

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПРОСТЫХ ВИДАХ
ДЕФОРМАЦИИ В УСЛОВИЯХ СТАТИЧЕСКОГО
НАГРУЖЕНИЯ
ЧАСТЬ 1
Учебное пособие**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Важная роль при изучении сопротивления материалов отводится самостоятельной работе студентов, которая приобретает особую значимость в последнее время в связи с сокращением для всех специальностей числа аудиторных занятий. Поэтому возникает потребность в учебных руководствах и пособиях, которые облегчили бы студентам самостоятельную проработку теоретического материала и помогли им научиться самостоятельно применять теорию к решению практических задач.

Основную цель настоящего пособия – помочь студенту приобрести навыки в решении задач по сопротивлению материалов. Пособие предназначается главным образом для студентов заочных и вечерних отделений высших технических учебных заведений, но может быть также полезным и для студентов очного обучения. Содержание пособия отвечает действующей в настоящее время программе курса сопротивления материалов, одобренной научно-методическим советом по сопротивлению материалов, строительной механике, теории упругости и пластичности для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям в области техники и технологии. Оно включает в себя шесть разделов. В первом разделе рассматриваются эпюры внутренних силовых факторов, второй раздел посвящен растяжению и сжатию прямолинейных стержней, в третьем излагаются элементы теории напряженного состояния и основные гипотезы прочности, в четвертом освещается теория кручения круглых валов, пятый раздел носит чисто геометрический характер и связан с вычислением геометрических характеристик поперечных сечений стержня, предметом шестого раздела служит теория плоского прямого изгиба.

Для облегчения пользования пособием каждому разделу предшествуют краткие, но довольно полные сведения по теории и основные формулы, необходимые для решения последующих задач. Большое внимание уделено подбору задач, их классификации и методам их решения. Немало задач с реальным содержанием, требующих ясного понимания сути и масштабов явлений. Широко также представлены и задачи упрощенные, идеализированные, только моделирующие реальную ситуацию. Такие задачи обязательно используются в практике обучения сопротивлению материалов, контроля за его усвоением. Они также полезны для овладения типичными приемами решения задач.

Автор хотел бы выразить уверенность, что первые шаги в изучении науки о прочности не покажутся читателям трудными, доставят определенное удовольствие, а мир обыденных вещей и привычных событий засверкает новыми гранями, станет богаче, ярче, интереснее.

Желаю успеха!

ОСНОВНЫЕ ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A – площадь поперечного сечения;	α – коэффициент линейного расширения; отношение;
E – модуль продольной упругости;	γ – относительный сдвиг; удельный вес материала;
F – сосредоточенная сила;	Δ – зазор; перемещение;
G – модуль сдвига; вес;	δ – линейное перемещение;
I_x, I_y – осевые моменты инерции;	Δl – абсолютная линейная деформация;
I_p – полярный момент инерции;	$\varepsilon, \varepsilon'$ – относительные продольная и поперечная деформации;
радиусы инерции;	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – главные деформации;
M – внешний момент;	θ – относительный угол закручивания вала; угол поворота поперечного сечения при изгибе;
M_x, M_y – изгибающие моменты;	ν – коэффициент Пуассона;
M_z, M_k – крутящий момент;	σ – нормальное напряжение;
N – продольная сила;	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения;
мощность в л.с.;	$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение;
n – коэффициент запаса прочности; частота вращения вала в об/мин;	$[\sigma_p], [\sigma_c]$ – допускаемые нормальные напряжения на растяжение, сжатие;
P – об/мин;	$\sigma_{шт}, \sigma_t$ – пределы пропорциональности, текучести, прочности;
Q – мощность;	$\sigma_{пчр}$ – пределы прочности при растяжении и сжатии;
q – поперечная сила; интенсивность распределенной нагрузки;	$\sigma_{0,2}$ – условный предел текучести, соответствующий пластической деформации, равной 0,2%;
S – статический момент площади;	τ – касательное напряжение; допускаемое касательное напряжение;
t – площади;	$[\tau]$ – напряжение; угол закручивания вала;
U – температура в град С; потенциальная энергия упругой деформации;	φ – угловая скорость вала,
u – упругой деформации; удельная потенциальная энергия; уд. пот. энергия изменения объема и формы;	ω – рад/с.
$u_{об}, u_{ф}$ – энергия;	
v – изменения объема и формы;	
W – прогиб сечения балки;	
W_x, W_y – работа внешних сил; осевые моменты сопротивления;	
W_p – полярный момент сопротивления;	
w – противления; продольное перемещение сечения;	

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧУ

1. ПОНИМАНИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ – ЯСНО ПОНЯТЬ ПРЕДЛОЖЕННУЮ ЗАДАЧУ:

Что неизвестно? Что дано? В чем состоит условие? Определяется ли неизвестное данными или они недостаточны? Или чрезмерны? Или противоречивы? Сделайте чертеж. Введите подходящие обозначения. Разделите условие на части. Постарайтесь записать их.

2. СОСТАВЛЕНИЕ ПЛАНА РЕШЕНИЯ – НАЙТИ ПУТЬ ОТ НЕИЗВЕСТНОГО К ДАННЫМ, ЕСЛИ НУЖНО, РАССМОТРЕВ ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЗАДАЧИ (АНАЛИЗ):

Сформулируйте отношение между неизвестными и данными. Преобразуйте неизвестные элементы. Попробуйте ввести новые неизвестные, более близкие к данным задачи. Решите только часть задачи. Удовлетворите только часть условий: насколько неопределенным окажется тогда неизвестное? Обобщите. Рассмотрите частные случаи. Примените аналогию.

3. ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ПЛАНА – РЕАЛИЗОВАТЬ НАЙДЕННУЮ ИДЕЮ РЕШЕНИЯ (СИНТЕЗ)

Контролируйте каждый свой шаг, принимая лишь то, «что усматривается с полной ясностью или выводится с полной достоверностью» (Р. Декарт)

4. ВЗГЛЯД НАЗАД – РЕШЕНИЕ ПРОВЕРИТЬ И ОЦЕНИТЬ КРИТИЧЕСКИ:

Правдоподобен ли результат? Почему? Нельзя ли сделать проверку? Нет ли другого пути, ведущего к полученному результату? Более

прямого пути? Нельзя ли в какой-нибудь другой задаче использовать полученный результат или метод решения.

1. ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

1.1 Общие сведения

Рассмотрим брус, обладающий хотя бы одной плоскостью симметрии нагруженный произвольной системой сил (рис. 1.1,а). Свяжем с ним прямоугольную декартову систему координат. Ось z совместим с осью бруса (геометрическое место центров тяжести поперечных сечений), а две другие, x и y , расположим в плоскости поперечного сечения, совместив одну из них, например, ось y , с осью симметрии последнего.

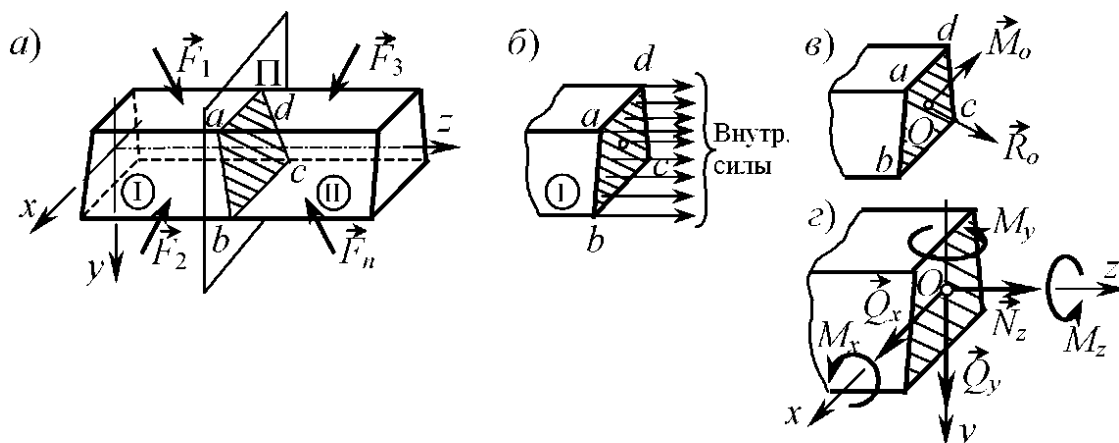


Рис. 1.1

Рассечем брус плоскостью Π , перпендикулярной к оси z , на две части и одну из частей, например Π , отбросим, заменив ее действие на оставшуюся внутренними силами (рис. 1.1,б). Выбрав в качестве центра приведения центр тяжести сечения $abcd$, заменим внутренние силы их интегральными характеристиками – главным вектором \vec{R}_0 и главным моментом \vec{M}_0 . Раскладывая \vec{R}_0 и \vec{M}_0 по осям x, y и z , полу-

чим

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_O &= \vec{N}_z + \vec{Q}_x + \vec{Q}_y, \\ \vec{M}_O &= \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Здесь N_z – продольная сила; $Q_x(Q_y)$ – поперечные силы; $M_x(M_y)$ – изгибающие моменты; M_z – крутящий момент. Это и есть внутренние силовые факторы в поперечном сечении бруса.

Для расчета конструкций на прочность необходимо знать, как изменяются внутренние силовые факторы по длине бруса. С этой целью строятся их графики, называемые эпюрами.

Остановимся на приемах построения эпюр в частных случаях.

1.2. Построение эпюр для стержней, нагруженных осевыми силами.

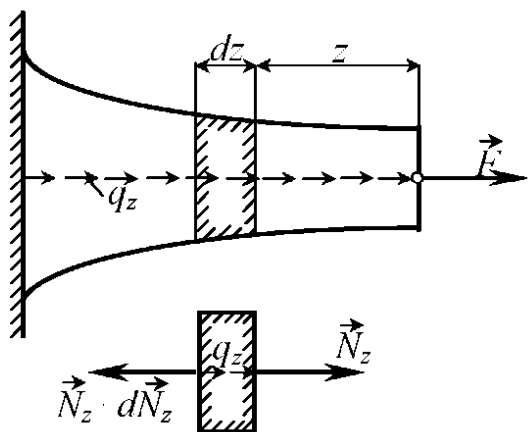
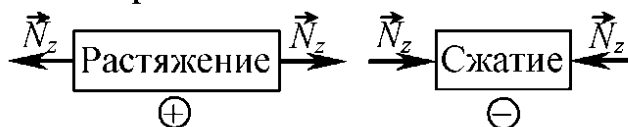


Рис. 1.2

При нагружении стержня осевыми силами в его поперечных сечениях возникают только продольные силы N_z и он испытывает деформации растяжения или сжатия. Продольной силе, вызывающей растяжение, приписывается знак “плюс”; при сжатии продольная сила считается отрицательной.



Выделим из стержня, нагруженного распределенной осевой нагрузкой интенсивности q_z (рис. 1.2), бесконечно малый элемент dz и составим для него уравнение равновесия в проекции на ось z :

$$\sum Z_i = 0, \quad N_z + dN_z - N_z - q_z dz = 0,$$

откуда
$$q_z = \frac{dN_z}{dz}. \quad (1.2)$$

Интегрируя это выражение, получим

$$N_z = N_o + \int_o^z q_z dz. \quad (1.3)$$

Если $q_z = \pm q = const$, то $N_z = N_o \pm qz$, (1.4) т.е. продольная сила изменяется по линейному закону. Знак “плюс” соответствует погонной нагрузке, вызывающей растяжение стержня; при сжатии берется знак “минус”. При отсутствии погонной нагрузки ($q = 0$) продольная сила постоянна ($N_z = N_o = const$).

Пример 1.1.

Построить эпюру N_z для стержня, приведенного на рис. 1.3.

Решение. Стержень нагружен только сосредоточенными осевыми силами, поэтому согласно зависимости (1.4) продольная сила в

пределах каждого участка постоянна. На границе участков N_z претерпевает разрывы. Примем направление обхода от свободного конца (сеч. E) к заземлению (сеч. A). На участке

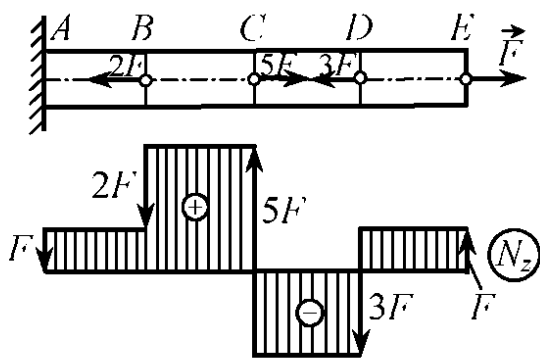
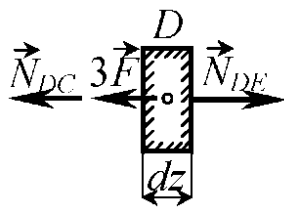


Рис. 1.3

DE продольная сила положительна, так как сила \vec{F} вызывает растяжение, т.е. $N_{ED} = +F$. В сечении D продольная сила меняется скачком от $N_{DE} = N_{ED} = F$ до $N_{DC} = N_{DE} - 3F = -2F$



(находим из условия равновесия бесконечно малого элемента dz , выделенного на границе двух смежных участков CD и DE).

Заметим, что скачок равен по величине приложенной силе $3F$ и направлен в сторону отрицательных значений N_z , так как сила $3F$ вызывает сжатие. На участке CD имеем $N_{CD} = N_{DC} = -2F$. В сечении C продольная сила изменяется скачком от $N_{CD} = -2F$ до $N_{CB} = N_{CD} + 5F = 3F$. Величина скачка равна приложенной силе $5F$. В пределах участка CB продольная сила опять постоянна $N_{CB} = N_{BC} = 3F$. Наконец, в сечении B на эпюре N_z опять скачок: продольная сила меняется от $N_{BC} = 3F$ до $N_{BA} = N_{BC} - 2F = F$. Направление скачка вниз (в сторону отрицательных значений), так как сила $2F$ вызывает сжатие стержня. Эпюра N_z приведена на рис. 1.3,б.

Пример 1.2. Стержень, нагруженный, как показано на рис. 1.4, а, удерживается в опоре силами трения, равномерно распределенными по ее толщине. Построить эпюру продольной силы.

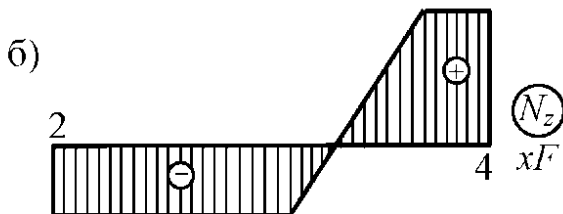
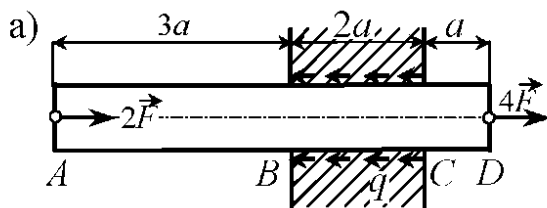


Рис. 1.4

Решение. Из условия равновесия стержня в проекции на ось z находим интенсивность сил трения:

$\sum Z_i = 0,$ $2F + 4F = q \cdot 2a,$

откуда $q = 3F/a$.

Эпюру N_z строим по формуле $N_z = N_0 \pm qz$. Согласно этой зависимости на участках AB и CD продольная сила постоянна, так как погонной нагрузки нет ($q = 0$). На участке BC продольная сила изменяется по линейному закону ($q = \text{const}$). В сечениях A и D , где приложены сосредоточенные силы, на эпюре N_z имеют место скачки, равные по величине приложенным силам. Примем направление обхода слева направо. В сечении A сила $2F$ вызывает сжатие, поэтому $N_{AB} = -2F$. На участке BC продольная сила изменяется от $N_B = N_A = -2F$ до $N_C = N_B + q \cdot 2a = 4F$. На участке CD продольная сила постоянна и равна $N_{CD} = 4F$.

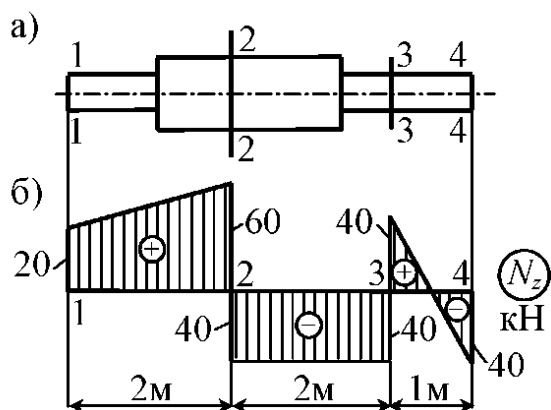


Рис. 1.5

Пример 1.3. Стержень, изображенный на рис. 1.5,а, нагружен уравновешенной системой в виде сосредоточенных и распределенных сил. Эпюра продольной силы показана на рис. 1.5,б. Определить значения и направления приложенной к стержню нагрузки.

Решение.

В сечениях 1, 2, 3, 4 на эпюре имеются скачки, что связано с приложенными здесь сосредоточенными силами. Скачку вверх соответствует сила, вызывающая растяжение в рассматриваемом сечении; при скачке вниз сила вызывает сжатие. Величина скачка равна приложенной силе. Будем пе-

ремещаться по стержню слева направо. В сечении 1 приложена растягивающая сила $F_1 = 20$ кН, направленная влево. Далее на участке 12 на стержень действует распределенная нагрузка постоянной интенсивности, равной согласно дифференциальной зависимости $q_z = dN_z / dz$ тангенсу угла наклона прямой, т.е. $q_{12} = (60 - 20) / 2 = 20$ кН/м. Погонная нагрузка вызывает растяжение и направлена влево. Приложенная в сечении 2 сила $F_2 = 100$ кН вызывает сжатие и направлена вправо. На участке 23 распределенной нагрузки нет, так как продольная сила постоянна. В сечении 3 приложена растягивающая сила $F_3 = 80$ кН (направлена влево). На участке 34 действует распределенная нагрузка интенсивности $q_{34} = (-40 - 40) / 1 = -80$ кН/м, вызывающая сжатие и направленная вправо. Наконец, в сечении 4 приложена сила $F_4 = 40$ кН, направленная влево.

Пример 1.4. Эпюры N_z для стержней, представленных на рис. 1.6, предлагается построить самостоятельно. Для проверки тут же дается решение.

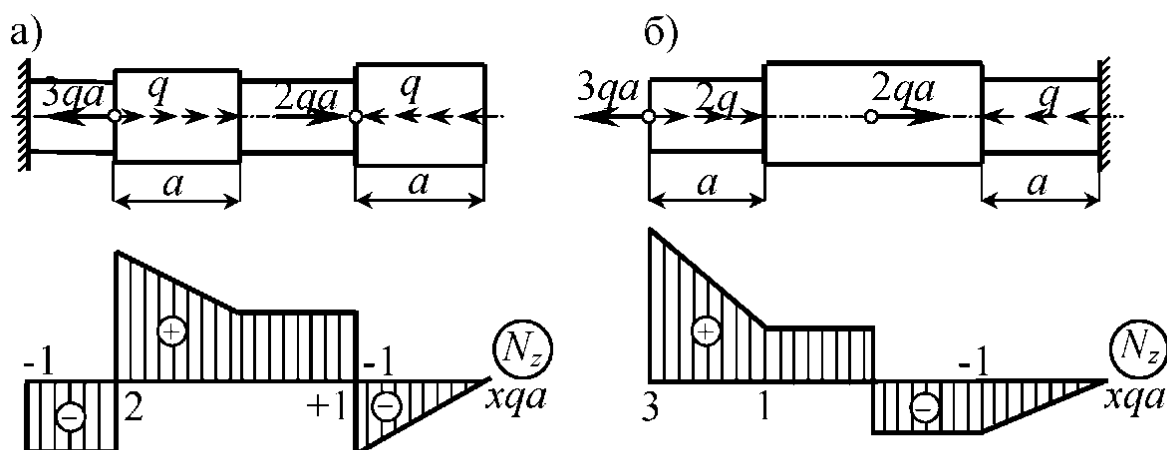


Рис. 1.6

1.3. Построение эпюр для стержней, нагруженных скручивающими парами.

Стержни, нагруженные парами сил, плоскости которых перпендикулярны к его оси, испытывают деформацию кручения (рис. 1.7).

Такие стержни принято называть *валами*, а пары сил – скручивающими моментами. В поперечных сечениях валов возникают

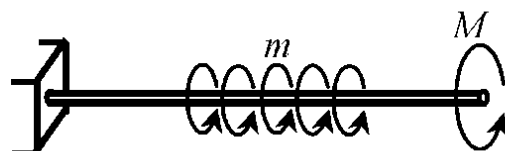


Рис. 1.7

только крутящие моменты M_K , связанные с распределенной моментной нагрузкой m дифференциальной зависимостью

$$dM_K / dz = \pm m, \quad (1.5)$$

из которой вытекает следующая формула:

$$M_K = M_{K0} \pm mz, \quad (1.6)$$

где M_{K0} – крутящий момент в начале участка.

Крутящий момент считается положительным, если для наблюдателя, смотрящего на сечение со стороны внешней нормали \vec{n} , он представляется направ-

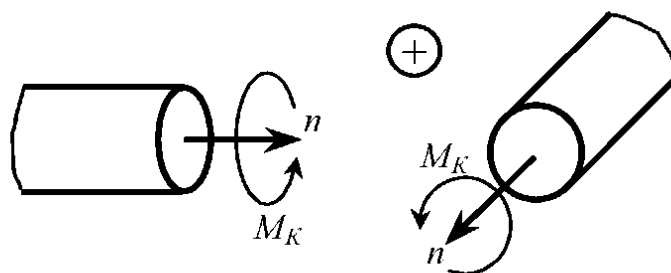


Рис. 1.8

ленным против часовой стрелки (рис. 1.8).

Согласно формуле (1.6) на участках с равномерно распределенной нагрузкой m крутящий момент изменяется по линейному закону. При отсутствии погонной нагрузки

($m = 0$) крутящий момент сохраняет постоянное значение ($M_K = M_{K0} = \text{const}$). В сечениях, где к валу приложены сосредоточенные скручивающие моменты, на эпюре M_K возникают скачки, направленные вверх, если моменты направлены против часовой стрелки, либо вниз – при обратном направлении моментов.

Пример 1.5

Построить эпюру M_K для вала, изображенного на рис. 1.9.

Решение

На участке CD момент изменяется по линейному закону от нуля в точке D до $M_{CD} = -ta$. В сечении C

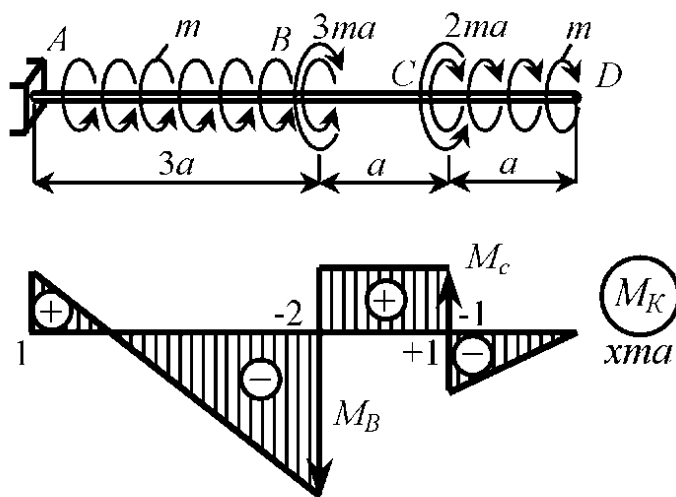


Рис. 1.9

крутящий момент изменяется скачком на величину внешнего момента M_c , равного $2ta$ (скачок вверх, так как момент M_c направлен против часовой стрелки). На участке BC крутящий момент сохраняет постоянное значение, так как отсутствует погонная нагрузка ($m = 0$). Скручивающий момент M_B направлен по часовой стрелке, поэтому в сечении B на эпюре M_K скачок происходит вниз и равен по величине $M_B = 3ta$. На участке AB , нагруженном распределенной нагрузкой m , крутящий момент изменяется по линейному закону от $M_{BA} = -2ta$ до $M_{AB} = M_{BA} + m \cdot 3a = ta$.

Пример 1.6

Построить эпюру M_K для вала, изображенного на рис. 1.10, а. Задачу предлагается решить самостоятельно. Эпюру, приведенную на рис. 1.10, б, можно использовать для проверки.

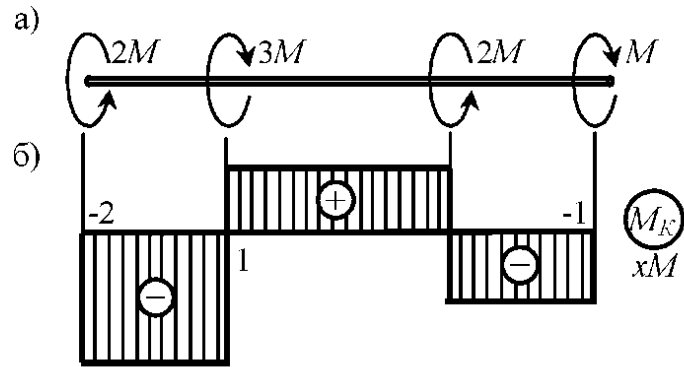


Рис. 1.10

1.4. Построение эпюр для балок и рам

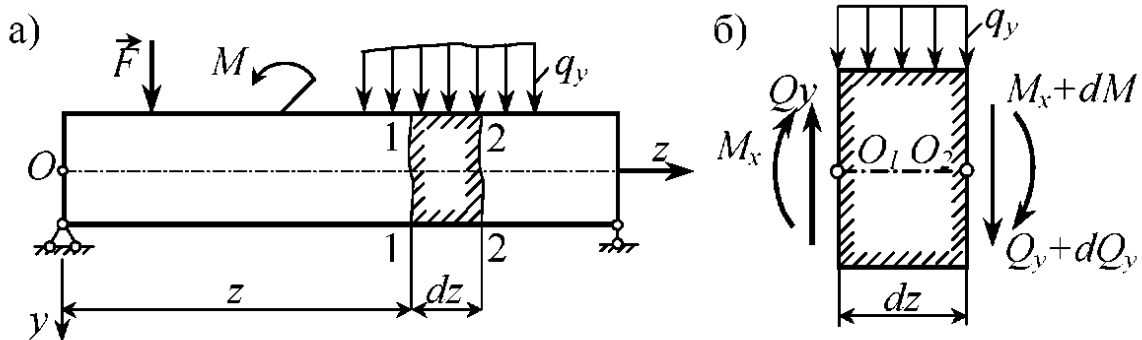
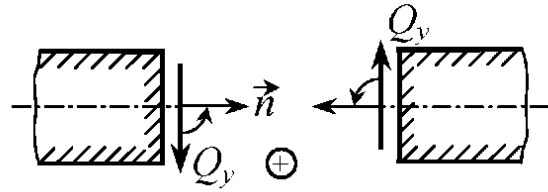


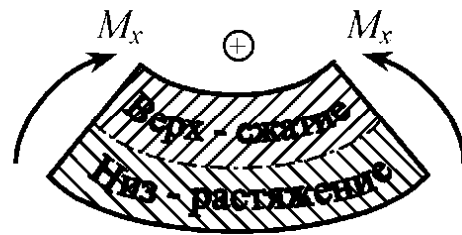
Рис. 1.11

Рассмотрим стержень, обладающий вертикальной плоскостью симметрии и нагруженный в этой плоскости силами, перпендикулярными к его оси (рис. 1.11). В этом случае стержень испытывает деформацию изгиба и его принято называть *балкой*. В поперечных сечениях балки возникает два внутренних силовых фактора – *поперечная сила* Q_y и *изгибающий момент* M_x .

Поперечная сила считается положительной, если кратчайшее совмещение вектора \vec{Q}_y с вектором внешней нормали \vec{n} происходит против часовой стрелки.



Изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки.



Выделим из балки бесконечно малый элемент (рис. 1.11,б) и рассмотрим его равновесие:

$$\sum Y_i = 0, \quad Q_y + dQ_y - Q_y + q_y \cdot dz = 0, \quad \text{откуда} \quad dQ_y / dz = -q_y, \quad (1.7)$$

$$\sum m_{O_2} = 0, \quad M_x + dM_x - M_x - Q_y \cdot dz = 0, \quad dM_x / dz = Q_y. \quad (1.8)$$

Интегрируя зависимости (1.7) и (1.8), получим

$$Q_y = Q_o - q_y \cdot z \quad \text{и} \quad M_x = M_o + \int_o^z Q_y \cdot dz = M_o + \omega_Q, \quad (1.9)$$

где Q_o и M_o соответственно поперечная сила и изгибающий момент в начале участка, ω_Q – площадь эпюры Q от начала участка до рассматриваемого сечения.

В частности, если $q_y = \pm q = \text{const}$, то формулы (1.9) принимают

ВИД

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= Q_0 \pm q \cdot z, \\ M_x &= M_0 + Q_0 z \pm 0,5 q z^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

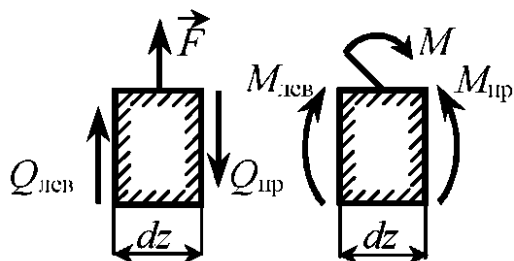


Рис. 1.12

Рассматривая равновесие элемента, выделенного на границе двух смежных участков и нагруженного сосредоточенной силой F (рис. 1.12)

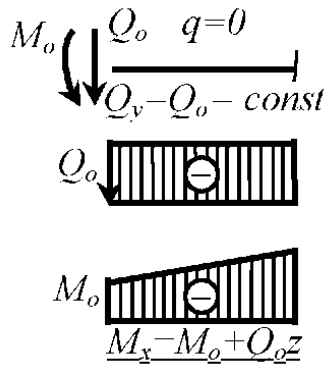
или сосредоточенным моментом M , находим

$$\left. \begin{aligned} Q_{\text{прав}} &= Q_{\text{лев}} \pm F, \\ M_{\text{прав}} &= M_{\text{лев}} \pm M. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

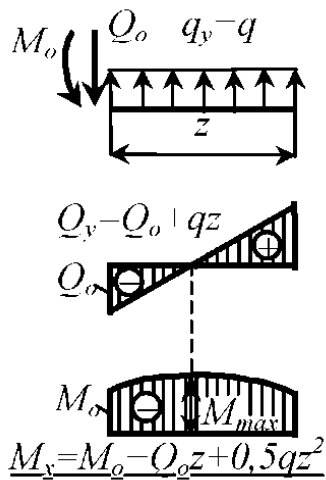
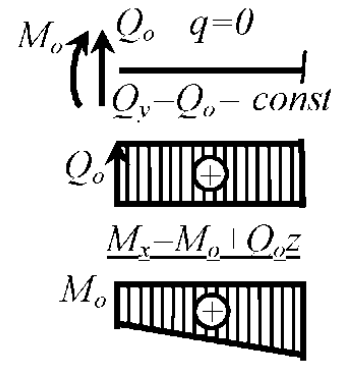
Знак “минус” соответствует нагрузке, противоположной указанной на рис. 1.12.

При построении эпюры Q_y положительные значения поперечной силы принято откладывать вверх, а отрицательные вниз. На эпюре M_x ординаты откладываются со стороны растянутых волокон, что с учетом правила знаков для изгибающих моментов означает: *плюс – вниз, минус – вверх*.

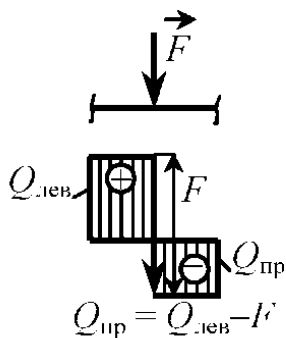
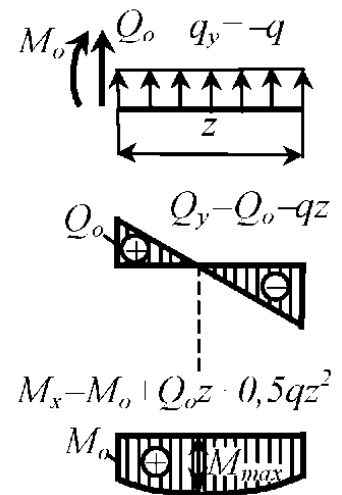
На основании формул (1.10) и (1.11) можно сформулировать следующие *правила построения эпюр Q_y и M_x* :



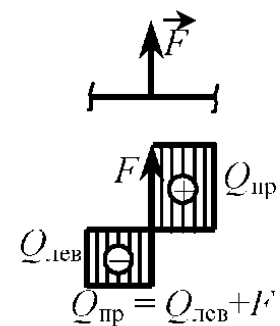
1. На участке, свободном от погонной нагрузки ($q = 0$), поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

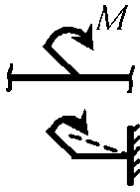


2. На участке с равномерно распределенной нагрузкой поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент описывается уравнением квадратной параболы, обращенной выпуклостью в сторону нагрузки. В сечении, где $Q_y = 0$, M_x имеет экстремум.

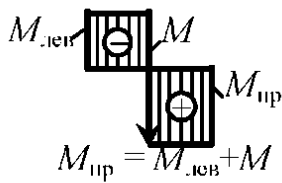


3. Под сосредоточенной силой \vec{F} на эпюре Q_y происходит скачок на величину этой силы (при обходе слева направо скачок совпадает с направлением силы!).

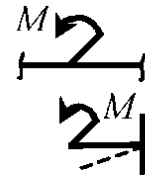




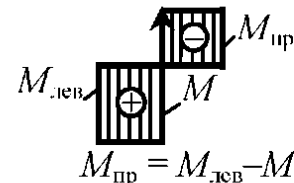
Растяжение—снизу!



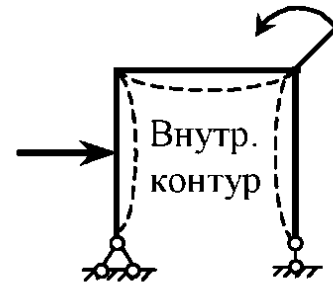
4. В сечении, где к балке приложен сосредоточенный момент M , на эпюре M_x возникает скачок, равный по величине приложенному моменту. Направление скачка зависит от направления момента: если момент вызывает растяжение нижних волокон, то скачок происходит вниз и наоборот.



Растяжение—сверху!



Рамой называется система, состоящая из стержней, жестко соединенных в узлах. В поперечных сечениях рамы возникает три внутренних силовых фактора: продольная N_z и поперечная Q_y силы, а также изгибающий момент M_x . Для поперечной силы сохраняется правило знаков, принятое в балках. Изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растяжение волокон, расположенных со стороны внутреннего контура.



Пример 1.7

Построить эпюры Q_y и M_x для балки с консолью.

Решение

1. Определение опорных реакций. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum m_B = 0,$$

$$R_A \cdot 2a - qa^2 - qa \cdot a/2 = 0,$$

откуда $R_A = \frac{3}{4}qa$,

$$\sum m_A = 0, \quad R_B \cdot 2a - qa^2 - qa \cdot 5a/2 = 0, \quad \text{откуда } R_B = (7/4)qa.$$

Проверка: $\sum y = 0, \quad R_A - R_B + qa = 3qa/4 - 7qa/4 + qa \equiv 0.$

2. Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента.

Эпюра Q_y . В сечении A происходит скачок вниз на величину реакции R_A и $Q_A = -R_A$. На всем протяжении участков AC и CB распределенная нагрузка отсутствует ($q = 0$), поэтому эпюра Q_y представляется отрезком прямой, параллельной оси абсцисс. Наличие пары сил на эпюре Q_y не отражается. В сечении B происходит скачок вверх, равный по величине приложенной реакции R_B , и правее этого сечения имеем $Q_{BD} = Q_{BC} + R_B = -3qa/4 + 7qa/4 = qa$. На участке BD поперечная сила изменяется по линейному закону ($Q_y = Q_o - qz$) от $Q_o = Q_{BD} = qa$ до $Q_D = Q_{BD} - qa = 0$. По условию загрузки

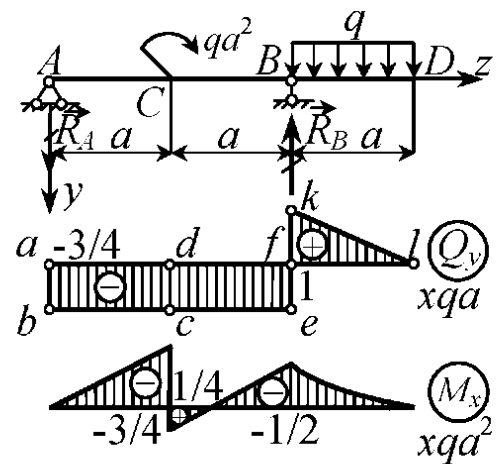


Рис. 1.13

балки в сечении D нет сосредоточенной силы, поэтому $Q_D = 0$. Совпадение значений Q_D , полученных независимо друг от друга, служит проверкой правильности построения эпюры Q_y .

Эпюра M_x . Она строится по формуле $M_x = M_o + \omega_Q$. На опоре A нет пары сил, поэтому $M_A = 0$. На участке AC момент изменяется по линейному закону. Находим момент в сечении, бесконечно близком слева от точки C : $M_{CA} = M_o + \omega_{abcd} = -(3/4)qa \cdot a = -3qa^2/4$. По двум точкам (A и C) строим наклонную прямую. Пара сил, приложенная в сечении C , вызывает растяжение нижних волокон балки при движении слева направо, поэтому на эпюре M_x скачок вниз и в бесконечно близком сечении справа от точки C изгибающий момент равен: $M_{CB} = M_{CA} + qa^2 = qa^2/4$. Находим момент в сечении B :

$M_B = M_{CB} + \omega_{dcef} = qa^2/4 - 3qa^2/4 = -qa^2/2$ и по двум точкам строим наклонную прямую. На участке BD момент изменяется по квадратичному закону, достигая в сечении D значения, равного $M_D = M_B + \omega_{fkl} = -qa^2/2 + (1/2)qa \cdot a = 0$. С другой стороны, по условию загрузки балки на свободном конце $M_D = 0$. Совпадение результатов служит проверкой правильности построения эпюры M_x . По двум точкам (B и D) приближенно строим параболу, обращенную выпуклостью вниз (в направлении нагрузки q). Вершина параболы совпадает с точкой D , так как $Q_D = 0$.

Пример 1.8

Построить эпюры Q_y и M_x для простой консоли, изображенной на рис. 1.14.

Решение

1. Определение опорных реакций. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum m_A = 0,$$

$$M_A + F \cdot a + M - q \cdot 2a \cdot 4a = 0,$$

откуда $M_A = 6qa^2$; $\sum Y_i = 0$, $R_A = q \cdot 2a - F = qa$.

2. Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента.

