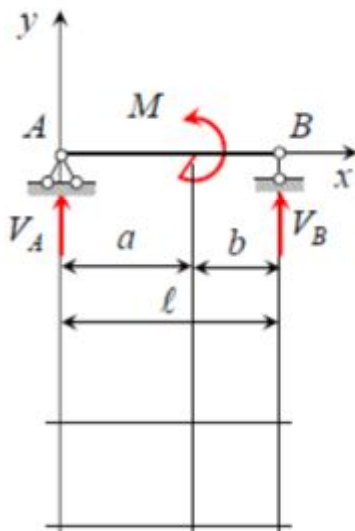
## Правило учета сосредоточенной силы

1. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре поперечных сил будет скачок, по величине и направлению соответствующий этой силе.
2. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре изгибающих моментов будет излом, направленный в сторону действия силы.



Сопротивление материалов. Внутренние усилия при изгибе (8)

## Действие сосредоточенного момента



Определение опорных реакций

$$\sum M_{(B)} = 0 \quad V_A \cdot l - M = 0$$

$$V_A = \frac{M}{l}$$

$$\sum M_{(A)} = 0 \quad -V_B \cdot l - M = 0$$

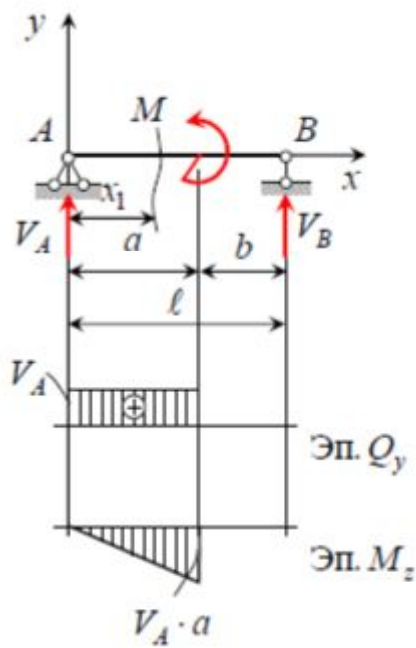
$$V_B = -\frac{M}{l}$$

Проверка

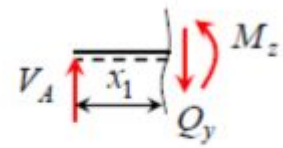
$$\sum F_y = 0 \quad V_A + V_B = 0$$

$$\frac{M}{l} - \frac{M}{l} = 0$$

Сопротивление материалов. Внутренние усилия при изгибе (9)



1 участок



$$0 \leq x_1 \leq a$$

$$\sum F_y = 0: V_A - Q_y = 0$$

$$Q_y = V_A$$

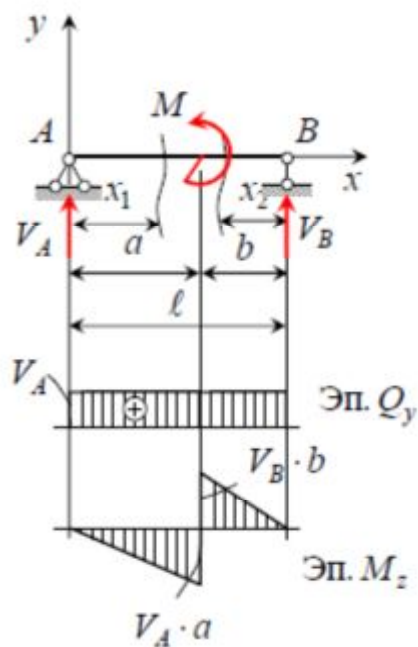
$$\sum M = 0: V_A \cdot x_1 - M_z = 0$$

$$M_z = V_A \cdot x_1$$

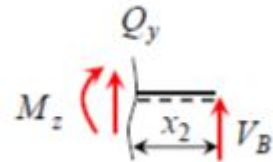
$$x_1 = 0: M_z = V_A \cdot 0 = 0$$

$$x_1 = a: M_z = V_A \cdot a$$

Сопротивление материалов. Внутренние усилия при изгибе (10)



2 участок



$$0 \leq x_2 \leq b$$

$$\sum F_y = 0: Q_y + V_B = 0$$

$$Q_y = -V_B = V_A$$

$$\sum M = 0: M_z - V_B \cdot x_2 = 0$$

$$M_z = V_B \cdot x_2$$

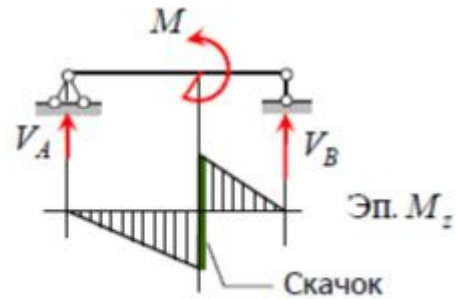
$$x_2 = 0: M_z = V_B \cdot 0 = 0$$

$$x_2 = b: M_z = V_B \cdot b$$

Сопротивление материалов. Внутренние усилия при изгибе (11)

