

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РАСЧЕТ ВАЛА ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ
Учебное пособие с вариантами заданий

Учебное пособие содержит сведения по дисциплине «Сопротивление материалов», необходимые для выполнения самостоятельной работы студентами. Рассмотрены вопросы построения эпюр внутренних силовых факторов, изложены теоретические основы расчетов балки при плоском изгибе, вала при изгибе с кручением, статически неопределимых систем, стержневых систем на изгиб и устойчивость. Представлены задания к расчетным работам. Приведены решения задач.

Предназначены для студентов всех форм обучения механических специальностей.

3. РАСЧЕТ ВАЛА ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ

3.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

При изгибе с кручением в поперечных сечениях стержня действуют изгибающие моменты M_x , M_y и крутящий момент T . Стержень круглого или кольцевого сечения при изгибе с кручением называется валом.

В сечениях вала возникают нормальные σ и касательные τ напряжения, которые, в соответствии с принципом независимости действия сил, определяются отдельно, как в случае изгиба и в случае кручения.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях балки при косом изгибе вычисляются по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x. \quad (3.1)$$

Для нахождения касательных напряжений применяется формула

$$\tau = \frac{T}{J_p} \rho. \quad (3.2)$$

Здесь M_x, M_y, T – изгибающие и крутящий момент, J_x, J_y – осевые моменты инерции, J_p – полярный момент инерции, x, y – координаты точки, ρ – радиус вектор точки поперечного сечения стержня, в котором определяются напряжения.

Используя равенство (3.1), (3.2), можно показать, что в поперечном сечении стержня в виде круга или кольца максимальные значения σ и τ находятся по соотношениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}, \quad \tau_{\max} = \frac{T}{2W}, \quad (3.3)$$

где $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, W – момент сопротивления сечения.

Для круга радиуса $R = D/2$

$$W = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32}, \quad (3.4)$$

для кольца, с радиусами $r = d/2$, $R = D/2$ ($c_d = d/D$),

$$W = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4R} = \frac{\pi D^3(1 - c_d^4)}{32}. \quad (3.5)$$

В соответствии с третьей теорией прочности должно выполняться условие

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

Подставляя в это неравенство вместо σ и τ выражения (3.3) получим

$$\frac{M_p}{W} \leq [\sigma]. \quad (3.6)$$

Здесь $M_p = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + T^2}$ – расчетный момент.

Из условия (3.6) следует, что $W \geq \frac{M_p}{[\sigma]}$. Следовательно, расчетная

величина осевого момента сопротивления сечения $W = \frac{M_p}{[\sigma]}$. С учетом

выражений (3.4), (3.5), получается, что для вала круглого поперечного сечения

$$D = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi}},$$

а для сечения в виде кольца

$$D = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi(1 - c_d^4)}}, \quad d = c_d D.$$

Вес вала $G = (Al) \cdot \gamma$, где A – площадь поперечного сечения, l – длина, γ – удельный вес материала из которого вал изготовлен. Для

сечения в виде круга площадь поперечного сечения $A_1 = \frac{\pi D^2}{4}$, а для

кольца – $A_2 = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$. Вес круглого вала $G_1 = A_1 l \gamma$, для вала с сечением в виде кольца $G_2 = A_2 l \gamma$. Отношение весов $K_G = G_1 / G_2 = A_1 / A_2$.

3.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА.

Определить диаметр вала (рис. 3.1) для $F_1 = 1,6$ кН, $F_2 = 0,8$ кН, $T_1 = 1,2$ кН·м, $T_2 = 0,6$ кН·м, $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $a = 1,5$ м, $b = c = 1$ м, $c_d = 0,9$.