Эпюра Q_y . В сечении A имеем $Q_A = R_A$ (скачок на величину и в направлении реакции $R_A = qa$). На участке AB погонной нагрузки нет, поэтому поперечная сила постоянна. В сечении B поперечная сила меняется скачком от $Q_{BA} = Q_A = qa$ до $Q_{BC} = Q_{BA} + F = 2qa$ (скачок на величину и в направлении силы $F = qa$). На участках BC и CD поперечная сила опять сохраняет постоянное значение, т.е. $Q_{BC} = Q_{CD} = 2qa$. На участке DE поперечная сила изменяется по линейному закону от $Q_D = 2qa$ до $Q_E = Q_D - q \cdot 2a = 0$.

Эпюра M_x . В сечении A приложен момент M_A , вызывающий растяжение верхних волокон, поэтому на эпюре изгибающего момента происходит скачок вверх на величину момента $M_A = 6qa^2$. На участке AB M_x изменяется по линейному закону. Вычисляем момент в сечении B

$M_B = M_A + \omega_Q = -6qa^2 + qa \cdot a = -5qa^2$ и проводим наклонную

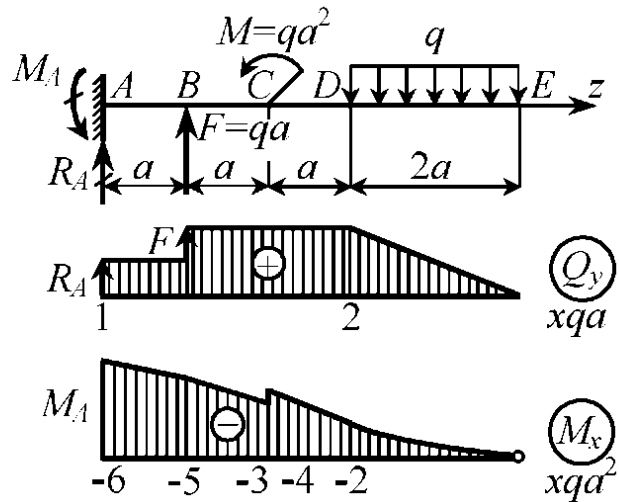


Рис. 1.14

прямую. Аналогично на участках BC и CD . В бесконечно близком сечении слева от точки C момент равен $M_{CB} = M_B + \omega_Q = -5qa^2 + 2qa \cdot a = -3qa^2$. В сечении C на эпюре M_x скачок вверх, равный приложенной паре сил $M = qa^2$, и правее этого сечения имеем $M_{CD} = M_{CB} - qa^2 = -3qa^2 - qa^2 = -4qa^2$. Момент в сечении D $M_D = M_{CD} + \omega_Q = -4qa^2 + 2qa \cdot a = -2qa^2$. На участке DE изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы, обращенной выпуклостью вниз (в сторону погонной нагрузки q). В сечении E по условию загрузки балки $M_E = 0$. По двум точкам D и E приближенно строим параболу.

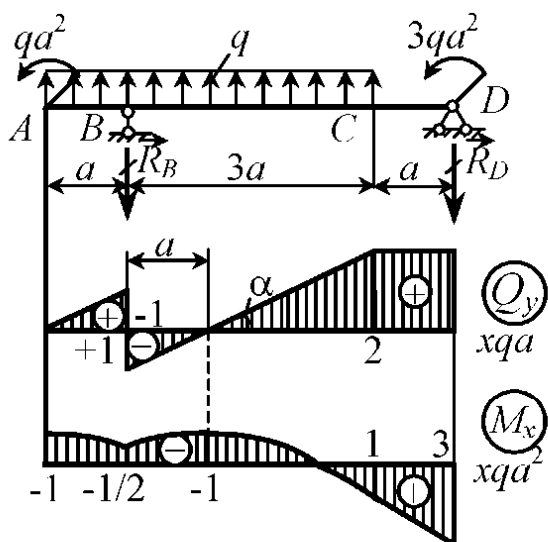


Рис. 1.15

Пример 1.9

Построить эпюры Q_y и M_x для балки (рис. 1.15).

Решение.

1. Определение опорных реакций. Составляем уравнения равновесия: $\sum m_B = 0$,

$$q \cdot 4a \cdot a + qa^2 + 3qa^2 - R_D \cdot 4a = 0,$$

откуда $R_D = 2qa$; $\sum m_D = 0$,

$$R_B \cdot 4a + qa^2 + 3qa^2 - q \cdot 4a \cdot 3a = 0,$$

откуда $R_B = 2qa$.

Проверка

$$\sum Y_i = 0, \quad q \cdot 4a - R_B - R_D = 4qa - 2qa - 2qa = 0.$$

2. Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента.

Эпюра Q_y . Строится по формуле $Q_y = Q_o \pm qz$. В данном случае перед вторым слагаемым следует взять знак “плюс”, так как погонная нагрузка положительна (см. правила построения эпюр). На участках AB и BC эпюра Q_y изображается прямой, наклоненной вверх (в направлении погонной нагрузки q), а на участке CD поперечная сила постоянна ($q = 0$). В сечениях B и D на балку действуют сосредоточенные силы R_A и R_D , поэтому на эпюре Q_y возникают скачки. Вычисляем значения поперечной силы в характерных точках $Q_A = 0$,

$$Q_{BA} = Q_A + q \cdot a = qa, \quad Q_{BC} = Q_{BA} - R_B = qa - 2qa = -qa,$$

$$Q_C = Q_{BC} + q \cdot 3a = -qa + 3qa = 2qa \text{ и строим эпюру } Q_y.$$

Эпюра M_x . Она строится по формуле $M_x = M_o + \omega Q$. На участках с погонной нагрузкой (AB и BC) изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы ($M_x = M_o + Q_o z + 0,5qz^2$), обращенной выпуклостью вверх (в сторону погонной нагрузки q). В сечениях A и D , где приложены сосредоточенные пары, на эпюре M_x наблюдаются скачки, причем момент qa^2 вызывает растяжение сверху (при обходе слева направо), поэтому в сечении A скачок направлен вверх, а момент $3qa^2$ вызывает растяжение снизу (при обходе справа налево), поэтому в сечении D скачок происходит вниз. На участке AB парабола строится по двум точкам A и B , а на участке BC – по трем точкам (к крайним точкам B и C добавляется точка экстремума). Положение точки экстремума определяется из условия $z_o = Q_{BC} / \operatorname{tg} \alpha$. Согласно дифференциальной зависимости $\operatorname{tg} \alpha = dQ/dz = q$, поэтому $z_o = qa/q = a$. Вычисляем значения момента в характерных точках:

$$M_A = -qa^2, \quad M_B = M_A + \omega_Q = -qa^2 + (1/2) \cdot qa \cdot a = -qa^2/2,$$

$$M_{\max} = M_B + \omega_Q = -qa^2/2 - (1/2) \cdot qa \cdot a = -qa^2,$$

$$M_C = M_{\max} + \omega_Q = -qa^2 + (1/2) \cdot 2qa \cdot 2a = qa^2$$

и строим эпюру M_x .

Пример 1.10

По заданной эпюре поперечной силы Q_y установить нагрузку, действующую на двухопорную балку, и ее опорные реакции. Построить также эпюру изгибающего момента, учитывая, что на правой опоре C приложена пара сил.

Решение. Скачки на эпюре Q_y свидетельствуют о приложенных в этих сечениях

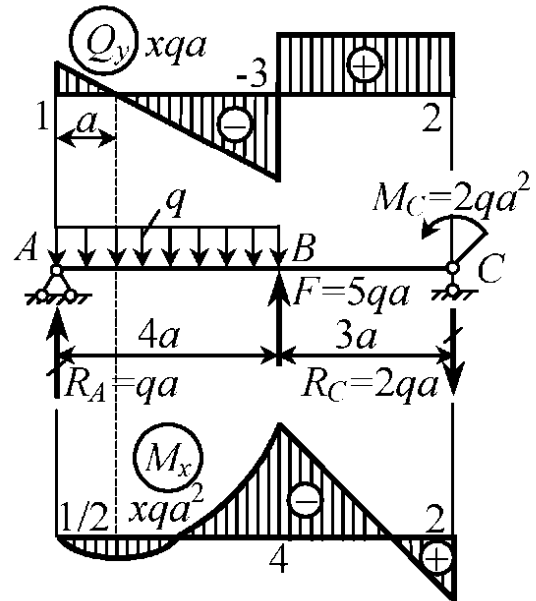


Рис. 1.16

сосредоточенных силах. Приняв направление обхода слева направо, получим: реакция в точке A равна $R_A = qa$ и направлена вверх; в сечении B приложена сосредоточенная сила $F = 5qa$, направленная вверх; наконец, реакция $R_B = 2qa$ и направлена вниз. На участке AB поперечная сила изменяется по линейному закону, что связано с наличием погонной нагрузки, интенсивность которой определяется как тангенс угла наклона прямой $q_y = dQ/dz = (-3qa - qa)/4a = -q$. Знак “минус” означает, что нагрузка направлена вниз. Для определения неизвестной пары сил M , приложенной в сечении C , составим уравнение моментов относительно этой точки:

$$\sum m_C = 0, \quad -R_A \cdot 7a - F \cdot 3a + q \cdot 4a \cdot 5a + M_C = 0,$$

откуда $M_C = 2qa^2$ и направлен против часовой стрелки.

Эпюру M_x строим по формуле $M_x = M_o + \omega_Q$. На участке AB изгибающий момент изменяется по квадратичному закону. На концевой шарнирной опоре A нет пары сил, поэтому $M_A = 0$. В сечении, где $Q_y = 0$, изгибающий момент принимает экстремальное значение:

$$M_{\max} = M_A + \omega_Q = (1/2)qa \cdot a = qa^2/2.$$

Находим момент в сечении B : $M_B = M_{\max} + \omega_Q = qa^2/2 - (1/2)3qa \cdot 3a = -4qa^2$ и по трем точкам приближенно строим параболу, обращенную выпуклостью вниз. На участке BC изгибающий момент изменяется по линейному закону от $M_B = -4qa^2$ до $M_C = M_B + \omega_Q = -4qa^2 + 2qa \cdot 3a = 2qa^2$. По условию нагружения балки также имеем $M_C = 2qa^2$. Совпадение значений M_C , найденных независимо друг от друга, свидетельствует о правильности построения эпюры M_x .

Пример 1.11

По заданной эпюре изгибающего момента построить эпюру поперечной силы и определить нагрузку, действующую на балку. Криволинейный участок эпюры M_x очерчен по квадратной параболе, а кружком отмечена ее вершина.

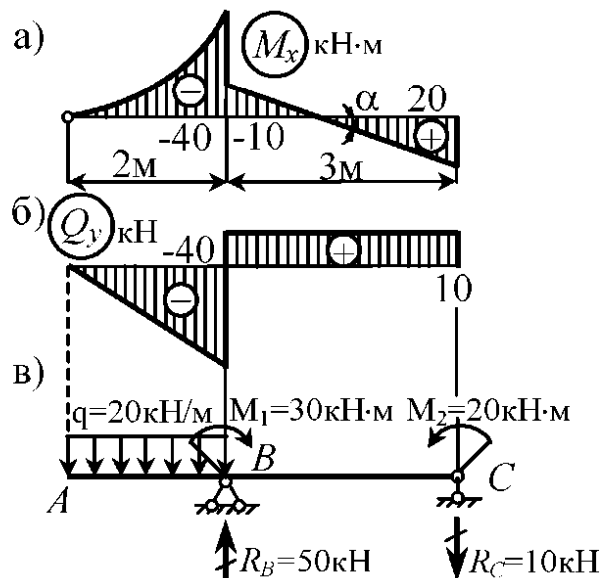


Рис. 1.17

Решение.

На участке AB изгибающий момент изменяется по квадратичному закону: $M_x = M_o + Q_o z - 0,5qz^2$. Так как вершина параболы совпадает с точкой A , то $M_o = M_A = 0$ и $Q_o = 0$. Следовательно, $M_x = -0,5qz^2$. Момент в бесконечно близком сечении слева от опоры B , судя по приведенной эпюре, равен $M_{BA} = -40$ кН·м. С другой стороны, $M_{BA} = -0,5q(2)^2$. Следовательно, $q = 20$ кН/м. Парабола обращена выпуклостью вниз, поэтому и погонная нагрузка направлена вниз.

В сечении B изгибающий момент изменяется скачком от $M_{BA} = -40$ кН·м до $M_{BC} = -10$ кН·м, что свидетельствует о наличии пары сил $M_1 = 30$ кН·м, вызывающей растяжение нижних волокон (при обходе слева направо), т.е. направленной по часовой стрелке. На опоре C приложена пара сил с моментом $M_2 = 20$ кН·м, вызывающая растяжение снизу (при обходе справа налево), т.е. направленная против часовой стрелки.

На участке BC поперечная сила постоянна и равна тангенсу угла наклона прямой, т.е. $Q_{BC} = dM/dz = \operatorname{tg}\alpha = (20 + 10)/3 = 10$ кН. На участке AB поперечная сила изменяется по линейному закону ($Q_y = Q_o - qz$) от $Q_o = Q_A = 0$ до $Q_{BA} = -q \cdot 2 = -40$ кН. По скачкам на эпюре Q_y находим величины и направления реакций: $R_B = 50$ кН (направлена вверх) $R_C = 10$ кН (направлена вниз).

Пример 1.12

Построить эпюры продольной и поперечной сил, а также изгибающего момента для рамы, приведенной на рис. 1.18.

Решение.

1. Определение опорных реакций. Составляем уравнения равновесия: $\sum X = 0$,

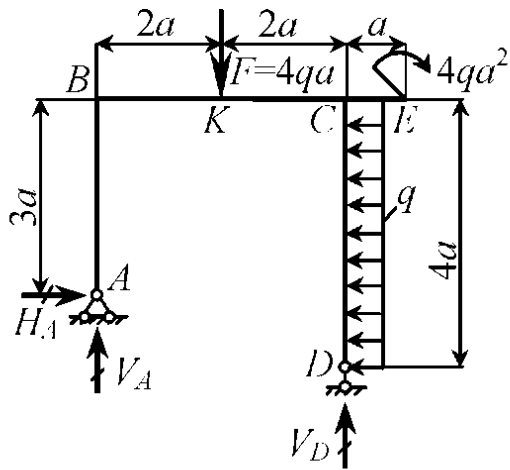


Рис. 1.18

$$H_A = 4qa; \quad \sum m_A = 0, \quad V_D \cdot 4a - 4qa^2 + q \cdot 4a \cdot a - F \cdot 2a = 0,$$

откуда $V_D = 2qa; \quad \sum m_D = 0,$

$$-V_A \cdot 4a - H_A \cdot a - 4qa^2 + q \cdot 4a \cdot 2a + F \cdot 2a = 0, \quad \text{откуда} \quad V_A = 2qa.$$

Проверка: $\sum Y = V_A + V_D - F \equiv 0.$

2. Построение эпюр N_z , Q_y , M_x .

Эпюра N_z . В стойках: $N_{AB} = -V_A = -2qa$,
 $N_{CD} = -V_D = -2qa$. Ригель BC сжимается силой H_A , поэтому
 $N_{DC} = -H_A = -4qa$. На консоли CE продольная сила отсутствует, т.е. $N_{CE} = 0$.

Эпюра Q_y . На участках AB , BC и CE нет погонной нагрузки, поэтому поперечная сила постоянна. В стойке CD поперечная сила изменяется по линейному закону. Вычисляем поперечную силу в характерных точках $Q_A = -H_A = -4qa$,
 $Q_{BK} = V_A = 2qa$, $Q_{CK} = Q_{BK} - F = -2qa$, $Q_{CD} = H_A = 4qa$,
 $Q_D = 0$, $Q_E = 0$ и строим эпюру Q_y .

Эпюра M_x . В стойке AB изгибающий момент изменяется по линейному закону от $M_A = 0$ до $M_B = -H_A \cdot 3a = -12qa^2$ (растяжение с наружной стороны контура). Аналогичный характер имеет эпюра M_x на участках BK и $КС$. Находим $M_K = V_A \cdot 2a - H_A \cdot 3a = -8qa^2$ растяжение снаружи и

$$M_{CK} = V_A \cdot 4a - H_A \cdot 3a - F \cdot 2a = -12qa^2.$$

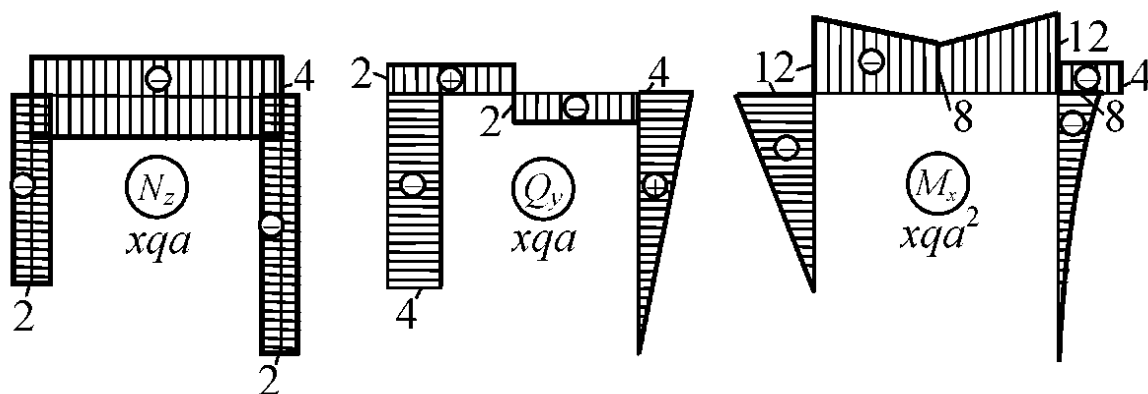


Рис. 1.19

На консоли CE изгибающий момент постоянен ($Q_y = 0$) и равен $M_{CE} = -4qa^2$ (растяжение сверху). В стойке CD , нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, момент изменяется по закону квадратной параболы, обращенной выпуклостью в сторону погонной нагрузки (влево). По условию нагружения на опоре D $M_D = 0$, а в сечении C изгибающий момент вычисляем как сумму моментов всех сил, расположенных ниже этого сечения $M_{CD} = -q \cdot 4a \cdot 2a = -8qa^2$ (растяжение с наружной стороны контура). По двум точкам (C и D) приближенно строим параболу.

Пример 1.13

Для рамы, жестко заземленной одним концом, построить эпюры N_z , Q_y и M_x .

Решение.

1. Определение опорных реакций:

$$\sum X_i = 0, \quad H_D = 4qa;$$

$$\sum Y_i = 0, \quad V_D = q \cdot 10a = 10qa;$$

$$\sum m_D = 0, \quad M_D = q \cdot 10a \cdot 5a - 20qa^2 = 30qa^2.$$

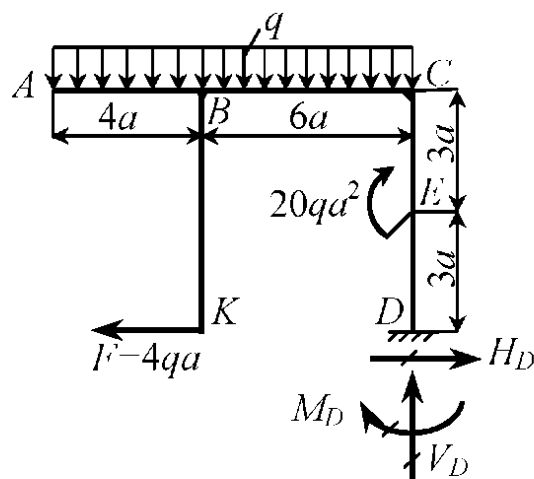


Рис. 1.20

2. Построение эпюр N_z , Q_y , M_x .

Эпюра N_z . Стойка CD сжимается силой $N_{CD} = -V_D = -10qa$, а ригель BC растягивается силой $N_{BC} = F = 4qa$. В остальных стержнях продольной силы нет.

Эпюра Q_y . На участках BK и CD поперечная сила постоянна $Q_{BK} = F = 4qa$, $Q_{CD} = -H_D = -4qa$, а в ригеле AC изменяется по линейному закону от $Q_A = 0$ до $Q_{CB} = -q \cdot 10a = -10qa$.

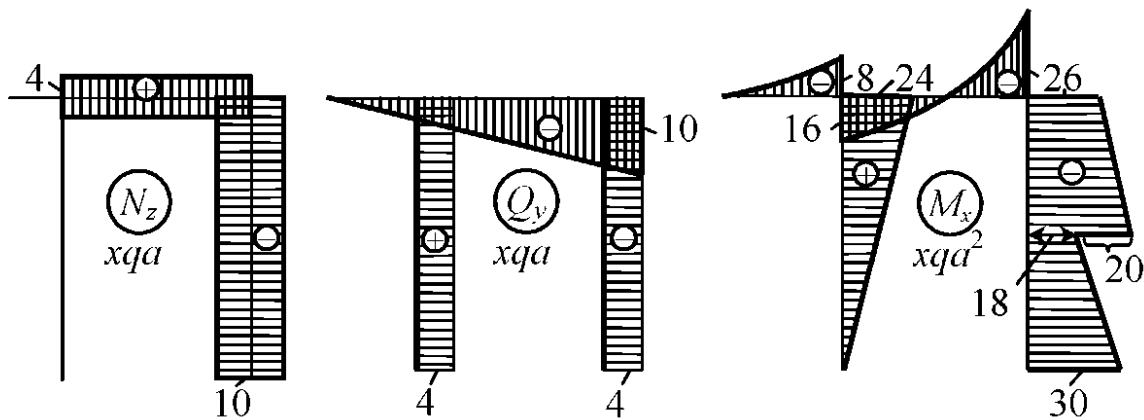


Рис. 1.21

Эпюра M_x . В стойке BK момент изменяется по линейному закону от $M_K = 0$ до $M_{BK} = 4qa \cdot 6a = 24qa^2$ (растяжение с внутренней стороны контура). В стойке CD также имеем линейный закон со скачком в сечении E , где приложена пара сил $20qa^2$. Сосредоточенный момент вызывает растяжение с правой стороны стойки при движении от точки D к точке C , поэтому и скачок на эпюре будет вправо на величину приложенного момента. Вычисляем

$$M_{ED} = -M_D + H_D \cdot 3a = -30qa^2 + 4qa \cdot 3a = -18qa^2,$$

$$M_{EC} = M_{ED} - M = -18qa^2 - 20qa^2 = -38qa^2,$$

$M_{CE} = -M_D - M + H_D \cdot 6a = -26qa^2$ и строим эпюру в стойке CD .

В узле C нет внешней пары сил, поэтому $M_{CB} = M_{CE} = -26qa^2$.

В ригеле AC , нагруженном погонной нагрузкой q , изгибающий момент изменяется по квадратичному закону. В точке A нет внешней пары сил, поэтому $M_A = 0$. Вычисляем

$$M_{BA} = -q \cdot 4a \cdot 2a = -8qa^2 \text{ (растяжение сверху),}$$

$M_{BC} = -q \cdot 4a \cdot 2a + F \cdot 6a = 16qa^2$ (растяжение снизу) и строим параболу, обращенную выпуклостью вниз (в направлении погонной нагрузки q).

Пример 1.14. Построить эпюру изгибающего момента, возникающего в раме, приведенной на рис. 1.22,а. Задачу предлагается решить самостоятельно. Для контроля на рис. 1.22,б дается решение.

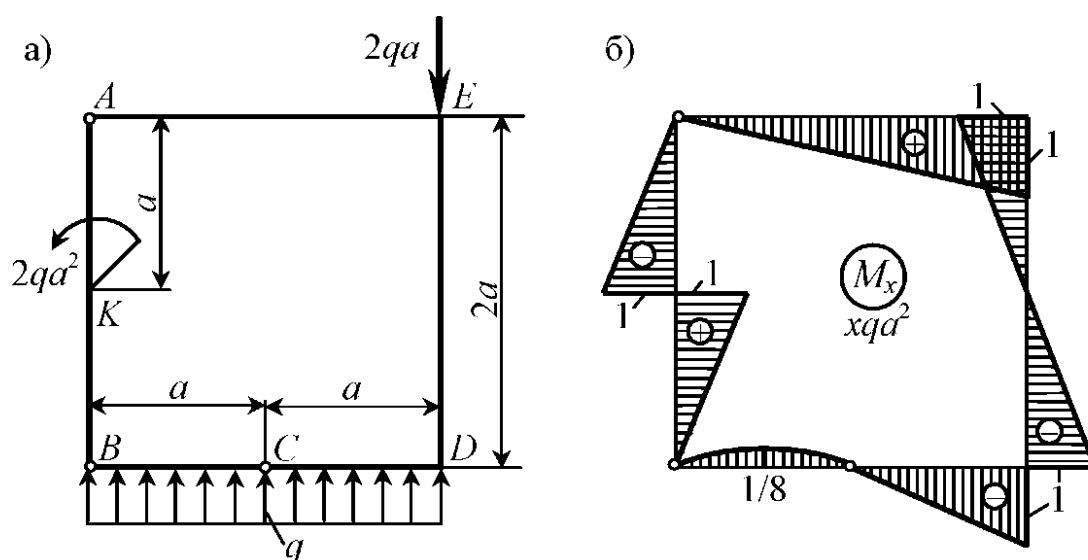


Рис. 1.22

2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ

2.1. Статически определимые системы

При центральном растяжении (сжатии) прямолинейного стержня в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – *продольная сила* N_z .

С продольной силой связаны *нормальные напряжения*, которые на достаточном удалении от точек приложения внешних сил *равномерно распределяются по поперечному сечению* (рис. 2.1).

$$\sigma_z = N_z / A \quad (2.1)$$

В местах приложения внешних сосредоточенных сил распределение напряжений значительно отличается от равномерного (рис. 2.2). Однако, как показывает опыт, на расстоянии, равном примерно наибольшему из поперечных размеров стержня b ,

распределение напряжений становится практически равномерным. Отмеченное свойство выражает *принцип Сен – Венана*: на достаточном удалении от места приложения сил распределение напряжений практически не зависит от

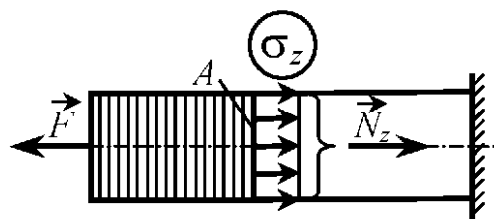


Рис. 2.1

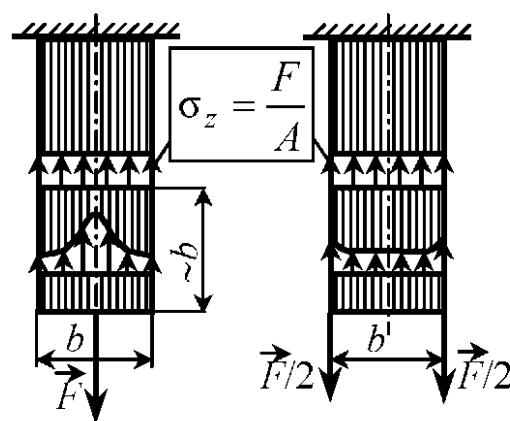


Рис. 2.2

способа приложения сил, а только от их статического эквивалента.

Условие прочности выражается неравенством

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (2.2)$$

где $[\sigma] = \sigma_{\text{пред}} / \Pi$ – допускаемое напряжение, Π – коэффициент запаса прочности, $\sigma_{\text{пред}}$ – предельное для данного материала напряжение, равное пределу текучести (σ_T или $\sigma_{0,2}$) для пластичных материалов или пределу прочности $\sigma_{\text{пч}}$ для хрупких материалов,

$$\text{т.е. } \sigma_{\text{пред}} = \begin{cases} \sigma_T (\sigma_{0,2}) - \text{для пластичных материалов,} \\ \sigma_{\text{пч}} - \text{для хрупких материалов.} \end{cases}$$

В инженерных расчетах отклонения от основного неравенства (2.2) допустимы в ту или другую сторону в пределах $\pm 5\%$.

Различают три вида расчета на прочность:

- 1) проверка прочности, 2) подбор сечения, 3) определение допускаемой нагрузки.

При растяжении (сжатии) возникают продольные ε и поперечные ε' деформации, связанные между собой зависимостью (законом Пуассона):

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon, \quad (2.3)$$

где $\varepsilon = \Delta/l$, $\varepsilon' = \Delta b/b$, ν – коэффициент Пуассона, который для различных материалов лежит в пределах от 0 до 0,5.

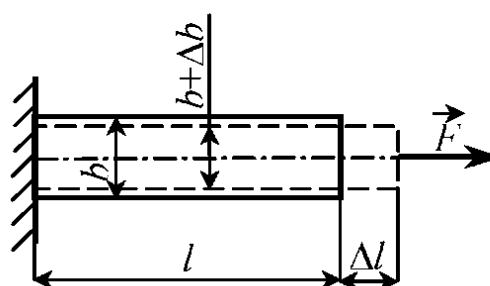


Рис. 2.3

Нормальные напряжения σ связаны с продольной деформацией ε законом Гука $\sigma = E\varepsilon$, (2.4)

где E – модуль продольной упругости или модуль Юнга.

Удлинение или укорочение стержня в общем случае (рис. 2.4) определяется интегралом

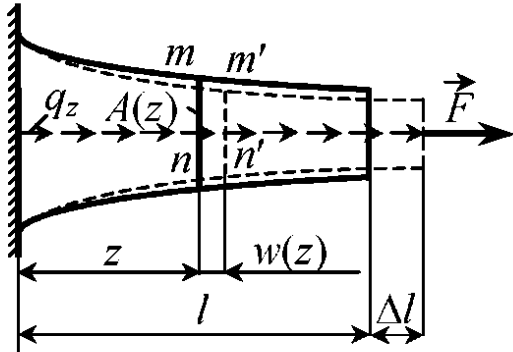


Рис. 2.4

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EA(z)}. \quad (2.5)$$

В частном случае, когда $N_z = F = \text{const}$ и $EA = \text{const}$ (рис. 2.3),

$$\Delta l = N_z l / (EA). \quad (2.6)$$

Величины EA и $C = EA/l$ называются соответственно жесткостью сечения и жесткостью стержня при растяжении (сжатии).

Перемещение произвольного сечения z равно изменению длины участка, заключенного между этим сечением и заделкой (рис. 2.4), т.е.

$$w(z) = \Delta z = \int_0^z \frac{N_z dz}{EA(z)} = \frac{1}{E} \int_0^z \sigma_z dz = \frac{\omega_\sigma}{E}, \quad (2.7)$$

где ω_σ - площадь эпюры σ от заделки до рассматриваемого сечения.

В стержневых системах перемещения узлов δ определяются через деформации стержней (рис. 2.5).

Условие жесткости $\delta \leq [\delta]$ (2.8)

позволяет решать задачи трех типов, аналогичных расчету на прочность, а именно: проверка жесткости, подбор сечений, определение допускаемой нагрузки.

При упругой деформации в единице объема стержня накапливается энергия (удельная потенциальная энергия)

$$u = \sigma^2 / (2E). \quad (2.9)$$

Энергия, накапливаемая во всем стержне

$$U = \int_0^l u dv = \int_0^l N_z^2 dz / (2EA). \quad (2.10)$$

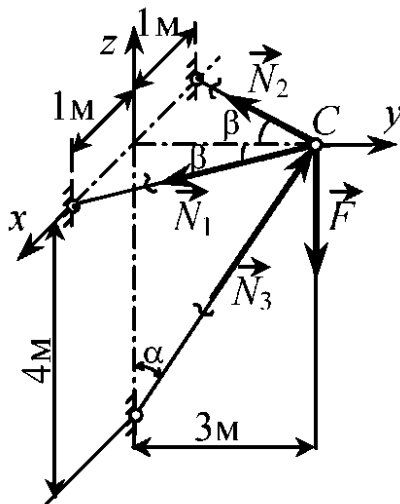


Рис. 2.6

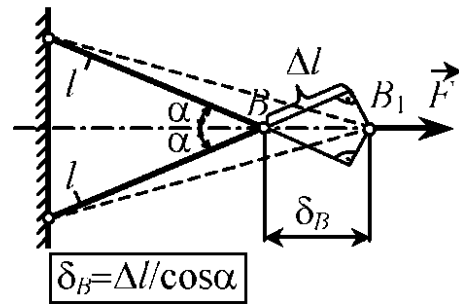


Рис. 2.5

Пример 2.1. Пространственный кронштейн, состоящий из трех стержней, нагружен силой F . Зная допускаемые напряжения материала стержней на растяжение $[\sigma_p] = 120$ МПа и на сжатие $[\sigma_{сж}] = 60$ МПа, требуется:

1) проверить прочность конструкции, если $F = 120$ кН, $A_1 = A_2 = 4$ см², $A_3 = 25$ см²;

2) подобрать сечения стержней из двух равнобоких уголков, если $F = 480$ кН;

3) определить, какой груз может выдержать кронштейн, если $A_1 = A_2 = 10$ см², $A_3 = 60$ см².

Решение. 1. Определение усилий в стержнях. Из условия равновесия узла C имеем:

$$\sum X_i = 0, \quad N_1 \sin \beta - N_2 \sin \beta = 0, \quad N_1 = N_2;$$

$$\sum Z_i = 0, \quad N_3 \cos \alpha - F = 0, \quad N_3 = F / \cos \alpha = 1,25F;$$

$$\sum Y_i = 0 \quad 2N_1 \cos \beta = N_3 \sin \alpha, \quad N_1 = N_3 \sin \alpha / (2 \cos \beta) = 0,395F.$$

2. Определение искомых величин.

2.1. Проверка прочности конструкции

Находим напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = N_1 / A_1 = 0,395 \cdot 120 \cdot 10^3 / (4 \cdot 10^{-4}) = 118,5 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 120 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = N_3 / A_3 = 1,25 \cdot 120 \cdot 10^3 / (25 \cdot 10^{-4}) = 60 \text{ МПа} = [\sigma_{сж}] = 60 \text{ МПа}.$$

Как видим, оба условия прочности выполняются, т.е. прочность конструкции в целом обеспечена.

2.2. Подбор сечений

Из условия прочности на растяжение

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,395F}{A_1} \leq [\sigma_p],$$

$$\text{откуда} \quad A_1 = \frac{0,395F}{[\sigma_p]} = \frac{0,395 \cdot 480 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6} = 15,8 \text{ см}^2.$$

Из условия прочности на сжатие

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{1,25F}{A_3} \leq [\sigma_{сж}],$$

откуда $A_3 = \frac{1,25F}{[\sigma_{сж}]} = \frac{1,25 \cdot 480 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^6} = 100 \text{ см}^2.$

Принимаем по ГОСТ 8509-72 (СТ СЭВ 104-74):

- для 1-го и 2-го стержней – 2 уголка 70x70x6 ($A_{01} = 2 \cdot 8,15 = 16,3 \text{ см}^2$);

- для 3-го стержня – 2 уголка 160x160x16 ($A_{03} = 2 \cdot 49,1 = 98,2 \text{ см}^2$).

2.3. Определение допускаемой нагрузки

Из условия прочности на растяжение

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,395F}{A_1} \leq [\sigma_p],$$

откуда $[F_p] = \frac{[\sigma_p] \cdot A_1}{0,395} = \frac{120 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{0,395} = 304 \text{ кН}.$

Из условия прочности на сжатие

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{1,25F}{A_3} \leq [\sigma_{сж}],$$

откуда $[F_{сж}] = \frac{[\sigma_{сж}] \cdot A_3}{1,25} = \frac{60 \cdot 10^6 \cdot 60 \cdot 10^{-4}}{1,25} = 288 \text{ кН}.$

Допускаемая нагрузка равна меньшей из найденных величин, т.е.

$$F = \min\{[F_p], [F_{сж}]\} = [F_{сж}] = 288 \text{ кН}.$$

Пример 2.2

Круглая колонна диаметра d сжимается силой F . Определить увеличение диаметра Δd , зная модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν материала колонны.

Решение.

Продольная деформация по закону Гука равна

$$\varepsilon = \sigma_z / E = -4F / (\pi d^2 E).$$

Используя закон Пуассона, находим поперечную деформацию

$$\varepsilon' = -\nu \varepsilon = \nu \cdot 4F / (\pi d^2 E).$$

С другой стороны,

$$\varepsilon' = \Delta d / d.$$

Следовательно,

$$\Delta d = \nu \cdot 4F / (\pi d E).$$

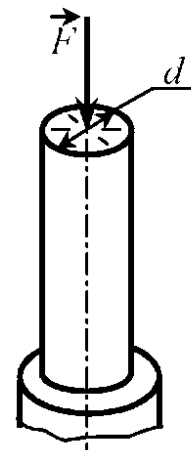


Рис. 2.7

Пример 2.3. Определить из расчетов на прочность и жесткость допускаемую силу F , если $[\sigma] = 120$ МПа, $[\sigma_c] = 1,7$ мм, $A_1 = 2A$, $A_2 = A = 5$ см², $l_1 = l_2 = l = 1$ м, $E = 200$ ГПа.

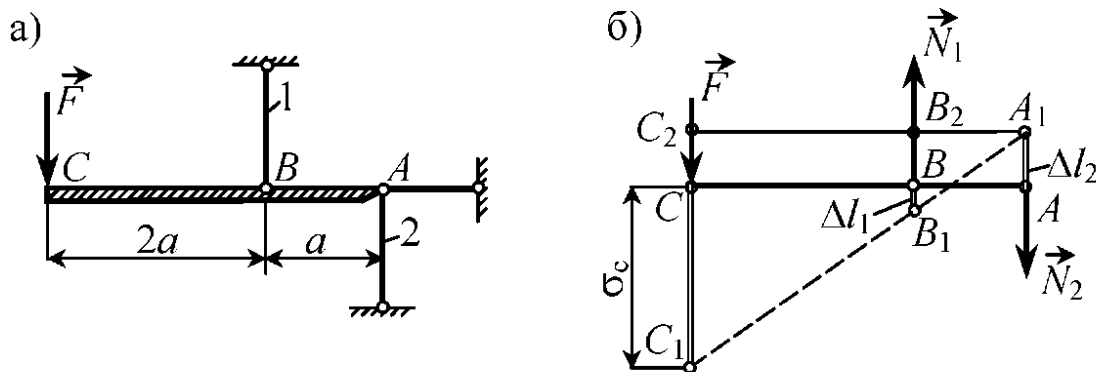


Рис. 2.8

Решение. 1. Определение усилий в стержнях. Из условия равновесия бруса AC имеем

$$\begin{aligned}\sum m_A = 0, & \quad F \cdot 3a - N_1 \cdot a = 0, & \quad N_1 = 3F; \\ \sum m_B = 0, & \quad F \cdot 2a - N_2 \cdot a = 0, & \quad N_2 = 2F.\end{aligned}$$

2. Расчет на прочность. Находим напряжения в стержнях

$$\sigma_1 = N_1/A_1 = 3F/(2A), \quad \sigma_2 = N_2/A_2 = 2F/A.$$

Как видим, наиболее нагруженным является 2-й стержень, прочность которого предопределяет прочность всей конструкции в целом. Из условия прочности $\sigma_{max} = \sigma_2 = 2F/A \leq [\sigma]$ находим $[F_m] = 0,5[\sigma] \cdot A = 30$ кН.