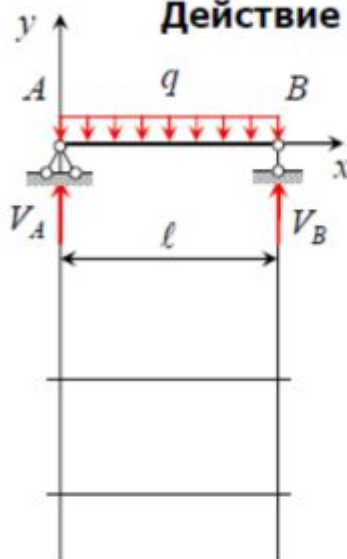
## Правило учета сосредоточенного момента

3. В сечении, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре изгибающих моментов будет скачок, по величине равный этому моменту.



Сопротивление материалов. Внутренние усилия при изгибе (12)

## Действие распределенной нагрузки



Определение опорных реакций

$$\sum M_{(B)} = 0 \quad V_A \cdot l - ql \frac{l}{2} = 0$$

$$V_A = \frac{ql}{2}$$

$$\sum M_{(A)} = 0 \quad -V_B \cdot l + ql \frac{l}{2} = 0$$

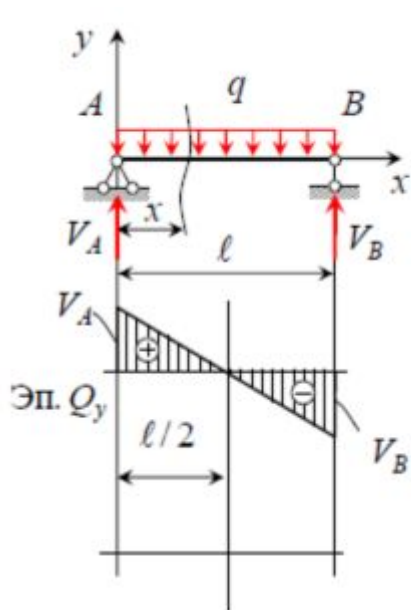
$$V_B = \frac{ql}{2}$$

Проверка

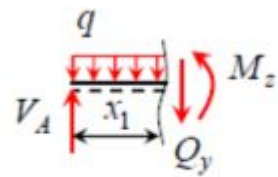
$$\sum F_y = 0 \quad V_A + V_B - ql = 0$$

$$\frac{ql}{2} + \frac{ql}{2} - ql = 0$$

Сопротивление материалов. Внутренние усилия при изгибе (13)



1 участок



$$0 \leq x_1 \leq l$$

$$\sum F_y = 0: V_A - Q_y - q \cdot x_1 = 0$$

$$Q_y = V_A - q \cdot x_1$$

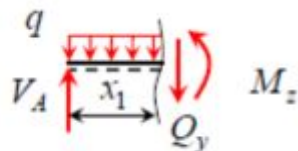
$$x_1 = 0: Q_y = V_A - q \cdot 0 = V_A$$

$$x_1 = l: Q_y = V_A - q \cdot l = V_B$$

$$Q_y = 0 \quad V_A - q \cdot x_1 = 0 \quad x_1 = \frac{V_A}{q} = \frac{l}{2}$$

Сопротивление материалов. Внутренние усилия при изгибе (14)

1 участок



$$0 \leq x_1 \leq l$$

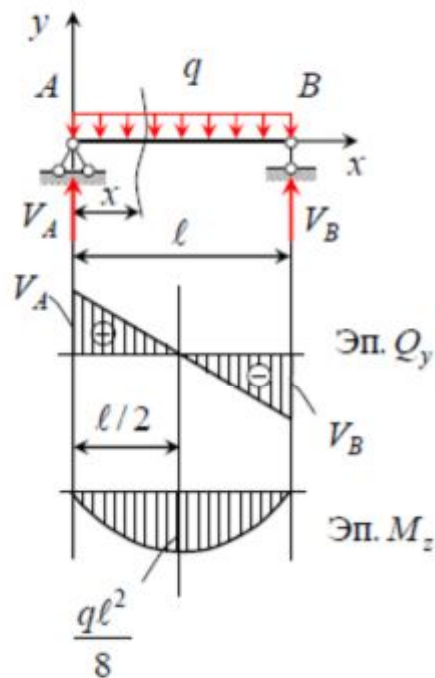
$$\sum M = 0: V_A \cdot x_1 - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} - M_z = 0$$

$$M_z = V_A \cdot x_1 - q \frac{x_1^2}{2} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 0: M_z = V_A \cdot 0 - q \frac{0^2}{2} = 0 \\ x_1 = l: M_z = V_A \cdot l - q \frac{l^2}{2} = 0 \end{array} \right.$$

$$x_1 = \frac{l}{2}: M_z = V_A \frac{l}{2} - q \frac{(0,5l)^2}{2} = \frac{q l^2}{8}$$

Сопротивление материалов. Внутренние усилия при изгибе (15)