В изометрии вал представлен на рис. 3.2. Проектируя силы F_1 , F_2 на оси ox и oy , получаем

$$F_{1x} = F_1 \sin \alpha_1 = 0,8 \text{ кН}, \quad F_{1y} = F_1 \cos \alpha_1 = 1,386 \text{ кН},$$

$$F_{2x} = F_2 \sin \alpha_2 = 0,561 \text{ кН}, \quad F_{2y} = F_2 \cos \alpha_2 = 0,566 \text{ кН}.$$

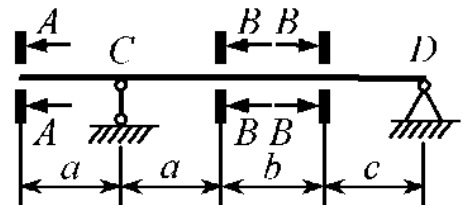


Рис.3.1

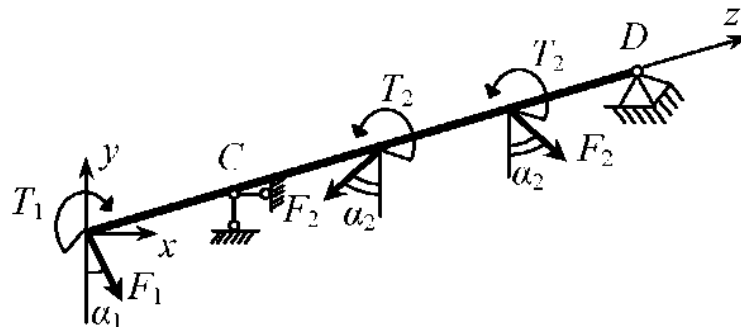


Рис. 3.2

Действующие на вал внешние крутящие моменты, а также силы и реакции опор в плоскостях oxz и oyz показаны на рис. 3.3а.

Определяем реакции в плоскости oyz (рис. 3.3а). Составляя уравнение моментов относительно точки C, получим

$$\sum m_{iC} = F_{1y}a - F_{2y}a - F_{2y}(a+b) + R_{Dy}(a+b+c) = 0.$$

Следовательно,

$$R_{Dy} = [-F_{1y}a + F_{2y}a + F_{2y}(a+b)] / (a+b+c) = -0,053 \text{ кН}.$$

Суммируя моменты относительно точки D, находим R_{Cy} :

$$\sum m_{iD} = F_{1y}(2a + b + c) - R_{Cy}(a + b + c) + F_{2y}(b + c) + F_{2y}c = 0.$$

$$R_{Cy} = [F_{1y}(2a + b + c) + F_{2y}(b + c) + F_{2y}c] / (a + b + c) = 2,465 \text{ кН.}$$

Проверяем правильность определения реакции в плоскости ouz :

$$\begin{aligned} \sum F_{iy} &= -F_{1y} + R_{Cy} - F_{2y} - F_{2y} + R_{Dy} = \\ &= -1,386 + 2,465 - 0,566 - 0,566 + 0,053 = 0. \end{aligned}$$

Реакции в плоскости ouz определены правильно.

Аналогично определяем реакции в плоскости oxz (рис. 3.3а):