3. Расчет на жесткость. Вычисляем деформации стержней

$$\Delta l_1 = N_1 l / (EA_1) = 3Fl / (2EA), \quad \Delta l_2 = N_2 l / (EA_2) = 2Fl / (2EA),$$

а по ним перемещение точки C . Из подобия треугольников $B_1A_1B_2$ и $C_1A_1C_2$ имеем: $B_1B_2/A_1B_2 = C_1C_2/A_1C_2$ или $(\Delta l_1 + \Delta l_2)/a = (\delta_C + \Delta l_2)/3a$, откуда $\delta_C = 3\Delta l_1 + 2\Delta l_2 = 9Fl/(2EA) + 4Fl/(EA) = 8,5Fl/(EA)$.

Записываем условие жесткости $\delta_C = 8,5Fl/(EA) \leq [\delta_C]$,

откуда $[F_{ж}] = EA[\delta_C]/(8,5l) = 200 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1,7 \cdot 10^{-3} / (8,5 \cdot 1) = 20$ кН.

Допускаемая нагрузка из расчета на жесткость получилась меньше, чем из расчета на прочность, поэтому ее и принимаем в качестве окончательной, т.е.

$$[F] = \min\{[F_m], [F_{ж}]\} = [F_{ж}] = 20 \text{ кН.}$$

Пример 2.4. Построить эпюры продольной силы, напряжения и перемещения для ступенчатого бруса.

Решение. 1. Определение опорной реакции. Составляем уравнение равновесия в проекции на ось z : $\sum Z_i = 0$,
 $-2qa + 2q \cdot 2a - q \cdot a + qa - R_E = 0$,
откуда $R_E = 2qa$.

2. Построение эпюр N_z, σ_z, W .

Эпюра N_z . Она строится по формуле

$$N_z = N_0 \pm qz.$$

Имеем $N_B = -2qa$, $N_C = N_B + 2q \cdot 2a = 2qa$

$$N_{DC} = N_C - q \cdot a = qa, \quad N_{DE} = N_{DC} + qa = 2qa.$$

Эпюра σ_z . Напряжение равно $\sigma_z = N_z/A(z)$. Как следует из этой формулы, скачки на эпюре σ_z будут обусловлены не только скачками N_z , но также резкими изменениями площади поперечных сечений. Определяем значения σ_z в характерных точках:

$$\sigma_B = N_B/(2A) = -2qa/(2A) = -qa/A,$$

$$\sigma_{CB} = N_C/(2A) = 2qa/(2A) = qa/A;$$

$$\sigma_{CD} = N_C/(4A) = 2qa/(4A) = qa/(2A), \quad \sigma_{DC} = N_{DC}/(4A) = qa/(4A),$$

$\sigma_{DE} = N_{DE}/A = 2qa/A$ и строим эпюру σ_z .

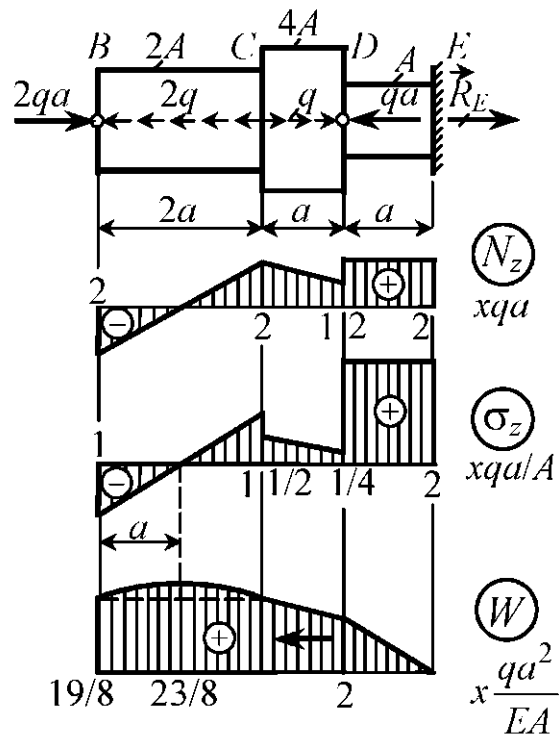


Рис. 2.9

Эпюра W . Она строится по формуле

$$W = W_0 + \frac{1}{E_0} \int \sigma_z dz = W_0 + \omega_\sigma / E.$$

Построение ведем от защемления к свободному концу. Находим перемещения в характерных сечениях: $W_0 = W_F = 0$,

$$W_D = W_0 + \omega_\sigma / E = (2qa/EA) \cdot a = 2qa^2/(EA),$$

$$W_C = W_D + \omega_\sigma / E = 2qa^2/EA + (1/2)(1/2 + 1/4) \cdot (qa/EA) \cdot a = \\ = (19/8)qa^2/EA,$$

$$W_{\max} = W_C + \omega_\sigma / E = (19/8)qa^2/EA + (1/2) \cdot (qa/EA) \cdot a = \\ = (23/8)qa^2/EA,$$

$$W_B = W_C + \omega_\sigma / E = W_C = (19/8)qa^2/EA \text{ и строим эпюру } W.$$

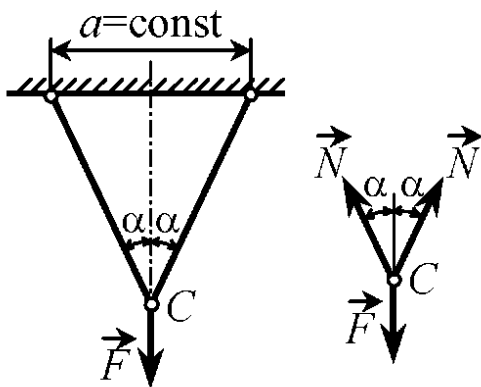


Рис. 2.10

Пример 2.5. К двум одинаковым стержням приложена сила F . Установить, при каком угле α конструкция будет иметь наименьший вес?

Решение. Вес конструкции является функцией

угла α , т.е. $G = G(\alpha)$. Нам необходимо установить такой угол, при котором функция $G(\alpha)$ принимает минимальное значение. В теории оптимального проектирования она называется целевой функцией.

Для определения веса стержневой системы нужно знать площади сечений стержней. Из условия равновесия узла C находим усилия в стержнях:

$$\sum Y_i = 0, \quad 2N \cos \alpha - F = 0, \quad N = F / (2 \cos \alpha),$$

а из условия прочности – площади их поперечных сечений:

$$N/A \leq [\sigma], \text{ откуда } A = N / [\sigma] = F / (2[\sigma] \cdot \cos\alpha).$$

Учитывая, что длины стержней $l = a/(2\sin\alpha)$, находим вес конструкции (целевую функцию):

$$G = 2Al\gamma = F\alpha\gamma / (2[\sigma]\sin\alpha \cdot \cos\alpha) = F\alpha\gamma / ([\sigma] \cdot \sin 2\alpha).$$

Функция $G(\alpha)$ принимает минимальное значение, когда $\sin 2\alpha = 1$, откуда $2\alpha = 90^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$.

Пример 2.6. Определить диаметр d , а также удлинение участка CD для круглого стержня, нагруженного силой F , принимая во внимание собственный вес. Удельный вес γ , допускаемое напряжение $[\sigma]$ и модуль упругости E материала стержня заданы.

Решение.

Для призматического стержня при действии собственного веса и сосредоточенной силы F на свободном конце имеем:

- продольная сила в произвольном сечении

$$N(z) = F + \gamma Az,$$

- нормальное напряжение в этом же сечении

$$\sigma_z = F/A + \gamma z.$$

Из условия прочности находим искомый диаметр

$$\sigma_{\max} = F/A + \gamma l \leq [\sigma], \quad \text{и} \quad d = \sqrt{\frac{4F}{\pi([\sigma] - \gamma l)}}.$$

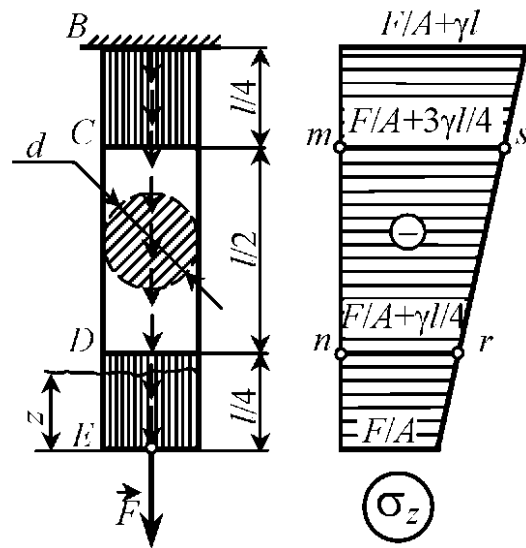


Рис. 2.11

откуда $A = \pi d^2/4 = F/([\sigma] \cdot \gamma l)$.

Удлинение участка CD находим по общей формуле

$$\Delta l_{CD} = \frac{1}{E} \int_C^D \sigma_z dz = \omega_\sigma / E.$$

Здесь $\omega_\sigma = \omega_{mnrs}$ – это площадь трапеции $mnrs$, которая равна

$$\omega_{mnrs} = (1/2)(\sigma_C + \sigma_D) \cdot (l/2) = (F/A + \gamma l/2) \cdot (l/2).$$

Следовательно, $\Delta l_{CD} = \omega_{mnrs}/E = (l/4E)(2F/A + \gamma l)$.

2.2. Статически неопределимые системы

2.2.1. Общие сведения

Конструкции, усилия в которых не могут быть определены только при помощи уравнений статики, и задачи, связанные с расчетом таких конструкций, называют статически неопределимыми. Разность между общим числом неизвестных и количеством независимых уравнений статики, которые можно составить для рассматриваемой системы, носит название степени статической неопределимости. В зависимости от этого числа различают системы один, два, ..., n раз статически неопределимые.

Статически неопределимую систему можно рассматривать как некоторую статически определимую систему, на которую наложены дополнительные (“лишние”) связи. При таком подходе степень статической неопределимости устанавливается по числу дополнительных связей.

Деформации стержней, образующих систему, не могут быть независимыми, а должны подчиняться некоторым условиям, вытекающим из особенностей рассматриваемой конст-

рукции. Аналитическая запись этих условий дает дополнительные уравнения (так называемые уравнения совместности деформаций), которые вместе с уравнениями статики позволяют определить неизвестные усилия.

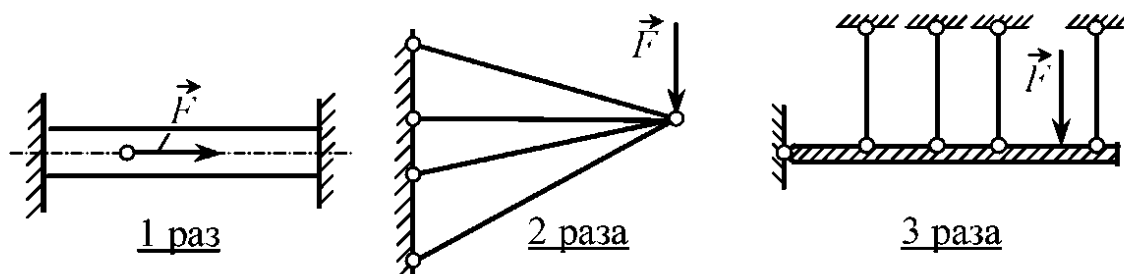


Рис. 2.12

Статически неопределимые системы в отличие от статически определимых обладают следующими особенностями (*свойствами*):

1) усилия в элементах зависят от их жесткостей, а именно: чем больше жесткость элемента, тем больше усилие на него приходится;

2) при неточном изготовлении элементов в процессе сборки в них возникают монтажные (сборочные) усилия;

3) при колебаниях температуры в элементах статически неопределимых систем возникают температурные усилия. Деформации стержней в этом случае определяются алгебраическим суммированием приращений длин от усилий и от изменения температуры

$$\Delta l = \alpha l \Delta f + Nl / (EA). \quad (2.11)$$

Расчет статически неопределимых систем производится либо по упругой стадии (метод допускаемых напряжений),

либо с учетом пластических деформаций (метод допускаемых нагрузок).

2.2.2. Расчет по допускаемым напряжениям

При таком подходе несущая способность конструкции отождествляется с несущей способностью наиболее нагруженного элемента. Последовательность расчета при этом выглядит следующим образом.

Составляются уравнения статики и по числу лишних неизвестных – дополнительные уравнения совместности деформаций. Решая полученную систему, определяют усилия в стержнях и связанные с ними напряжения. Из сопоставления напряжений в наиболее нагруженном элементе с допустимой величиной делается заключение о надежности конструкции либо определяются искомые величины (размеры сечения стержней, допускаемая нагрузка).

Пример 2.7. Составить полную систему уравнений и определить усилия в стержнях.

Решение

1. Схема (рис. 2.13):

$$A_1 = A_2 = A_3 = A.$$

Уравнения статики

$$\sum m_A = 0, \quad N_2 \cdot a + N_3 \cdot 4a = F \cdot 3a, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0, \quad N_1 + N_2 + N_3 = F. \quad (2)$$

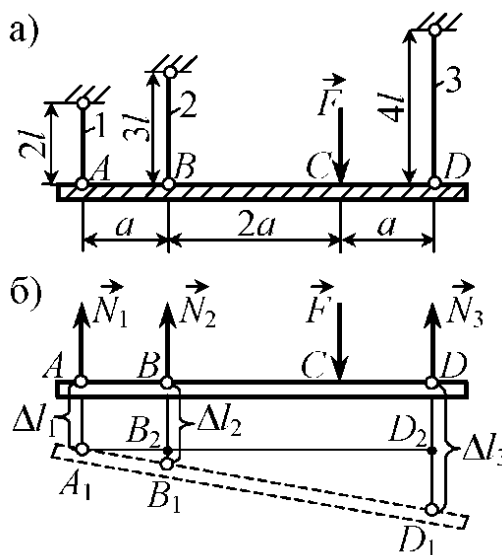


Рис. 2.13

Уравнение совместности деформаций. Деформации стержней

$$AA_1 = \Delta l_1, \quad BB_1 = \Delta l_2, \quad DD_1 = \Delta l_3.$$

Из подобия треугольников AB_1B_2 и AD_1D_2 имеем

$$(\Delta l_2 - \Delta l_1)/a = (\Delta l_3 - \Delta l_1)/4a,$$

откуда, выражая удлинения через усилия по закону Гука

$$\Delta l_1 = N_1 \cdot 2l/(EA), \quad \Delta l_2 = N_2 \cdot 3l/(EA), \quad \Delta l_3 = N_3 \cdot 4l/(EA),$$

получим $6N_2 - 3N_1 = 2N_3$.

Решая совместно уравнения (1), (2) и (3), найдем

$$N_1 = (2/35)F, \quad N_2 = (9/35)F, \quad N_3 = (24/35)F.$$

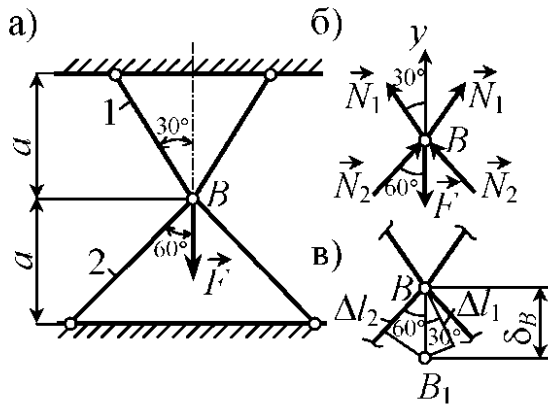


Рис. 2.14

2. Схема (рис. 2.14):

$$E_2 = 2E_1 = 2E,$$

$$A_1 = 2A_2 = 2A.$$

Уравнение статики. Из условия равновесия

узла B имеем $\sum Y = 0$,

$$2N_1 \cos 30^\circ + 2N_2 \cos 60^\circ = F. \quad (4)$$

Уравнение совместности деформаций (рис. 2.14, в)

$$\delta_B = \Delta l_1 / \cos 30^\circ = \Delta l_2 / \cos 60^\circ,$$

откуда, выражая деформации через усилия

$$\Delta l_1 = N_1 \cdot a / (\cos 30^\circ \cdot E \cdot 2A), \quad \Delta l_2 = N_2 \cdot 2a / (2E \cdot A), \quad \text{получим}$$

$$N_1 = 3N_2. \quad (5)$$

Решая совместно уравнения (4) и (5), найдем

$$N_1 = 0,27F; \quad N_2 = 0,09F.$$

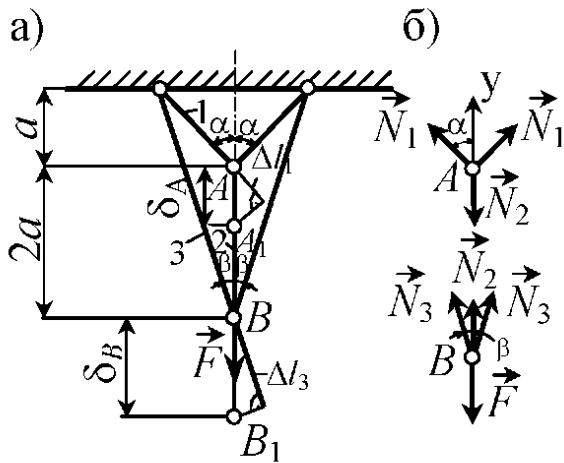


Рис. 2.15

$$\delta_B - \delta_A = \Delta l_2, \quad \delta_A = \Delta l_1 / \cos \alpha, \quad \delta_B = \Delta l_3 / \cos \beta.$$

Выразив удлинения через усилия по закону Гука, получим

$$N_3 l_3 / (E_3 A_3 \cos \beta) - N_1 l_1 / (E_1 A_1 \cos \alpha) = N_2 l_2 / (E_2 A_2). \quad (8)$$

Решая совместно уравнения (6), (7) и (8), найдем усилия в стержнях.

Пример 2.8. Невесомая жесткая балка подвешена на трех одинаковых стержнях и нагружена силой F . Во сколько раз уменьшится напряжение в среднем стержне, если площадь его сечения увеличить в 4 раза.

Решение. 1. Определение усилий. Данная система является 1 раз статически неопределимой. Поэтому в дополнение к уравнению статики

3. Схема (рис. 2.15).

Уравнения статики (рис. 2.15, б).

Узел А

$$\sum Y = 0, \quad N_2 = 2N_1 \cos \alpha. \quad (6)$$

Узел В

$$\sum Y = 0, \quad N_2 + 2N_3 \cos \beta = F. \quad (7)$$

Уравнение совместности деформаций

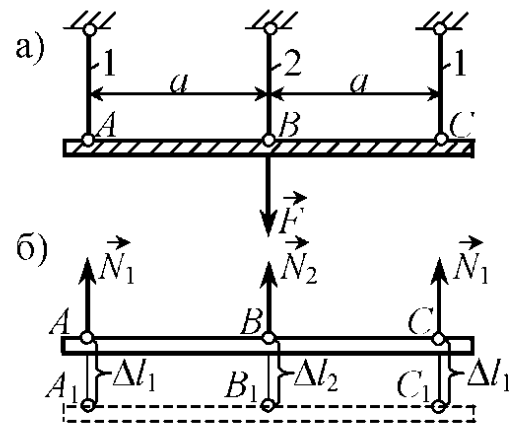


Рис. 2.16

необходимо составить одно уравнение совместности деформаций.

$$\text{Уравнение статики: } \sum Y = 0, \quad 2N_1 + N_2 = F. \quad (1)$$

Уравнение совместности деформаций $\Delta l_1 = \Delta l_2$ или, заменяя деформации через усилия по закону Гука, $N_1/(EA_1) = N_2/(EA_2)$, откуда

$$N_2 = (A_2/A_1)N_1 = mN_1, \quad (2)$$

где $m = A_2/A_1$ отношение площадей.

Решая совместно (1) и (2), найдем

$$N_1 = F/(2 + m), \quad N_2 = F \cdot m/(2 + m).$$

2. Исследование напряжений при изменении жесткости конструкции. Находим напряжения в стержнях

$$\sigma_1 = N_1/A_1 = F/[A_1(2 + m)], \quad \sigma_2 = N_2/A_2 = F \cdot m/[A_2(2 + m)].$$

Пусть в исходном состоянии $A_1 = A_2 = A$, т.е. $m = 1$.

Тогда $N_1 = N_2 = F/3$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = F/(3A)$.

После увеличения площади поперечного сечения среднего стержня в 4 раза ($m = 4$) будем иметь

$$N_1 = F/6, \quad N_2 = 2F/3 \quad \text{и} \quad \sigma_1 = \sigma_2 = F/(6A),$$

т.е. напряжения в среднем стержне уменьшаются в 2 раза. Как видим, напряжения уменьшаются в меньшей пропорции, чем увеличивается площадь сечения. Это связано с тем, что одновременно с увеличением площади сечения стержня возрастает и усилие в нем. В статически определимых системах усилия не зависят от площади поперечных сечений стержней, поэтому увеличение площади сечений сопровождается пропорциональным уменьшением напряжений.

Монтажные напряжения

Пример 2.9

Определить напряжения, возникающие в упругих элементах системы после сборки, если стержень 1 изготовлен короче проектной длины на $\Delta = 0,5$ мм. Дано:

$$A_1 = A_2 = A, \quad a = 1 \text{ м,}$$

$$E = 200 \text{ ГПа.}$$

Решение

Данная система является однажды статически неопределимой (четыре неизвестных при трех уравнениях статики). Поэтому в дополнение к уравнению статики

$$\sum m_o = 0, \quad N_2 \cdot 3a - N_1 \cdot 2a = 0, \quad N_2 = (2/3)N_1 \quad (1)$$

необходимо составить одно уравнение совместности деформаций. Из подобия треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 имеем $BB_2/CC_2 = BB_1/CC_1$ или $(\Delta - \Delta_1)/\Delta_2 = 2/3$. Заменяя деформации через усилия в стержнях, получим дополнительное уравнение

$$\frac{2 N_2 3a}{3 EA} + \frac{N_1 2a}{EA} = \Delta \quad \text{или} \quad N_1 + N_2 = EA\Delta/(2a). \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем усилия в стержнях $N_1 = 0,3EA\Delta/a$, $N_2 = 0,2EA\Delta/a$, а по ним и искомые напряжения

$$\sigma_1 = N_1/A = 0,3E\Delta/a = 0,3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}/1 = 30 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_2 = N_2/A = 0,2E\Delta/a = 0,2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}/1 = 20 \text{ МПа.}$$

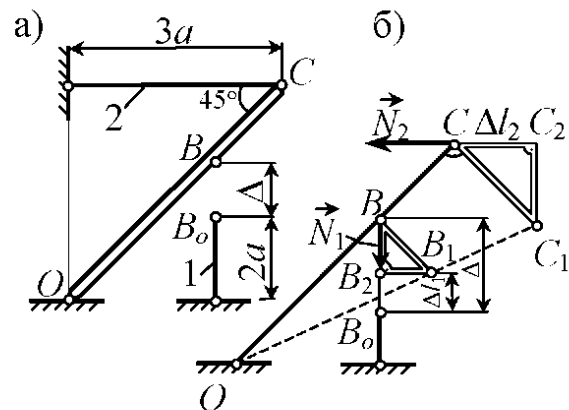


Рис. 2.17

Температурные напряжения

Пример 2.10. Определить напряжения, возникающие в упругих элементах системы (рис. 2.18), если после монтажа температура увеличилась на $\Delta t = 40^\circ\text{C}$. Дано: $A_1/A_2 = 2$, $E = 200$ ГПа, $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$.

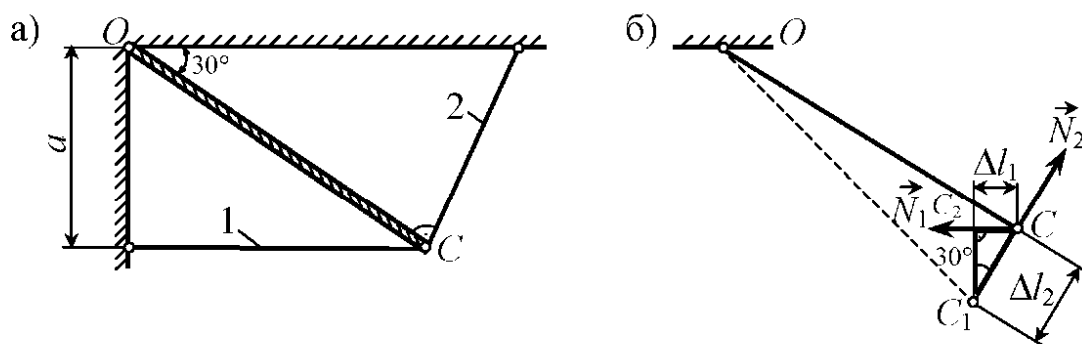


Рис. 2.18

Решение

Данная система является однажды статически неопределимой.

Уравнение статики $\sum m_O = 0$, $N_2 \cdot OC - N_1 \cdot OC \cdot \sin 30^\circ = 0$,
 $N_2 = N_1 \cdot \sin 30^\circ$ или $\sigma_2 \cdot A = \sigma_1 \cdot 2A \sin 30^\circ$, откуда $\sigma_1 = \sigma_2$. (1)

Уравнение совместности деформаций $\Delta l_1 = -\Delta l_2 \cdot \sin 30^\circ$

или $\frac{N_1 l_1}{EA_1} + \alpha l_1 \Delta t = -\left(\frac{N_2 l_2}{EA_2} + \alpha l_2 \Delta t \right) \cdot \sin 30^\circ$.

Переходя от усилий к напряжениям, получим

$$\sigma_1 l_1 + \sigma_2 l_2 \sin 30^\circ = -\alpha E \Delta t (l_1 + l_2 \sin 30^\circ). \quad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), найдем температурные напряжения

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\alpha E \Delta t = -125 \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 40 = -100 \text{ МПа.}$$

2.2.3. Расчет по допускаемым нагрузкам

Метод расчета по допускаемым нагрузкам исходит из более широкого использования экспериментальных данных, анализа пластических свойств материалов и их учета.

В этом методе путем расчета определяются не напряжения, а находится предельная нагрузка $F_{\text{пред}}$ при которой конструкция становится непригодной для эксплуатации. За допускаемую нагрузку принимается доля от предельной $[F_F] = F_{\text{пред}}/n$ и условие прочности в данном случае принимает вид

$$F_{\text{max}} \leq [F_F]. \quad (2.12)$$

При определении предельной нагрузки действительную диаграмму растяжения материала заменяют идеализированной диаграммой Прандтля, в которой площадка текучести принимается неограниченной (рис. 2.19). Поэтому расчет по допускаемым нагрузкам применим лишь для конструкций, выполненных из пластичных материалов и только при действии статических нагрузок.

Теоретическое определение допускаемой нагрузки возможно только для некоторых простейших случаев. Один из подходов состоит в том, что рассматриваются различные кинематически возможные схемы исчерпания несущей способности системы (система становится геометрически изменяемой). Продольные усилия в элементах, появление

текучести в которых приводит к исчерпанию несущей способности конструкции, принимаются равными произведениям допускаемых напряжений на площади поперечных сечений. Из уравнений предельного равновесия определяются допускаемые нагрузки, соответствующие каждому из вариантов исчерпания несущей способности. В качестве допускаемой нагрузки для конструкции принимается наименьшая из найденных величин.

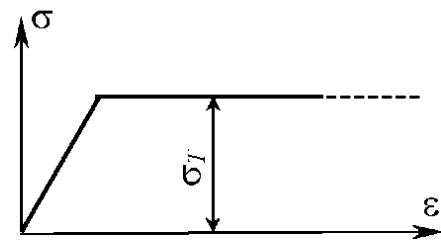


Рис. 2.19

Пример 2.11

Определить величину допускаемой нагрузки для данной конструкции, если $A_1 = A_2 = A_3 = A$, $l_1 = l_2 = l_3 = l$. Все стержни изготовлены из одного и того же материала.

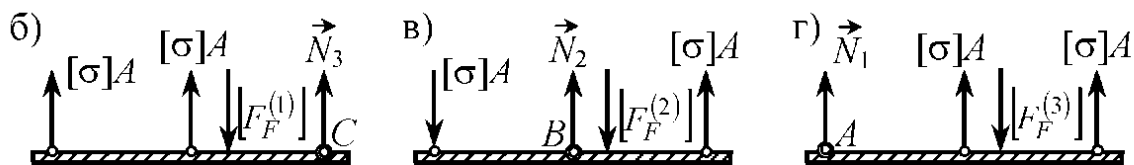
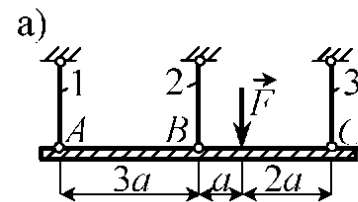


Рис. 2.20

Решение. Данная система является один раз статически неопределимой (три неизвестных при двух независимых уравнениях статики). Несущая способность ее будет исчерпана (система станет геометрически изменяемой), когда возникнут пластические деформации в двух стержнях. Таких ва-

риантов три.

Первый вариант (рис. 2.20,б). Несущая способность исчерпывается при появлении пластических деформаций в 1-м и 2-м стержнях. Принимаем $N_1 = N_2 = [\sigma]A$ и составляем уравнение моментов относительно точки C $\sum m_C = 0$,

$$-[\sigma] \cdot A \cdot 6a - [\sigma] \cdot A \cdot 3a + [F_F^{(1)}] \cdot 2a = 0, \quad \text{откуда} \quad [F_F^{(1)}] = 4,5[\sigma]A.$$

Второй вариант (рис. 2.20,в). Несущая способность исчерпывается при появлении пластических деформаций в 1 и 3-м стержнях. Принимаем $N_1 = N_3 = [\sigma]A$ и составляем уравнение моментов относительно точки B : $\sum m_B = 0$,

$$[\sigma] \cdot A \cdot 3a + [\sigma] \cdot A \cdot 3a - [F_F^{(2)}] \cdot a = 0, \quad \text{откуда} \quad [F_F^{(2)}] = 6[\sigma]A.$$

Третий вариант (рис. 2.20,г). Несущая способность исчерпывается при появлении пластических деформаций во 2 и 3-м стержнях. Принимаем $N_1 = N_2 = [\sigma]A$ и составляем уравнение моментов относительно точки A : $\sum m_A = 0$,

$$[\sigma] \cdot A \cdot 3a + [\sigma] \cdot A \cdot 6a - [F_F^{(3)}] \cdot 4a = 0, \quad \text{откуда} \quad [F_F^{(3)}] = 2,25[\sigma]A.$$

Допускаемой нагрузкой для конструкции будет наименьшая из трех найденных величин:

$$[F_F] = \min \{ [F_F^{(1)}], [F_F^{(2)}], [F_F^{(3)}] \} = [F_F^{(3)}] = 2,25[\sigma]A.$$

Пример 2.12

Подобрать сечения стержней, если $A_1 = A_2 = A_3 = A$, $F = 870$ кН, допускаемое напряжение $[\sigma] = 150$ МПа.

Решение

1. Определение допускаемой нагрузки. Несущая способность конструкции будет исчерпана, когда пластические деформации возникнут во всех трех стержнях. Полагая $N_1 = N_2 = N_3 = [\sigma]A$ и составляя уравнение моментов относительно точки O , найдем допускаемую нагрузку

$$\sum m_O = 0,$$

$$[\sigma] \cdot A \cdot 2 + [\sigma] \cdot A \cdot \sin\alpha \cdot 6 + [\sigma] \cdot A \cdot 6 = [F_F] \cdot 2,$$

откуда $[F_F] = 5,8[\sigma] \cdot A$.

2. Подбор сечений. Записываем условие прочности

$$F \leq [F_F] = 5,8[\sigma] \cdot A,$$

откуда находим искомую площадь

$$A = F / (5,8[\sigma]) = 870 \cdot 10^3 / (5,8 \cdot 150 \cdot 10^6) = 10 \text{ см}^2.$$

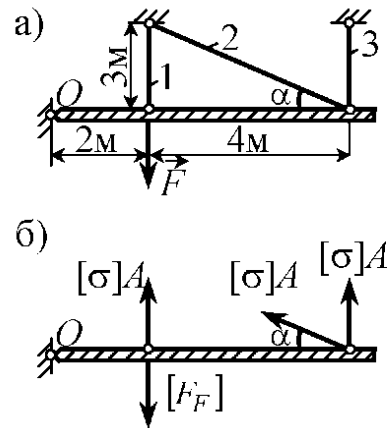


Рис. 2.21

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ	4
1.1. Общие сведения	4
1.2. Построение эпюр для стержней, нагруженных осевыми силами.....	5
1.3. Построение эпюр для стержней, нагруженных скручивающими парами	10
1.4. Построение эпюр для балок и рам	12
2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ	29
2.1. Статически определимые системы	29
2.2. Статически неопределимые системы	40
2.2.1. Общие сведения	40
2.2.2. Расчет по допускаемым напряжениям	42
2.2.3. Расчет по допускаемым нагрузкам	48

1. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

1.1. Общие сведения

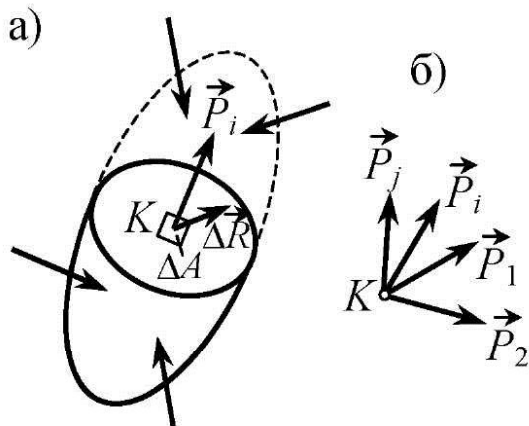


Рис. 1.1

Напряжение в точке, равное $\vec{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta \vec{R} / \Delta A$, (1.1)

Зависит от ориентации площадки. Каждой площадке с нормалью \vec{n}_i соответствует свой вектор напряжения \vec{p}_i .

Совокупность векторов напряжений для всевозможных площадок, проходящих через данную точку, представляет напряженное состояние в этой точке. Итак, если напряжение – это одиночный вектор, то напряженное состояние – это пучок векторов.

Количественной характеристикой напряженного состояния выступает тензор напряжения T_H , компонентами которого являются нормальные и касательные напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках. (рис. 1.2, б).

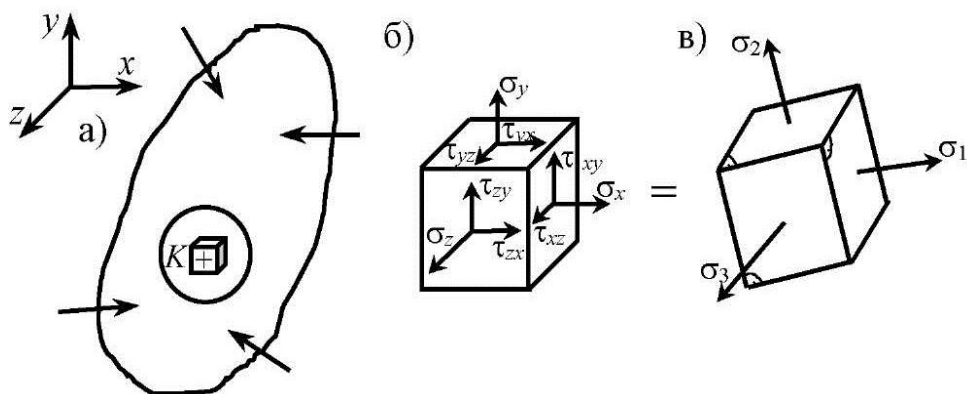
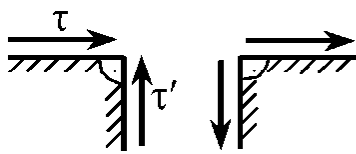


Рис. 1.2

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения; $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ – касательные напряжения (первый индекс означает нормаль к площадке, а второй – параллельную касательному напряжению ось).



Касательные напряжения подчиняются закону парности, согласно которому $\tau = \tau'$ или в общем виде

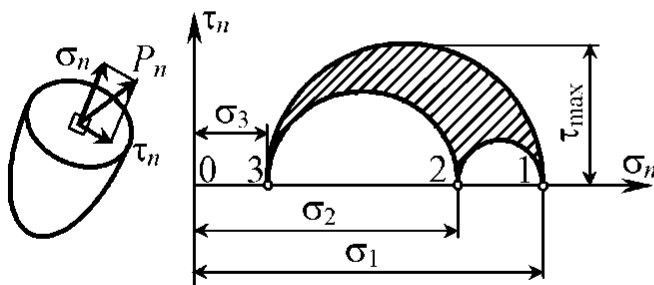
$$\tau_{ij} = \tau_{ji}. \quad (1.3)$$

В каждой точке тела существуют по крайней мере три взаимно перпендикулярные площадки, свободные от касательных напряжений и называемые главными (рис. 1.2, в). Действующие на них главные напряжения обладают экстремальными свойствами и связаны между собой соотношением

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (1.4)$$

(с учетом знака!).

Напряженное состояние в точке можно изобразить графически с помощью круговой диаграммы Мора. Геометрическим образом напряженного состояния является криволиней-



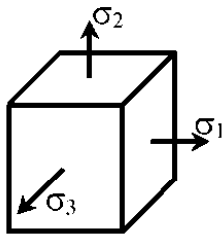
ный треугольник 123. Из рисунка –наглядно видно, что наибольшее касательное напряжение равно

$$\tau_{max} = 0,5(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (1.5)$$

Классификация напряженных состояний:

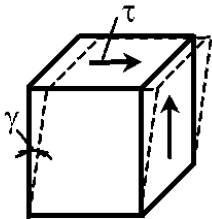
1. *Объемное* (все три главных напряжения отличны от нуля).
2. *Плоское* (одно из главных напряжений равно нулю).
3. *Линейное* (два главных напряжения равны нулю).

Связь между напряжениями
и деформациями



Закон Гука в главных осях

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] / E, \\ \varepsilon_2 &= [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] / E, \\ \varepsilon_3 &= [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] / E. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

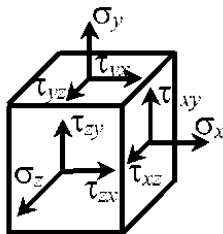


Закон Гука при сдвиге

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (1.7)$$

где γ - угол сдвига, G - модуль сдвига, равный

$$G = E / [2(1 + \nu)]. \quad (1.8)$$



Обобщенный закон Гука

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] / E, \quad \gamma_{xy} = \tau_{xy} / G, \\ \varepsilon_y &= [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] / E, \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G, \\ \varepsilon_z &= [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] / E, \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx} / G. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Относительное изменение объема $\varepsilon_v = \sigma/K$, (1.10)
 где $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ – среднее напряжение, $K = E/[3(1-2\nu)]$
 – модуль объемной деформации.

Удельная потенциальная энергия упругой деформации.