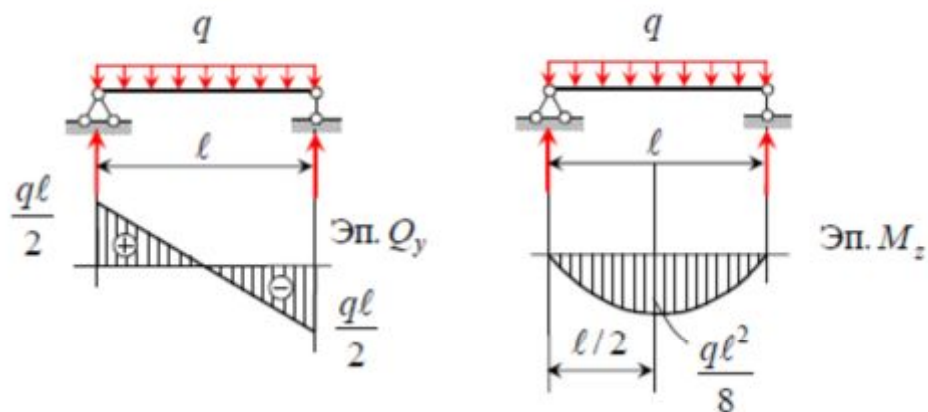


### Правило учета распределенной нагрузки

4. На участке, где приложена равномерно-распределенная нагрузка, эпюра поперечных сил прямолинейная и ее наклон зависит от величины  $q$ , а эпюра изгибающих моментов имеет параболический вид и своей выпуклостью направлена в сторону нагрузки  $q$ .

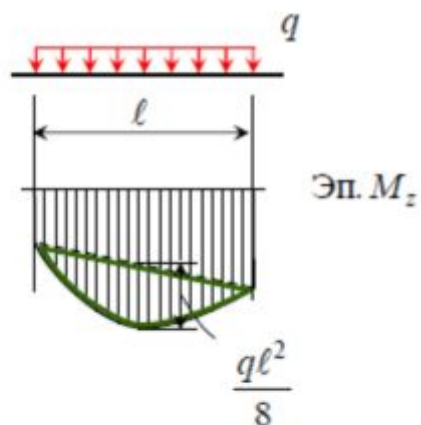
5. В сечении, где меняющаяся по линейному закону поперечная сила меняет знак, на эпюре моментов – экстремальное значение. Координата этого экстремума определяется из условия

$$Q_y = \frac{dM_z}{dx} = 0$$

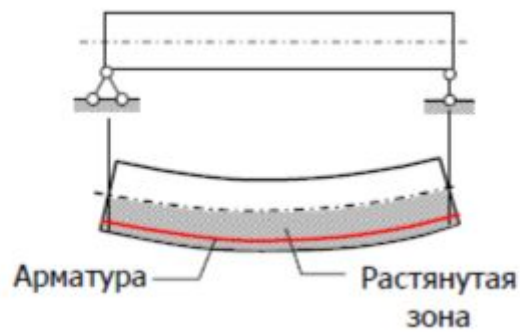


Сопротивление материалов. Внутренние усилия при изгибе (18)

Вершина параболы на участке действия равномерно распределенной нагрузки всегда вычисляется по формуле  $\frac{ql^2}{8}$



Сопротивление материалов. Внутренние усилия при изгибе (19)



В железобетонных балках и плитах используют стальную арматуру, которую располагают в зоне растянутых волокон. В этом случае построенная на растянутых волокнах эпюра указывает место размещения арматуры.

# НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Гипотезы

Распределение напряжений по сечению

Условие прочности при изгибе

Рациональная форма поперечного сечения

Эволюция сечения

## **Гипотезы:**

Плоские сечения до деформации остаются плоскими и после деформации

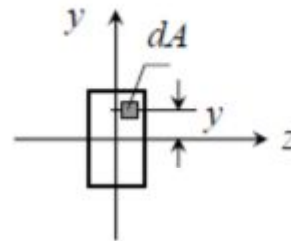
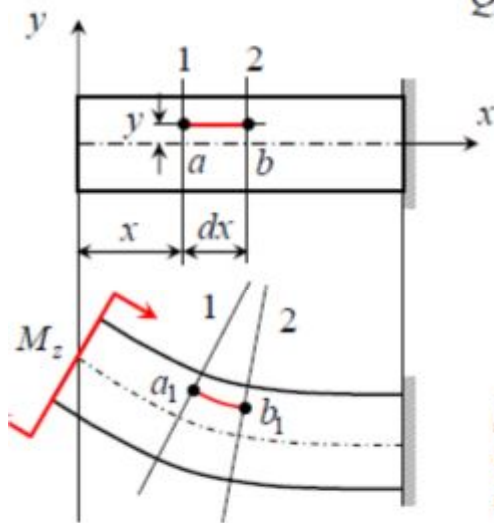
Продольные волокна не давят друг на друга