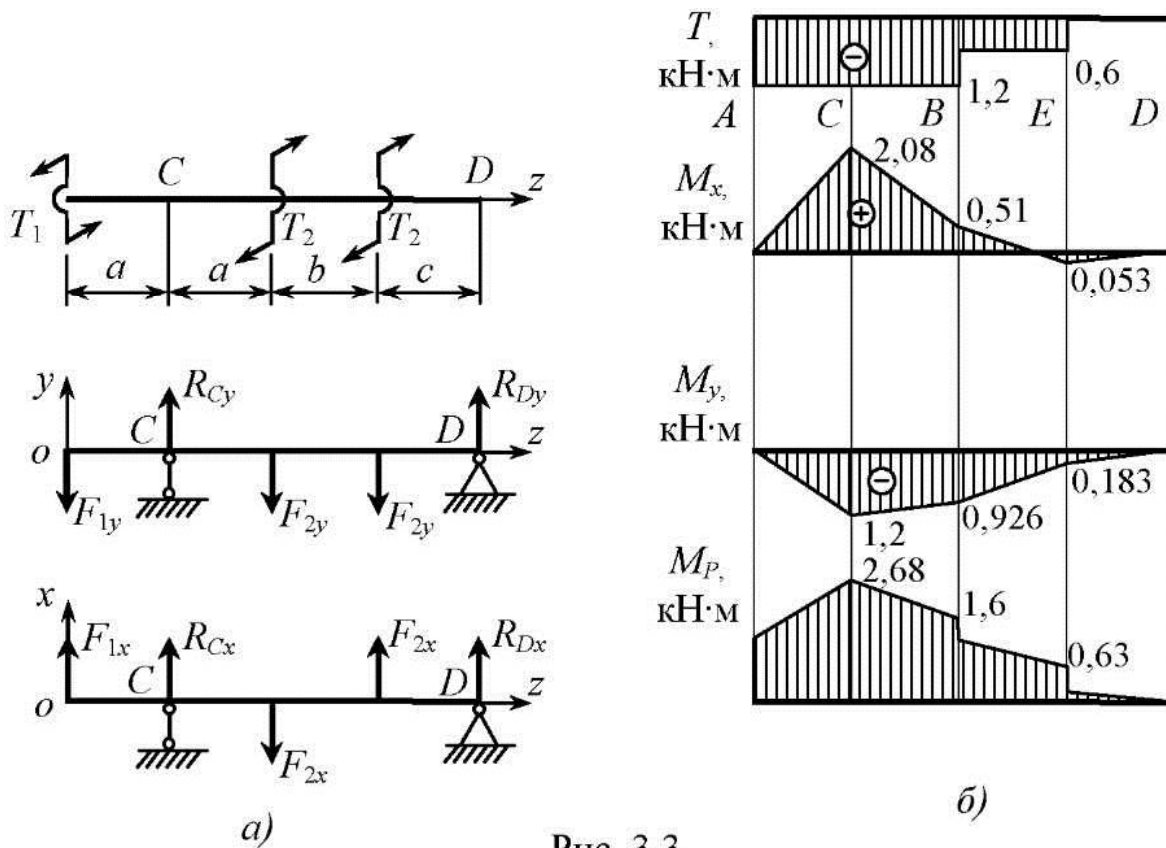


Рис. 3.3

$$\sum m_{iC} = -F_{1x}a - F_{2x}a + F_{2x}(a + b) + R_{Dx}(a + b + c) = 0,$$

$$R_{Dx} = [F_{1x}a + F_{2x}a - F_{2x}(a + b)] / (a + b + c) = 0,1826 \text{ кН.}$$

$$\sum m_{iD} = -F_{1x}(2a + b + c) - R_{Cx}(a + b + c) + F_{2x}(b + c) - F_{2x}c = 0,$$

$$R_{Cx} = [-F_{1x}(2a + b + c) + F_{2x}(b + c) - F_{2x}c] / (a + b + c) = -0,9826 \text{ кН.}$$

Проверяем правильность определения реакций:

$$\begin{aligned}\sum F'_{ix} &= F'_{1x} + R_{Cx} - F'_{2x} + F'_{2x} + R_{Dx} = \\ &= 0,8 - 0,9826 - 0,561 + 0,561 + 0,1826 = 0.\end{aligned}$$

Реакции в плоскости oxz определены правильно.

Используя полученные данные, строим эпюры T , M_x , M_y , M_p (рис. 3.3б). Эпюра расчетного момента M_p строится по значениям моментов T , M_x , M_y в точках A, C, B, E, D .