Полная

$$u = \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \right] / (2E). \quad (1.11)$$

Энергия изменения объема

$$u_{об} = 3(1-2\nu)\sigma^2 / (2E) = \sigma^2 / (2K). \quad (1.12)$$

Энергия изменения формы

$$u_{\phi} = \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] / (12G). \quad (1.13)$$

Линейное напряженное состояние

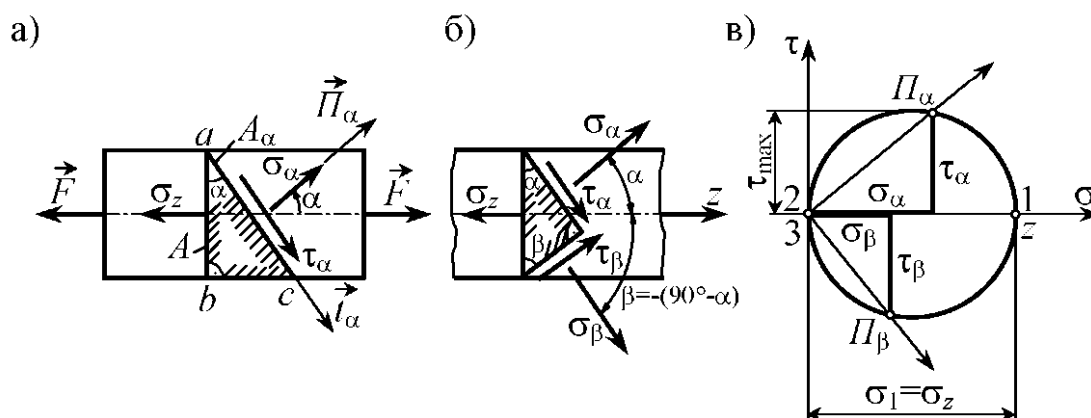


Рис. 1.4

Оно реализуется при центральном растяжении и сжатии прямолинейного стержня (рис. 1.4, а). Для определения на-

пряжений на произвольной наклонной площадке выделим элемент и рассмотрим его равновесие:

$$\begin{aligned} \sum F_{in} = 0, \quad \sigma_{\alpha} \cdot A_{\alpha} &= \sigma_z \cdot A \cdot \cos \alpha, \quad \text{откуда} \quad \sigma_{\alpha} = \sigma_z \cos^2 \alpha; \\ \sum F_{if} = 0, \quad \tau_{\alpha} \cdot A_{\alpha} &= \sigma_z \cdot A \cdot \sin \alpha, \quad \text{откуда} \quad \tau_{\alpha} = \sigma_z \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= 0,5 \sigma_z \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Итак,} \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \sigma_z \cos^2 \alpha = 0,5 \sigma_z (1 + \cos 2\alpha), \\ \tau_{\alpha} &= 0,5 \sigma_z \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

На площадке, перпендикулярной к данной, с нормалью, наклоненной к оси z под углом $\beta = -(90^{\circ} - \alpha)$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\beta} &= \sigma_z \sin^2 \alpha; \\ \tau_{\beta} &= -0,5 \sigma_z \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Из формул (1.14) и (1.15) вытекают следующие выводы:

1. Наибольшее нормальное напряжение возникает в поперечном сечении стержня

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\alpha=0} = \sigma_z = N_z/A.$$

2. Наибольшее касательное напряжение возникает на площадке, наклоненной под углом 45° к оси стержня

$$\tau_{\max} = \tau_{\alpha=45^{\circ}} = 0,5 \sigma_z.$$

3. На двух любых взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по величине $|\tau_{\alpha}| = |\tau_{\beta}|$, а сумма нормальных напряжений постоянна

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_z = \text{const.}$$

Исключая из формул (1.14) угол α , получим

$$(\sigma_{\alpha} - 0,5 \sigma_z)^2 + \tau_{\alpha}^2 = (0,5 \sigma_z)^2. \quad (1.15)$$

Это уравнение круговой диаграммы Мора для линейного напряженного состояния (рис. 1.4, в).

Линейная деформация в произвольном направлении, образующем угол α с осью z , определяется по закону Гука следующим выражением:

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{1}{E}(\sigma_{\alpha} - \nu\sigma_{\beta}) = \frac{\sigma_z}{E}(\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) \quad (1.16)$$

Пример 1.1. Подобрать диаметр стержня круглого сечения из условия, что наибольшее касательное напряжение в нем не должно превышать 100 МПа. Найти также величину нормального напряжения в точке K сечения mn , если $F = 8$ кН.

Решение. 1. Строим эпюру продольной силы и устанавливаем:

$$N_{\max} = N_{AB} = 2F, \quad N_{BC} = F.$$

2. Определяем диаметр стержня. Из условия прочности по касательным напряжениям $\tau_{\max} = 0,5\sigma_{\max} \leq [\tau]$

$$\text{или } 0,5N_{\max}/A = 0,5(2F)/(0,25\pi d^2) \leq [\tau],$$

$$\text{откуда } d = \sqrt{4F/(\pi[\tau])} = \sqrt{4 \cdot 8 \cdot 10^3 / (\pi \cdot 100 \cdot 10^6)} = 10 \text{ мм.}$$

3. Определяем нормальное напряжение в точке K сечения mn (уч. BC)

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_z \cdot \cos^2 \alpha = (F/A) \cos^2 30^{\circ} = (8 \cdot 10^3 / \pi \cdot 1^2 \cdot 10^{-4}) \cdot 0,75 = 76 \text{ МПа.}$$

Пример 1.2. Тензометр, имеющий коэффициент увеличения $k = 1000$ и базу $s = 20$ мм, установлен на стальном образце сечением 20×7 мм под углом 45° к его оси. Определить показание тензометра при нагружении образца силой

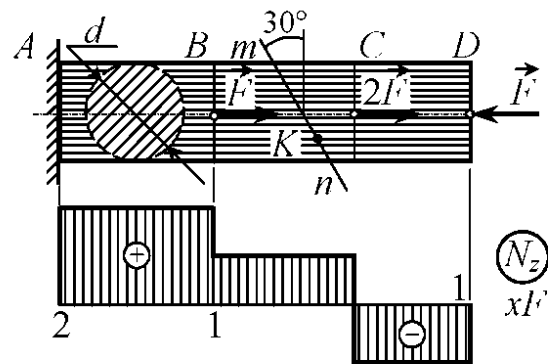


Рис. 1.5

$F = 40$ кН. Принять $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$.

Решение.

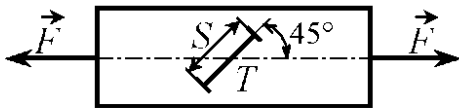


Рис. 1.6

Деформация в направлении базы тензометра равна

$$\varepsilon_T = \varepsilon_\alpha = \Delta n / (K \cdot s). \quad (a)$$

С другой стороны,

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sigma_z}{E} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) = \frac{F(1-\nu)}{2AE}. \quad (б)$$

Приравнявая (а) и (б), находим

$$\Delta n = \frac{F \cdot k \cdot s}{2AE} (1-\nu) = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 1000 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot (20 \cdot 7) \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^9} (1-0,3) = 10 \text{ мм.}$$

1.3. Плоское напряженное состояние

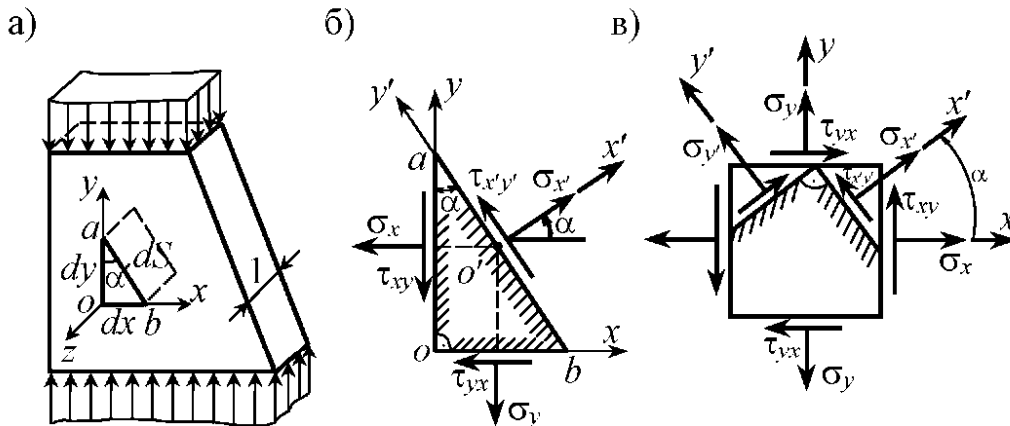


Рис. 1.7

Оно реализуется, например, в тонкой пластине, нагруженной по контуру силами, равномерно распределенными по ее толщине (рис. 1.7).

Зная напряжения на площадках, совпадающих с координатными плоскостями xz и yz , определим напряжения на произвольной наклонной площадке, а также наибольшие нормальные и касательные напряжения, возникающие в дан-

ной точке. Выделим из пластины бесконечно малый элемент aob и рассмотрим его равновесие:

$$\sum m_{o'} = 0, \tau_{xy} dy \cdot 1 \cdot dx / 2 = \tau_{yx} dx \cdot 1 \cdot dy / 2, \text{ откуда } \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1.17)$$

$$\sum X'_i = 0, \sigma_{x'} ds - \sigma_x dy \cos \alpha - \sigma_y dx \sin \alpha - \tau_{xy} dy \sin \alpha - \tau_{yx} dx \cos \alpha = 0$$

откуда после сокращения на ds

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \quad (a)$$

$$\sum Y'_i = 0, \tau_{x'y'} ds + \sigma_x dy \sin \alpha - \sigma_y dx \cos \alpha - \tau_{xy} dy \cos \alpha + \tau_{yx} dx \sin \alpha = 0$$

откуда после упрощения

$$\tau_{x'y'} = -0,5(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (б)$$

Итак,
$$\begin{cases} \sigma_{x'} = 0,5(\sigma_x + \sigma_y) + 0,5(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \tau_{x'y'} = -0,5(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{cases} \quad (1.18)$$

Если заменить в формуле (а) угол α на $90^\circ + \alpha$, то получим

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha. \quad (в)$$

Исключая в формулах (1.18) угол α , получим уравнение круговой диаграммы Мора для плоского напряженного состояния (рис. 1.8)

$$[\sigma_{x'} - 0,5(\sigma_x + \sigma_y)]^2 + \tau_{x'y'}^2 = [0,5(\sigma_x + \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2. \quad (1.19)$$

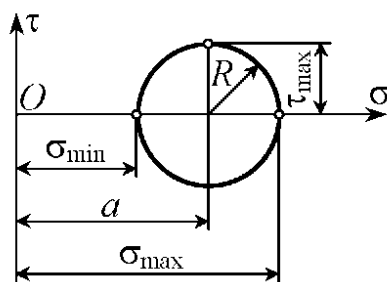


Рис. 1.8

Это уравнение типа $(x-a)^2 + y^2 = R^2$,

где $a = 0,5(\sigma_x + \sigma_y)$,

$$R^2 = [0,5(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2.$$

Непосредственно из круговой диаграммы находим величины главных напряжений:

$$\sigma_{\max} = a + R = 0,5 \left[(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right], \quad (1.20)$$

$$\sigma_{\min} = a - R = 0,5 \left[(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right].$$

Ориентация главных осей определяется из условия $\tau_{x'y'} = 0$, откуда
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y). \quad (1.21)$$

Более удобна следующая формула:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max/\min} = \left(\frac{\sigma_{\max/\min} - \sigma_x}{\tau_{xy}} \right). \quad (1.22)$$

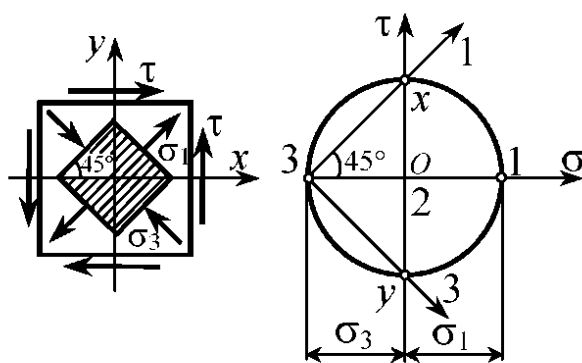
Экстремальные касательные напряжения равны по величине радиусу круговой диаграммы

$$\tau_{\max/\min} = \pm R = 0,5\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (1.23)$$

И действуют на площадках, равнонаклоненных к главным осям.

Частный случай - чистый сдвиг (рис. 1.9).

Так как $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$, то по формулам (1.20) и (1.21) получим



$$\sigma_{\max/\min} = \pm\tau,$$

следовательно

$$\sigma_1 = +\tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \pm\infty, \quad \text{откуда}$$

$$2\alpha_0 = \pm 90^\circ \quad \text{и} \quad 2\alpha_0 = \pm 90^\circ.$$

Рис. 1.9

Зависимости между напряжениями и деформациями определяются законом Гука:

- прямая форма

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu\sigma_y) / E, \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu\sigma_x) / E, \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G; \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

- обратная форма

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) / (1 - \nu^2), \\ \sigma_y &= E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) / (1 - \nu^2), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Пример 1.3. Найти аналитически и графически величины и направления главных напряжений, действующих в плоском элементе, на гранях которого заданы напряжения (МПа): $\sigma_x = 20$, $\sigma_y = -60$, $\tau_{xy} = -80$.

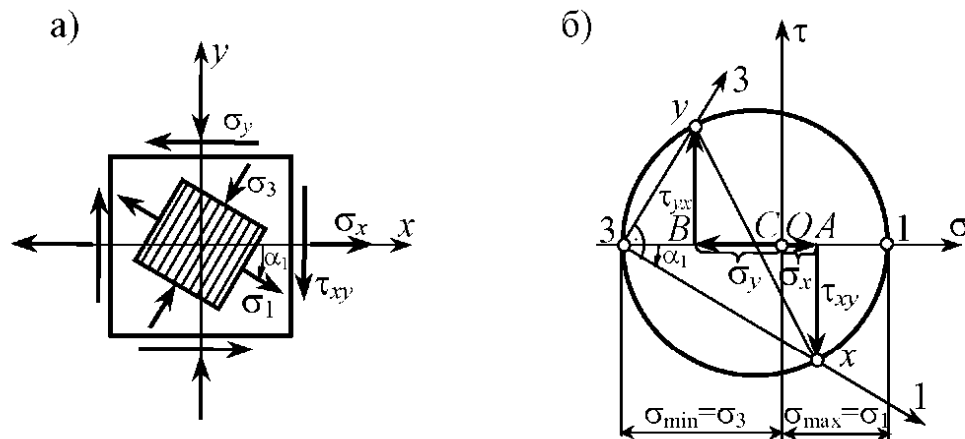


Рис. 1.10

Решение. 1. Аналитический метод. Величины главных напряжений

$$\sigma_{\max/\min} = 0,5 \left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right],$$

$$\sigma_{\max/\min} = 0,5 \left[(20 - 60) \pm \sqrt{(20 + 60)^2 + 4(-80)^2} \right] = 0,5[-40 \pm 178,9],$$

следовательно, $\sigma_{\max} = \sigma_1 = 69,4 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0;$
 $\sigma_{\min} = \sigma_3 = -109,4 \text{ МПа}.$

Направление главной оси 1

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_x) / \tau_{xy} = (69,4 - 20) / (-80) = -0,62; \quad \alpha_1 = -31^\circ 42'.$$

2. Графический метод. Для графического решения задачи необходимо по заданным напряжениям построить круговую диаграмму Мора. Отложив по оси абсцисс отрезки, изображающие в выбранном масштабе нормальные напряжения, $OA = \sigma_x$, $OB = \sigma_y$ и разделив отрезок AB пополам, найдем центр круга C , абсцисса которого $0,5(\sigma_x + \sigma_y) = a$. Далее отложим из точки A отрезок $Ax = \tau_{xy}$, а из точки B в противоположном направлении отрезок $Bu = \tau_{yx}$. Замечая, что $AC = 0,5(\sigma_x - \sigma_y)$, найдем радиус круга $R = \sqrt{[0,5(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2} = Cx$. Окружность, описанная этим радиусом, отсекает на оси абсцисс отрезки $O1 = a + R = \sigma_{\max}$ и $O3 = a - R = \sigma_{\min}$. Нетрудно установить, что $\angle xC1 = 2\alpha_1$, а $\angle x31 = \alpha_1$, как вписанный. Следовательно, линия $3x$ графически определяет направление оси σ_{\max} (оси 1), а линия $3y$ – оси σ_{\min} (оси 3).

Пример 1.4. На плоское напряженное состояние чистого сдвига с напряжением $\tau = 10 \text{ МПа}$ накладывается двухосное сжатие с напряжениями, равными 10 МПа . Каково будет результирующее напряженное состояние?

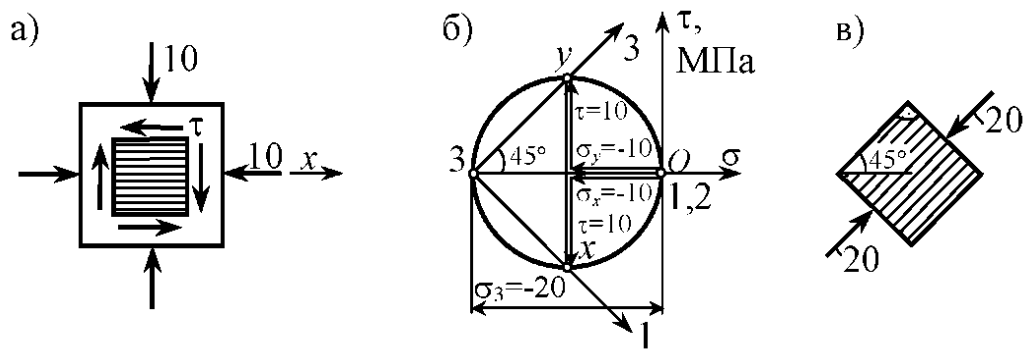


Рис. 1.11

Решение. Задачу решаем графически. По двум точкам x и y строим круговую диаграмму (рис. 1.11, б), из которой находим главные напряжения $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -20$ МПа, т.е. результирующее напряженное состояние является одноосным сжатием (рис. 1.11, в).

Пример 1.5. В пластине, изготовленной из хрупкого материала, от некоторой нагрузки возникают пропорциональные ей напряжения (рис. 1.12, а). Условно принимая, что прочность материала зависит только от наибольшего растягивающего напряжения, определить, во сколько раз должна возрасти нагрузка, чтобы в пластине появилась трещина, если предел прочности материала на растяжение равен $\sigma_{\text{гчр}} = 50$ МПа. Под каким углом к оси x будет наклонена трещина?

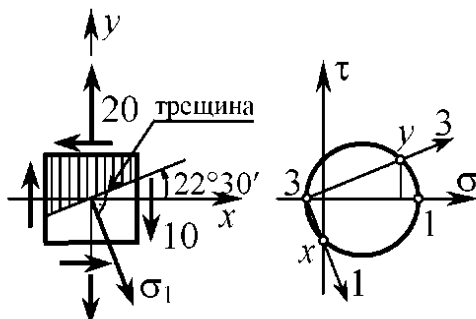


Рис. 1.12

Решение. Вычисляем наибольшее главное напряжение

$$\sigma_1 = 0,5[(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}] =$$

$$= 0,5 \left(20 + \sqrt{20^2 + 4 \cdot 10^2} \right) = 24,14 \text{ МПа.}$$

Ориентация оси 1

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_x) / \tau_{xy} = 24,14 / (-10) = -2,41,$$

откуда $\alpha_1 = -67^\circ 30'$. Трещина, будучи перпендикулярной к наибольшему растягивающему напряжению σ_1 , направлена под углом $90^\circ - |\alpha_1| = 22^\circ 30'$ к оси x .

Находим запас прочности $\Pi = \sigma_{\text{пчр}} / \sigma_1 = 50 / 24,14 = 2,07$.

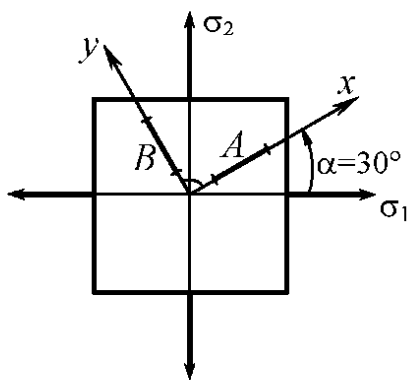


Рис. 1.13

Пример 1.6. Вычислить величины главных напряжений, действующих по граням элемента, если известно, что после приложения этих напряжений приращения показаний тензометров A и B составили соответственно: $\Delta \Pi_A = 9,9$ мм, $\Delta \Pi_B = 3,1$ мм. Тензометр A

установлен под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению напряжения σ_1 , а тензометр B перпендикулярно к тензометру A . Базы тензометров одинаковы и равны $s = 20$ мм, коэффициент увеличения $k = 1000$. Модуль упругости материала пластины $E = 80$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,35$.

Решение

Относительные удлинения в направлении тензометров A и B равны

$$\varepsilon_x = \Delta n_A / (k \cdot s) = 9,9 / (1000 \cdot 20) = 4,95 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_y = \Delta n_B / (k \cdot s) = 3,1 / (1000 \cdot 20) = 1,55 \cdot 10^{-4}.$$

Пользуясь законом Гука в обратной форме, находим напряжения

$$\sigma_x = E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) / (1 - \nu^2) = (4,95 + 0,35 \cdot 1,55) \cdot 10^{-4} \cdot 80 \cdot 10^9 / (1 - 0,35^2) = 50 \text{ МПа},$$

$$\sigma_y = E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) / (1 - \nu^2) = (1,55 + 4,95 \cdot 0,35) \cdot 10^{-4} \cdot 80 \cdot 10^9 / (1 - 0,35^2) = 30 \text{ МПа}.$$

Для вычисления главных напряжений имеем следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha, \\ \sigma_y &= \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha, \end{aligned} \right\}$$

решая которую, найдем $\sigma_1 = 60 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 20 \text{ МПа}$.

1.4. Объемное напряженное состояние

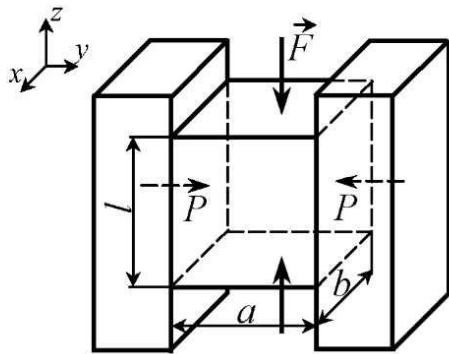


Рис. 1.14

Пример 1.7. Между параллельными неподвижными абсолютно жесткими плитами плотно вставлен стальной параллелепипед со сторонами $a = 4 \text{ см}$, $b = 2 \text{ см}$, $l = 6 \text{ см}$. Вычислить коэффициент Пуассона материала

бруса, если известно, что при сжатии силами $F = 100 \text{ кН}$ давление последнего на плиты составляет $p = 37,5 \text{ МПа}$. Определить также укорочение бруса Δl , пренебрегая силами трения, если модуль упругости $E = 200 \text{ ГПа}$.

Решение. Напряжения, действующие на гранях параллелепипеда, равны $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = -p = -37,5$ МПа; $\sigma_z = -F/(a \cdot b) = -125$ МПа.

Так как плиты являются абсолютно жесткими, то ребро, перпендикулярное к ним, не деформируется, т.е.

$$\varepsilon_y = [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]/E = 0,$$

откуда $\nu = \sigma_y/\sigma_z = 37,5/125 = 0,3$.

По закону Гука находим укорочение бруса:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \varepsilon_z \cdot l = l(\sigma_z - \nu\sigma_y)/E = -6 \cdot 10^{-2} (125 - 0,3 \cdot 37,5) \cdot 10^6 / (200 \cdot 10^9) = \\ &= -34 \text{ мкм.} \end{aligned}$$

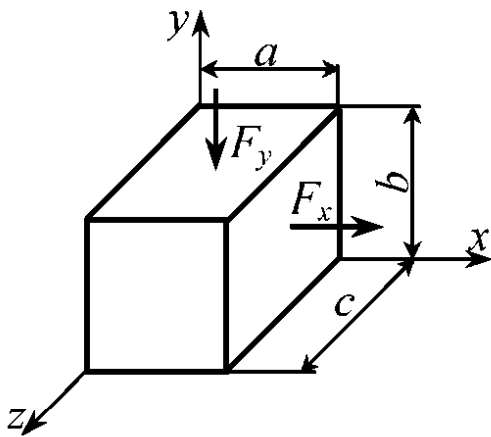


Рис. 1.15

Пример 1.8. По двум граням стального параллелепипеда должны действовать две заданные силы $F_x = 400$ и $F_y = -600$ кН. Спрашивается, какую силу необходимо приложить к грани, перпендикулярной оси z , чтобы объем бруса остался неизменным,

если дано $a = b = 5$ см, $c = 10$ см.

Решение

Так как объем не меняется, то

$$\varepsilon_v = \sigma/K = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / (3K) = 0,$$

откуда $\sigma_z = -(\sigma_x + \sigma_y)$.

Но $\sigma_x = F_x/(b \cdot c)$, $\sigma_y = F_y/(a \cdot c)$, $\sigma_z = F_z/(a \cdot b)$.

Следовательно, $F_z/(ab) = -[F_x/(bc) + F_y/(ac)]$.

Отсюда $F_z = -(F_x \cdot a + F_y \cdot b)/c = -(400 \cdot 5 - 600 \cdot 5)/10 = 100$ кН.

Таким образом, к грани, перпендикулярной оси z , необходимо приложить растягивающую силу $F_z = 100$ кН.

Пример 1.9

Резиновый брус квадратного сечения 4×4 см, жестко закрепленный обоими концами на участке длиной a , подвергается действию равномерно распределенного давления $\rho = 4$ МПа. Определить перемещение сечения mn , если $E = 8$ МПа, $\nu = 0,5$; $a = 8$ см.

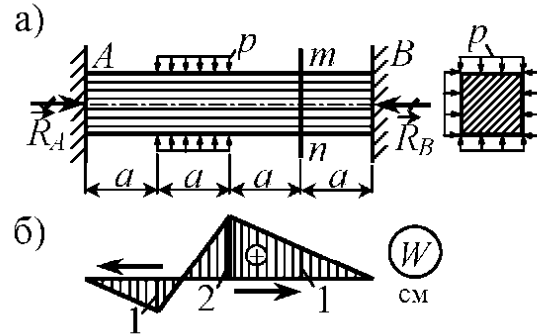


Рис. 1.16

Определить перемещение сечения mn , если $E = 8$ МПа, $\nu = 0,5$; $a = 8$ см.

Решение

1. Раскрытие статической неопределимости. Данная система является однажды статически неопределимой, поэтому в дополнение к уравнению статики

$$\sum Z_i = 0, \quad R_A - R_B = 0, \quad R_A = R_B = R;$$

необходимо составить уравнение совместности деформаций $\Delta l = 0$. При вычислении Δl следует учесть, что на нагруженном участке бруса напряженное состояние является объемным, а на остальной части – линейным. Поэтому

$$\Delta l = \varepsilon_z \cdot a - R \cdot 3a / (EA) = 0.$$

Но $\varepsilon_z = [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]/E$; $\sigma_x = \sigma_y = -\rho$; $\sigma_z = -R/A$.

Следовательно,

$$-R/A + 2\rho\nu - 3R/A = 0, \quad \text{откуда} \quad R = 0,5\rho\nu A.$$

2. Определение искомого перемещения. Перемещение сечения mn определяется как укорочение участка бруса, заключенного между сечением mn и заделкой B ,

$$W_{mn} = R \cdot a / (EA) = 0,5 \rho v a / E = 0,5 \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot 8 / 8 = 1 \text{ см}$$

и направлено вправо. Эпюра продольных перемещений для всего бруса приведена на рис. 1.16, б.

1.5. Гипотезы прочности

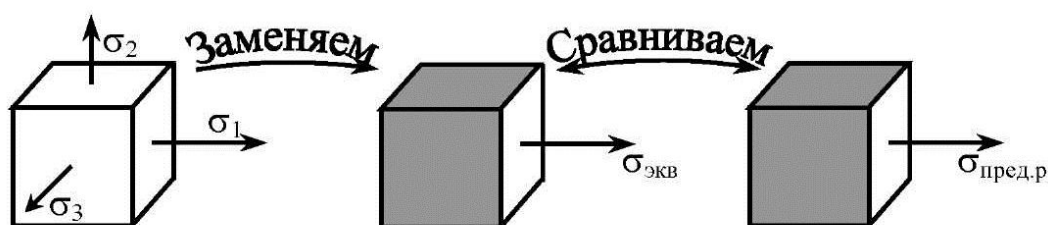


Рис. 1.17

При одноосном растяжении расчет на прочность производится по формуле

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma_p]. \quad (1.26)$$

В случае сложного напряженного состояния последнее заменяется сначала равноопасным или эквивалентным ему растяжением с главным напряжением $\sigma_{\text{экв}}$ (исходя из принятого критерия эквивалентности), а затем $\sigma_{\text{экв}}$ сравнивается с предельным или допускаемым для данного материала напряжением (рис. 1.17).

Критерии эквивалентности даются гипотезами прочности, наиболее известные из которых приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Название, автор	Критерий прочн.	Эквивалентное напряжение	Область примен.
Гипотеза наибольших нормальных напряжений, Галилей, XVII в.	σ_{\max}	$\sigma_{\text{экв I}} = \sigma_1$	Не рекомендуется
Гипотеза наибольших линейных деформаций Мариотт, 1682 г.	ε_{\max}	$\sigma_{\text{экв II}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$	
Гипотеза наибольших касательных напряжений, Кулон, 1773 г.	τ_{\max}	$\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3$	Для пластичных материалов, у которых $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}}$
Гипотеза энергии формоизменения, Губер, 1904 г.	$u_{\text{ф}}$	$\sigma_{\text{экв IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$	
Гипотеза О.Мора, Мор, 1882 г.	$\tau_n = f(\sigma_n)$	$\sigma_{\text{экв M}} = \sigma_1 - m\sigma_3$ $m = \begin{cases} \sigma_{\text{тр}} / \sigma_{\text{тс}} - \text{пласт. мат.} \\ \sigma_{\text{пчр}} / \sigma_{\text{пчс}} - \text{хрупкие} \end{cases}$	Для пластичных и хрупких материалов

После определения эквивалентного напряжения условие прочности представляется в виде одного из следующих неравенств:

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma_p] = \sigma_{\text{пред,р}} / [\Pi] \quad (1.27)$$

или
$$\Pi = \sigma_{\text{пред,р}} / \sigma_{\text{экв}} \geq [\Pi], \quad (1.28)$$

где $\sigma_{\text{пред,р}}$ – предельное напряжение материала на растяжение, равное пределу текучести $\sigma_{\text{тр}}$ для пластичных материалов или пределу прочности $\sigma_{\text{пчр}}$ для хрупких материалов; Π и $[\Pi]$ – фактический и нормативный коэффициенты запаса прочности.

Пример 1.10. Проверить прочность конструкции, если в опасной точке имеет место указанное на рисунке напряженное состояние. Дано:

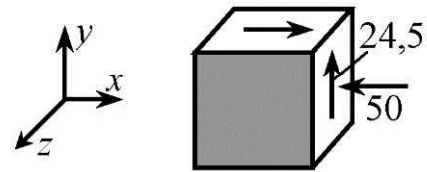


Рис. 1.18

$\sigma_{\text{пчр}} = 150 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\text{пчс}} = 600 \text{ МПа}, \quad [\Pi] = 5.$

Решение

1. Определение главных напряжений. Напряженное состояние в точке является плоским, поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{max}} \\ \sigma_{\text{min}} &= 0,5 \left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] = \\ &= 0,5 \left[(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 + 4 \cdot 24,5^2} \right] = 0,5(-50 \pm 70), \end{aligned}$$

откуда $\sigma_{\text{max}} = 10 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\text{min}} = -60 \text{ МПа}$. Следовательно, величины главных напряжений равны $\sigma_1 = 10 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -60 \text{ МПа}$.

2. Проверка прочности конструкции. Здесь возможны два подхода

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma_p] = \sigma_{\text{пчр}} / [\Pi]$$

или
$$\Pi = \sigma_{\text{пчр}} / \sigma_{\text{экв}} \geq [\Pi].$$

Эквивалентное напряжение вычисляем по гипотезе О.Мора, так как материал хрупкий и неодинаково работает на растяжение и сжатие:

$$\sigma_{\text{экв}_M} = \sigma_1 - m \cdot \sigma_3, \quad m = \sigma_{\text{пчр}} / \sigma_{\text{пчс}} = 150 / 600 = 0,25;$$

$$\sigma_{\text{экв}_M} = 10 - 0,25 \cdot (-60) = 25 \text{ МПа.}$$

Допускаемое напряжение $[\sigma_p] = \sigma_{\text{пчр}} / [\Pi] = 150 / 5 = 30 \text{ МПа}$.

Следуя первому подходу, сравниваем $\sigma_{\text{экв}_M}$ и $[\sigma_p]$. Так как $\sigma_{\text{экв}_M} = 25 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 30 \text{ МПа}$, то прочность конструкции обеспечена.

Согласно второму подходу находим фактический коэффициент запаса прочности $\Pi = \sigma_{\text{пчр}} / \sigma_{\text{экв}_M} = 150 / 25 = 6$.

Как видим, $\Pi = 6 > [\Pi] = 5$, т.е. прочность конструкции обеспечена.

Пример 1.11. Какое из трех приведенных напряженных состояний является более опасным? Дано: $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}}$.

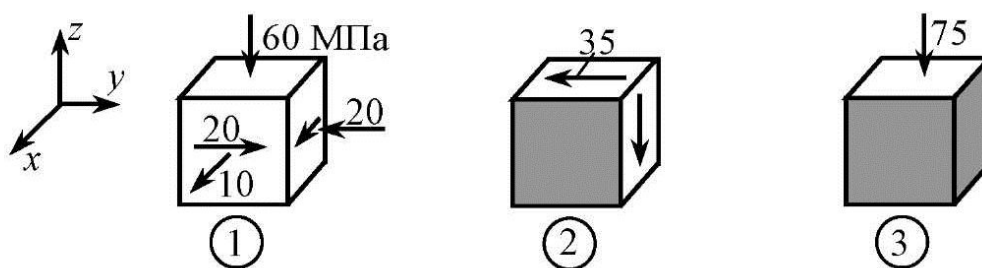


Рис. 1.19

Решение. Для сравнения напряженных состояний находим эквивалентные напряжения. Материал является пластичным и одинаково работает на растяжение и сжатие, поэтому воспользуемся 3-й гипотезой прочности.

Точка 1. Напряженное состояние является объемным, причем одно из главных напряжений уже известно. Для определения двух других главных напряжений воспользуемся формулами для плоского напряженного состояния. Имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} &= 0,5 \left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] = \\ &= 0,5 \left[(10 - 20) \pm \sqrt{(10 + 20)^2 + 4 \cdot 20^2} \right] = 0,5(-10 \pm 50);\end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = 20 \text{ МПа}, \sigma_{\min} = -30 \text{ МПа}.$$

Следовательно, $\sigma_1 = 20$ МПа, $\sigma_2 = -30$ МПа, $\sigma_3 = -60$ МПа.

Эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{ЭКВ III}}^{(1)} = \sigma_1 - \sigma_3 = 20 - (-60) = 80 \text{ МПа}.$$

Точка 2. Напряженное состояние является чистым сдвигом, поэтому $\sigma_1 = \tau = 35$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau = -35$ МПа.

Эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{ЭКВ III}}^{(2)} = \sigma_1 - \sigma_3 = 35 - (-35) = 70 \text{ МПа}.$$

Точка 3. Напряженное состояние является линейным (одноосное сжатие), поэтому $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -75$ МПа.

Эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{ЭКВ III}}^{(3)} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - (-75) = 75 \text{ МПа}.$$

Так как $\sigma_{\text{ЭКВ III}}^{(1)} > \sigma_{\text{ЭКВ III}}^{(3)} > \sigma_{\text{ЭКВ III}}^{(2)}$, то наиболее опасным является напряженное состояние в точке 1.

2. КРУЧЕНИЕ КРУГЛЫХ ВАЛОВ

2.1. Краткие сведения из теории

Кручением называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только один внутренний силовой фактор – *крутящий момент*, обозначаемый M_K или M_Z .

Теория кручения круглых валов основана на 2-х гипотезах.

1. В поперечных сечениях возникают только касательные напряжения.

2. Поперечные сечения поворачиваются без искривления радиусов, оставаясь плоскими.

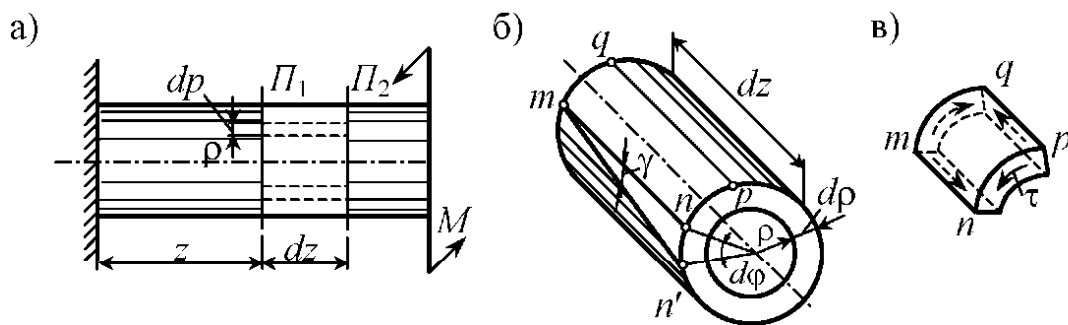


Рис. 2.1

Согласно 1-й гипотезе бесконечно малый элемент $mtrpq$ испытывает чистый сдвиг, поэтому $\tau = G \cdot \gamma$. (а)

С другой стороны, из чертежа (рис. 4.1,б)

$$\gamma dz = \rho d\varphi, \text{ откуда } \gamma = \rho d\varphi/dz = \rho\theta, \quad (\text{б})$$

где $\theta = d\varphi/dz$ – относительный угол закручивания.

$$\text{Следовательно, } \tau = G\theta\rho. \quad (\text{в})$$

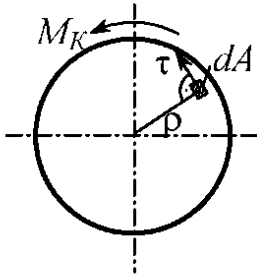


Рис. 2.2

По определению крутящего момента

$$M_K = \int_A \tau dA \rho \quad \text{или} \quad \text{с учетом} \quad (в)$$

$$M_K = G\theta \int_A \rho^2 dA = G\theta I_p, \quad (г)$$

где $I_p = \int_A \rho^2 dA$ - полярный момент инерции.

Вычисляя из (г) θ и подставляя его в (в), получим закон распределения касательных напряжений в поперечном сечении (рис.

$$2.3) \quad \tau = (M_K/I_p)\rho \quad (2.1)$$

$$\text{Отсюда} \quad \tau_{\max} = (M_K/I_p) \cdot \rho_{\max} = M_K/W_p, \quad (2.2)$$

где $W_p = I_p/\rho_{\max}$ - полярный момент сопротивления.

