

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В КУРСЕ
СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ
Методические указания

Содержит набор задач оптимизации по курсу сопротивление материалов. Рекомендуются к использованию при выполнении студентами самостоятельной работы и при проведении занятий.

Предназначены для студентов всех специальностей.

ВВЕДЕНИЕ

Поиск оптимальных решений всегда является одной из актуальных задач в науке и технике. Слово «оптимальный» происходит от латинского *optimus*, что значит – наилучший, совершенный. Любое действие человека в определенном смысле оптимально, если оно выбрано в результате сравнения с другими вариантами и преследует разумные цели. Показателем качества принятого решения является критерий оптимальности, который выбирается исходя из физической сущности поставленной задачи. Наиболее распространенными критериями оптимальности конструкций является минимум веса (минимум массы или объема), минимум стоимости, минимум веса подкрепляющего или армирующего материала, минимум суммы стоимости конструкций и затрат на машинное время и другие.

Для нахождения оптимального решения приходится решать задачи на отыскания максимума или минимума (экстремума), поэтому такие задачи называются экстремальными.

С самых общих позиций все экстремальные задачи можно разбить на два класса: задачи, связанные с отысканием экстремумов функций (т.е. нахождение максимальных или минимальных значений функций) и задачи, связанные с отысканием экстремумов функционалов (функционал – функция, зависящая от другой функции). Во втором случае отыскивается такая функция, при которой функционал имеет экстремальное значение в заданном интервале. При решении задачи оптимального проектирования к критерию оптимальности (каковыми является условие максимума или минимума) могут присоединяться также различного рода ограничения в виде равенств или неравенств (ограничения по прочности, граничные условия, условия совместности деформаций и т.п.).

Наиболее простыми являются задачи первого класса. В случае задач без ограничений (так называемые элементарные задачи) отыскание экстремума производится на основании известной из курса дифференциального исчисления теоремы Ферма. Согласно теореме, если точка P_0 , доставляет локальный экстремум дифференцируемой функции f , то выполнено соотношение $f'(P_0) = 0$ (в случае

функции нескольких переменных – $f'_{x_i}(P_0) = 0$ ($i = 1, \dots, n$). Решение таких задач производится в следующей последовательности:

- а) производится формализация;
- б) выписываются необходимые условия экстремума;
- в) находятся критические точки;
- г) среди критических точек отыскивается решение или доказывається, что решения нет.

Если функция непрерывна и монотонно возрастает или убывает в заданном интервале, то наибольшее и наименьшее значения ее будут находиться на границах этого интервала.

При исследовании задач с ограничениями используется принцип Лагранжа, сущность которого состоит в сведении задач с ограничениями к ряду задач более простой структуры (в большинстве случаев – к задачам без ограничений). Согласно этому принципу составляется новая функция, называемая функцией Лагранжа и представляющая собой сумму функции, экстремум которой ищется, и функций, задающих уравнения связей, умноженных на неопределенные множители λ_i , которые называются множителями Лагранжа.

Пусть, например, решается задача

$$f_0(X) \rightarrow \text{extr}, \quad \text{где } X = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

в которой ограничения задаются системой равенств

$$f_1(X) = 0, \dots, f_m(X) = 0.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L = L(X, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(X), \quad \lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m). \quad (1)$$

Будем искать стационарные точки в задаче, т.е. точки, удовлетворяющие необходимым условиям экстремума:

$$L(X, \lambda) \rightarrow \text{extr} \quad (\text{по } x).$$

Эта задача уже без ограничений и относится к элементарным.

Согласно теореме Ферма должны удовлетворяться уравнения

$$L(X, \lambda) = 0 \Leftrightarrow L_{x_i}(x_1, \dots, x_n, \lambda_0, \dots, \lambda_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Полученные n уравнений, дополненные m уравнениями связи, используются для определения всех неизвестных. Решения этих уравнений образуют совокупность стационарных точек. Таким образом, для решения задач с ограничениями, необходимо:

- 1) составить функцию Лагранжа;
- 2) выписать необходимые условия экстремума;
- 3) найти стационарные точки;
- 4) отыскать решения среди всех стационарных точек или доказать, что решений нет.

Задача поиска функций, на которых заданные функционалы достигают минимальных значений (минимизация функционалов), относится к задачам вариационного исчисления и формулируются следующим образом:

$$z = z(X, U) \rightarrow \text{extr},$$

если конструкция характеризуется n параметрами проектирования $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ и k неизвестными функциями $U = [u_1, u_2, \dots, u_k]$.