По ширине сечения напряжения распределяются равномерно

Плоский чистый изгиб

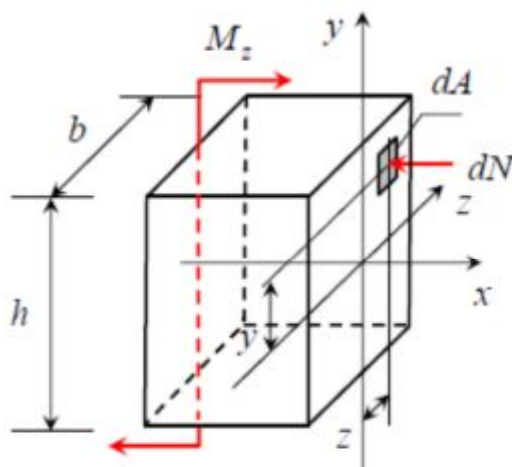
$$M_z = \text{const}$$

$$Q_y = 0$$



Деформация изгиба сопровождается растяжением одних волокон и сжатием других волокон

Сопротивление материалов. Нормальные напряжения при изгибе (2)



$$dN = \sigma dA$$

Уравнения равновесия

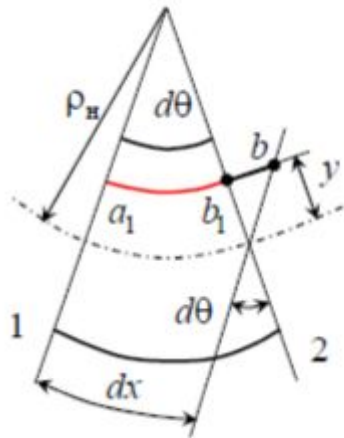
$$\sum F_x = \int_A \sigma dA = 0$$

$$\sum M_y = \int_A z \cdot \sigma dA = 0$$

$$\sum M_z = \int_A y \cdot \sigma dA = M$$

Сопротивление материалов. Нормальные напряжения при изгибе (3)





Геометрическая сторона задачи

$$\frac{b_1 b}{a_1 b} = \varepsilon = \frac{y d\theta}{\rho_H d\theta}$$

Физическая сторона задачи

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = \varepsilon \cdot E \\ \varepsilon = \frac{y}{\rho_H} \end{array} \right\} \sigma = E \frac{y}{\rho_H}$$

$$\int_A \sigma dA = 0; \quad \frac{E}{\rho_H} \underbrace{\int_A y dA}_{S_z} = 0; \quad S_z = 0$$

Сопротивление материалов. Нормальные напряжения при изгибе (4)

ось  $z$  проходит через центр тяжести поперечного сечения

$$\left. \begin{array}{l} \int_A z \cdot \sigma dA = 0 \\ \sigma = E \frac{y}{\rho_H} \end{array} \right\} \frac{E}{\rho_H} \underbrace{\int_A yz dA}_{J_{zy}} = 0; \quad J_{zy} = 0$$

оси  $z$  и  $y$  - главные оси инерции сечения

$$\left. \begin{array}{l} \int_A y \cdot \sigma dA = M \\ \sigma = E \frac{y}{\rho_H} \end{array} \right\} \frac{E}{\rho_H} \underbrace{\int_A y^2 dA}_{J_z} = M_z; \quad \boxed{\frac{1}{\rho_H} = \frac{M_z}{EJ_z}}$$

Сопротивление материалов. Нормальные напряжения при изгибе (5)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_H} &= \frac{M_z}{EJ_z} \\ \sigma &= E \frac{y}{\rho_H} \end{aligned} \right\} \sigma = E \cdot y \frac{M_z}{EJ_z} = \frac{M_z}{J_z} y$$

Формула для определения нормальных напряжений при изгибе

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y$$

Растяжение-сжатие

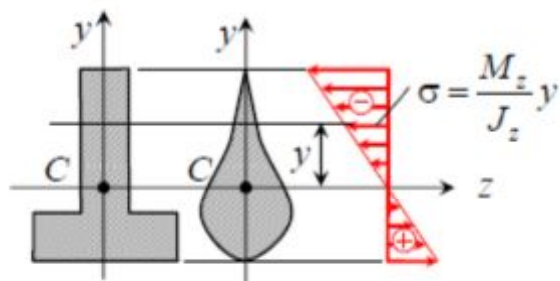
$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Кручение

$$\tau = \frac{M_K}{J_\rho} \rho$$

Сопротивление материалов. Нормальные напряжения при изгибе (6)

### Распределение напряжений по сечению



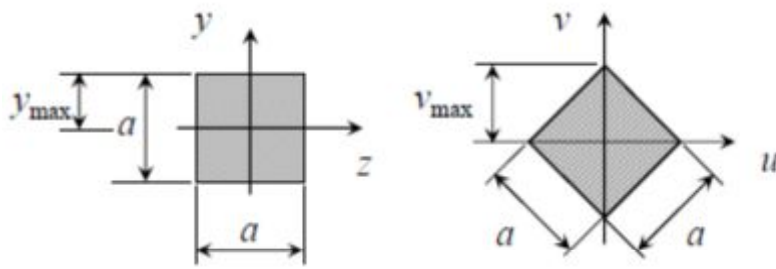
Распределение нормальных напряжений прямо пропорционально координате  $y$  и не зависит от формы сечения