Геометрические характеристики:

$$dA = 2\pi\rho d\rho,$$

$$\text{- полый вал} \quad I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_{d_n/2}^{d_h/2} 2\pi\rho^3 d\rho,$$

$$\begin{cases} I_p = (\pi d_n^4 / 32)(1 - \alpha^4) & \text{или} \quad I_p \approx 0,1 d_n^4 (1 - \alpha^4) \\ W_p = I_p / \rho_{\max} = (\pi d_n^3 / 16)(1 - \alpha^4) \approx 0,2 d_n^3 (1 - \alpha^4) \end{cases} \quad (2.3)$$

- тонкостенная труба ($t \ll d_n$, $\alpha > 0,9$)

$$I_p = 0,25\pi d_{cp}^3 t, \quad W_p = 0,5\pi d_{cp}^2 t;$$

- сплошной вал ($d_b = 0$, $d_n = d$)

$$I_p = \pi d^4 / 32 \approx 0,1 d^4; \quad (2.4)$$

$$W_p = \pi d^3 / 16 \approx 0,2 d^3.$$

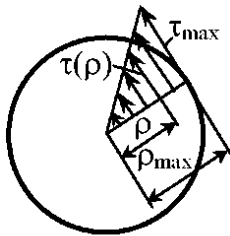


Рис. 2.3

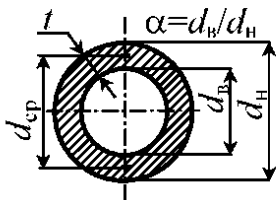


Рис. 2.4

Угол закручивания:

- относительный $\theta = d\varphi/dz = M_K/(GI_p),$ (2.5)

- абсолютный $\varphi = \varphi_0 + \int_0^z M_K dz / (GI_p),$ (2.6)

в частности, при $M_K = \text{const}$ $\varphi = \varphi_0 + M_K z / (GI_p).$ (2.7)

Расчет валов сводится к одновременному удовлетворению двух условий:

- условия прочности $\tau_{\text{max}} \leq [\tau],$

$M_{K_{\text{max}}} / W_p \leq [\tau],$ откуда $d_{\text{пч}} = \sqrt[3]{\frac{16M_{K_{\text{max}}}}{\pi[\tau]}};$ (2.8)

- условия жесткости $\theta_{\text{max}} \leq [\theta],$

$M_{K_{\text{max}}} / (GI_p) \leq [\theta],$ откуда $d_{\text{ж}} = \sqrt[4]{\frac{32M_{K_{\text{max}}}}{\pi G[\theta]}}.$ (2.9)

Окончательно принимается большее из найденных значений

$$d = \max\{d_{\text{пч}}, d_{\text{ж}}\}.$$

Допускаемые величины:

- касательное напряжение

$$[\tau] = \begin{cases} (0,55 \dots 0,60) \cdot [\sigma_p] & \text{— для стали;} \\ (1,0 \dots 1,2) \cdot [\sigma_p] & \text{— для чугуна;} \end{cases}$$

- относительный угол закручивания

$$[\theta] = 4,38 \dots 17,5 \text{ мрад/м} \quad (0,25 \dots 1,0 \text{ град/м}).$$

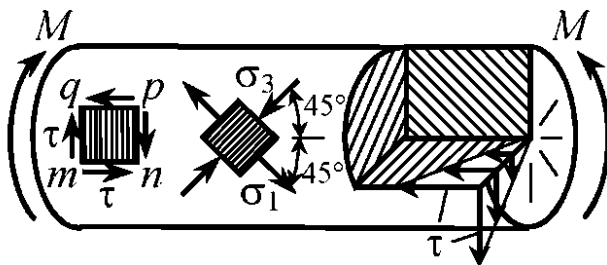


Рис. 2.5

Главные напряжения:

$$\sigma_1 = +\tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau,$$

$$\alpha_{1,3} = \pm 45^\circ.$$

Потенциальная энергия упругой деформации

$$U = \int_L M_K^2 dz / (2GI_p). \quad (2.10)$$

Зависимость скручивающего момента от мощности.

Обычно нагрузка на вал определяется мощностью машины. Если мощность P задана в Вт, а угловая скорость ω в рад/с, то $M = P/\omega$ Н·м.

Если мощность N выражена в лошадиных силах (л.с.), а угловая скорость Π в об/мин, тогда $M = 7162N/\Pi$ Н·м.

2.2. Примеры расчета

Пример 2.1. Построить эпюры крутящего момента M_K и угла закручивания φ для вала, приведенного на рис. 2.6, считая левый конец неподвижным.

Решение

Эпюра M_K . На вал не действует распределенная нагрузка ($m = 0$), поэтому эпюра M_K состоит из отрезков прямых, параллельных оси абсцисс. В сечениях, где к валу приложены сосредоточенные скручивающие пары, на эпюре M_K наблюдаются скачки, равные приложенным моментам. Вычисляем моменты по участкам $M_{DE} = M$, $M_{CD} = M_{DE} - 3M = -2M$, $M_{BC} = M_{CD} + 4M = 2M$, $M_{AB} = M_{BC} - 3M = -M$ и строим эпюру M_K (рис. 2.6,б).

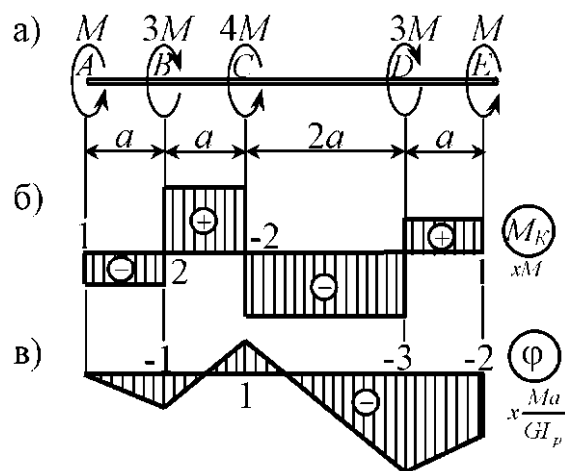


Рис. 2.6

Эпюра φ . Угол закручивания изменяется по линейному закону $\varphi = \varphi_0 + M_K z / (GI_p)$, поэтому для построения эпюры φ вычисляем углы поворота на границах участков, начиная от неподвижного сечения A : $\varphi_A = 0$,

$$\varphi_B = \varphi_A + M_{AB}Q / (GI_p) = -Ma / (GI_p),$$

$$\varphi_C = \varphi_B + M_{BC}Q / GI_p = Ma / (GI_p),$$

$$\varphi_D = \varphi_C + M_{CD}2a / (GI_p) = -3Ma / (GI_p),$$

$$\varphi_E = \varphi_D + M_{DE}Q / (GI_p) = -2Ma / GI_p,$$

и соединяем их отрезками прямых (см. рис. 2.6).

Пример 2.2. Определить величины и указать направления касательных напряжений, возникающих в точках A, B, C .

Дано: $x_A = 3$ см, $y_A = 4$ см,
 $x_B = -1,5$ см, $y_B = 2$ см, $x_C = 0$,
 $y_C = -10$ см.

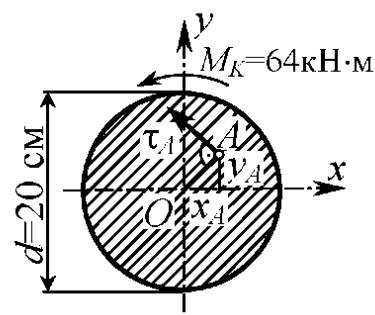


Рис. 2.7

Решение. Напряжение в произвольной точке равно $\tau = (M_K / I_p) \cdot \rho$.

$$\text{Для точки } A: \quad \rho_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ см},$$

$$I_p = \pi d^4 / 32, \quad I_p \cong 0,1 d^4 = 0,1 \cdot 20^4 = 16000 \text{ см}^4,$$

$$\tau_A = (M_K / I_p) \cdot \rho_A = (64 \cdot 10^3 / 16 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}) \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 20 \text{ МПа}.$$

Для остальных точек студенту предлагается определить самостоятельно.

Пример 2.3. Определить касательное напряжение в точке A , если

$$\tau_{\max} = 50 \text{ МПа.}$$

Решение. Касательные напряжения в поперечном сечении распределяются по линейному закону, поэтому

$$\tau_A / \tau_{\max} = \rho_A / \rho_{\max} = d_B / d_H = 0,8,$$

откуда $\tau_A = 0,8 \tau_{\max} = 0,8 \cdot 50 = 40 \text{ МПа.}$

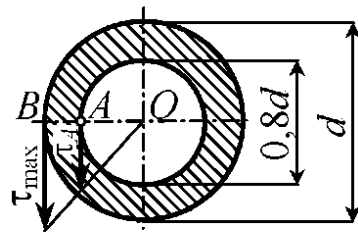


Рис. 2.8

Пример 2.4. Как изменятся наибольшее касательное напряжение τ_{\max} и жесткость вала, если площадь поперечного сечения увеличить в 2 раза?

Решение. Соотношение наибольших касательных напряжений $\tau_1 / \tau_2 = w_{p_2} / w_{p_1} = (d_2 / d_1)^3$.

С другой стороны, $A_2 / A_1 = (d_2 / d_1)^2 \pm 2$, откуда $d_2 / d_1 = \sqrt{2}$. Следовательно, $\tau_1 / \tau_2 = 2^{3/2} = 2,83$ раза. Как видим, наибольшее касательное напряжение уменьшится в 2,83 раза.

Соотношение жесткостей

$$GI_{p_2} / GI_{p_1} = (d_2 / d_1)^4 = (A_2 / A_1)^2 = 2^2 = 4,$$

т.е. жесткость вала возрастет в 4 раза.

Пример 2.5. Определить отношение диаметров двух валов из одинакового материала, передающих одинаковую мощность, если один делает $n_1 = 50$ об/мин, а другой – $n_2 = 400$ об/мин.

Решение. Скручивающий момент M связан с мощностью P известным соотношением $M = P/\omega$. Искомый диаметр из условия прочности равен $d \geq \sqrt[3]{16M_K/(\pi[\tau])}$. Учитывая, что в данном случае $M_K = M$, находим $d_1 = \sqrt[3]{16P/(\pi[\tau]\omega_1)}$ и $d_2 = \sqrt[3]{16P/(\pi[\tau]\omega_2)}$. Отношение диаметров $d_1/d_2 = \sqrt[3]{\omega_2/\omega_1} = \sqrt[3]{n_2/n_1} = \sqrt[3]{400/50} = 2$. Как видим, увеличение скорости вращения при неизменной мощности, передаваемой валом, приводит к уменьшению диаметра и, как следствие, его массы.

Пример 2.6. Два вала одинаковой длины и массы изготовлены из одного и того же материала. Один вал полый ($\alpha = 0,8$), а другой – сплошной. Сравнить грузоподъемность валов при одинаковом допуске напряжении. Определить, насколько уменьшится масса полого вала, если его сделать равнопрочным сплошному при одинаковой грузоподъемности.

Решение. 1. Сравнение грузоподъемности сплошного и полого валов одинаковой массы. Вычисляем массы валов:

- *плогого* $m_1 = \rho A_1 l = \rho l \cdot (\pi/4) d_H^2 (1 - \alpha^2),$

- *сплошного* $m_2 = \rho A_2 l = \rho l \cdot (\pi/4) d^2.$

Если массы равны, то $A_1 = A_2$ и $(d_H/d)^2 = 1/(1 - \alpha^2).$ (а)

Из условия прочности находим грузоподъемности валов:

$$\left. \begin{aligned} M_{K_1} &= w_{p_1} [\tau] = (\pi/16) d_H^3 (1-\alpha^4) [\tau], \\ M_{K_2} &= w_{p_2} [\tau] = (\pi/16) d^3 [\tau], \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

откуда их отношение $M_{K_1}/M_{K_2} = (d_H/d)^3 (1-\alpha^4)$ (в)

Подставляя (а) в (в), окончательно получим

$$M_{K_1}/M_{K_2} = (1-\alpha^4)/(1-\alpha^2)^{3/2} = (1-0,8^4)/(1-0,8^2)^{3/2} = 2,73.$$

Следовательно, грузоподъемность полого вала при равной массе в 2,73 раза выше, чем сплошного.

2. Сравнение массы полого и сплошного валов одинаковой прочности и грузоподъемности. При одинаковой прочности и грузоподъемности из (б) имеем

$$w_{p_1} = w_{p_2}, \quad (d_H/d)^3 = 1/(1-\alpha^4) \quad (г)$$

Отношение масс полого и сплошного валов

$$m_1/m_2 = (d_H/d)^2 (1-\alpha^2)$$

или с учетом (г) $m_1/m_2 = (1-\alpha^2)/(1-\alpha^4)^{2/3} = 0,51.$

Как видим, экономия материала достигает 49 %.

Пример 2.7. Считая величину момента M_1 известной, определить при заданном соотношении диаметров ступенчатого вала величину момента M_2 из условия равнопрочности тонкой и толстой частей.

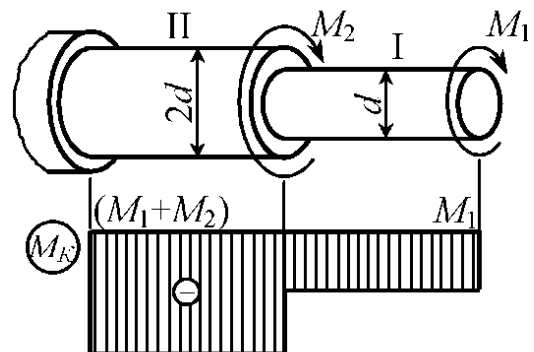


Рис. 2.9

Решение

Из эпюры M_K имеем $M_{K_1} = M_1$, $M_{K_2} = M_1 + M_2$. (а)

При равнопрочности частей $\tau_{\max_1} = \tau_{\max_2}$ или

$$M_{K_1}/w_{p_1} = M_{K_2}/w_{p_2},$$

откуда $M_{K_2}/M_{K_1} = w_{p_2}/w_{p_1} = (d_2/d_1)^3 = (2)^3 = 8$.

Следовательно, с учетом (а): $M_1 + M_2 = 8M_1$ и $M_2 = 7M_1$.

Пример 2.8. Сплошной вал скручивается моментами M , приложенными к его концам. На поверхности вала под углом 45° к его оси установлен тензومتر с базой $s = 20$ мм и увеличением,

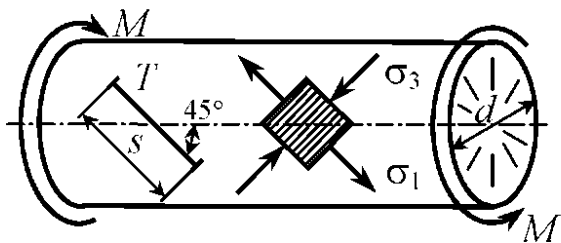


Рис. 2.10

равным $k = 1000$. Определить модуль сдвига материала, если при увеличении крутящего момента на величину $\Delta M_K = 16$ кН·м приращение показаний тензометра составило $\Delta \Pi = 10$ мм. Диаметр вала равен $d = 10$ см.

Решение. Относительная деформация в направлении базы тензометра исходя из показаний последнего равна

$$\varepsilon_{\gamma} = \varepsilon_1^2 = \Delta n / (KS). \quad (а)$$

При кручении главные напряжения равны: $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$, поэтому на основании закона Гука

$$\varepsilon_1 = (\sigma_1 - \nu\sigma_3) / E = \tau(1 + \nu) / E \quad (б)$$

или $\varepsilon_1 = \tau/(2G)$. С другой стороны, $\tau = \Delta M_K/w_p$. (в)

Приравнивая (а) и (б), с учетом (в) получим

$$\Delta n/(KS) = \Delta M_K/(w_p \cdot 2G).$$

Отсюда

$$G = \Delta M_K KS / (\Delta n \cdot 2w_p) =$$

$$= 16 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-3} / (10 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}) = 80 \text{ ГПа}.$$

Пример 2.9

Определить величину момента, вызывающего разрушение чугунного вала, если $d = 75$ мм, $\sigma_{\text{пчр}} = 150$ МПа, $\sigma_{\text{пчс}} = 600$ МПа.

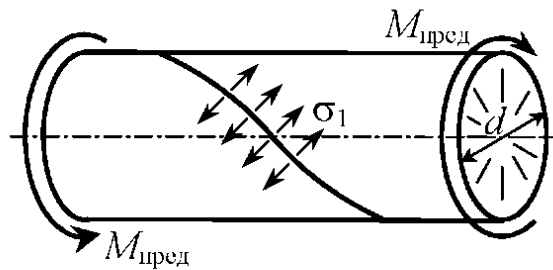


Рис. 2.11

Решение

Учитывая, что чугун является хрупким материалом, воспользуемся гипотезой прочности О.Мора, согласно которой $\sigma_{\text{экв}_M} = \sigma_1 - m\sigma_3$, где $m = \sigma_{\text{пчр}}/\sigma_{\text{пчс}} = 0,25$. При кручении $\sigma_1 = M_{\text{пред}}/w_p$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_1$. Из условия прочности $\sigma_{\text{экв}_M} = \sigma_{\text{пчр}}$ или $M_{\text{пред}}(1 + m)/w_p = \sigma_{\text{пчр}}$ находим искомый разрушающий момент

$$M_{\text{пред}} = \sigma_{\text{пчр}} w_p / (1 + m) = 150 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 7,5^3 \cdot 10^{-6} / (1 + 0,25) = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Пример 2.10.

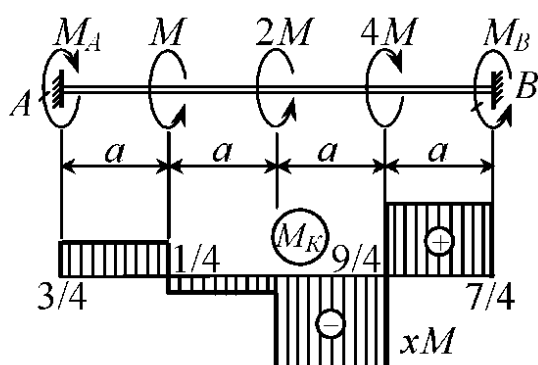


Рис. 2.12

Определить из расчета на прочность допускаемое значение M , если $[\tau] = 45$ МПа, $d = 10$ см.

Решение

1. Определение реакций опор. Задача является стати-

чески неопределимой, поэтому в дополнение к уравнению статики $\sum m_z = 0$, $M_B - M_A + 3M - 4M = 0$, необходимо составить уравнение перемещений $\varphi_{BA} = 0$,

$$\varphi_{BA} = \frac{M_B \cdot 4a}{GI_p} - \frac{4M \cdot 3a}{GI_p} + \frac{2M \cdot 2a}{GI_p} + \frac{M \cdot a}{GI_p} = 0,$$

откуда $M_B = (7/4) M$, а из уравнения статики $M_A = (3/4) M$. Далее строим эпюру M_K , из которой определяем $M_{K \max} = (9/4) M$.

2. Определение допустимого значения момента M . Из условия прочности имеем $\tau_{\max} = M_{K \max} / W_p = (9/4) M / W_p \leq [\tau]$,

откуда $[M] = (4/9) W_p [\tau] = (4/9) 0,2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 45 \cdot 10^6 = 4$ кН·м.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ

В расчетах конструкций на механическую надежность очень часто приходится оперировать такими характеристиками плоских фигур, как статический момент, осевой и полярный моменты инерции. Хотя вычисление вышеназванных геометрических характеристик относится к числу простейших задач интегрального исчисления, тем не менее, в силу их узкого прикладного значения они практически не рассматриваются во втузовском курсе высшей математики. По установившейся традиции геометрические характеристики плоских фигур изучаются в курсе сопротивления материалов.

3.1. Статические моменты.

Определение положения центра тяжести

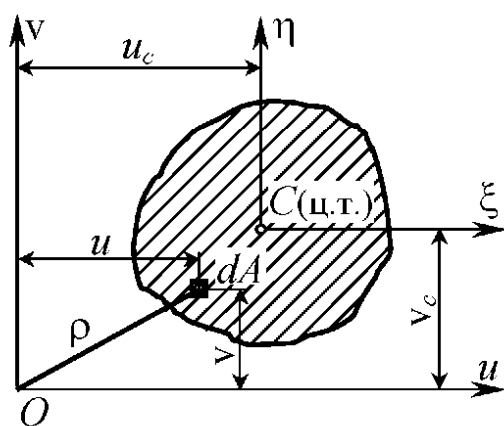


Рис. 3.1

Выражения

$$S_u = \int_A v dA, \quad S_v = \int_A u dA \quad (3.1)$$

называются *статическими моментами* площади относительно осей *u* и *v* (рис. 3.1). Статический момент имеет размерность L^3 . Через

статические моменты определяются координаты центра тяжести (точка C) сечения:

$$u_c = S_v / A, \quad v_c = S_u / A. \quad (3.2)$$

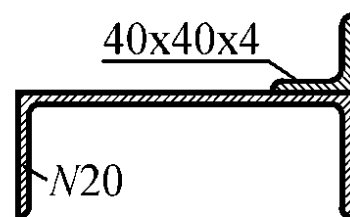
Из формул (3.2) вытекает, что статические моменты относительно осей $\xi\eta$, проходящих через центр тяжести (центральные оси), равны нулю: $S_\xi = 0$, $S_\eta = 0$.

В тех случаях, когда сечение может быть разбито на простейшие составные части, площади и координаты центров тяжести которых известны, положение центра тяжести всего сечения определяют по формулам

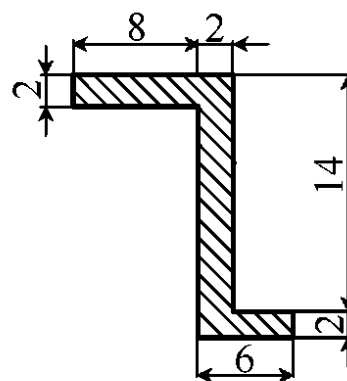
$$u_c = \frac{\sum u_i A_i}{\sum A_i}, \quad v_c = \frac{\sum v_i A_i}{\sum A_i}, \quad (3.3)$$

где A_i – площадь i -й части сечения ($i = 1, 2, 3, \dots, n$); u_i и v_i – координаты ее центра тяжести.

Для сечений, составленных из профилей стандартного проката, площадь каждого профиля и остальные необходимые для расчетов размеры принимаются по таблицам ГОСТов на прокатную сталь.



Пример 3.1. Определить положение центра тяжести сечения, приведенного на рисунке (размеры даны в см).



Решение

Разбиваем сечение на три прямоугольника и выбираем вспомогательные оси uv (рис. 3.2).

Вычисления представим в виде следующей таблицы

Но- мер выч	Коорд., см		Площ $A_i, \text{см}^2$	Стат. мом., см^3	
	u_i	v_i		$u_i A_i$	$v_i A_i$
1	11	1	12	132	12
2	9	8	24	216	192
3	5	15	20	100	300
Σ			56	448	504

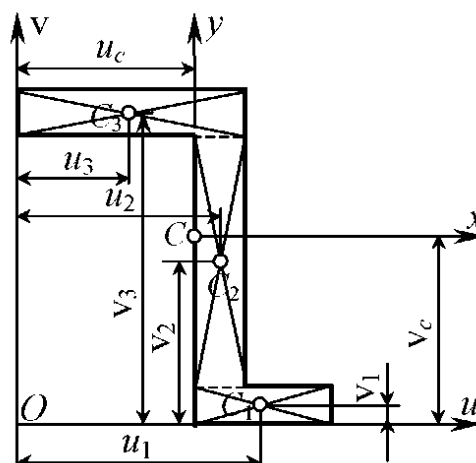


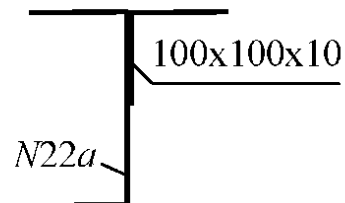
Рис. 3.2

По формулам (3.3) определяем координаты центра тяжести сечения:

$$u_c = \frac{\sum_{i=1}^3 u_i A_i}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{448}{56} = 8 \text{ см},$$

$$v_c = \frac{\sum_{i=1}^3 v_i A_i}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{504}{56} = 9 \text{ см}.$$

Пример 3.2. Определить координаты центра тяжести сечения, составленного из прокатных профилей.



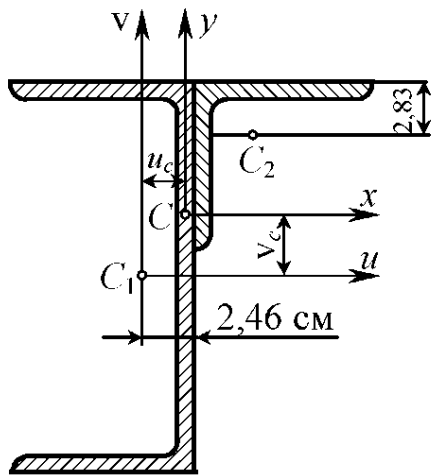


Рис. 3.3

Решение. Из таблиц сорта-мента имеем:

- для швеллера № 22а: $Z_o = 2,46$ см; $A_1 = 28,8$ см²;
- для уголка 100х100х10: $Z_o = 2,83$ см; $A_2 = 19,2$ см².

Совмещаем вспомогательные оси u и v с центральными осями швеллера и выполняем вспомога-тельные вычисления в табличной форме

Таблица 3.2

Номер выч.	Координаты, см		Площадь A_i , см ²	Статич. мом., см ³	
	u_i	v_i		$u_i A_i$	$v_i A_i$
1	0	0	28,8	0	0
2	5,29	8,17	19,2	101,6	156,9

Координаты центра тяжести

$$u_c = \frac{\sum u_i A_i}{\sum A_i} = \frac{101,6}{48} = 2,12 \text{ см,}$$

$$v_c = \frac{\sum v_i A_i}{\sum A_i} = \frac{156,9}{48} = 3,27 \text{ см.}$$

3.2. Моменты инерции

Моментами инерции площади называются интегралы вида

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA, \\ I_y &= \int_A x^2 dA, \\ I_{xy} &= \int_A xy dA, \end{aligned} \right\} (3.4)$$

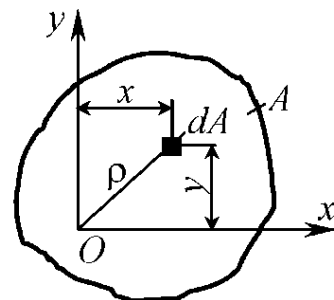


Рис. 3.4

где I_x и I_y – осевые моменты инерции относительно осей x и y , I_{xy} – центробежный момент инерции.

Полярный момент инерции

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_y + I_x. \quad (3.5)$$

Размерность моментов инерции – L^4 . С моментами инерции тесно связаны радиусы инерции:

$$i_x = \sqrt{I_x/A}, \quad i_y = \sqrt{I_y/A}. \quad (3.6)$$

3.3. Преобразование моментов инерции при параллельном переносе осей

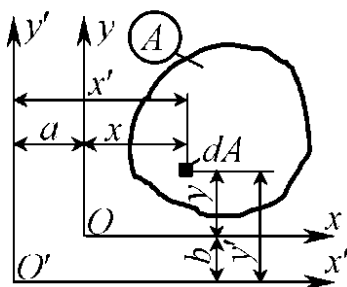


Рис. 3.5

Пусть нам известны моменты инерции относительно осей xOy , а требуется определить те же величины относительно осей $x'O'y'$. Связь между координатами:
 $x' = x + a, y' = y + b.$

По определению
$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA,$$

$$I_{x'} = \int_A (y+b)^2 dA = \int_A y^2 dA + \int_A 2by dA + \int_A b^2 dA.$$

Следовательно,
$$I_{x'} = I_x + 2bS_x + b^2 A, \quad (3.7)$$

и аналогично
$$I_{y'} = I_y + 2aS_y + b^2 A. \quad (3.8)$$

Центробежный момент инерции относительно новых осей

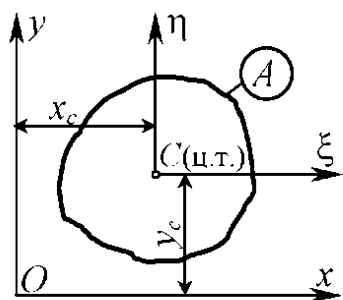


Рис. 3.6

$$I_{x'y'} = \int_A x'y' dA = I_{xy} + aS_x + bS_y + abA. \quad (3.9)$$

Для центральных осей статические моменты равны нулю и формулы преобразования приобретают простой вид:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_\xi + y_c^2 A, & I_y &= I_\eta + x_c^2 A, \\ I_{xy} &= I_{\xi\eta} + x_c y_c A. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Момент инерции сечения сложной формы относительно данной оси определяется как сумма моментов инерции составляющих его частей относительно той же оси

$$I_x \sum_{i=1}^n (I_{\xi_i} + y_i^2 A_i), \quad I_y \sum_{i=1}^n (I_{\eta_i} + x_i^2 A_i), \quad I_{xy} \sum_{i=1}^n (I_{\xi_i \eta_i} + x_i y_i A_i), \quad (3.11)$$

где x_i, y_i – координаты i -й части в осях x, y ; $I_{\xi_i}, I_{\eta_i}, I_{\xi_i \eta_i}$ – моменты инерции каждой части относительно своих центральных осей ξ_i и η_i .

Пример 3.3. Вычислить моменты инерции простейших фигур.

Прямоугольник

Определим моменты инерции относительно осей, совпадающих со сторонами, и относительно центральных осей.

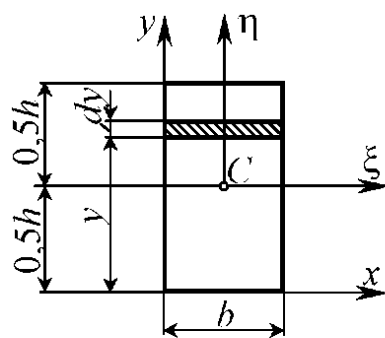


Рис. 3.7

По определению $I_x = \int_A y^2 dA.$

Элемент площади равен $dA = bdy$,

следовательно $I_x = b \int_0^h y^2 dy = bh^3/3$.

По формуле (3.10) $I_x = I_\xi + y_c^2 A$, откуда, учитывая что $A = bh, y_c = 0,5h$, находим

$$I_\xi = I_x - y_c^2 A = bh^3/3 - (h/2)^2 bh = bh^3/12.$$

Аналогично получим $I_y = b^3 h/3$ и $I_\eta = b^3 h/12$.

Треугольник

Момент инерции относительно оси x , совпадающей с основанием,

$$I_x = \int_A y^2 dA.$$

Но $dA = b(y)dy, b(y) = (b/h)(h-y)$.

Следовательно,

$$I_x = (b/h) \int_0^h y^2 (h-y) dy = bh^3/12.$$

По формуле параллельного переноса $I_x = I_\xi + y_c^2 A$, откуда $I_\xi = I_x - y_c^2 A = bh^3/12 - (h/3)^2 (bh/2) = bh^3/36$.

Круг

Для любых центральных осей $I_\xi = I_\eta$, поэтому $I_p = 2I_\xi$.

Как известно, полярный момент инерции круга равен $I_p = (\pi/32)d^4$.

Следовательно, $I_\xi = I_\eta = I_p/2 = (\pi/64)d^4$.

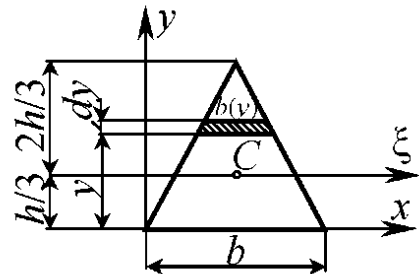


Рис. 3.8

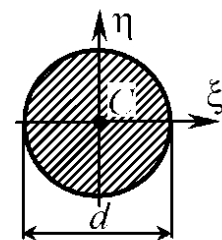


Рис. 3.9

Кольцо ($\alpha = d_{в}/d_{н}$).

Момент инерции относительно оси ξ можно определить как разность моментов инерции наружного и внутреннего круга:

$$I_{\xi} = (\pi/64)d_{н}^4 - (\pi/64)d_{в}^4 = (\pi/64)d_{н}^4(1 - \alpha^4).$$

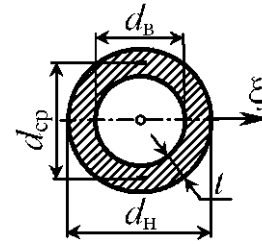


Рис. 3.10

Для тонкого кольца существует приближенная формула $I_{\xi} = \pi d_{ср}^3 / 8$, где $d_{ср}$ – средний диаметр, t – толщина кольца.

Пример 3.4. Для сечения, рассмотренного в примере 3.1, определить моменты инерции относительно центральных осей x и y .

Решение. Моменты инерции прямоугольников относительно собственных центральных осей определяем по формулам $I_{\xi_i} = b_i h_i^3 / 12$, $I_{\eta_i} = b_i^3 h_i / 12$. Пользуясь формулами перехода к параллельным осям, вычисляем искомые моменты инерции, представленные в нижеприведенной таблице.

Таблица 3.3

Н О М Э Л Е М Е Н Т А	Координаты центра тяжести, см		П Л О Ш А Д Ь A_{i2} см ²	Моменты инерции площадей, см ⁴								
				$I_x = \sum^n (I_{\xi_i} + y_i^2 A_i)$			$I_y = \sum^n (I_{\eta_i} + x_i^2 A_i)$			$I_{xy} = \sum^n (I_{\xi_i \eta_i} + x_i y_i A_i)$		
	x_i	y_i		I_{ξ_i}	$y_i^2 A_i$	I_{xi}	I_{η_i}	$x_i^2 A_i$	I_{yi}	$I_{\xi_i \eta_i}$	$x_i y_i A_i$	$I_{x_i y_i}$
1	3	-8	12	4	768	772	36	108	144	0	-288	-288
2	1	-1	24	288	24	312	8	24	32	0	024	-24
3	-3	6	20	6,7	720	727	167	180	347	0	-360	-360
Σ				299	1512	<u>1811</u>	211	312	<u>523</u>	0	-672	<u>-672</u>

3.4. Преобразование моментов инерции при повороте осей

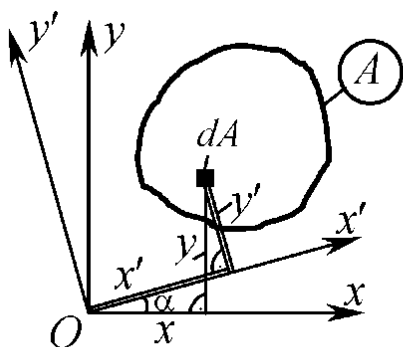


Рис. 3.11

Пусть нам известны моменты инерции относительно осей xOy , а требуется определить те же величины относительно осей $x'O'y'$.

Связь между координатами
 $x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, $y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha$.

По определению осевого момента инерции $I_{x'} = \int_A y'^2 dA$

или

$$I_{x'} = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (3.12)$$

Аналогично $I_{y'} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (3.13)$

Центробежный момент для новых осей $I_{x'y'} = \int_A x'y' dA$,

$$\begin{aligned} I_{x'y'} &= \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA = \\ &= 0,5(I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (3.14)$$

С целью последующего анализа перепишем формулу (3.12) в виде $I_{x'} = 0,5(I_x + I_y) + 0,5(I_x - I_y) \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (3.15)$

Исключая из формул (3.15) и (3.14) параметр α , получим зависимость между моментами инерции $I_{x'}$ и $I_{x'y'}$:

$$(I_{x'} - a)^2 + I_{x'y'}^2 = R^2, \quad (3.16)$$

где $a = 0,5(I_x + I_y), \quad R = 0,5\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}.$ (3.17)

Из формулы (3.16) следует, что точки, изображающие совокупность осевого и центробежного моментов инерции для разных осей, оказываются точками одной и той же окружности (рис. 3.12). Это и есть круговая диаграмма Мора применительно к моментам инерции.

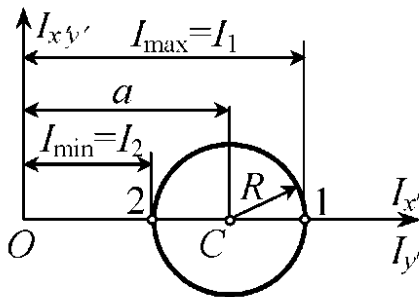


Рис. 3.12

Из рассмотрения круговой диаграммы видно, что существуют две взаимно перпендикулярные оси, для которых центробежный момент равен нулю и

осевые моменты инерции принимают наибольшее и наименьшее значения. Оси эти называются *главными осями* инерции, а соответствующие осевые моменты – *главными моментами инерции*. Будем считать, что I_1 есть наибольший момент инерции, а I_2 – наименьший. Они определяются по следующим формулам:

$$I_{\max} = I_{1,2} = a \pm R = 0,5 \left[(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right]. \quad (3.18)$$

\min

Полагая $I_{x'y'} = 0$, найдем положение главных осей инерции:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = 2I_{xy} / (I_x - I_y). \quad (3.19)$$

Эта формула не является однозначной, так как определяет в зависимости от величин I_x, I_y, I_{xy} либо ось 1, либо ось 2. По-

положение максимальной оси однозначно определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = (I_x - I_y) / I_{xy}. \quad (3.20)$$

Эллипс, построенный в главных осях, с полуосями, равными главным радиусам инерции $i_{\max} = \sqrt{I_{\max} / A}$, $i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}$, принято называть *эллипсом инерции*.

Пример 3.5

Определить центробежный момент инерции неравнобокого уголка 160x100x10 относительно центральных осей, параллельных полкам.

Решение

По таблице сортамента

прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8510-72 (СТ СЭВ 255-76) имеем $I_{\xi} = 204 \text{ см}^4$, $I_{\eta} = 667 \text{ см}^4$, $I_{u \min} = 121 \text{ см}^4$, $\operatorname{tg}\alpha = 0,390$.

Для определения центробежного момента инерции $I_{\xi\eta}$ воспользуемся формулами поворота осей (переход от главных осей uv к данным $\xi\eta$)

$$I_{\xi\eta} = 0,5(I_{u \min} - I_{v \max})\sin 2\alpha.$$

Угол в данном случае отрицателен, так как кратчайшее совмещение оси u с ξ происходит по часовой стрелке. Главный момент инерции $I_{u \min}$ задан в таблице сортамента, а главный момент I_v определяем из соотношения

$$I_v + I_u = I_{\xi} + I_{\eta},$$

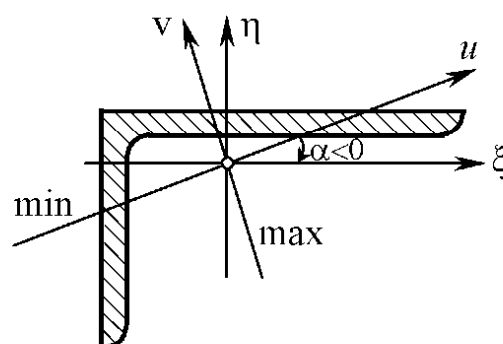


Рис. 3.13

откуда $I_v = I_\xi + I_\eta - I_u = 204 + 667 - 121 = 750 \text{ см}^4$.

Таким образом, центробежный момент уголка будет равен

$$I_{\xi\eta} = 0,5(121-750) \cdot (-0,677) = 213 \text{ см}^4.$$

Пример 3.6

Определить центробежный момент инерции равнобокого уголка 100x100x10 относительно центральных осей, параллельных полкам.