Универсальный метод исследования таких задач был предложен Лагранжем и называется методом вариаций. Эйлером был предложен другой метод, основанный на аппроксимации функционалов функциями.

Простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании функций $y(x)$, которые минимизируют функционал вида

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

при заданных граничных условиях

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad (2)$$

где F – функция, непрерывная вместе с производными до второго порядка в некоторой области B плоскости $(x, y)_0$, а искомая функция $y(x)$ имеет непрерывную производную в промежутке $[x_0, x_1]$. Тогда функция $y(x)$, дающая экстремум интегралу $J(y)$, должна удовлетворять уравнению Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F'}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F'}{\partial y'} = 0 \quad (3)$$

или в другой форме

$$\frac{\partial F'}{\partial y} - \frac{\partial^2 F'}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F'}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F'}{\partial y'^2} y'' = 0.$$

В общем случае уравнение (3) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка и его общий интеграл содержит две произвольные постоянные, для нахождения которых используются граничные условия (2). Каждая допустимая кривая, удовлетворяющая уравнению (3), называется экстремалью. При решении оптимальных задач с дополнительными условиями в виде уравнений необходимое условие экстремума имеет тот же вид (3), только вместо функции F необходимо подставить функцию Лагранжа L (1). Пусть требуется отыскать экстремум интеграла $J(y)$ при заданных граничных условиях (2) и дополнительных условиях:

а) $G(x, y) = 0$;

б) $\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') = 0$ (изопериметрическая задача);

в) $G(x, y, y') = 0$.

Составим функцию Лагранжа:

а) $L(x, y, y') = F(x, y, y') + \lambda(x) \cdot G(x, y)$;

б) $L(x, y, y') = F(x, y, y') + \lambda \cdot G(x, y, y')$;

в) $L(x, y, y') = F(x, y, y') + \lambda(x) \cdot G(x, y, y')$.

Уравнение Эйлера-Лагранжа принимает вид

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0.$$

При этом экстремаль $y(x)$ и множители Лагранжа – постоянная λ или функции $\lambda(x)$ – должны быть определены так, чтобы выполнялись дополнительные условия и уравнение Эйлера-Лагранжа.

При решении более сложных задач вариационного исчисления (задачи с высшими производными, задачи для нескольких функций,

задачи в параметрическом представлении, задачи для функций многих переменных и др.) в качестве необходимых условий экстремума могут использоваться уравнения Эйлера-Лагранжа или другие аналогичные условия. Методы решения таких задач приведены в литературе [8, 13] и др.

Изучение приемов решения экстремальных задач и самостоятельное их решение преследует цель формирования у студентов знаний, позволяющих ставить и решать различного рода оптимальные задачи, которые возникают при расчете элементов конструкций, работающих на растяжение - сжатие и изгиб, а также навыков принятия оптимальных инженерных решений.

1. ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ.

1.1. Задачи с решениями

Задача 1. На какой высоте следует поместить шарнир O , чтобы вес стержневой системы AOB (рис. 1) был минимальным?

Решение.

1) Из уравнений статического равновесия узла O (рис. 2) определяем продольные усилия в стержнях

$$N_{AO} = N_{BO} = N = \frac{F}{2 \cos \alpha} = \frac{F \sqrt{a^2 + h^2}}{2h}.$$

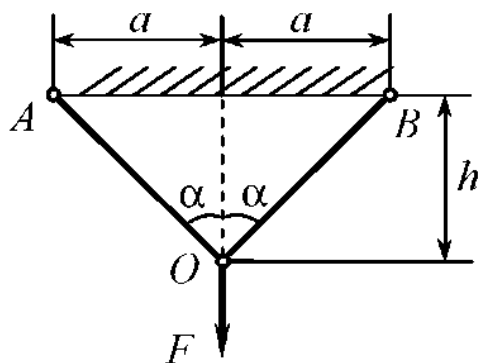


Рис. 1

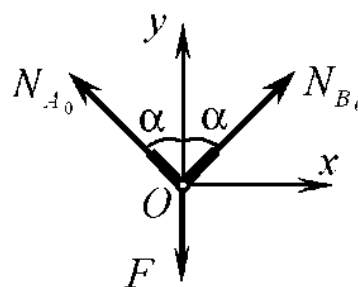


Рис. 2

Площади поперечных сечений стержней

$$A_{AO} = A_{BO} = A = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{F\sqrt{a^2 + h^2}}{2[\sigma]h}.$$