Как видно из рис. 3.3б, опасное сечение находится в точке C вала, так как в этом сечении M_p принимает максимальное значение. Следовательно,

$$W = \frac{M_p}{[\sigma]} = \frac{2,68 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{160 \cdot 10^6 \text{ Н} / \text{м}^2} = 16,75 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 16,75 \text{ см}^3.$$

Для вала с сечением в виде круга

$$D = \sqrt[3]{\frac{4W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 16,75 \text{ см}^3}{\pi}} = \sqrt[3]{170,56} \text{ см} = 5,54 \text{ см},$$

$$A_1 = \frac{\pi D^2}{4} = 7,673 \pi \text{ см}^2.$$

Для вала с сечением в виде кольца

$$D = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi(1 - C_d^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 16,75 \text{ см}^3}{\pi(1 - 0,656)}} = 7,98 \text{ см}, \quad d = 7,12 \text{ см},$$

$$A_2 = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \pi \cdot 3,01 \text{ см}^2.$$

Отношение весов валов с круглым и кольцевым поперечными сечениями

$$K_G = G_1 / G_2 = (A_1 l \gamma) / (A_2 l \gamma) = A_1 / A_2 = 7,673 / 3,01 = 2,55.$$

Получается, что в рассмотренном случае вал с поперечным сечением в виде кольца в 2,55 раз легче, чем вал с сечением в виде круга.

3.3. ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЕ «РАСЧЕТ ВАЛА ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ»

В сечении $A-A$ вала (рис. 3.4,а) приложены крутящий момент T_1 и сила F_1 , действующая под углом α_1 . В сечениях $B-B$ вала (рис. 3.4,б) приложены крутящий момент $T_2 = \frac{T_1}{2}$ и сила $F_2 = \frac{F_1}{2}$, действующая под углом α_2 . Моменты T_1 и T_2 имеют противоположные знаки. Вал закреплен в подшипниках, которые рассматриваются как шарнирные опоры.

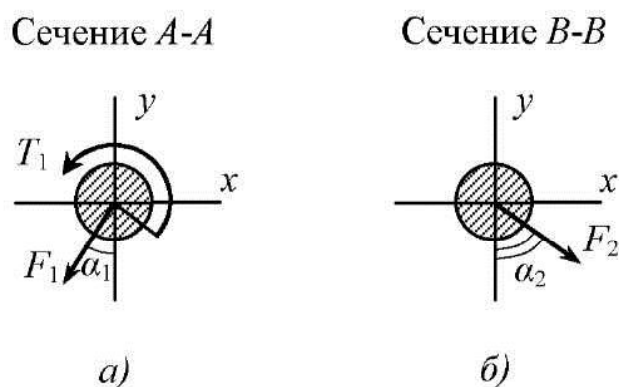


Рис. 3.4

С использованием третьей теории прочности определить размеры поперечного сечения вала в следующих случаях:

- поперечное сечение вала – круг радиуса R .
- поперечное сечение вала – кольцо с заданным отношением

$$c_d = \frac{d}{D}, \text{ где } d, D - \text{внутренний и внешний диаметры кольца.}$$

Сравнить веса валов с найденными размерами поперечных сечений.

Исходные данные приведены в таблице 3.1, схемы вала – на рис. 3.5. При расчетах использовать $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