Решение

По таблице сортамента прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8509-72 (СТ СЭВ 104-74) имеем $I_{x_o \max} = 284 \text{ см}^4$, $I_{y_o \min} = 74,1 \text{ см}^4$, $i_{x_o \max} = 3,84 \text{ см}$, $i_{y_o \min} = 1,96 \text{ см}$.

Пользуясь формулой поворота, находим

$$I_{\xi\eta} = 0,5(I_{x_o \max} - I_{y_o \min}) \sin 2\alpha,$$

$$I_{\xi\eta} = 0,5(284 - 74,1) \cdot \sin(-90^\circ) = -105 \text{ см}^4.$$

Пример 3.7

Определить положение главных центральных осей и величины главных центральных моментов инерции сечения, приведенного в примере 3.2.

Решение

1. Определение моментов инерции относительно центральных осей x и y . По таблице сортамента имеем:

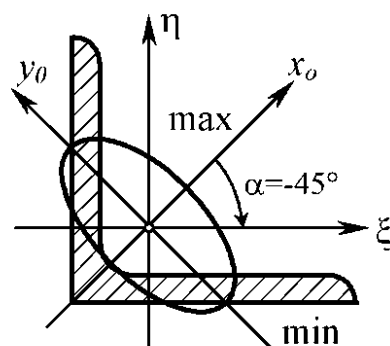


Рис. 3.14

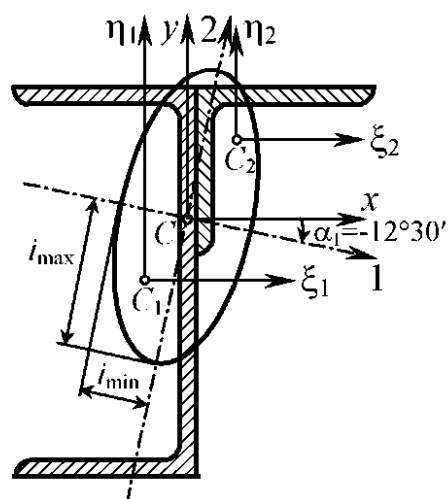


Рис. 3.15

- швеллер № 22:

$$I_{\xi_1} = 2330 \text{ см}^4, \quad I_{\eta_1} = 187 \text{ см}^4, \quad A_1 = 28,8 \text{ см}^2;$$

- уголок 100x100x10:

$$I_{\xi_2} = I_{\eta_2} = 179 \text{ см}^4, \quad A_2 = 19,2 \text{ см}^2; \text{ центробежный момент инерции уголка относительно } I_{\xi_2\eta_2} = 105 \text{ см}^4.$$

Учитывая, что центральные оси x и y проведены параллельно собственным осям элементов фигуры, для вычисления осевых и центробежного моментов инерции всего сечения воспользуемся формулами (3.11), представляя все необходимые вычисления в табличной форме:

Таблица 3.4

Н О М Э Л Е М Е Н Т А	Координаты центра тяжести, см		П Л О Щ А Д Ь А _{и2} СМ	Моменты инерции площадей, см ⁴								
	x _i	y _i		$I_x = \sum (I_{\xi_j} + y_i^2 A_i)$			$I_y = \sum (I_{\eta_j} + x_i^2 A_i)$			$I_{xy} = \sum (I_{\xi_j\eta_j} + x_i y_i A_i)$		
				I_{ξ_j}	$y_i^2 A_i$	I_{xi}	I_{η_j}	$x_i^2 A_i$	I_{yi}	$I_{\xi_j\eta_j}$	$x_i y_i A_i$	I_{xiyi}
1	-2, 12	-3, 27	28,8	2330	308	2638	187	129	316	0	200	200
2	3, 17	4, 90	19,2	179	461	640	179	193	372	105	298	403
Σ			48	2509	769	<u>3278</u>	366	322	<u>688</u>	105	498	<u>603</u>

2. Определение главных центральных моментов инерции сечения. По формуле (3.18) имеем

$$I_{\max} = 0,5 \left[(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right],$$

$$I_{\max} = 0,5 \left[(3278 + 688) \pm \sqrt{(3278 - 688)^2 + 4 \cdot 603^2} \right] =$$

$$= 0,5(3966 \pm 2857).$$

Отсюда $I_{\max} = I_1 = 3412 \text{ см}^4$, $I_{\min} = I_2 = 555 \text{ см}^4$.

Ориентация максимальной главной оси определяется по формуле (3.20)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = (I_x - I_1) / I_{xy} = (3278 - 3412) / 603 = -0,222,$$

откуда $\alpha_1 = -12^\circ 30'$.

3. Построение эллипса инерции. Главные радиусы инерции равны

$$i_{\max} = \sqrt{I_{\max} / A} = \sqrt{3412 / 48} = 8,43 \text{ см};$$

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A} = 3,40 \text{ см}.$$

Отложив радиусы инерции перпендикулярно к соответствующим осям в том же масштабе, в каком вычерчена фигура, строим на них, как на полуосях, эллипс инерции.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ	53
1.1. Общие сведения	53
1.2. Линейное напряженное состояние	56
1.3. Плоское напряженное состояние	59
1.4. Объемное напряженное состояние	66
1.5. Гипотезы прочности	69
2. КРУЧЕНИЕ КРУГЛЫХ ВАЛОВ	74
2.1. Краткие сведения из теории	74
2.2. Примеры расчета	77
3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕ- РЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ	85
3.1. Статические моменты. Определение положения центра тяжести	85
3.2. Моменты инерции	88
3.3. Преобразование моментов инерции при парал- лельном переносе осей	89
3.4. Преобразование моментов инерции при повороте осей	93

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают *изгибающие моменты*. Различают две разновидности изгиба: а) чистый изгиб, когда изгибающий момент M_x является единственным силовым фактором ($M_x \neq 0, Q_y = 0$); б) поперечный изгиб, когда, наряду с изгибающим моментом, возникает и поперечная сила ($M_x \neq 0, Q_y \neq 0$). Стержни, подвергающиеся изгибу, обычно называют *балками*.

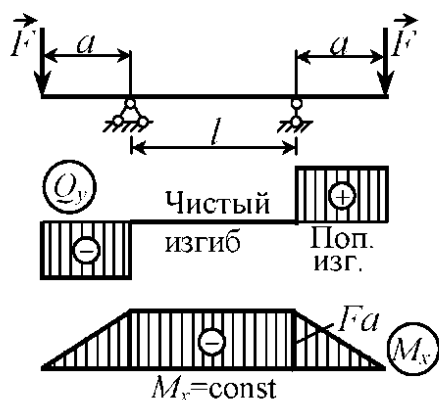


Рис. 1

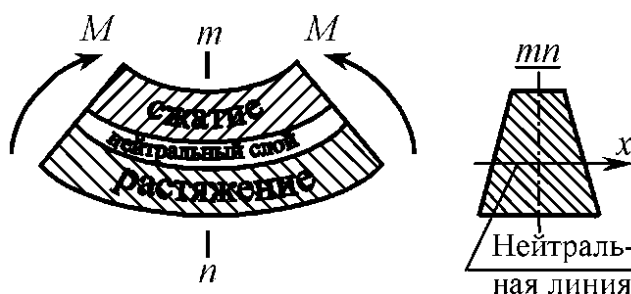


Рис. 2

В последующем предполагаем, что балка обладает хотя бы одной плоскостью симметрии и нагрузки действуют в этой плоскости. При этих условиях балка испытывает плоский прямой изгиб, т.е. изгиб происходит в плоскости нагрузки.

Достаточно очевидно и подтверждается опытом, что балка при изгибе деформируется таким образом, что волокна, расположенные в выпуклой части, растягиваются, а в вогнутой – сжимаются. Между ними лежит слой волокон, который

лишь искривляется, не изменяя своей первоначальной длины. Этот слой называется *нейтральным*, а его след на плоскости поперечного сечения – нейтральной линией или осью.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ

2.1. Нормальные напряжения

Нормальные напряжения определяются без учета влияния поперечной силы исходя из двух гипотез.

1. Гипотеза плоских сечений, согласно которой поперечные сечения, плоские и нормальные к оси балки до деформации, остаются плоскими и нормальными к деформированной оси и после деформации (Я. Бернулли, 1705 г.).

2. Гипотеза об отсутствии взаимного надавливания продольных волокон балки.

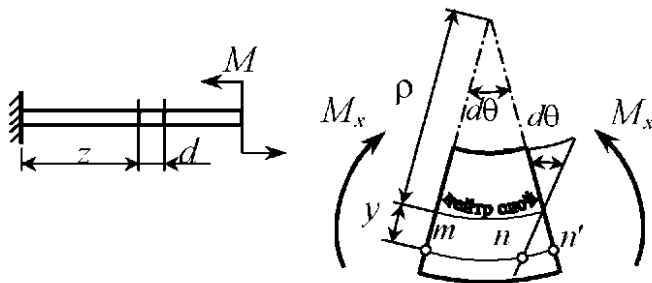


Рис. 3

Выделим из балки (рис. 3) бесконечно малый элемент dz . В результате деформации изгиба его боковые сечения взаимно поворачивают-

ся на угол $d\theta$ и произвольное волокно mn , расположенное на расстоянии y от нейтрального слоя, получает приращение $nn' = yd\theta$. Относительное удлинение

$$\varepsilon = nn'/mn = yd\theta/\rho\theta = y/\rho, \quad (1)$$

где ρ - радиус кривизны нейтрального слоя.

По закону Гука $\sigma = E\varepsilon = Ey/\rho$. (2)

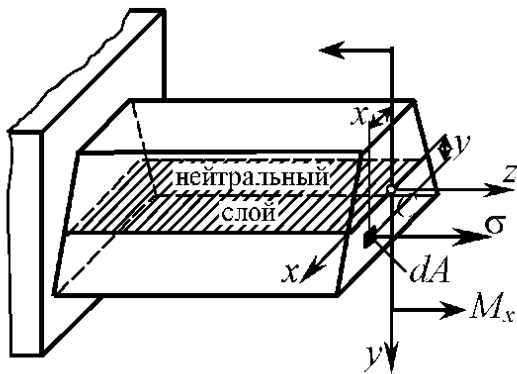


Рис. 4

При изгибе в плоскости yz
 $N = 0, M_y = 0, M_x \neq 0$.

Первое условие дает

$$N = \int_A \sigma dA = (E/\rho) \int_A y dA = (E/\rho) S_x = 0,$$

откуда $S_x = 0$, т.е. нейтральная линия проходит через центр

тяжести сечения (точка C).

Из второго условия

$$M_y = \int_A \sigma x dA = (E/\rho) \int_A xy dA = (E/\rho) I_{xy} = 0$$

следует, что $I_{xy} = 0$ и, следовательно, оси xu являются главными центральными осями поперечного сечения.

Из третьего $M_x = \int_A \sigma y dA = (E/\rho) \int_A y^2 dA = EI_x / \rho$

получаем зависимость кривизны балки от изгибающего момента

$$1/\rho = M_x / (EI_x). \quad (3)$$

Подставляя (3) в формулу (1), находим

$$\sigma = (M_x / I_x) \cdot y \quad (4)$$

Как видим, напряжения распределяются по линейному закону. Наибольшие растягивающие и сжимающие напря-

Рис. 5

жения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= (M_x/I_x)y_p = M_x/W_p, \\ \sigma_{\min} &= (M_x/I_x)y_c = M_x/W_c, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $W_p = I_x/y_p$ и $W_c = I_x/y_c$ – моменты сопротивления поперечного сечения для растянутых и сжатых волокон.

Для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие (пластичные материалы), опасной является наиболее удаленная от нейтральной оси точка, где возникает наибольшее по абсолютной величине напряжение

$$\sigma_{\max} = (M_x/I_x)y_{\max} = M_x/W_x,$$

где $W_x = I_x/y_{\max}$ – осевой момент сопротивления.

Условия прочности:

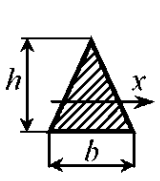
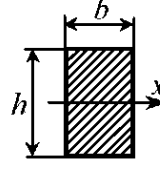
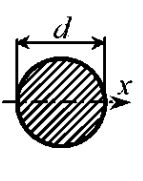
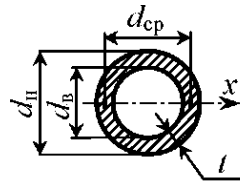
- для хрупких материалов

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= M_{\max}/W_p \leq [\sigma_p] \\ \sigma_{\min} &= M_{\max}/W_c \leq [\sigma_p] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

- для пластичных материалов

$$\sigma_{\max} = M_{\max}/W_x \leq [\sigma_p]. \quad (7)$$

Таблица 1

				$\alpha = \frac{d_в}{d_н}$ $t \ll d$
$I_x = \frac{bh^3}{36}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$	$I_x = \frac{\pi d^4}{64}$	$I_x = \frac{\pi d_н^4}{64} (1 - \alpha^4)$	$I_x = \frac{\pi d_{ср}^3 t}{8}$
$W_x = \frac{bh^2}{24}$	$W_x = \frac{bh^2}{6}$	$W_x = \frac{\pi d^3}{32}$	$W_x = \frac{\pi d_н^3}{32} (1 - \alpha^4)$	$W_x = \frac{\pi d_{ср}^2 t}{4}$

Пример 1. Для балок, сечения которых показаны на рис. 6, построить эпюры распределения нормальных напряжений по высоте, считая изгибающий момент положительным (отрицательным). Установить, как выгоднее расположить сечения, имеющие только одну ось симметрии, в плоскости которой действует изгибающий момент, если материал балки чугун, лучше работающий на сжатие, чем на растяжение.

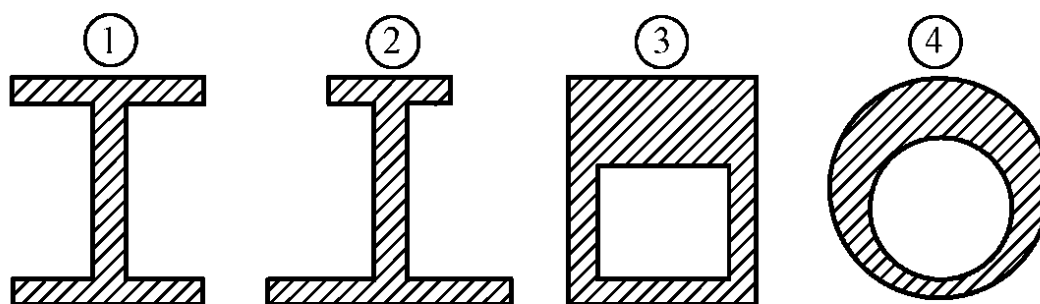


Рис. 6

Пример 2. Как выгоднее расположить Т-образное сечение чугунной балки: полкой вверх (рис. 7,а) или полкой вниз (рис. 7,б).

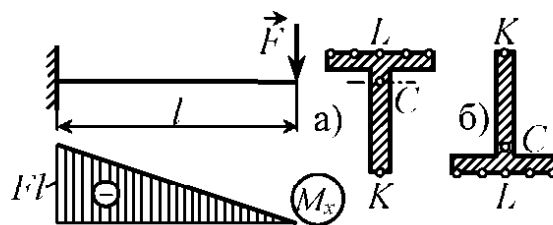


Рис. 7

Решение

Поскольку точка K отстоит от центра тяжести сечения дальше, напряжение в ней по абсолютной величине будет больше, чем в точках L . При указанном направлении силы F растянутые слои балки располагаются сверху. Так как чугун на сжатие работает лучше, чем на растяжение, точку K рациональнее поместить снизу, т.е. следует предпочесть варианта.

Пример 3

В некотором сечении балки известен изгибающий момент, равный $M_x = -15$ кН·м. Требуется определить нормальное напряжение в заданной точке K , а также наибольшее нормальное напряжение.

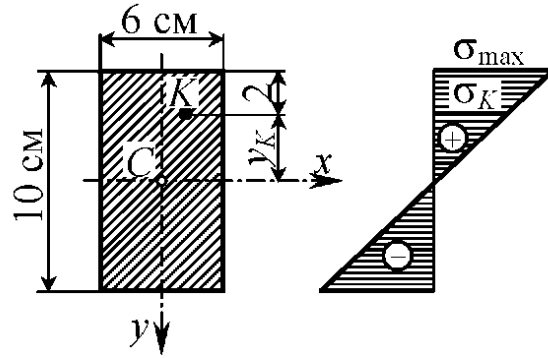


Рис. 8

Решение

Согласно закону распределения нормальных напряжений имеем

$$\sigma_K = (M_x / I_x) \cdot y_K.$$

Подставляя $I_x = bh^3/12 = 6 \cdot 10^3/12 = 500 \text{ см}^4$ и $y_K = -(5-2) = -3$ см, получим $\sigma_K = [-15 \cdot 10^3 / (500 \cdot 10^{-8})] \cdot (-3 \cdot 10^{-2}) = 90 \text{ МПа}$.

Нормальные напряжения пропорциональны расстоянию от нейтральной оси, поэтому

$$\sigma_{\max} = \sigma_K \cdot (y_{\max} / y_K) = 90(5/3) = 150 \text{ МПа}.$$

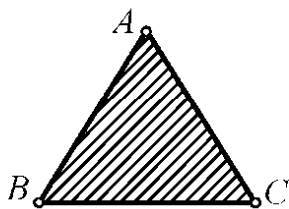


Рис. 9

Пример 4

Для некоторого сечения балки известно напряжение в точке A , равное $\sigma_A = 100$ МПа. Требуется определить по величине и по знаку напряжения в точках B и C .

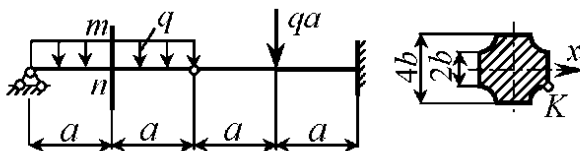


Рис. 10

Пример 5

Зная напряжение в точке K сечения mn , равное σ_o , определить наибольшее напряжение, возникающее в балке (рис. 10).

Пример 6

Определить, в каком положении балки квадратного сечения, ее грузоподъемность выше: когда плоскость нагрузки параллельна сторонам квадрата или совпадает с диагональю?

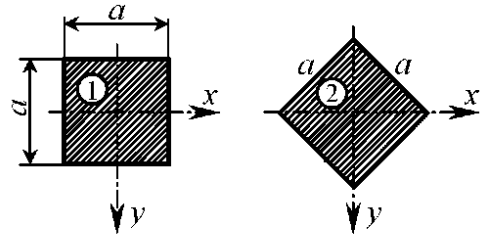


Рис. 11

Решение

Наибольший изгибающий момент равен

$$M_{\max_1} = W_{x_1} [\sigma] \quad \text{и} \quad M_{\max_2} = W_{x_2} [\sigma].$$

Отношение грузоподъемностей

$$K = M_{\max_1} / M_{\max_2} = W_{x_1} / W_{x_2}.$$

Учитывая, что $W_{x_1} = I_x / y_{\max_1}$, $y_{\max_1} = a/2$,

$$W_{x_2} = I_x / y_{\max_2}, \quad y_{\max_2} = a\sqrt{2}/2,$$

получим $K = W_{x_1} / W_{x_2} = \sqrt{2} = 1,414$,

т.е. в первом варианте грузоподъемность на 41,4 % выше.

Пример 7. Определить, какой процент экономии металла будет достигнут, если при неизменных прочих условиях применить вместо сплошного круглого сечения кольцевое сечение с отношением диаметров $\alpha = d_в/d_н = 0,9$.

Решение. Из условия равнопрочности балок $W_{x_1} = W_{x_2}$ или $0,1d^3 = 0,1d_н^3(1 - \alpha^4)$, откуда

$$d_н/d = 1 / (1 - \alpha^4)^{1/3}. \quad (\text{a})$$

Отношение весов пропорционально отношению площадей

поперечных сечений балок $A_2/A_1=(d_{II}/d)^2(1-\alpha^2)$. (6)

С учетом выражения (а) окончательно получим

$$A_2/A_1=(1-\alpha^2)/(1-\alpha^4)^{2/3}=0,39.$$

Как видим, экономия достигает 61 %.

Пример 8

Балки квадратного сечения составлены из n пластин, не соединенных между собой. В каком варианте грузоподъемность балки будет больше?

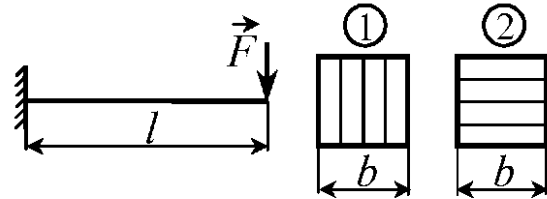


Рис. 12

Решение. Отношение грузоподъемностей балок $K=W_{x_1}/W_{x_2}$ или, учитывая, что

$$W_{x_1}=bh^2/6=b^3/6, \quad W_{x_2}=n \cdot [b \cdot (b/h)^2/6]=b^3/6n,$$

получим $K=W_{x_1}/W_{x_2}=n$ раз,

т.е. в первом варианте грузоподъемность в n раз больше.

Пример 9. Определить максимальное напряжение, возникающее в стальной проволоке диаметром $d=0,8$ мм при наматывании ее на барабан диаметром $D=50$ см.

Решение. Кривизна связана с изгибающим моментом соотношением $l/\rho = M_x/EI_x$, откуда находим изгибающий момент $M_x = EI_x/\rho$.

Максимальное напряжение $\sigma_{\max} = M_x/W_x = EI_x/(\rho W_x)$.

Учитывая, что $\rho = D/2$, $I_x/W_x = y_{\max} = d/2$, получим

$$\sigma_{\max} = Ed/D = 200 \cdot 10^9 \cdot 0,8/500 = 320 \text{ МПа.}$$

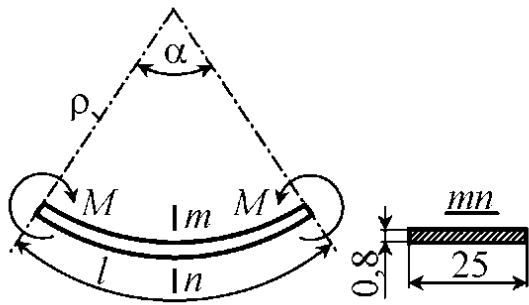


Рис. 13

Пример 10

Тонкая стальная полоса, имеющая поперечное сечение размером 0,8x25 мм и длину $l = 25$ см, изгибается сосредоточенными моментами, приложенными на концах, в дугу

окружности, опирающуюся на угол α , равный 1 радиану. Чему равно максимальное напряжение в полосе?

Решение. Изгибающий момент связан с кривизной соотношением $l/\rho = M_x/EI_x$, откуда $M_x = EI_x/\rho$.

Максимальное напряжение $\sigma_{\max} = M_x/W_x = EI_x/(\rho W_x)$ или, учитывая, что $l = \rho\alpha$ и $\rho = l/\alpha$, $I_x/W_x = y_{\max} = h/2$, получим $\sigma_{\max} = E \cdot h \cdot \alpha / (2l) = 200 \cdot 10^9 \cdot 0,8 / (2 \cdot 250) = 320$ МПа.

Пример 11. Шарнирно опертая по концам стальная балка с поперечным сечением из двух швеллеров № 20а нагружена, как показано на рис. 14. Определить величину допускаемой нагрузки q , если $a = 1$ м, $[\sigma] = 150$ МПа.

Решение

1. Построение эпюр Q и M .

Опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum m_B = 0, \quad R_A \cdot 6a &= \\ &= q \cdot 4a \cdot 4a + 2qa^2 - 2qa \cdot 2a - \\ &- q \cdot 2a \cdot a = 0, \quad R_A = 2qa; \end{aligned}$$

$$\sum m_A = 0, \quad R_B \cdot 6a = q \cdot 2a \cdot 5a + 2qa^2 - q \cdot 4a \cdot 2a + 2qa \cdot 4a = 0, \quad R_B = 2qa.$$

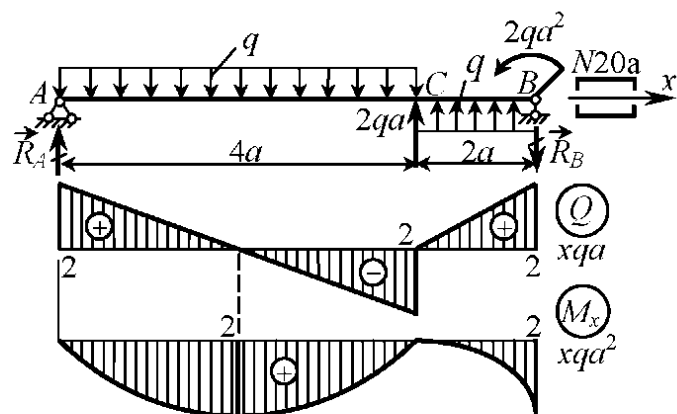


Рис. 14

Проверка:

$$\sum Y_i = 0, \quad -R_A + q \cdot 4a - 2qa - q \cdot 2a + R_B = -2qa + 4qa - 2qa - 2qa + 2qa = 0.$$

Эпюры Q и M строим по характерным точкам.

Расчетный изгибающий момент $M_{\max} = 2qa^2$.

2. Определение допускаемой нагрузки.

Геометрические характеристики сечения. Из таблиц сортамента согласно ГОСТ 8240-72 имеем для швеллера № 20а:

$$I_\xi = I_y = 139 \text{ см}^4; \quad A = 25,2 \text{ см}^2; \quad z_o = 2,28 \text{ см}; \quad b = 8 \text{ см}.$$

По формуле параллельного переноса осей момент инерции сечения относительно центральной оси x равен

$$I_x = 2[I_\xi + (b - z_o)^2 A],$$

откуда момент сопротивления

$$W_x = I_x / y_{\max} = 2[I_\xi + (b - z_o)^2 A] / b = 2[139 + (8 - 2,28)^2 \cdot 25,2] / 8 = 241 \text{ см}^3.$$

Из условия прочности балки $M_{\max} / W_x = 2qa^2 / W_x \leq [\sigma]$, откуда $[q] = [\sigma] W_x / 2a^2 = 150 \cdot 10^6 \cdot 241 \cdot 10^{-6} / (2 \cdot 1^2) = 18 \text{ кН/м}$.

Пример 12

Подобрать необходимые размеры поперечного сечения балки, составленной из двух скрепленных бревен, если $q = 26 \text{ кН/м}$, $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$, $Q = 1 \text{ м}$.

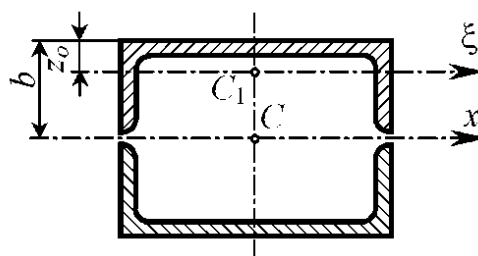


Рис. 15

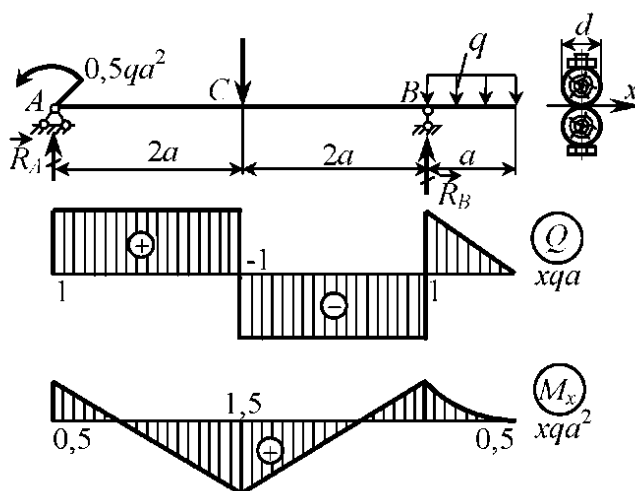


Рис. 16

Решение

1. Построение эпюр Q и M .

Опорные реакции:

$$\sum m_B = 0, \quad R_A \cdot 4a = 0,5qa^2 + 2qa \cdot 2a - q \cdot a \cdot 0,5a, \quad R_A = qa;$$

$$\sum m_A = 0, \quad R_B \cdot 4a = q \cdot a \cdot 4,5a + 2qa \cdot 2a - 0,5qa^2, \quad R_B = 2qa.$$

Проверка:

$$\sum Y_i = 0, \quad R_A + R_B - 2qa - q \cdot a = qa + 2qa - 2qa - qa = 0.$$

Строим эпюры q и M и находим расчетный изгибающий момент, равный $M_{\max} = 1,5 qa^2$.

2. Подбор сечения балки.

Геометрические характеристики. Сечение балки является составным, поэтому

$$I_x = 2(I_\xi + y^2 A) = 2[\pi d^4 / 64 + (d/2)^2 \pi d^2 / 4] = (5/32) \pi d^4,$$

$$W_x = I_x / y_{\max} = I_x / d = (5/32) \pi d^3.$$

Из условия прочности балки

$$M_{\max} / W_x \leq [\sigma]; \quad 1,5 qa^2 / (5 \pi d^3 / 32) \leq [\sigma].$$

Отсюда

$$d \geq \sqrt[3]{48 qa^2 / (5 \pi [\sigma])} = \sqrt[3]{48 \cdot 26 \cdot 10^3 / (5 \pi \cdot 10 \cdot 10^6)} = 20 \text{ см}.$$

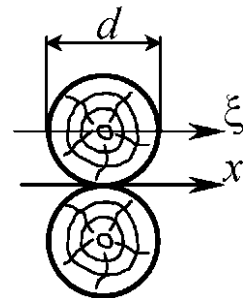


Рис. 17

Пример 13. Тензометр T , установленный на стальной балке, имеет коэффициент увеличения $k = 1000$ и базу $s = 20$ мм. Показание тензометра равно $\Delta l = 5$ мм. Определить наибольшее нормальное напряжение в балке.

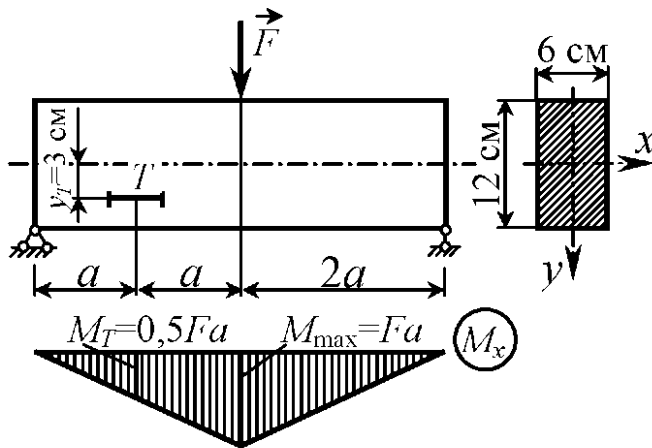


Рис. 18

кают в крайних волокнах того же сечения, где приложена сила F , т.е.

$$\sigma_{\max} = (M_{\max}/I_x) \cdot y_{\max}. \quad (\text{в})$$

Разделив (в) на (б), получим $\sigma_{\max} = \sigma_T (M_{\max}/M_T)(y_{\max}/y_T) = 4\sigma_T$ или с учетом (а)

$$\sigma_{\max} = 4E \cdot \Delta n / (k \cdot s) = 4 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 5 / (1000 \cdot 20) = 200 \text{ МПа}.$$

Пример 14

Тележка перемещается вдоль балки длиной $l = 10$ м. На каждое колесо действует нагрузка $F = 20$ кН. Найти опасное положение тележки, при котором изгибающий момент будет иметь наибольшее значение и определить наибольшее напряжение, полагая $C = 2$ м.

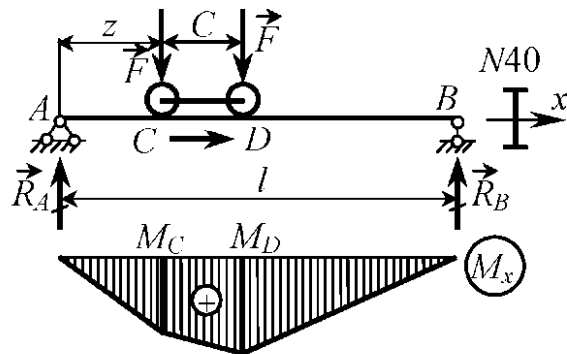


Рис. 19

Решение

Очевидно, наибольший изгибающий момент возникает

в сечении, расположенном под передним колесом тележки (сеч. D), где

$$M_D = R_B(l - z - C) = F(2z + C)(l - z - C)/l, \quad R_B = F(2z + C)/l.$$

Из условия экстремума $dM_D/dz = 0$ находим опасное положение тележки

$$\frac{d}{dz}(2zl - 2z^2 - 3zc + d - c^2) = 2l - 4z - 3c = 0,$$
$$z^4 = (2l - 3c)/4.$$

В нашем случае $z^* = (2 \cdot 10 - 3 \cdot 2)/4 = 3,5$ м.

Наибольший изгибающий момент

$$M_{\max} = M_D(z^*) = F(2z^* + c)(l - z^* - c)/l,$$

$$M_{\max} = 20(2 \cdot 3,5 + 2)(10 - 3,5 - 2)/10 = 81 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = M_{\max}/W_x = 81 \cdot 10^3 / 953 \cdot 10^{-6} = 85 \text{ МПа}.$$

2.2. Касательные напряжения

Элементарная теория касательных напряжений, разработанная Д.И. Журавским, основывается на двух допущениях.

1. Касательные напряжения направлены параллельно поперечной силе Q_y .

2. Касательные напряжения распределяются равномерно по ширине сечения.

Сделанных допущений достаточно, чтобы найти закон распределения касательных напряжений по высоте сечения. Проще всего вычислить эти напряжения через парные им касательные напряжения, возникающие в продольных сечениях.

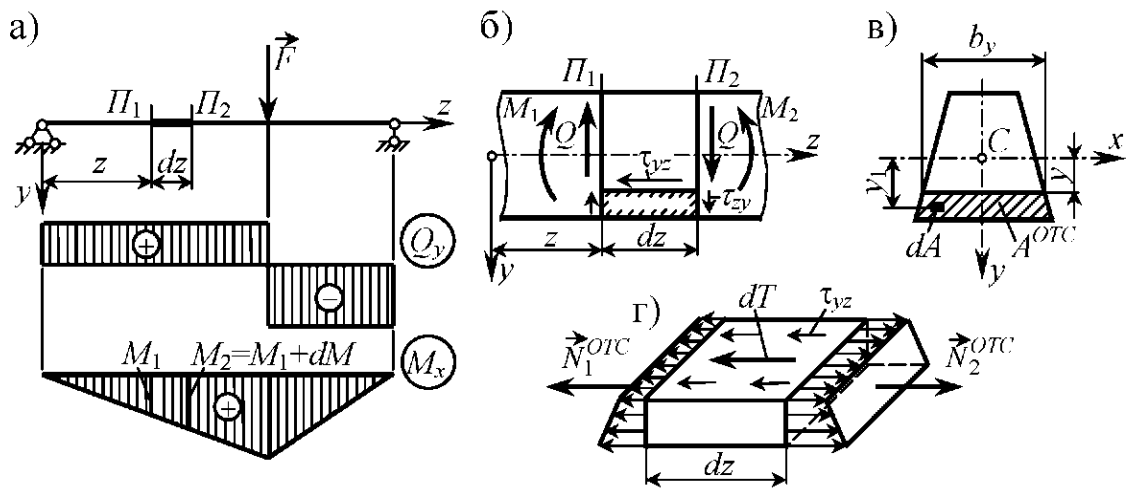


Рис. 20

Выделим из балки бесконечно малый элемент (рис. 20,г) и рассмотрим его равновесие в проекции на ось z :

$$\sum Z_i = 0, \quad N_2^{OTC} - N_1^{OTC} = dT. \quad (a)$$

Вычисляя

$$N_1^{OTC} = \int_{A^{OTC}} \sigma_{z_1} dA = (M_1 / I_x) \int_{A^{OTC}} y_1 dA = (M_1 / I_x) S_x^{OTC},$$

$$S_x^{OTC} = \int_{A^{OTC}} y_1 dA,$$

$$N_2^{OTC} = \int_{A^{OTC}} \sigma_{z_2} dA = (M_2 / I_x) S_x^{OTC} = (M_1 + dM) S_x^{OTC} / I_x,$$

$$dT = \tau_{yz} b_y dz$$

и подставляя в (а), получим $\tau_{yz} = \frac{dM}{dZ} \cdot \frac{S_x^{OTC}}{b_y I_x}$

или с учетом дифференциальной зависимости $dM / dZ = Q$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{Q S_x^{OTC}}{b_y I_x} \quad (8)$$

Рассмотрим конкретные сечения.

Прямоугольник (рис. 21,а). Имеем: $b_y = b$,

$$I_x = bh^3/12, \quad S_x^{OTC} = b(h/2 - y)(1/2)(h/2 + y) = (b/2)(h^2/4 - y^2).$$

Следовательно,
$$\tau_{zy} = \frac{Q \cdot S_x^{OTC}}{b_y I_x} = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

и
$$\tau_{\max/y=0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}.$$

Как видим, касательные напряжения изменяются по высоте сечения по закону квадратной параболы.

Для балки *круглого сечения* (рис. 21,б) аналогично можно найти

$$\tau_{zy} = \frac{4Q}{3\pi r^4} (r^2 - y^2) \quad \text{и} \quad \tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A}.$$

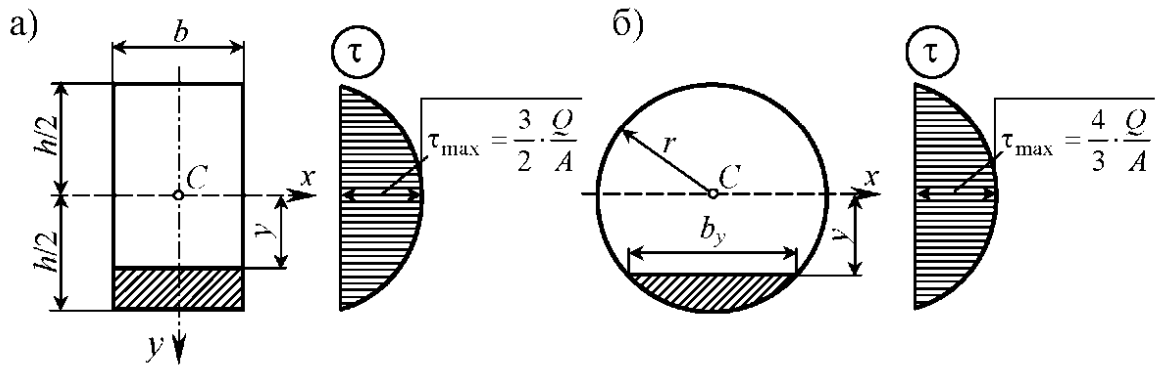


Рис. 21

Пример 15. Определить касательное напряжение в точке K данного сечения, если поперечная сила равна $Q = 500$ кН.