Анализ формулы

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_z} y_{\max}$$

Сопротивление материалов. Нормальные напряжения при изгибе (7)



$$J_y + J_z = J_u + J_v$$

$$J_y = J_z = J_u = J_v$$

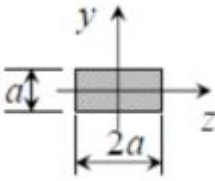
$$y_{\max} < v_{\max}; \quad \sigma_{\max}^{\square} < \sigma_{\max}^{\diamond}$$

### Условие прочности при изгибе

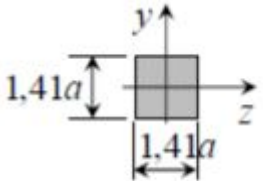
$$\frac{J_z}{y_{\max}} = W_z$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq R$$

### Рациональная форма поперечного сечения

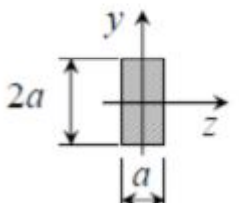


$$W_z = \frac{2a^3}{6}$$



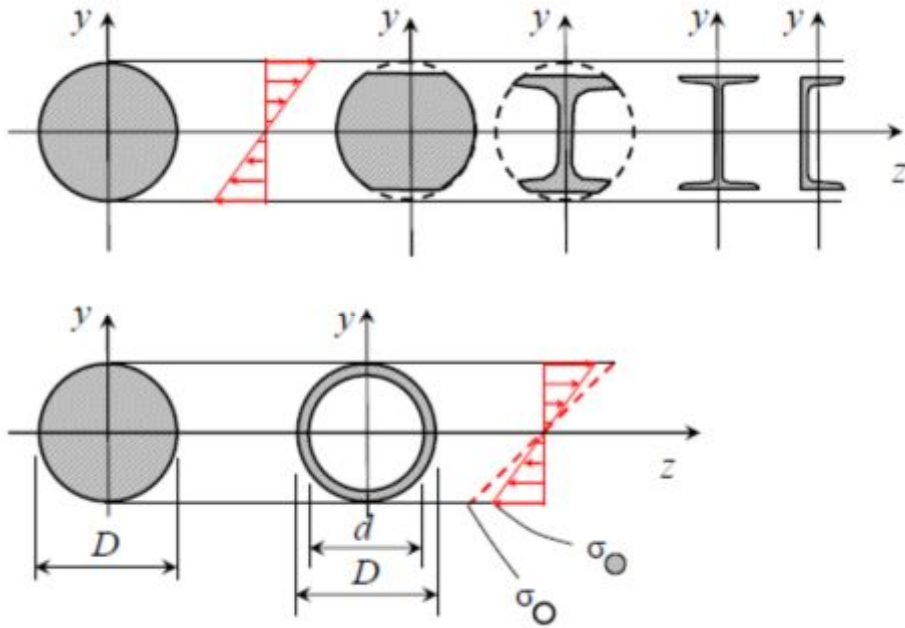
$$W_z = \frac{2,82a^3}{6}$$

$$A = 2a^2$$



$$W_z = \frac{4a^3}{6}$$

### Эволюция сечения



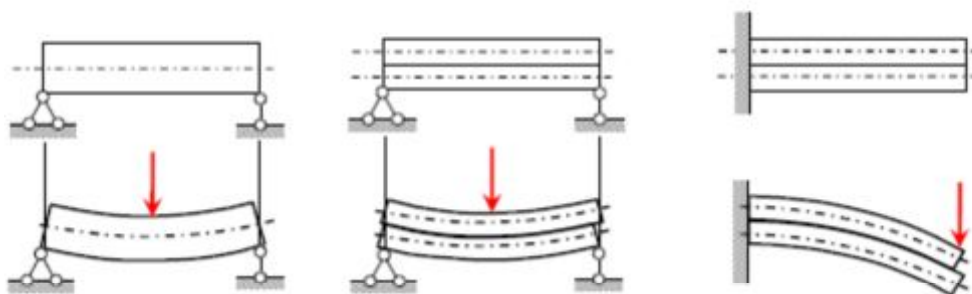
# КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Формула Журавского

Прямоугольное сечение

Двутавровое сечение

## Формула Журавского



Первое решение задачи о поперечном изгибе дал российский ученый Дмитрий Иванович Журавский





Д.И. Журавский окончил Санкт-Петербургский институт инженеров путей сообщения в 1842 г.

Мост через р. Веребье  
Высота моста 51 м (19 этажей современного жилого дома) и имеет девять пролетов по 54 м.