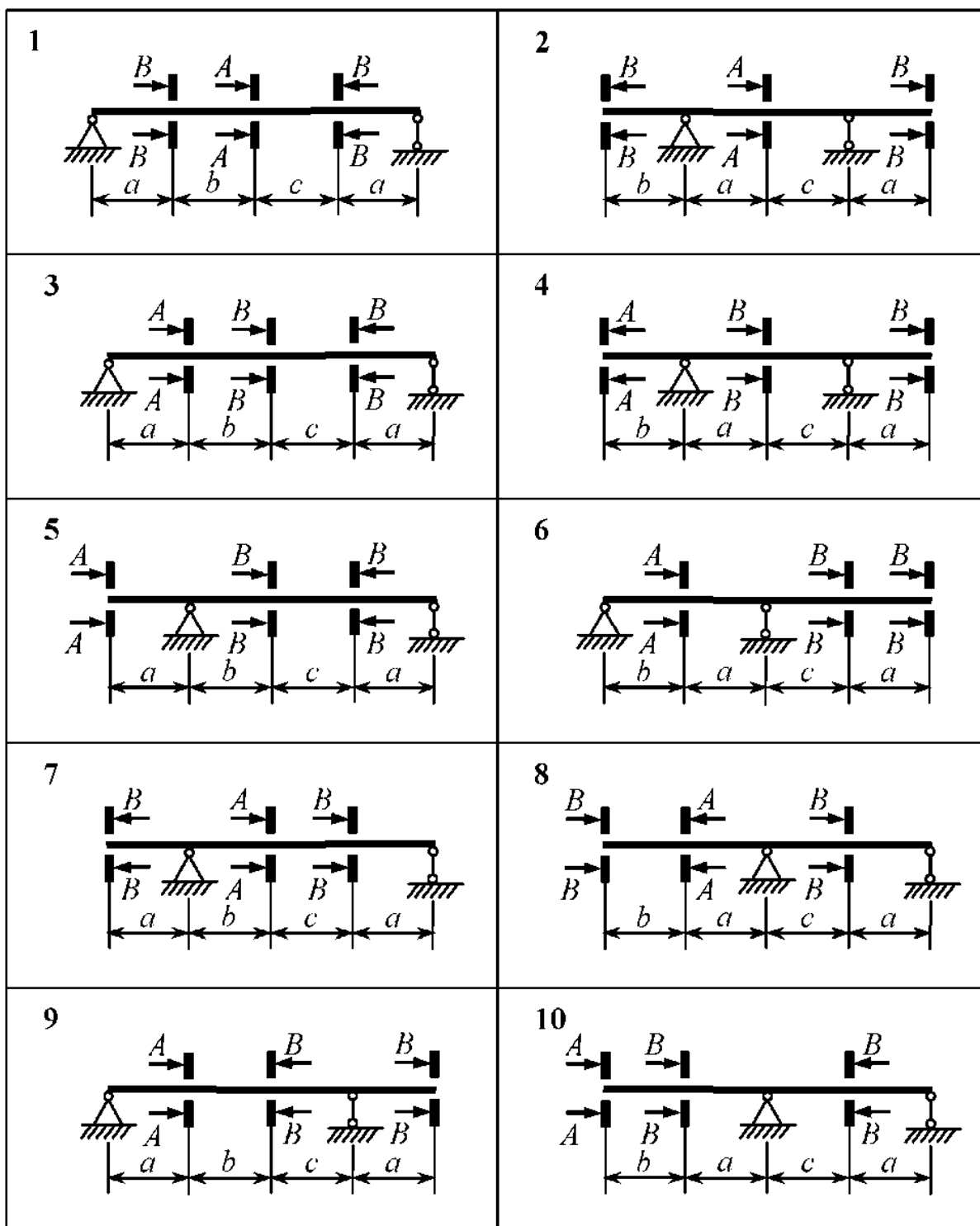


Рис. 3.5