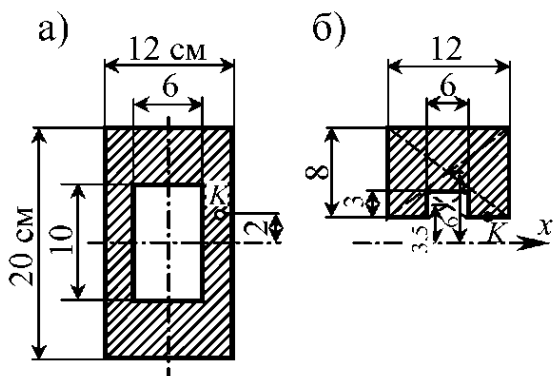


Рис. 22

Решение

По формуле Журавского
имеем $\tau_K = QS_{xK}^{OTC} / (b_K I_x)$.

Учитывая, что $b_K = 6$ см,
 $I_x = BH^3 / 12 - bh^3 / 12 =$
 $= 12 \cdot 20^3 / 12 - 6 \cdot 10^3 / 12 =$
 $= 7500 \text{ см}^4,$

$$S_{xK}^{OTC} = 12 \cdot 8 \cdot 6 - 6 \cdot 3 \cdot 3,5 = 513 \text{ см}^3,$$

получим $\tau_K = 500 \cdot 10^3 \cdot 513 \cdot 10^{-6} / (6 \cdot 10^{-2} \cdot 7500 \cdot 10^{-8}) = 57 \text{ МПа}.$

Пример 16. Построить эпюры вертикальной составляющей касательного напряжения в частях от наибольшего значения $\tau_{\max} = \tau_0$ для указанных форм поперечного сечения балки.

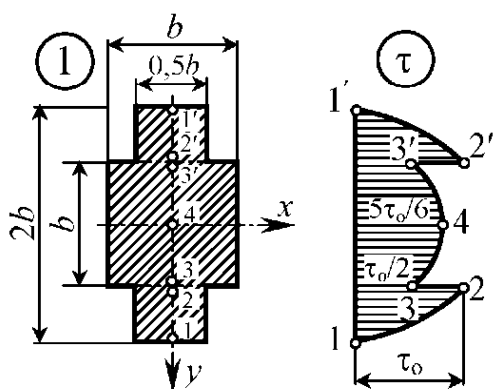


Рис. 23

N П/П	b_y	S_x^{OTC}	S_x^{OTC} / b_y	τ_i / τ_{\max}
1	$0,5b$	0	0	0
2	$0,5b$	$3b^3/16$	$3b^2/8$	1
3	b	$3b^3/16$	$3b^2/16$	1/2
4	b	$5b^3/16$	$5b^2/16$	5/6
3'	b	$3b^3/16$	$3b^2/16$	1/2
2'	$0,5b$	$3b^3/16$	$3b^2/8$	1
1'	$0,5b$	0	0	0

Для остальных сечений студентам предлагается построить эпюры самостоятельно.

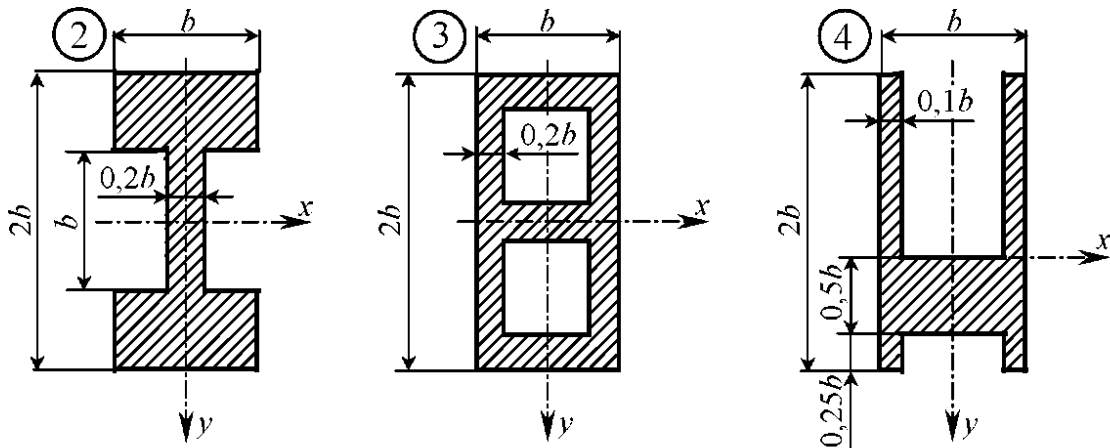


Рис. 24

2.3. Главные напряжения

В произвольной точке поперечного сечения балки, находящейся на расстоянии y от нейтральной оси, нормальные и касательные напряжения определяют по формулам

$$\sigma_z = (M_x / I_x) \cdot y, \quad \tau_{zy} = Q_y S_x^{OTC} / (b I_x).$$

Нормальные напряжения максимальны во внешних волокнах балки и равны нулю на нейтральной оси. Касательные напряжения равны нулю во внешних волокнах и обычно достигают максимума на нейтральной оси. При поперечном изгибе в плоскости yz $\sigma_x = \sigma_y = 0$, поэтому напряженное состояние является плоским и главные напряжения определяются по формулам

$$\sigma_{\max} = \sigma_{1,3} = 0,5 \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right), \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma) / \tau. \quad (9)$$

Рассмотрим балку прямоугольного сечения и определим главные напряжения в нескольких характерных точках произвольного сечения mn (рис.25).

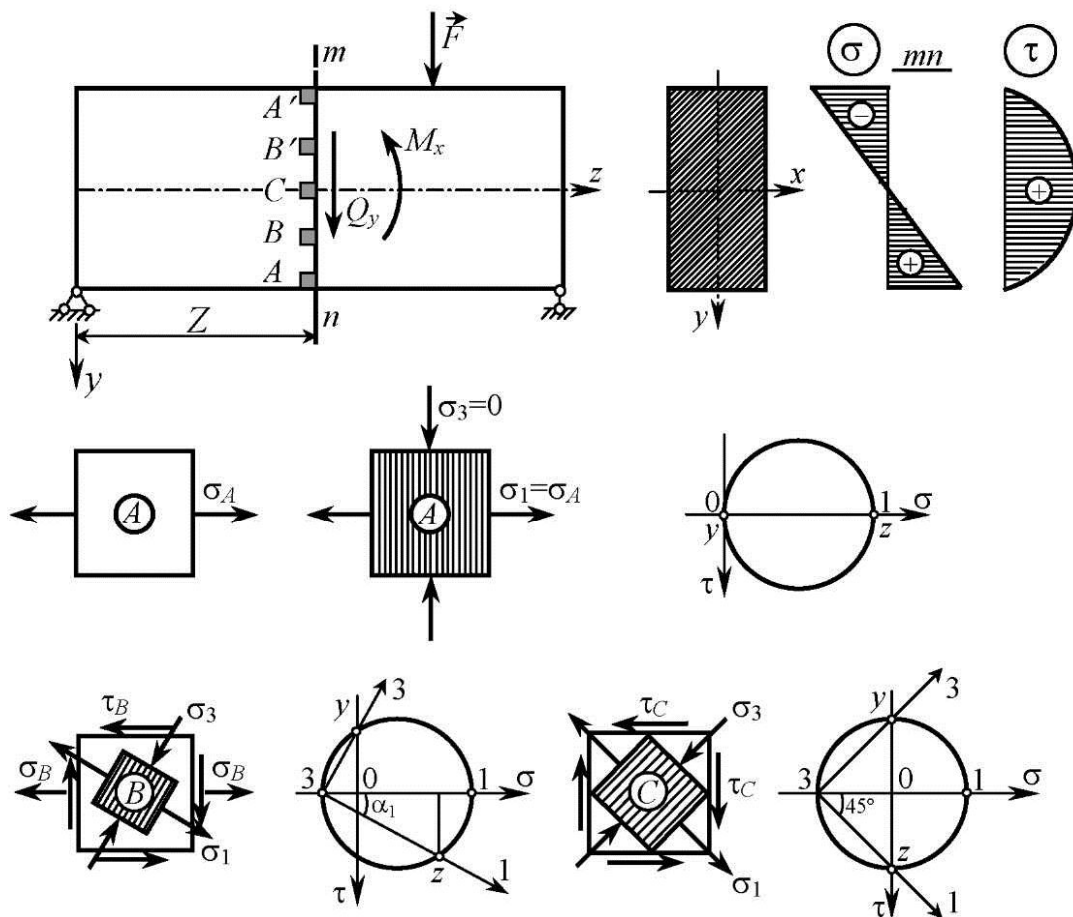


Рис. 25

Пример 17. Определить главные напряжения в точке K консольной балки (рис. 26), нагруженной сосредоточенной силой $F = 50$ кН, приложенной на свободном конце, если $l = 50$ см, $C = 20$, $d = 4$ см, $b = 4$ см, $h = 10$ см.

Решение. 1. Определение внутренних силовых факторов в поперечном сечении, проходящем через точку K . Строим эпюры Q_y и M_x и находим $Q_K = -F = -50$ кН,

$$M_K = -F \cdot C = -50 \cdot 20 \cdot 10^{-2} = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

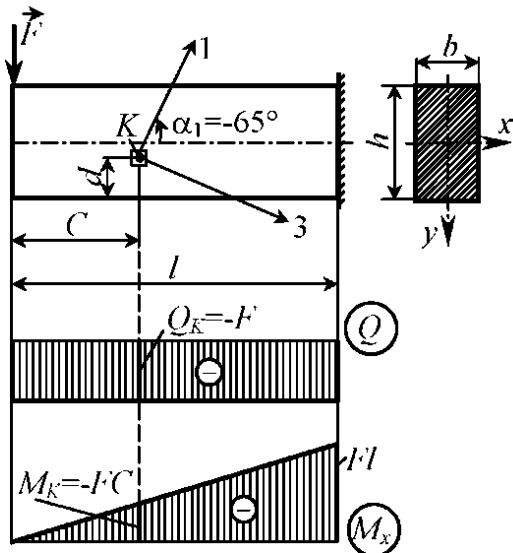


Рис. 26

2. Определение главных напряжений. Напряжения в поперечном сечении определяются по формулам

$$\sigma_K = (M_x / I_x) y_K,$$

$$\tau_K = Q_K S_{xK}^{OTC} / (b \cdot I_x).$$

Вычисляя $I_x = bh^3 / 12,$

$$I_x = 6 \cdot 10^3 / 12 = 500 \text{ см}^4,$$

$$y_K = h/2 - d = 1 \text{ см},$$

$$S_{xK}^{OTC} = 6 \cdot 4 \cdot 3 = 72 \text{ см}^3, \text{ находим}$$

$$\sigma_K = - (10 \cdot 10^3 / 500 \cdot 10^{-8}) 1 \cdot 10^{-2} = -20 \text{ МПа},$$

$$\tau_K = -50 \cdot 10^3 / (6 \cdot 10^{-2} \cdot 500 \cdot 10^{-8}) = -12 \text{ МПа}.$$

Величины главных напряжений

$$\sigma_{1,3} = 0,5 \left(\sigma_K \pm \sqrt{\sigma_K^2 + 4\tau_K^2} \right) = 0,5 \left(-20 \pm \sqrt{20^2 + 4 \cdot 12^2} \right);$$

$$\sigma_{1,3} = 0,5(-20 \pm 31,2); \quad \sigma_1 = 5,6 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -25,6 \text{ МПа}.$$

Направление главного растягивающего напряжения σ_1 по отношению к продольной оси балки z :

$$\text{tg} \alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_K) / \tau_K = (5,6 + 20) / (-12) = -2,14; \quad \alpha_1 = -65^\circ,$$

а напряжение σ_3 направлено перпендикулярно к σ_1 .

Графическое определение величин главных напряжений и направлений главных осей представлено на рис. 27.

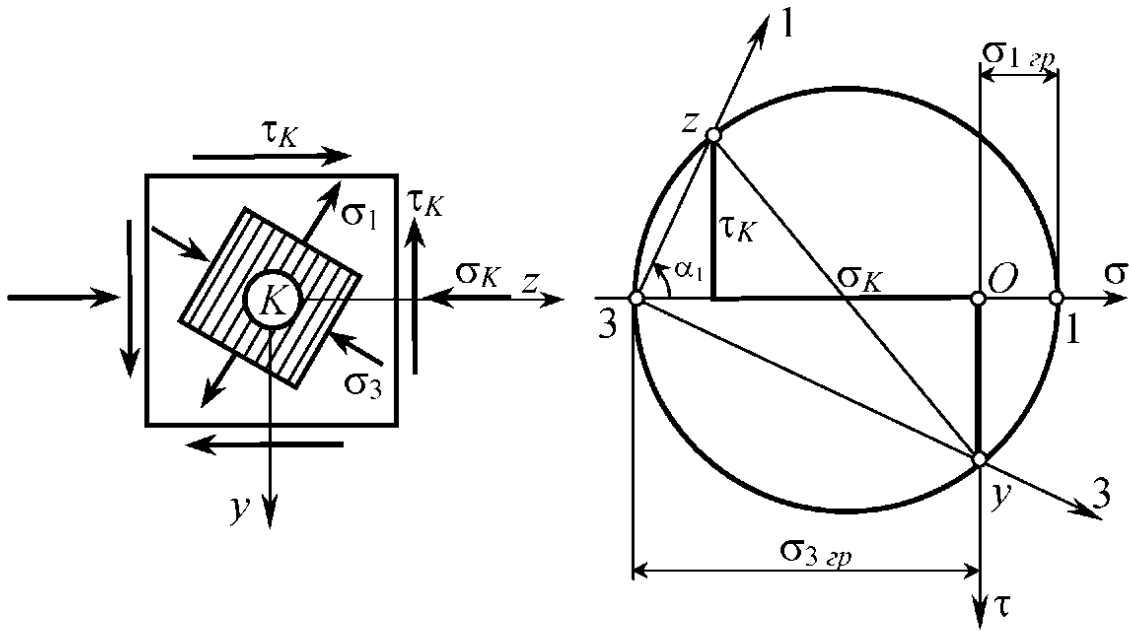


Рис. 27

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И РАСЧЕТ НА ЖЕСТКОСТЬ

3.1. Основные понятия

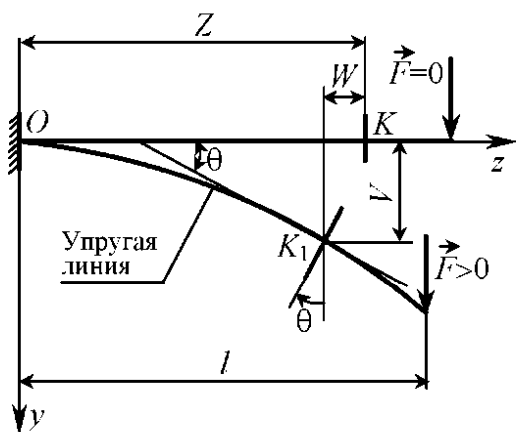


Рис.28

При изгибе произвольное сечение K балки (рис. 28) получает три перемещения: *вертикальный прогиб V , горизонтальное смещение W , угол поворота θ* . Ось деформированной балки называется упругой

линией. В реальных конструкциях $W \ll V$, $V_{\max} \leq l/200$, $\theta_{\max} \leq 1^\circ$ (0,0174 рад), поэтому в расчетах можно пренебречь смещением W , а для углов поворота использовать приближенную формулу $\theta \approx \text{tg}\theta = dv/dz$. Таким образом, для определения линейных и угловых перемещений сечений балки необходимо знать уравнение упругой линии $V(z)$.

Кривизна оси балки связана с изгибающим моментом выражением $K = 1/\rho = M_x/(EI_x)$.

Из курса математики известна следующая формула для кривизны линии:

$$K = \pm V'' / [1 + (V')^2]^{3/2},$$

где $V' = dV/dz$, $V'' = d^2V/dz^2$.

Подставляя это значение K в предыдущее выражение, получим точное дифференциальное уравнение упругой линии балки:

$$V'' / [1 + (V')^2]^{3/2} = \pm M_x / (EI_x). \quad (10)$$

Пренебрегая $(V')^2$ по сравнению с единицей, заменяем его приближенным уравнением

$$V'' = \pm M_x / (EI_x) \quad (11)$$

которое называют *основным дифференциальным уравнением упругой линии балки*.

Выбор знака определяется принятой системой координат (рис. 29). Если ось y направлена вверх, то знаки момента M_x и кривизны V'' совпадают, поэтому в уравнении (11) берется знак “плюс”. При обратном направлении оси y знаки M_x и V'' противоположны, следовательно, в этом случае следует использовать уравнение вида $V'' = -M_x / (EI_x)$, которое и рассматривается в дальнейшем.

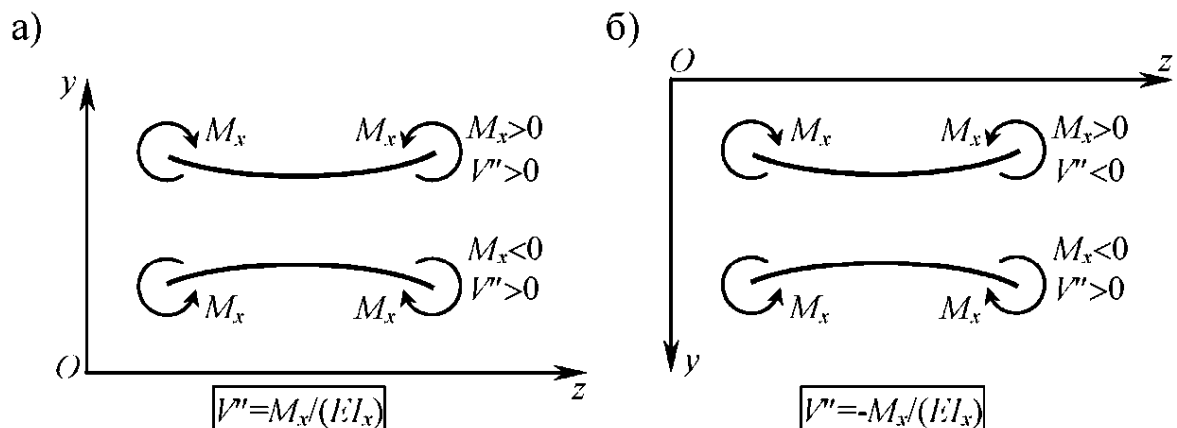


Рис. 29

3.2. Метод начальных параметров

Последовательно интегрируя уравнение (11), получим сначала выражение для углов поворота

$$\theta(z) = \theta_o - \frac{1}{EI_{x0}} \int_0^z M_x(z) dz \quad (a)$$

а затем для прогибов

$$V(z) = V_o + \theta_o z - \frac{1}{EI_{x0}} \int_0^z \left(\int_0^z M_x(z) dz \right) dz. \quad (б)$$

Для вычисления интегралов, входящих в формулы (а) и (б), запишем выражение изгибающего момента $M_x(z)$ от типичных нагрузок (рис. 30):

$$M_x(z) = - \left[M + F(z-b) + \frac{q}{2}(z-c)^2 - \frac{q}{2}(z-d)^2 \right].$$

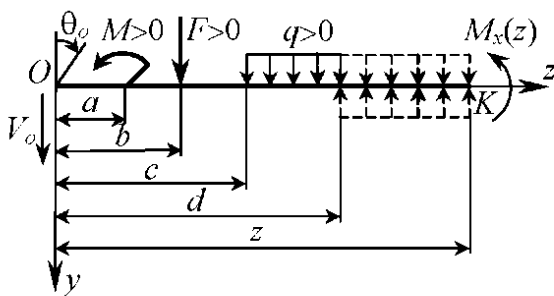


Рис. 30

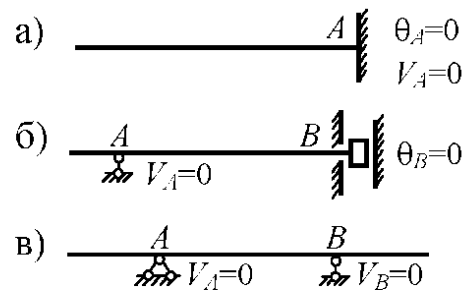


Рис. 31

Подставляя M_x в формулы (а) и (б) и учитывая, что в общем случае на балку действует несколько моментов, сосредоточенных сил и погонных нагрузок, после интегрирования получим окончательно

$$\theta(z) = \theta_o + \frac{1}{EI_x} \sum \left[\frac{M(z-O)}{1!} + \frac{F(z-b)^2}{2!} + \frac{q(z-c)^3}{3!} - \frac{q(z-d)^3}{3!} \right], \quad (12)$$

$$V(z) = V_o + \theta_o z + \frac{1}{EI_x} \sum \left[\begin{array}{l} \frac{M(z-O)^2}{2!} + \frac{F(z-b)^3}{3!} + \frac{q(z-C)^4}{4!} \\ - \frac{q(z-d)^4}{4!} \end{array} \right] \quad (13)$$

Здесь θ_o и V_o – угол поворота и прогиб в начале координат, называемые *начальными параметрами* и определяемые из условий опирания балки (рис. 31). Значок “Л” над символом суммы обозначает, что суммируются только те величины, которые относятся к части балки, расположенной *слева* от того сечения, где ищутся перемещения. Все нагрузки, приведенные на рис. 30, считаются *положительными*.

Пример 18

Элемент машины представляет собой балку пролетом $3a$, опирающуюся на шарнирно подвижную опору, а с другой – на вертикальные направляющие, вдоль которых свободно (без трения) скользит ползун, жестко связанный с балкой. Определить прогибы в точках A и C и угол поворота на опоре B .

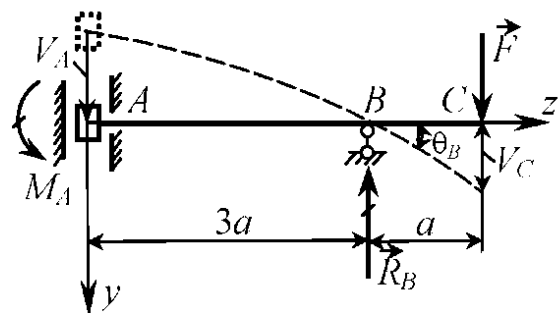


Рис. 32

Определим опорные реакции. Составляем уравнения равновесия и находим искомые реакции:

Решение. 1. Определение опорных реакций. Составляем уравнения равновесия и находим искомые реакции:

$$\sum Y_i = 0, \quad R_B = F, \quad \sum m_A = 0, \quad M_A + R_B \cdot 3a - F \cdot 4a = 0, \quad M_A = Fa.$$

2. Определение начальных параметров. Из условий опирания балки имеем $\theta_A = 0$ и $V_B = 0$. Из первого получаем $\theta_o = 0$, а из второго находим V_o :

$$V_B = V(3a) = V_o + \frac{1}{EI_x} \left[M_A \frac{(3a)^2}{2} \right] = 0, \quad V_o = V_A = -\frac{9 Fa^3}{2 EI_x}.$$

3. Определение искомых перемещений. Имеем

$$\theta_B = \frac{1}{EI_x} \left[M_A \frac{(3a)}{1} \right] = \frac{3Fa^2}{EI_x}; \quad V_C = V_o + \frac{1}{EI_x} \left[M_A \frac{(4a)^2}{2} - R_B \frac{(a)^3}{6} \right],$$

$$V_C = \frac{Fa^3}{EI_x} \left(-\frac{9}{2} + 1 \cdot \frac{16}{2} - 1 \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{10 Fa^3}{3 EI_x}.$$

Пример 19. Определить углы поворота опорных сечений и прогибы на конце консоли и в середине пролета. Построить пунктиром вид изогнутой оси балки (рис. 33).

Решение. 1. Определение опорных реакций. Из уравнений равновесия имеем

$$\sum m_B = 0, \quad R_A \cdot 2a = qa \cdot 2,5a + 4qa \cdot a - qa^2, \quad R_A = (11/4)qa,$$

$$\sum m_A = 0, \quad R_B \cdot 2a = qa^2 + 4qa \cdot a - qa \cdot 0,5a, \quad R_B = (9/4)qa.$$

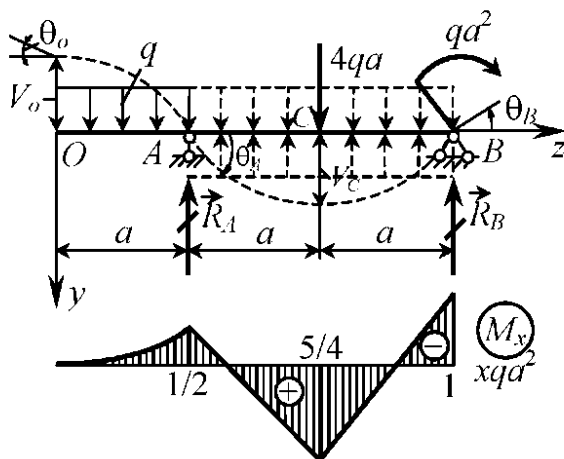


Рис. 33

2. Определение начальных параметров. Из условий опирания балки $V_A = V_B = 0$ или в развернутом виде

$$V_A = V(a) = V_o + \theta_o \cdot a + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{qa^4}{24} \right) = 0,$$

$$V_B = V(3a) = V_o + \theta_o \cdot 3a + \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{R_A(2a)^3}{6} + \frac{4qa(a)^3}{6} + \frac{q(3a)^4}{24} - \frac{q(2a)^4}{24} \right] = 0.$$

Таким образом, получаем систему

$$\left. \begin{aligned} V_o + \theta_o \cdot a &= -qa^4 / (24EI_x), \\ V_o + \theta_o \cdot 3a &= -7qa^4 / (24EI_x), \end{aligned} \right\}$$

откуда $\theta_o = qa^3 / (6EI_x)$, $V_o = -5qa^4 / (24EI_x)$.

3. Определение искомых перемещений. Угол поворота на

опоре A
$$\theta_A = \theta_o + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{qa^3}{6} \right) = \frac{qa^3}{EI_x} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{qa^3}{3EI_x}.$$

Угол поворота на опоре B

$$\begin{aligned} \theta_B &= \theta_o + \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{R_A(2a)^2}{2} + \frac{4qa(a)^2}{2} + \frac{q(3a)^3}{6} - \frac{q(2a)^3}{6} \right] = \\ &= \frac{qa^3}{EI_x} \left(\frac{1}{6} - \frac{11}{4} + \frac{4}{2} + \frac{27}{6} - \frac{8}{6} \right) = -\frac{qa^3}{6EI_x}. \end{aligned}$$

Прогиб посредине пролета (сеч. C)

$$\begin{aligned} V_C = V(2a) &= V_o + \theta_o \cdot 2a + \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{R_A(a)^3}{6} + \frac{q(2a)^4}{24} - \frac{q(a)^4}{24} \right] = \\ &= \frac{qa^4}{EI_x} \left(-\frac{5}{24} + \frac{2}{6} - \frac{11}{4} + \frac{16}{24} - \frac{1}{24} \right) = \frac{7}{24} \frac{qa^4}{EI_x}. \end{aligned}$$

Примерный вид упругой линии балки показан на рис. 33 пунктиром.

Пример 20

Определить место и значение наибольшего прогиба, а также углы поворота опорных сечений двухопорной балки постоянной жесткости, нагруженной сосредоточенными моментами (рис. 34).

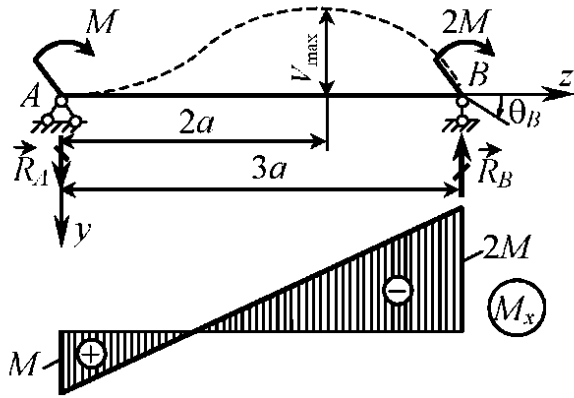


Рис. 34

Решение. 1. Определение опорных реакций. Имеем $\sum m_B = 0$, $R_A \cdot 3a = 3M$, $R_A = R_B = M/a$.

2. Определение начальных параметров. Из условий опирания балки $V_A = V_B = 0$. Согласно первому условию $V_o = 0$, а из второго находим θ_o :

$$V_B = \theta_o \cdot 3a + \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{M(3a)^2}{2} + \frac{R_A(3a)^3}{6} \right] = 0,$$

откуда $\theta_o = (Ma/EI_x)(3/2 - 3/2) = 0$.

Следовательно, уравнения прогибов и углов поворота имеют вид

$$V(z) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{Mz^2}{2} + \frac{M}{a} \cdot \frac{z^3}{6} \right), \quad \theta(z) = \frac{1}{EI_x} \left(-Mz + \frac{M}{2a} \cdot z^2 \right).$$

Наибольший прогиб возникает в том сечении, где $dv/dz = \theta = 0$, т.е. при $z = 2a$. Подставив в уравнение прогибов $z = 2a$, вычислим наибольший прогиб

$$V_{\max} = -2Ma^2/(3EI_x).$$

Интересно отметить, что прогиб посередине пролета балки равен $V_{\text{ср}} = V(1,5a) = -9Ma^2/(16EI_x)$ и отличается от наибольшего на 15%. Угол поворота сечения B

$$\theta_B = \theta(3a) = 3Ma/(2EI_x).$$

Пример 21

Подобрать номер стального двутавра исходя из условий прочности и жесткости, если допусковое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа, допусковый прогиб $[f] = l/400$, $F = 50$ кН, модуль упругости $E = 200$ ГПа.

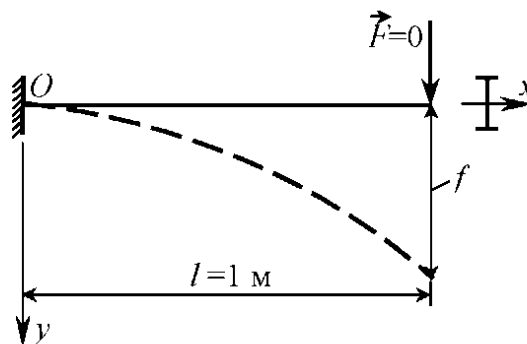


Рис. 35

Решение.

1. Подбор сечения по условию прочности. Максимальный изгибающий момент возникает в защемлении и равен $M_{\max} = F \cdot l = 50$ кН·м. По условию прочности $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ или $M_{\max}/W_x \leq [\sigma]$, откуда

$$W_x \geq M_{\max} / [\sigma] = 50 \cdot 10^3 / (160 \cdot 10^6) = 312,5 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр № 24а, у которого $W_x = 317 \text{ см}^3$.

2. Подбор сечения по условию жесткости. Максимальный прогиб $f = FL^3/(3EI_x)$. По условию жесткости $v_{\max} = f \leq [f]$ или $FL^3/(3EI_x) \leq l/400$, откуда

$$I_x = 400FL^2/(3E) = 400 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 1^2 / (3 \cdot 200 \cdot 10^9) = 3333 \text{ см}^4.$$

Берем профиль № 24, для которого $I_x = 3460 \text{ см}^4$.

Окончательно принимаем двутавр № 24а, удовлетворяющий как условию прочности, так и жесткости.

Пример 22

Подобрать диаметр деревянной балки круглого сечения, удовлетворяющей условиям прочности и жесткости, если $q = 1$ кН/м, $a = 1$ м, $[\sigma] = 10$ МПа, $[\tau] = 1$ МПа, $E = 10$ ГПа, $[f] = l/400$.

Решение

1. Построение эюр Q и M_x .

Опорные реакции:

$$R_A = R_B = 2qa.$$

Расчетные внутренние факторы:

$$Q_{\max} = 2qa = 2 \text{ кН}, \quad M_{\max} = 4qa^2 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2. Подбор сечения из условий прочности:

- по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = M_{\max}/W_x \leq [\sigma], \quad W_x = \pi d^3/32, \quad \text{откуда}$$

$$d_{\sigma} = \sqrt[3]{32M_{\max}/(\pi[\sigma])} = \sqrt[3]{32 \cdot 4 \cdot 10^3 / (\pi \cdot 10 \cdot 10^6)} = 16 \text{ см};$$

- по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = 4Q_{\max}/(3A) \leq [\tau], \quad A = (\pi/4)d^2, \quad \text{откуда}$$

$$d_{\tau} = \sqrt{16Q_{\max}/(3\pi[\tau])} = \sqrt{16 \cdot 2 \cdot 10^3 / (3\pi \cdot 1 \cdot 10^6)} = 6 \text{ см}.$$

Таким образом, по условию прочности требуемый диаметр равен $d_{\text{пч}} = \max\{d_{\sigma}, d_{\tau}\} = 16 \text{ см}$.

3. Подбор сечения по условию жесткости. Определяем наибольший прогиб. Начало координат выбираем в середине балки (сеч. C). Тогда в силу симметрии $\theta_o = 0$. Кроме того,

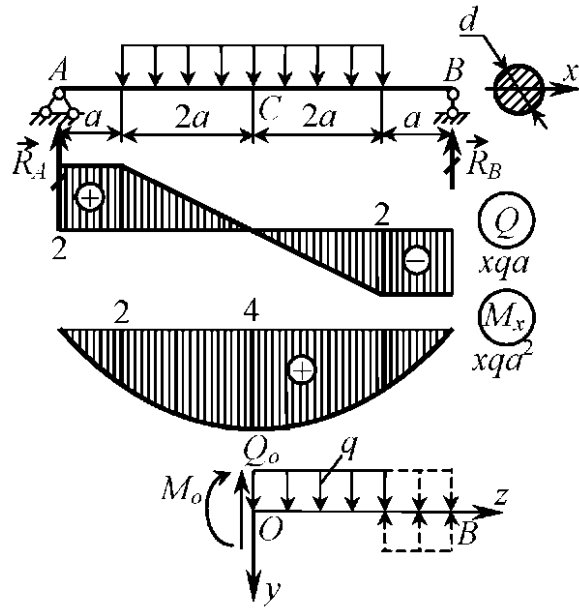


Рис. 36

$Q_o = 0$ и $M_o = 4qa^2$. Из условия опирания балки $V_B = 0$ или

$$V_B = V_o + \theta_o \cdot 3a + \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{M_o(3a)^2}{2} + \frac{q(3a)^4}{24} - \frac{q(a)^4}{24} \right] = 0.$$

Отсюда
$$V_{\max} = V_o = \frac{qa^4}{EI_x} \left(\frac{4 \cdot 3^2}{2} - \frac{3^4}{24} + \frac{1}{24} \right) = \frac{44qa^4}{3EI_x}.$$

По условию жесткости $V_{\max} = 44qa^4 / (3EI_x) \leq [f]$,
 $I_x = \pi d^4 / 64$, откуда

$$d_{\text{ж}} \geq \sqrt[4]{44 \cdot 54 \cdot qa^4 / (3\pi E \cdot [f])} = \\ = \sqrt[4]{44 \cdot 54 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 1^4 / (3\pi \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2})} = 21 \text{ см}.$$

Окончательно принимаем больший размер, т.е.

$$d = \max\{d_{\text{пч}}, d_{\text{ж}}\} = d_{\text{ж}} = 21 \text{ см}.$$

Пример 23. На стальную двутавровую балку (рис. 37) действует равномерно распределенная нагрузка. Определить интенсивность нагрузки q , если измерением установлено, что касательная к оси изогнутой балки на свободном конце составляет с осью Oz угол $\theta_o = 8$ мрад. Принять $E = 200$ ГПа.

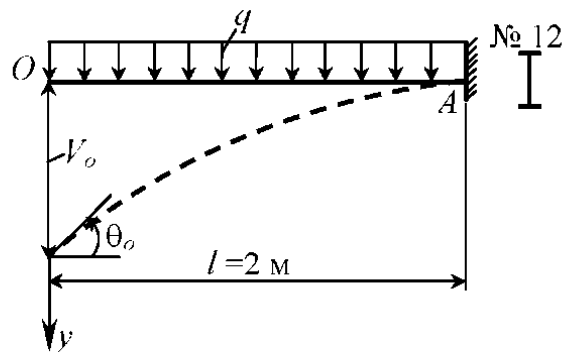


Рис. 37

Решение. Из условия опирания балки $\theta_A = 0$ или $\theta(l) = \theta_o + (l/EI_x)(ql^3/6) = 0$, из которого находим

$$\theta_o = -ql^3/(6EI_x). \text{ Отсюда}$$

$$q = 6EI_x\theta_o/l^3 = 6 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 350 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 10^{-3} / 2^3 = 4,2 \text{ кН/м}.$$

Пример 24. Дюралевая круглая труба сечением 50x44 мм положена горизонтально на две опоры. Определить максимальный допустимый пролет l , исходя из условий прочности и жесткости, если $[f] = l/200$, $[\sigma] = 115$ МПа, $\gamma = 26$ кН/м³, $E = 75$ ГПа.

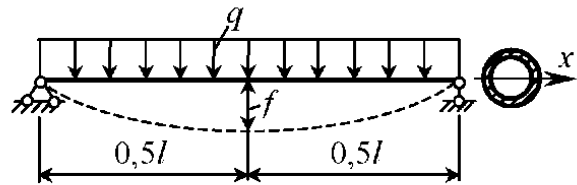


Рис. 38

Решение. 1. Расчет на прочность. Геометрические характеристики сечения

$$A = (\pi/4)d_H^2(1 - \alpha^2) = (\pi \cdot 5^2/4)(1 - 0,88^2) = 4,43 \text{ см}^2;$$

$$I_x = (\pi d_H^4/64)(1 - \alpha^4) = (\pi \cdot 5^4/64)(1 - 0,88^4) = 12,5 \text{ см}^4;$$

$$W_x = I_x / (0,5d_H) = 5 \text{ см}^3.$$

Погонная нагрузка $q = \gamma A = 26 \cdot 10^3 \cdot 4,43 \cdot 10^{-4} = 11,5$ Н/м.

Из условия прочности $\sigma_{\max} = M_{\max} / W_x \leq [\sigma]$ или

$$ql^2 / (8W_x) \leq [\sigma], \text{ откуда}$$

$$l_{\text{пч}} \leq \sqrt[2]{8W_x[\sigma]/q} = \sqrt[2]{8 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 115 \cdot 10^6 / 11,5} = 20 \text{ м}.$$

2. Расчет на жесткость. Наибольший прогиб в данном случае равен $f = 5ql^4 / (384EI_x)$. Из условия жесткости $f \leq [f] = l/200$, откуда

$$l_{\text{ж}} \leq \sqrt[3]{384EI_x / (5 \cdot 200 \cdot q)} = \sqrt[3]{384 \cdot 75 \cdot 10^9 \cdot 12,5 \cdot 10^{-8} / (1000 \cdot 11,5)} = 6,8 \text{ м}.$$

Окончательно принимаем меньшую из двух найденных величин, т.е. $l = \min\{l_{\text{пч}}, l_{\text{ж}}\} = l_{\text{ж}} = 6,8$ м.

Пример 25. При загрузке сосновой доски, свободно лежащей на двух опорах, силой $F = 24$ Н по середине был измерен прогиб под силой $f = 5$ мм. Определить модуль упругости материала.

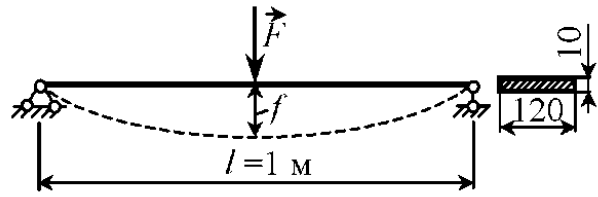


Рис. 39

Решение. Как известно, прогиб под силой равен $f = Fl^3 / (48EI_x)$, откуда $E = Fl^3 / (48I_x f)$.