Дмитрий Иванович  
Журавский  
(1821-1891)

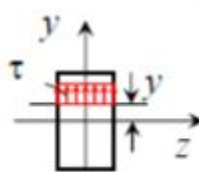
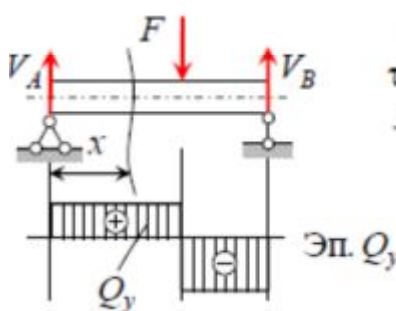
Мосты системы Гау-Журавского



Сопротивление материалов. Касательные напряжения при изгибе (2)

Гипотезы:

- 1) Касательные напряжения в сечении параллельны силе  $F$  ;
- 2) По ширине сечения напряжения распределяются равномерно

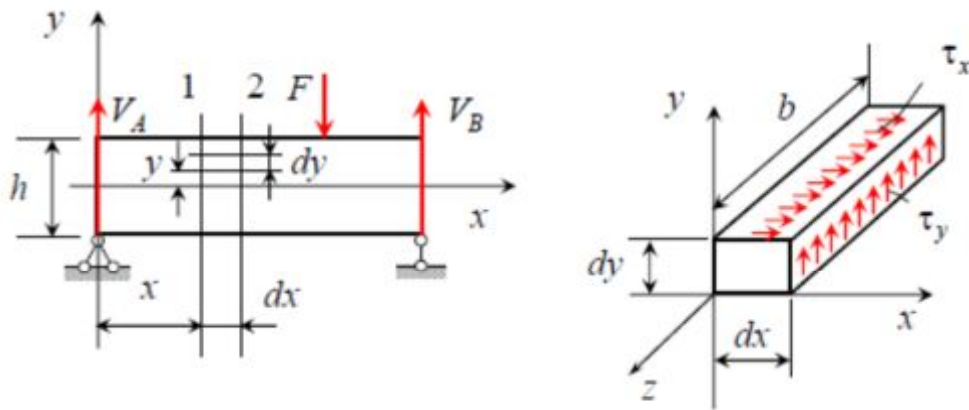


Условие равновесия:

$$Q_y = \int_A \tau dA$$

$$\tau = f(y) - ?$$

Сопротивление материалов. Касательные напряжения при изгибе (3)

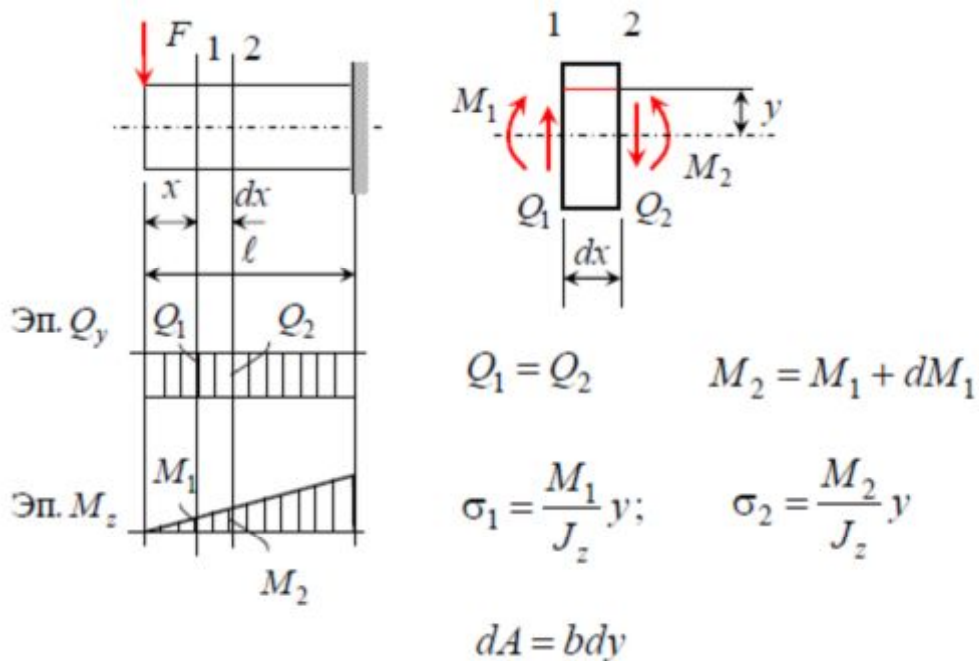


$$\sum M_z = 0; \quad \tau_x = |\tau_y| \quad \text{закон парности касательных напряжений}$$