Длины стержней

$$l_{AO} = l_{BO} = l = \sqrt{a^2 + h^2} = \frac{F\sqrt{a^2 + h^2}}{2h}.$$

Вес стержневой системы

$$G = 2\gamma Rl = 2\gamma \frac{F\sqrt{a^2 + h^2}}{2[\sigma]h} \sqrt{a^2 + h^2} = \frac{F\gamma}{[\sigma]} \cdot \frac{a^2 + h^2}{h}.$$

2) Производная от G по h

$$G'_h = \frac{F\gamma}{[\sigma]} \cdot \frac{2h \cdot h - (a^2 + h^2)}{h^2} = \frac{F\gamma}{[\sigma]} \cdot \frac{h^2 - a^2}{h^2}.$$

3) Приравнявая производную G'_h нулю и приняв, что $\frac{F\gamma}{[\sigma]} \neq 0$ и $h \neq 0$, имеем

$$h^2 - a^2 = 0, \quad h = a, \quad \alpha = 45^\circ.$$

4) Найдем вторую производную от G по h :

$$G''_{hh} = \frac{F\gamma}{[\sigma]} \cdot \frac{2h \cdot h^2 - (h^2 - a^2)2h}{h^4} = \frac{F\gamma}{[\sigma]} \cdot \frac{2a^2}{h^3}.$$

Так как $G''_{hh} > 0$ при любых a ($a = 0$ не имеет смысла), то найденное решение соответствует минимуму веса стержневой системы.

Задача 2. Ферма ABC состоит из горизонтального стержня BC длиной l и наклонного стержня AB . Угол θ может принимать любое значение за счет изменения длины наклонного стержня и перемещения опоры A по вертикали. Определить угол θ , при котором вертикальное перемещение узла B под действием силы F будет минимальным (рис. 3).

Решение.

1) Из уравнений статического равновесия узла B (рис. 4)

$$-N_1 \cos \theta + N_2 = 0, \quad N_1 \sin \theta - F = 0,$$

Найдем усилия в стержнях

$$N_1 = \frac{F}{\sin \theta}, \quad N_2 = F \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

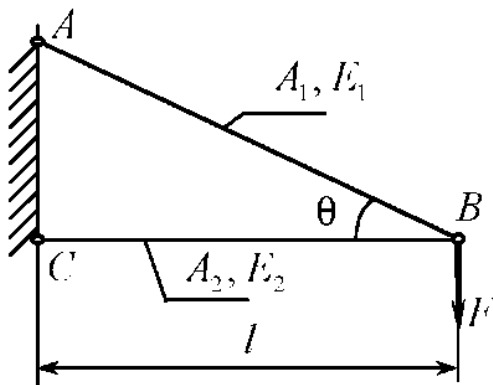


Рис. 3

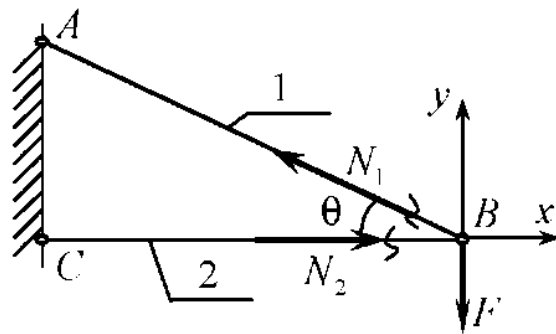


Рис. 4

Минимальное перемещение $\Delta_{B_{\min}}^y$ соответствует наименьшей работе силы F на этом перемещении $W_{\min} = \frac{1}{2} F \Delta_{B_{\min}}^y$. При статическом приложении нагрузки работа внешних сил полностью переходит в потенциальную энергию системы $U = W$. Таким образом, исходная задача сводится к отысканию угла θ (при заданных значениях E_1, A_1, E_2, A_2, l), обеспечивающего минимум потенциальной энергии деформации системы.