Вычисляем момент инерции

$$I_x = bh^3 / 12 = 12 \cdot 10^3 / 12 = 1 \text{ см}^4 \text{ и находим}$$

$$E = Fl^3 / (48I_x f) = 24 \cdot 1^3 / (48 \cdot 1 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^{-3}) = 10 \text{ ГПа.}$$

3.3. Энергетический метод

Энергия деформации при изгибе. Выделим из балки бесконечно малый элемент (рис. 40) и составим для него уравнение баланса энергии

$$dU = dW,$$

где dU – потенциальная энергия упругой деформации, dW – работа внешних сил. Как известно, работа пары сил M_x равна произведению момента на угол поворота. Однако, учитывая статический характер нагружения и линейную зависимость между усилиями и перемещениями, в нашем случае $dW = (1/2)M_x d\theta$.

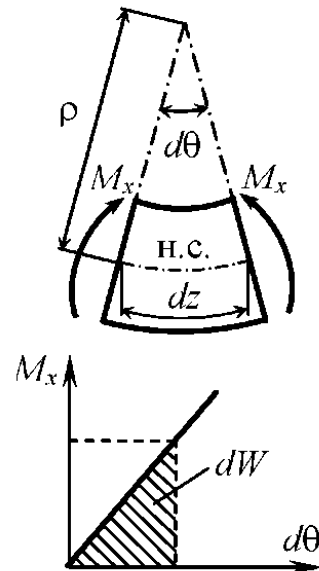


Рис. 40

Но $d\theta = dz/\rho = M_x dz/(EI_x)$, поэтому $dU = M_x^2 dz/(2EI_x)$.

Полная энергия, накапливаемая во всей балке,

$$U = \int_l M_x^2 dz / (2EI_x). \quad (14)$$

Полученная формула, строго говоря, справедлива только при чистом изгибе. При поперечном изгибе она является двухчленной

$$U = \int_l M_x^2 dz / (2EI_x) + \int_l K_y Q_y^2 dz / (2GA). \quad (15)$$

Здесь K_y – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения. Например, для прямоугольного сечения $K_y = 1,2$. Второе слагаемое не превышает, как правило, 2-3% от всей энергии деформации, поэтому в большинстве практических расчетов им пренебрегают.

Теоремы о взаимности работ и перемещений. Эти теоремы относятся к числу общих теорем сопротивления материалов. Они прямо вытекают из принципа независимости действия сил и применимы ко всем системам, для которых соблюдается этот принцип.

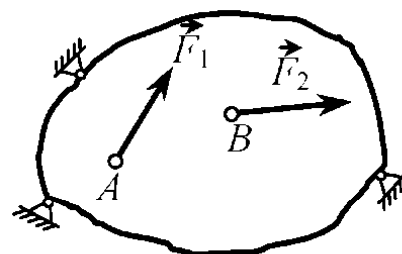


Рис. 41

Рассмотрим упругое тело (рис. 41), к которому приложены силы F_1 в точке A и F_2 в точке B . Определим работу, которую совершат эти силы при различном порядке их приложения. Пусть сначала прикладывается сила F_1 , а затем F_2 . Тогда сумма работ равна

$$W_1 = (1/2)F_1\delta_{A1} + (1/2)F_2\delta_{B2} + F_1\delta_{A2},$$

где δ_{A1} – перемещение точки A по направлению силы F_1 , вызванное силой F_1 ; δ_{B2} – перемещение точки B по направлению силы F_2 , вызванное силой F_2 ; δ_{A2} – перемещение точки A по направлению силы F_1 под действием силы F_2 , приложенной в точке B . В последнем слагаемом множитель $1/2$ отсутствует, так как на пути O_{A2} сила F_1 остается неизменной.

Во втором случае сначала прикладывается сила F_2 , а затем F_1 и выражение работы будет следующим:

$$W_2 = (1/2)F_2\delta_{B2} + (1/2)F_1\delta_{A1} + F_2\delta_{B1}.$$

Приравняв работы, находим

$$\boxed{F_1\delta_{A2} = F_2\delta_{B1}}, \quad (16)$$

Полученный результат выражает теорему о взаимности работ (*теорему Бетти*): работа первой силы на перемещении точки ее приложения под действием второй силы равна работе второй силы на перемещении точки ее приложения под действием первой силы.

В частности, если $F_1 = F_2 = F$, то выражение (16) принимает вид

$$\boxed{\delta_{A2} = \delta_{B1}} \quad (17)$$

В этом и заключается теорема о взаимности перемещений (*теорема Максвелла*) перемещение точки A под действием силы, приложенной в точке B , равно перемещению точки B под действием той же силы, приложенной в точке A (рис. 42).

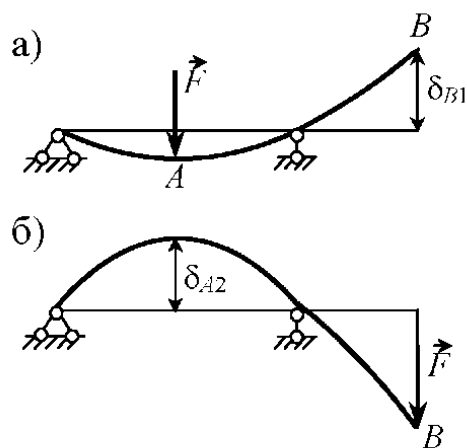


Рис. 42

Теорема Кастigliано. Частная производная от потенциальной энергии системы по силе равна перемещению точки приложения силы по направлению этой силы.

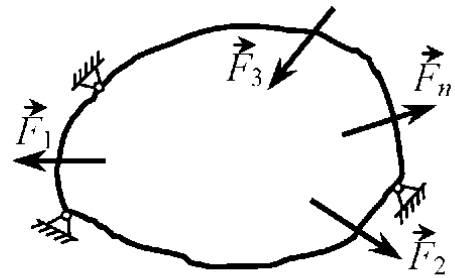


Рис. 43

Рассмотрим упругое тело (рис. 43), нагруженное произвольной системой сил. Потенциальная энергия деформации, накопленная в теле в результате работы внешних сил, равна U и выражается через силы $U = U(F_1, F_2, \dots, F_n)$. Дадим одной из сил, например, силе F_n , приращение dF_n . Тогда потенциальная энергия получит приращение $(\partial U / \partial F_n) dF_n$ и примет вид

$$U + (\partial U / \partial F_n) dF_n. \quad (a)$$

Изменим порядок приложения сил. Приложим сначала силу dF_n , а затем всю систему. Тогда выражение потенциальной энергии получим в виде

$$U + dF_n \delta_n + (1/2) dF_n d\delta_n, \quad (б)$$

где $dF_n \delta_n$ есть приращение энергии, связанное с работой силы dF_n на перемещении δ_n , вызванном всей системой внешних сил; перед произведением множитель $1/2$ не ставится, поскольку на перемещении δ_n сила dF_n остается неизменной. Третье слагаемое, равное работе силы dF_n на вызванном ею перемещении $d\delta_n$, является величиной высшего порядка малости, поэтому его можно отбросить.

Приравнявая выражения (а) и (б), находим

$$\boxed{\delta_n = \partial U / \partial F_n}, \quad (18)$$

что и требовалось доказать.

Пример 26. Определить наибольший прогиб консоли, нагруженной на конце силой F .

Решение. Изгибающий момент в произвольном сечении K балки равен $M_x(z) = -F \cdot z$.

Потенциальная энергия упругой деформации

$$U = \int_0^l M_x^2 dz / (2EI_x) = \left(F^2 / 2EI_x \right) \int_0^l z^2 dz = F^2 l^3 / (6EI_x).$$

По формуле (18) находим искомое перемещение

$$f = V_B = \partial U / \partial F = Fl^3 / (3EI_x).$$

Интеграл Мора.

Пусть требуется определить прогиб некоторого сечения K балки (рис. 45). Приложим в точке K фиктивную силу Φ

и вычислим изгибающий момент в произвольном сечении балки

$$M_x(z) = M_f(z) + M_\Phi(z),$$

где M_f – момент от заданной системы внешних сил, M_Φ – дополнительный момент, вызванный силой Φ . Момент M_Φ пропорционален силе Φ , поэтому его можно представить как произведение $M_\Phi = \bar{M} \cdot \Phi$. Здесь \bar{M} есть изгибающий момент от единичной силы, приложенной в рассматриваемой точке K .

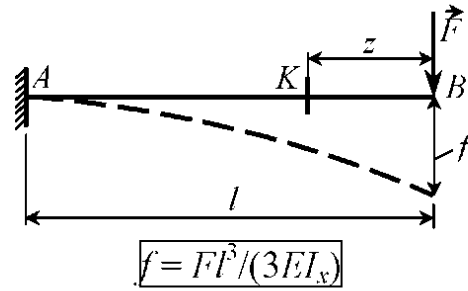


Рис. 44

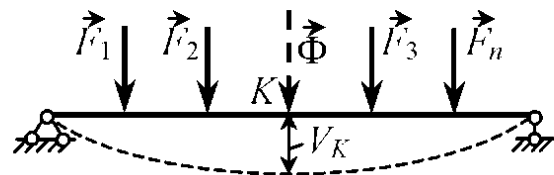


Рис. 45

Потенциальная энергия системы с учетом силы Φ

$$U = \int_0^l (M_F + \bar{M}\Phi)^2 dz / (2EI_x).$$

Дифференцируя это выражение по Φ и полагая после этого $\Phi = 0$, находим перемещение точки K :

$$\Delta_K = V_K = \partial U / \partial \Phi /_{\Phi=0} = \int_0^l M_F \bar{M} dz / (EI_x). \quad (19)$$

Это и есть *интеграл Мора*.

Пример 27. Определить максимальный прогиб в двухопорной балке, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 46).

Решение. Находим изгибающие моменты:

- от заданной нагрузки

$$M_F = R_A \cdot z_1 - qz_1^2 / 2 = q(lz_1 - z_1^2) / 2$$

- от единичной силы, приложенной в точке C , где ищется прогиб $\bar{M} = z_1 / 2$.

По формуле (19) вычисляем искомый наибольший прогиб, который возникает в среднем сечении балки

$$\begin{aligned} V_C = f &= \frac{2}{EI_x} \int_0^{l/2} M_F \cdot \bar{M} \cdot dz = \frac{q}{2EI_x} \int_0^{l/2} (lz_1 - z_1^2) z_1 dz = \\ &= \frac{ql^4}{2EI_x} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{5ql^4}{384EI_x}. \end{aligned}$$

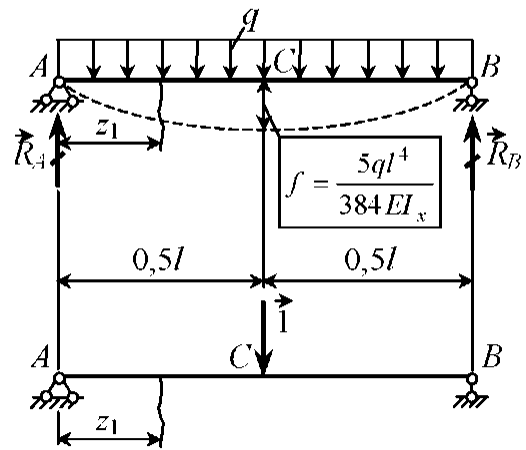


Рис. 46

Некоторые способы вычисления интеграла Мора. Наибольшее распространение в инженерной практике получили *правило Верещагина* и *формула Симпсона*.

Правило Верещагина. Оно заключается в замене операции интегрирования перемножением площади эпюры моментов от внешней нагрузки на ординату линейной эпюры от единичной силы, расположенную под центром тяжести первой эпюры.

Действительно, $I = \int_0^l M_F \bar{M} dz$, причем $\bar{M} = kz + b$.

Поэтому, $I = k \int_0^l z M_F dz + b \int_0^l M_F dz$.

Но $\int_0^l z M_F dz = \omega_F z_C$, $\int_0^l M_F dz = \omega_F$.

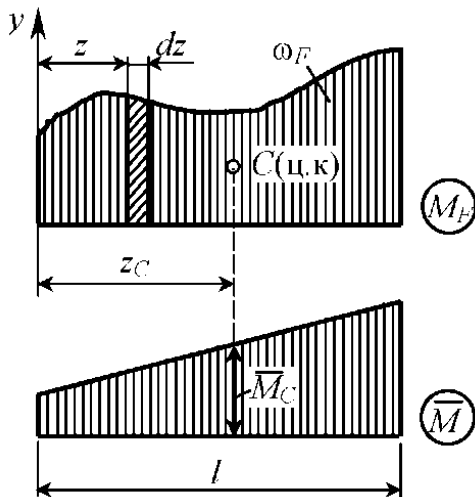


Рис. 47

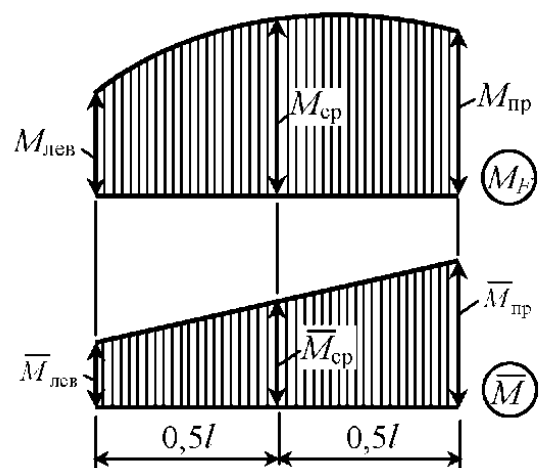


Рис. 48

Следовательно,

$$I = \int_0^l M_F \bar{M} dz = \omega_F (kz_C + b) = \omega_F M_C \quad \text{или} \quad I = \omega \cdot C. \quad (20)$$

В последней формуле индекс “F” у площади ω опущен, а ордината M_C прямолинейной эпюры для краткости обозначена одной буквой C .

Площадь ω иногда приходится разбивать на более простые части, тогда вместо (20) получим



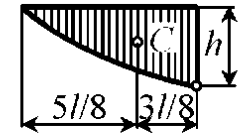
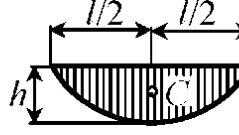
$$I = \int_0^l M_F \bar{M} dz = \sum_{i=1}^n \omega_i C_i, \quad (21)$$

где ω_i – части площади ω , C_i – соответствующая ордината прямолинейной эпюры.

Искомое перемещение $EI_x \Delta_K = \int_0^l M_F \bar{M} dz = \sum_{i=1}^n \omega_i C_i. \quad (22)$

Площади простейших фигур и положения их центров тяжести приведены в табл. 2.

Таблица 2

	Треугольник	Квадратная парабола		
Фигура				
ω	$hl/2$	$hl/3$	$2hl/3$	$2hl/3$

Формула Симпсона (рис. 48)

$$I = \int_0^l M_F \bar{M} dz = \frac{l}{6} (M_{\text{лев}} \bar{M}_{\text{лев}} + 4M_{\text{ср}} \bar{M}_{\text{ср}} + M_{\text{пр}} \bar{M}_{\text{пр}}). \quad (23)$$

При наличии погонной равномерно распределенной нагрузки интенсивности q величина M_{cp} определяется по формуле

$$M_{cp} = (M_{лев} + M_{пр})/2 \pm ql^2/8.$$

Знак “плюс” соответствует погонной нагрузке, направленной вниз; при обратном направлении нагрузки берется знак “минус”.

Пример 28. Определить углы поворота на опорах A и B .

Решение

Строим эпюры от заданной нагрузки и от единичных моментов, приложенных в сечениях A и B (рис. 49). Искомые перемещения определяем с помощью интегралов Мора

$$\theta_A = \int_0^l M_F \bar{M}_1 dz / (EI_x),$$

$$\theta_B = \int_0^l M_F \bar{M}_2 dz / (EI_x),$$

которые вычисляем по правилу Верещагина. Находим параметры эпюр

$$\omega = hl/2 = Ml/2, \quad C_1 = 2/3, \quad C_2 = 1/3,$$

а затем и углы поворота на опорах A и B

$$\theta_A = \omega C_1 / (EI_x) = (Ml/2)(2/3) / (EI_x) = Ml / (3EI_x),$$

$$\theta_B = \omega C_2 / (EI_x) = Ml / (6EI_x).$$

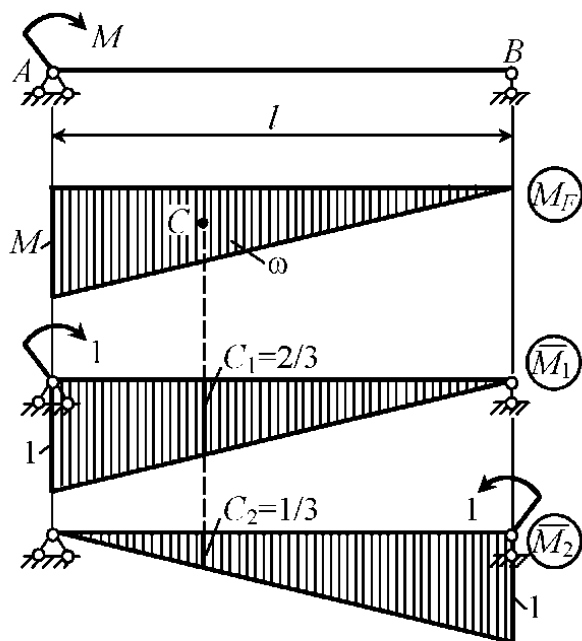


Рис. 49

Пример 29. Определить угол поворота сечения C .

Решение. Определяем опорные реакции $\sum Y_i = 0$, $R_A = R_B$,

$$\sum m_A = 0, \quad R_B \cdot 4a = q \cdot 2a \cdot 2a,$$

$$R_A = R_B = qa.$$

Строим эпюры изгибающего момента от заданной нагрузки и от единичного момента, приложенного в сечении C , где ищется угол поворота. Интеграл

Мора вычисляем по правилу Верещагина. Находим параметры эпюр $\omega_1 = 2hl/3 = (2/3)(qa^2/2) \cdot 2a = (2/3)qa^3$,

$$\omega_2 = -\omega_1 = -(2/3)qa^3, \quad C_2 = -C_1 = -1/4,$$

а по ним и искомое перемещение

$$\theta_C = \frac{\omega_1 C_1 + \omega_2 C_2}{EI_x} = \frac{qa^3}{EI_x} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{qa^3}{3EI_x}.$$

Пример 30. Определить перемещения точек C и D .

Предлагается студентам решить самостоятельно.

Ответ:

$$V_C = 67qa^4/(72EI_x),$$

$$V_D = 31qa^4/(36EI_x).$$

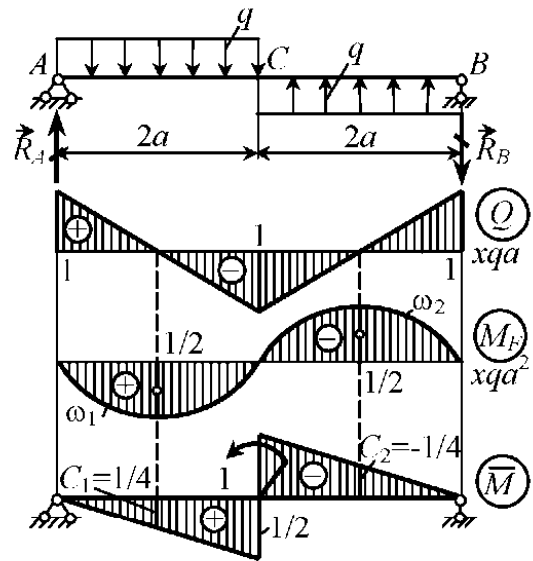


Рис. 50

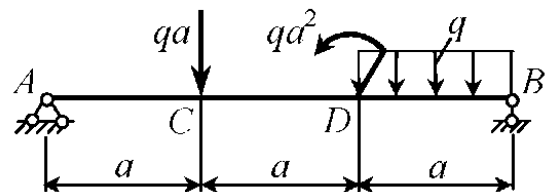


Рис. 51

Пример 31

Определить прогиб в сечении C .

Решение

1. Построение эпюр изгибающих моментов.

Эпюра M_F (рис. 52,б)

Опорные реакции:

$$BE: \sum m_E = 0,$$

$$R_B \cdot 3a = F \cdot 2a + Fa,$$

$$\sum Y_i = 0, \quad R_B + R_E = F, \quad R_E = 0;$$

$$AB: \sum Y_i = 0, \quad R_A = R_B = F;$$

$$\sum m_A = 0, \quad M_A = Fa.$$

Вычисляем моменты в характерных точках $M_A = -F \cdot a$, $M_B = 0$, $M_C = Fa$ и строим эпюру изгибающего момента от заданной нагрузки.

Эпюра \bar{M} (рис. 52,в).

В сечении C , где ищется прогиб, прикладываем единичную силу $\bar{1}$ и строим от нее эпюру изгибающего момента, вычисляя сначала опорные реакции \underline{BE} - $\sum m_E = 0$, $\bar{R}_B \cdot 3a = 1 \cdot 2a$, $\bar{R}_B = 2/3$; $\sum Y_i = 0$, $\bar{R}_B + \bar{R}_E = 1$, $\bar{R}_E = 1/3$, а затем моменты в характерных точках $\bar{M}_A = -2a/3$, $\bar{M}_B = 0$, $\bar{M}_C = 2a/3$.

2. Определение искомого прогиба. Воспользуемся правилом Верещагина и вычислим предварительно параметры эпюр M_F и \bar{M} :

$$\omega_1 = (1/2)(-Fa) \cdot a = -Fa^2/2, \quad \omega_2 = -\omega_1 = Fa^2/2, \quad \omega_3 = Fa \cdot a = Fa^2,$$

$$C_1 = (2/3)(-2a/3) = -4a/9, \quad C_2 = -C_1 = 4a/9, \quad C_3 = a/2.$$

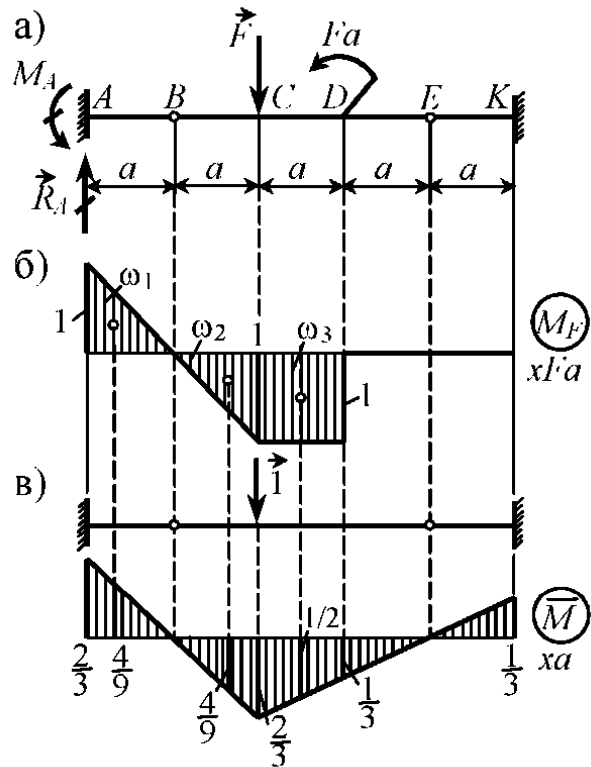


Рис. 52

Прогиб сечения С

$$V_C = \frac{\omega_1 C_1 + \omega_2 C_2 + \omega_3 C_3}{EI_x} = \frac{Fa^3}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{17Fa^3}{18EI_x}$$

Пример 32

Определить прогиб в сечении С.

Решение. Строим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки и от единичной силы, приложенной в точке

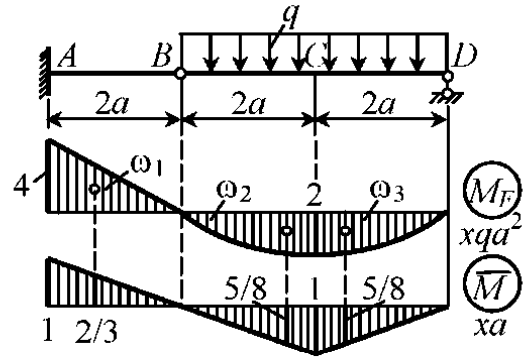


Рис. 53

С. Пользуясь правилом Верещагина, вычисляем параметры эпюр $\omega_1 = -(1/2) \cdot 4qa^2 \cdot 2a = -4qa^3$, $\omega_2 = \omega_3 = (2/3)2qa^2 \cdot 2a = 8qa^3/3$, $C_1 = (2/3)(-a) = -2a/3$, $C_2 = C_3 = (5/8)a$ и находим искомый прогиб

$$V_C = \frac{\omega_1 C_1 + \omega_2 C_2 + \omega_3 C_3}{EI} = \frac{qa^4}{EI} \left(4 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{8} \right) = 6 \frac{qa^4}{EI}$$

Пример 33

Определить прогиб в сечении С.

Решение. 1. Построение эпюр изгибающих моментов.

Опорные реакции:

$$\sum m_D = 0,$$

$$R_A \cdot 4a = qa \cdot 3a + q \cdot 2a \cdot 2a + qa^2,$$

$$R_A = 2qa, \sum Y_i = 0, R_A + R_D = 3qa,$$

$$R_D = qa.$$

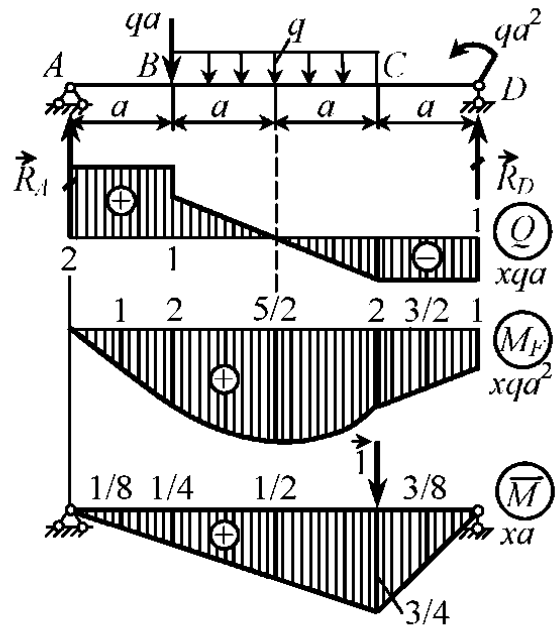


Рис. 54

Строим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки и от единичной силы, приложенной в точке C .

2. Определение перемещений. Для вычисления интеграла Мора воспользуемся формулой Симпсона, последовательно применяя ее к каждому из трех участков, на которые разбивается балка.

$$\text{Участок } AB: M_{\text{лев}}=0, M_{\text{ср}}=qa^2, M_{\text{пр}}=2qa^2,$$

$$\bar{M}_{\text{лев}}=0, \bar{M}_{\text{ср}}=a/8, \bar{M}_{\text{пр}}=a/4;$$

$$\begin{aligned} I_{AB} &= \int_A^B M_F \bar{M} dz = \frac{AB}{6} (M_{\text{лев}} \cdot \bar{M}_{\text{лев}} + 4M_{\text{ср}} \cdot \bar{M}_{\text{ср}} + M_{\text{пр}} \cdot \bar{M}_{\text{пр}}) = \\ &= \frac{a}{6} [0 \cdot 0 + 4 \cdot qa^2 \cdot (a/8) + 2qa^2 \cdot (a/4)] = \frac{qa^4}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Участок } BC: M_{\text{лев}}=2qa^2, M_{\text{ср}}=5qa^2/2, M_{\text{пр}}=2qa^2,$$

$$\bar{M}_{\text{лев}}=a/4, \bar{M}_{\text{ср}}=a/2, \bar{M}_{\text{пр}}=3a/4;$$

$$\begin{aligned} I_{BC} &= \int_B^C M_F \bar{M} dz = \frac{BC}{6} (M_{\text{лев}} \cdot \bar{M}_{\text{лев}} + 4M_{\text{ср}} \cdot \bar{M}_{\text{ср}} + M_{\text{пр}} \cdot \bar{M}_{\text{пр}}) = \\ &= \frac{2a}{6} [2qa^2 \cdot (a/4) + 4(5qa^2/2)(a/2) + 2qa^2 \cdot (3a/4)] = \frac{7qa^4}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Участок } CD: M_{\text{лев}}=2qa^2, M_{\text{ср}}=3qa^2/2, M_{\text{пр}}=0,$$

$$\bar{M}_{\text{лев}}=3a/4, \bar{M}_{\text{ср}}=3a/8, \bar{M}_{\text{пр}}=0;$$

$$I_{CD} = \int_C^D M_F \bar{M} dz = \frac{a}{6} [2qa^2 \cdot (3a/4) + 4(3qa^2/2)(3a/8)] = \frac{5qa^4}{8}.$$

Искомое перемещение

$$V_C = \sum I_i / (EI_x) = \frac{qa^4}{EI} \left(\frac{1}{6} + \frac{7}{3} + \frac{5}{8} \right) = \frac{25qa^4}{8EI}.$$

Пример 34. Определить прогиб сечения A и угол поворота сечения E балки (рис. 55,а).

Решение. 1. Построение эпюр изгибающих моментов.

Эпюра M_F (рис. 55,в). Определив опорные реакции $\sum m_D = 0$, $R_B \cdot 4a = q \cdot 3a \cdot 3,5a - qa \cdot a$, $R_B = 19qa/8$, $\sum Y_i = 0$, $R_D = 13qa/8$, строим эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M_F от заданной нагрузки.

Эпюра \bar{M}_1 (рис. 55,д). В сечении A , где ищется прогиб, прикладываем единичную силу и строим от нее эпюру изгибающего момента.

Эпюра \bar{M}_2 (рис. 55,е). Эта эпюра строится от единичного момента, приложенного в сечении E , где ищется угол поворота.

2. Определение перемещений. Прогиб сечения A находим, пользуясь правилом Верещагина. Эпюру M_F на участках BC и CD разбиваем на простые части (рис. 55,г). Необходимые вычисления представляем в виде таблицы.

Номер части	1	2	3	4	5	6	7	Σ
ω_i	$-qa^3/6$	$2qa^3/3$	$-qa^3/2$	$qa^3/4$	$qa^3/4$	$-qa^3$	$-qa^3/2$	
C_i	$-3a/4$	$-3a/4$	$-5a/6$	$-2a/3$	$-a/3$	$-a/6$	0	
$\omega_i C_i$	$qa^4/8$	$-qa^4/2$	$5qa^4/12$	$-qa^4/6$	$-qa^4/12$	$qa^4/6$	0	$-qa^4/24$

Получаем $V_A = \sum_{i=1}^7 \omega_i C_i / (EI_x) = -qa^4 / (24EI_x)$.

Знак “минус” в результате означает, что точка A перемещается не вниз, как была направлена единичная сила, а вверх.

Угол поворота сечения E находим двумя способами: по правилу Верещагина и по формуле Симпсона.

По правилу Верещагина, перемножая эпюры M_F и \bar{M}_2 , по аналогии с предыдущим получим

$$\theta_E = \sum_{i=1}^7 \omega_i C_i / (EI_x),$$

$$\theta_E = \frac{qa^3}{EI_x} \left(-\frac{1}{6} \cdot 0 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{qa^3}{EI_x}.$$

Для нахождения угла поворота по формуле Симпсона вычислим предварительно изгибающие моменты посередине участков:

$$M_{cpBC} = (M_{лев} + M_{пр}) / 2 + ql^2 / 8 = (qa^2 / 2) (-1/2 + 1/4) + q(2a)^2 / 8 = 3qa^2 / 8,$$

$$M_{cpCD} = (M_{лев} + M_{пр}) / 2 = (qa^2 / 2) (1/4 - 1) = -3qa^2 / 8,$$

$$M_{cpDE} = -qa^2 / 2.$$

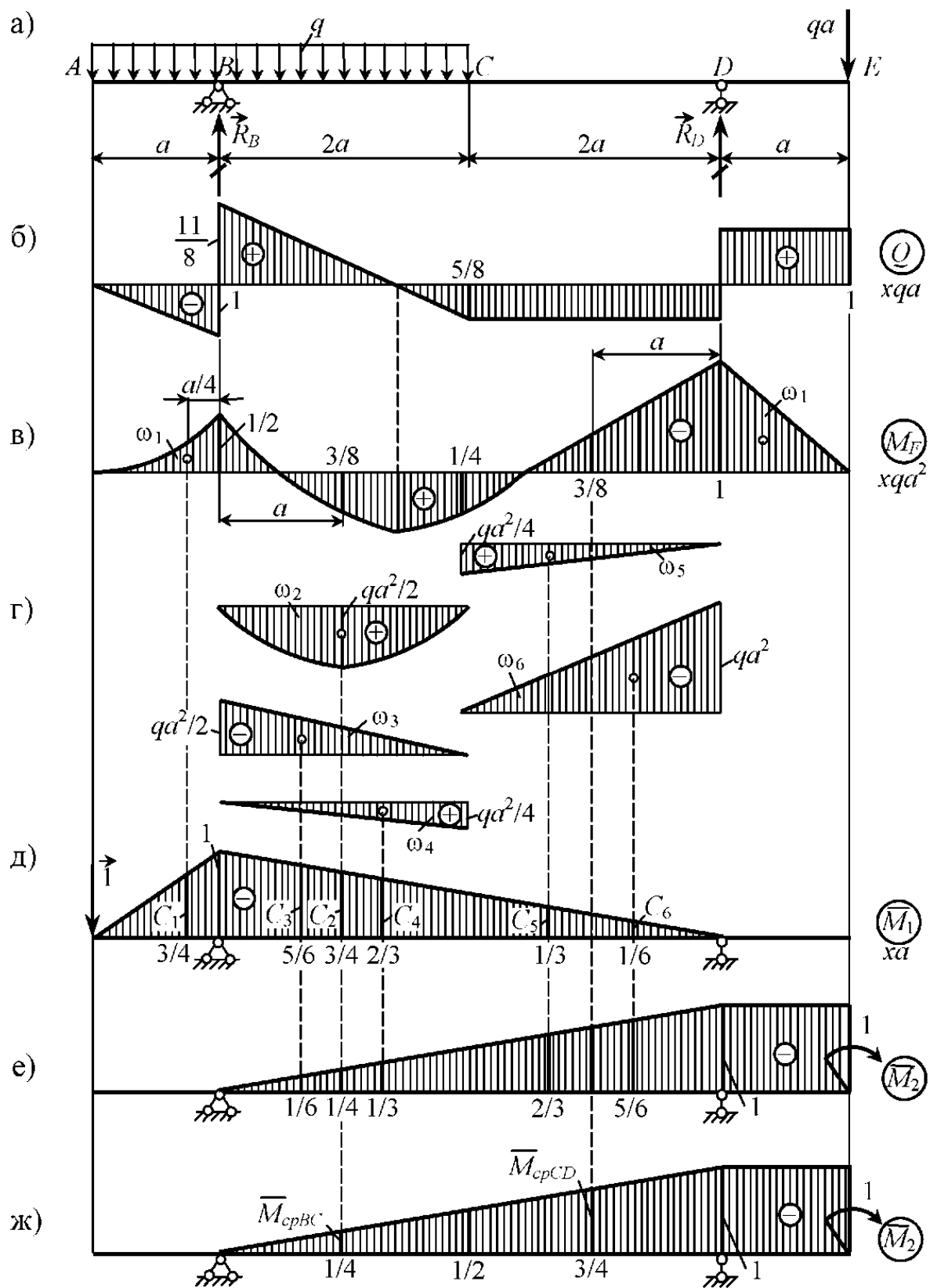


Рис. 55

Искомое перемещение, увеличенное в EI_x раз,

$$EI_x \theta_F = \int_A^E M_F \bar{M}_2 dz = (2a/6) \left[(-qa^2/2) \cdot 0 + 4(3qa^2/8 \cdot (-1/4) + (qa^2/4)(-1/2)) \right] + \\ + (2a/6) \left[(qa^2/4)(-1/2) + 4(-3qa^2/8)(-3/4) + (-qa^2)(-1) \right] + \\ + (a/6) \left[(-qa^2)(-1) + 4(-qa^2/2)(-1) + 0 \cdot (-1) \right] = qa^3.$$

Пример 35. Определить, при каком значении коэффициента k прогиб сечения C будет равен нулю. При найденном значении k построить эпюру изгибающего момента и изобразить примерный вид упругой линии балки.

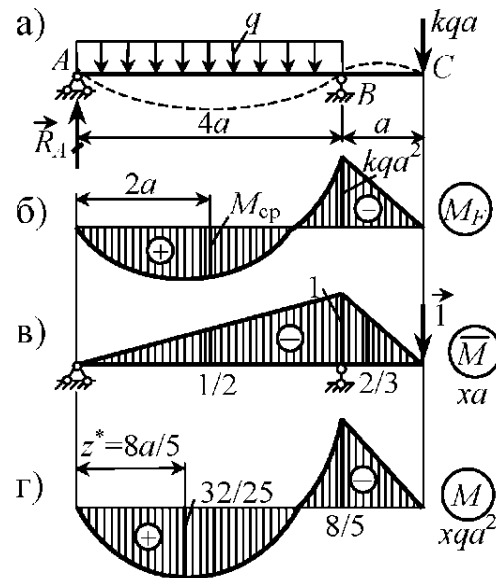


Рис. 56

Решение
Строим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки и от единичной силы, приложенной в сечении C , где ищется прогиб.

По условию задачи $V_C = 0$. С другой стороны, $V_C = \sum I_i / (EI_x)$. Интеграл на участке AB вычисляем по формуле Симпсона, а на участке BC – по правилу Верещагина.

Находим предварительно

$$M_{cp,AB} = (M_{лев} + M_{пр})/2 + ql^2/8 = -kqa^2/2 + q(4a)^2/8 = (qa^2/2)(4-k)$$

Перемещение сечения C $V_C = \int_A^C M_F \bar{M} dz / (EI_x),$

$$V_C = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{4a}{6} \left[0 + 4 \cdot \frac{qa^2}{2} (4-k) \cdot \left(-\frac{a}{2} \right) + (-kqa^2)(-a) \right] + \frac{1}{2} (-kqa^2) a \cdot \left(-\frac{2a}{3} \right) \right\} = 0$$

Отсюда $\frac{qa^3}{EI} \left[\frac{4}{3}(k-2) + \frac{1}{3}k \right] = 0, \quad k = 8/5.$

При найденном значении k определяем значение опорной реакции в точке A : $\sum m_B = 0, \quad R_A \cdot 4a = q \cdot 4a \cdot 2a - (8/5)qa^2,$
 $R_A = (8/5)qa,$ исходя из которого находим положение точки экстремума на эпюре M согласно условию $z^* = R_A/q = (8/5)a.$

По значениям момента в характерных точках

$$M_A = M_C = 0, \quad M_B = -(8/5)qa^2, \quad M_{max} = R_A^2/2q = (32/25)qa^2$$

строим эпюру изгибающего момента (рис. 56,г).