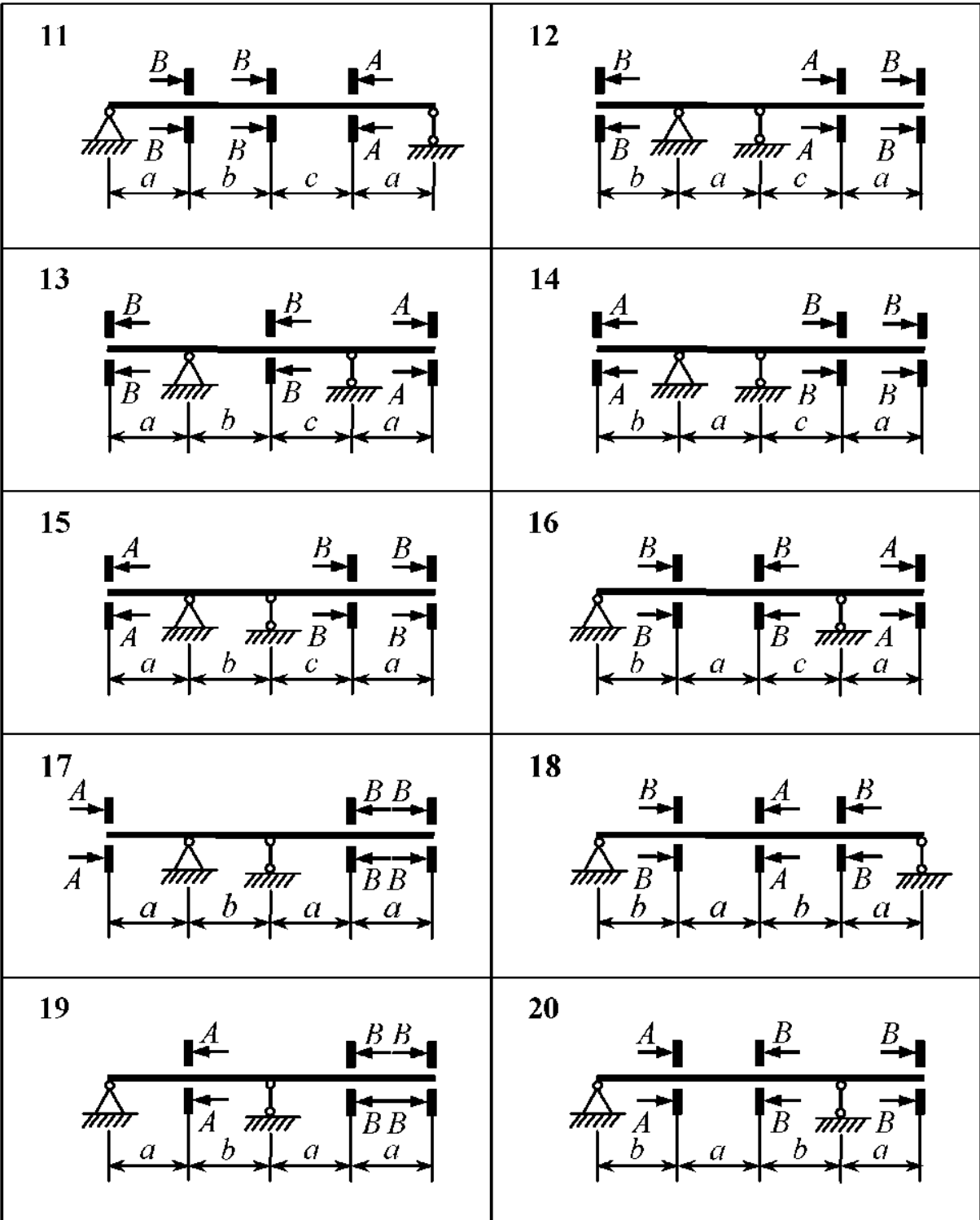


Рис. 3.5 (продолжение)