Потенциальная энергия деформации системы

$$U(\theta) = \frac{N_1^2 l_1}{2E_1 A_1} + \frac{N_2^2 l}{2E_2 A_2}.$$

Учитывая, что $l_2 = l$, $l_1 = \frac{l}{\cos \theta}$ и введя обозначения $\frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} = \alpha$,

получим

$$U(\theta) = \frac{F^2 l}{2E_1 A_1} \left(\frac{1 + \alpha \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cdot \cos \theta} \right).$$

2) Производная от $U(\theta)$ по θ :

$$\begin{aligned} \frac{F^2 l}{2E_1 A_1} \frac{-3\alpha \cos^3 \sin^3 \theta - (1 - \alpha \cos^3 \theta)(2 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta)}{\sin^4 \theta \cdot \cos^2 \theta} &= \\ &= \frac{F^2 l}{2EA} \frac{\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta - 2\alpha \cos^3 \theta}{\sin^3 \theta \cdot \cos^2 \theta}. \end{aligned}$$

3) Приравняем производную U'_θ нулю. Полагая, что $\frac{F^2 l}{2E_1 A_1} \neq 0$ и

учитывая, что $\sin^3 \theta \cos^2 \theta \neq \infty$, получим

$$\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta - 2\alpha \cos^3 \theta = 0,$$

или

$$2\alpha \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta = 1.$$

Решая это кубическое уравнение при известных значениях α , найдем значение угла θ , при которых перемещения узла B будут экстремальными. Например, при $\alpha = 1$ ($E_1 A_1 = E_2 A_2$) из уравнения

$$2\alpha \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta = 1 \text{ получим } \cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \theta = 60^\circ.$$

4) Найдем вторую производную от потенциальной энергии деформации по углу θ :

$$\begin{aligned} U''_{\theta\theta} &= \frac{F^2 l}{2E_1 A_1} \frac{1}{\sin^6 \theta \cos^4 \theta} [(2 \sin \theta \cos \theta + 4 \sin \theta \cos \theta + \\ &\quad + 6\alpha \cos^2 \theta \sin \theta) \sin^3 \theta \cos^2 \theta - \\ &\quad (\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta - 2\alpha \cos^3 \theta)(3 \sin^2 \theta \cos^3 \theta + 2 \sin^3 \theta \cos \theta \sin \theta)] = \\ &= \frac{F^2 l}{2E_1 A_1} \frac{7 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 6 \cos^4 \theta + 10\alpha \sin^2 \theta \cos^3 \theta + 6\alpha \cos^5 \theta \cdot 2 \sin^4 \theta}{\sin^4 \theta \cos^3 \theta}. \end{aligned}$$

При $\alpha = 1$ и $\theta = 60^\circ$ получим $U''_{\theta\theta} > 0$, следовательно, найденное решение соответствует минимальному перемещению узла B .

Задача 3. Спроектировать вертикально расположенный брус равного сопротивления (рис. 5), закрепленный по верхнему краю и подверженный воздействию собственного веса и растягивающей силы P , приложенной к нижнему торцевому сечению.

Решение. Условие прочности при растяжении

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

Спроектируем брус, напряжения в котором одинаковы и равны допускаемому напряжению $[\sigma]$. Площадь нижнего

торцевого сечения будет равна $A_0 = \frac{F}{[\sigma]}$.

Выделим элемент бруса длиной dz (рис. 6а,б) и рассмотрим его равновесие в проекции на ось z :

$$N(z) + dN - \Delta G - N(z) = 0.$$

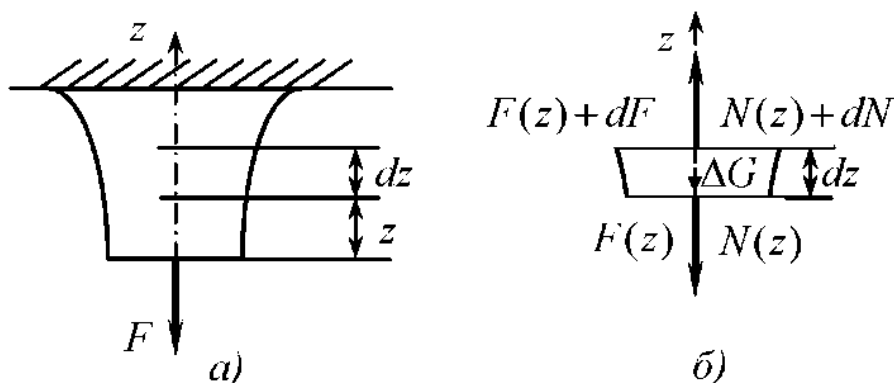


Рис. 5

Рис. 6

Откуда $dN = \Delta G$, где $\Delta G = \gamma Adz$ – вес выделенного элемента, γ – удельный вес материала.