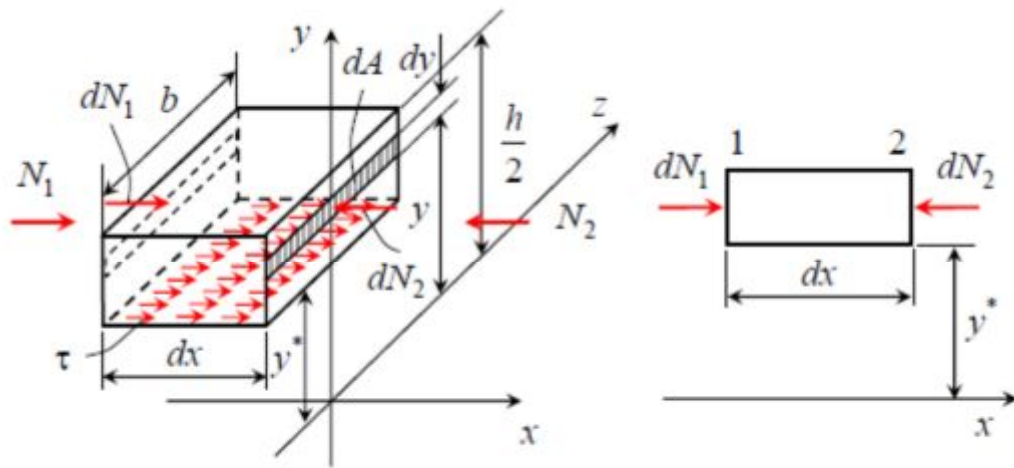
$$y = \frac{h}{2}: \quad \tau = 0; \quad y = -\frac{h}{2}: \quad \tau = 0$$

По высоте сечения касательные напряжения распределяются неравномерно

Сопротивление материалов. Касательные напряжения при изгибе (4)



Сопротивление материалов. Касательные напряжения при изгибе (5)



$$dN_1 = \sigma_1 dA; \quad dN_2 = \sigma_2 dA$$

$$N_1 = \int_{A^*} \sigma_1 dA; \quad N_2 = \int_{A^*} \sigma_2 dA$$

$$A^* = b \left( \frac{h}{2} - y^* \right)$$

Сопротивление материалов. Касательные напряжения при изгибе (6)

Отсеченная площадь:  $A^*$

$$M_2 > M_1; \quad \sigma_2 > \sigma_1; \quad N_2 > N_1$$

Что уравнивает элемент?

Касательные напряжения

$$\sum F_x = 0 \quad N_1 - N_2 + \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

$$\tau b dx = N_2 - N_1 = \int_{A^*} \frac{(M_1 + dM_1)}{J_z} y dA - \int_{A^*} \frac{M_1}{J_z} y dA =$$

$$= \frac{dM_1}{J_z} \int_{A^*} y dA$$

Сопротивление материалов. Касательные напряжения при изгибе (7)

$$\tau b dx = \frac{dM_1}{J_z} \underbrace{\int_{A^*} y dA}_{S_z^*} = \frac{dM_z}{J_z} S_z^* \quad \tau = \frac{dM_z}{dx} \frac{S_z^*}{J_z b}$$

Статический момент отсеченной площади

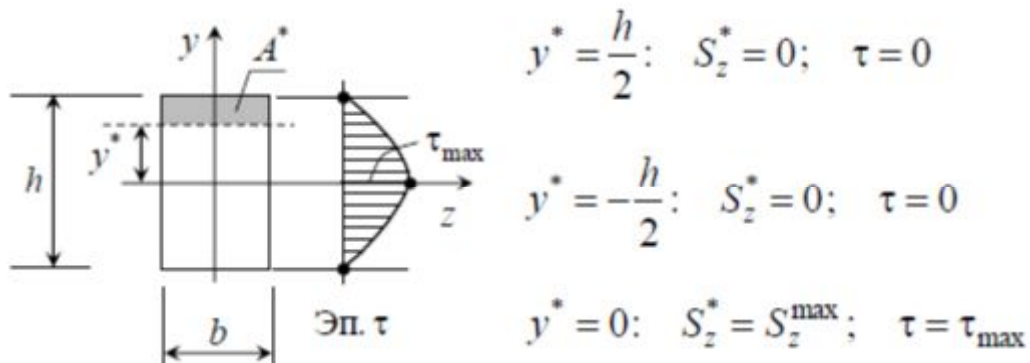
$$S_z^* = A^* y_C = \underbrace{\left(\frac{h}{2} - y^*\right)}_{y_C} \underbrace{b \frac{\frac{h}{2} + y^*}{2}}_{A^*}$$

$$\tau = \frac{Q_y S_z^*}{J_z b}$$

Формула Журавского

Сопротивление материалов. Касательные напряжения при изгибе (8)

### Прямоугольное сечение



$$S_z^{\max} = b \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y \cdot bh^2}{8 \cdot b} \frac{12}{bh^3} = \frac{3 Q_y}{2 bh} = 1,5 \frac{Q_y}{A} = 1,5 \tau_{\text{ср}}$$

Сопротивление материалов. Касательные напряжения при изгибе (9)

Решение Навье (1833 г.)  $\tau_{\text{ср}} = \frac{Q}{A}$

Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_y}{J_z} \left( \frac{S_z^{\text{max}}}{b} \right)_{\text{max}} \leq R_{\text{ср}}$$

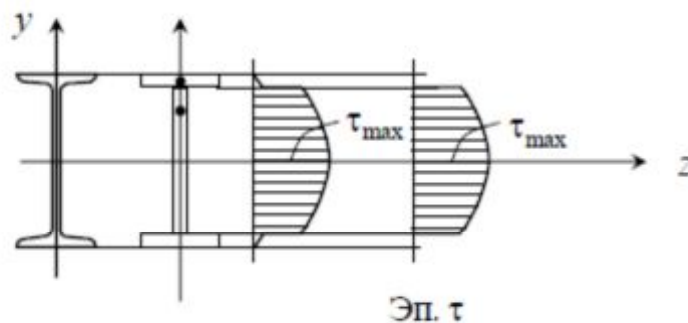
При  $Q_y \neq \text{const}$  т.е. при наличии распределенной нагрузки  $q$ , влияние  $\sigma$  на  $\tau$  незначительно

Формула Журавского применима при  $h > b$  !