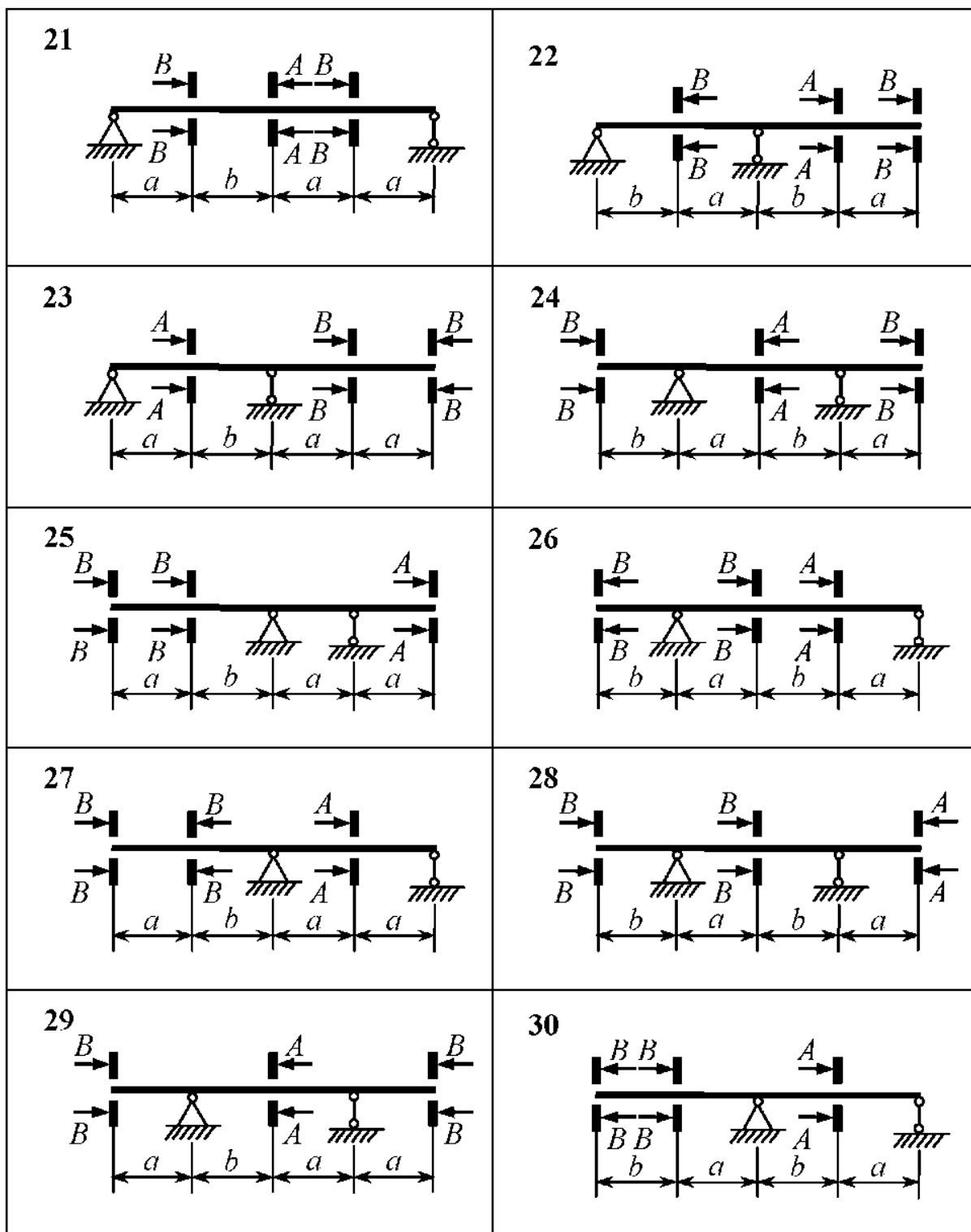


Рис. 3.5 (продолжение)

Таблица 3.1

№	F_1 , кН	T_1 , кН·м	α_1	α_2	a , м	b , м	c , м	c_d
1	1,4	1,5	10^0	30^0	1,1	1,9	1,5	0,7
2	1,3	1,6	120^0	120^0	1,2	1,8	1,6	0,84
3	1,2	1,7	30^0	120^0	1,3	1,7	1,7	0,8
4	1,1	1,8	45^0	40^0	1,4	1,6	1,8	0,9
5	1,0	1,9	150^0	150^0	1,5	1,5	1,9	0,95
6	0,9	2,0	60^0	30^0	1,6	1,4	1,0	0,87
7	2,0	2,1	135^0	90^0	1,7	1,3	1,1	0,92
8	2,2	2,2	20^0	80^0	1,8	1,2	1,2	0,85
9	2,3	1,3	90^0	60^0	1,9	1,1	1,3	0,93
10	2,5	1,4	30^0	120^0	1,0	1,0	1,4	0,75