Учет касательных напряжений нужен только для коротких балок

## Двутавровое сечение

$$\tau = \frac{Q_y S_z^*}{J_z b}$$





## СВОДКА ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ

Растяжение-сжатие

Сдвиг, срез

Геометрические характеристики сечений

Кручение

Изгиб

### Растяжение-сжатие

Нормальное напряжение  $\sigma = \frac{N}{A}$

Относительная продольная деформация  $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$

Закон Гука  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ ;  $\sigma = \varepsilon \cdot E$ ;  $\varepsilon = \frac{N}{EA}$

Абсолютная продольная деформация  $\Delta \ell = \frac{N\ell}{EA}$

Относительная поперечная деформация  $\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}$

Коэффициент Пуассона  $\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$

Удлинение стержня  $\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)}{EA} dx$

Учет собственного веса стержня

$$N_\gamma(x) = \gamma \cdot A \cdot x; \quad \sigma_{\gamma \max} = \gamma \ell; \quad \Delta l = \frac{\gamma \cdot \ell^2}{2A}$$

Условие прочности при растяжении-сжатии

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq R$$

Сопротивление материалов. Сводка основных формул (2)

### Сдвиг, срез

Напряжения  $\tau = \gamma \cdot G$

Угол сдвига  $\gamma = \frac{\tau}{G}; \quad \gamma \approx \frac{\delta}{a}$

Закон Гука при сдвиге  $\tau = \frac{F}{A}$

Модуль сдвига (модуль упругости второго рода)

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Сопротивление материалов. Сводка основных формул (3)

## Геометрические характеристики сечений

Площадь  $A = \int_A dA$

Статические моменты площади

$$S_z = \int_A y \cdot dA; \quad S_y = \int_A z \cdot dA; \quad S_z = y_C \cdot A; \quad S_y = z_C \cdot A$$

Координаты центра тяжести

$$z_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{\sum A_i}; \quad y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i}$$

Осевые моменты инерции

$$J_z = \int_A y^2 \cdot dA; \quad J_y = \int_A z^2 \cdot dA$$

Сопроствление материалов. Сводка основных формул (4)

Полярный момент инерции  $J_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA$

Центробежный момент инерции  $J_{zy} = \int_A zy \cdot dA$

$$J_z + J_y = J_\rho$$

Моменты инерции относительно параллельных осей  
(формулы параллельного переноса)

$$J_{z1} = J_z + a^2 A$$

$$J_{y1} = J_y + b^2 A$$

$$J_{z1y1} = J_{zy} + abA$$

Сопроствление материалов. Сводка основных формул (5)

Моменты инерции при повороте осей

$$J_{z1} = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha$$

$$J_{y1} = J_y \cos^2 \alpha + J_z \sin^2 \alpha + J_{zy} \sin 2\alpha$$

$$J_{z1y1} = \frac{1}{2}(J_z - J_y) \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha$$

$$J_{z1} + J_{y1} = J_z + J_y$$

Угол, определяющий положение главных осей

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z}$$

Сопротивление материалов. Сводка основных формул (6)

Моменты инерции относительно главных центральных осей

$$J_{\max}^{\min} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}$$

Радиусы инерции

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$$

Моменты сопротивления

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{J_y}{z_{\max}}$$

Сопротивление материалов. Сводка основных формул (7)

## Кручение

Касательное напряжение  $\tau = \frac{M_x}{J_\rho} \rho$

Угол закручивания  $\varphi = \frac{M_x \ell}{GJ_\rho}$

Относительный угол закручивания  $\theta = \frac{M_x}{GJ_\rho}$

Условие прочности при кручении  $\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_\rho} \leq R_{\text{ср}}$

Сопротивление материалов. Сборка основных формул (8)

## Изгиб

Нормальные напряжения  $\sigma = \frac{M_z}{J_z} y$

Закон Гука при изгибе  $\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z}$

Касательные напряжения  $\tau = \frac{Q_y \cdot S_z^{\text{отс}}}{J_z \cdot b(y)}$

Дифференциальные зависимости при изгибе

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y; \quad \frac{dQ_y}{dx} = -q$$

Сопротивление материалов. Сборка основных формул (9)



Условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq R$$

Условия прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y,\max} \cdot S_z^{\text{отс}}}{J_z \cdot b} \leq R_{\text{ср}}$$

Главные напряжения

$$\sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$