Согласно условию прочности $dN = [\sigma]dA$. Тогда $[\sigma]dA = \gamma Adz$ или $\frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{[\sigma]} dz$. Интегрируя это дифференциальное уравнение, получим

$$\ln A = \frac{\gamma z}{[\sigma]}, \quad A = ce^{\frac{\gamma z}{[\sigma]}}.$$

Постоянная интегрирования c определяется из начального условия:

$$\text{при } z=0 \quad F(0) = A_0 = \frac{F}{[\sigma]}:$$

$$A_0 = c = \frac{F}{[\sigma]}.$$

Окончательно имеем

$$A = \frac{F}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma z}{[\sigma]}}.$$

Можно показать, что для рассмотренной задачи условие равнопрочности равнозначно критерию минимума веса.

Задача 4. Спроектировать ферму равного сопротивления минимального веса под действием вертикальной силы P , действующей на расстоянии l от плоскости крепления при заданных материалах стержней. Углы α и β могут принимать произвольные значения за счет изменения длин стержней AB и BC и перемещения опор A и C по вертикали (рис. 7).

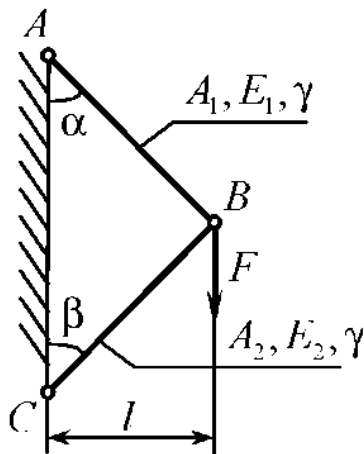


Рис. 7

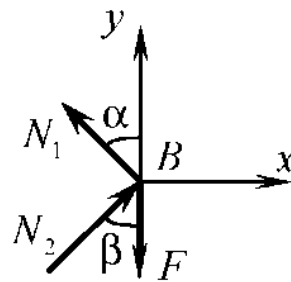


Рис. 8

Решение.

1) Из уравнений статического равновесия узла B (рис. 8)

$$-N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \beta = 0,$$

$$N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \beta - F = 0$$

определим усилия в стержнях и приравняем их значениям допускаемых нагрузок:

$$N_1 = \frac{F \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = A_1 [\sigma]_1;$$

$$N_2 = \frac{F \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = A_2 [\sigma]_2.$$

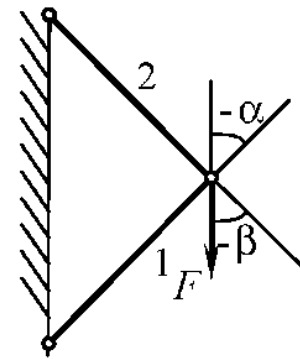


Рис. 9

Откуда

$$A_1 = \frac{F \sin \beta}{[\sigma]_1 \sin(\alpha + \beta)}; \quad A_2 = \frac{F \sin \alpha}{[\sigma]_2 \sin(\alpha + \beta)}. \quad (1)$$

Вес фермы $G = \gamma_1 A_1 l_1 + \gamma_2 A_2 l_2$.

Учитывая, что $l_1 = \frac{l}{\sin \alpha}$, $l_2 = \frac{l}{\sin \beta}$ и используя (1), получим

$$G = Fl \frac{k_1 \sin^2 \alpha + k_2 \sin^2 \beta}{\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)},$$

где

$$k_1 = \frac{\gamma_1}{[\sigma]_1}, \quad k_2 = \frac{\gamma_2}{[\sigma]_2}.$$

2) Так как вес является функцией двух параметров – углов α и β , найдем частные производные от G по α и β :

$$G'_\alpha = Fl \frac{k_2 \sin^2 \beta - k_1 \sin \alpha \sin(2\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2(\alpha + \beta)}.$$

Аналогично

$$G'_\beta = Fl \frac{k_1 \sin^2 \alpha - k_2 \sin \beta \sin(\alpha + 2\beta)}{\sin^2 \beta \sin^2(\alpha + \beta)}.$$

3) Полагая, что $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ и приравнявая производные нулю, получим

$$\begin{cases} k_2 \sin^2 \alpha - k_1 \sin \beta \sin(2\alpha + \beta) = 0, \\ k_2 \sin \alpha \sin(\alpha + 2\beta) - k_1 \sin^2 \beta = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Условием нетривиальности решения системы уравнений (2) является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & -\sin \beta \sin(2\alpha + \beta) \\ \sin \alpha \sin(\alpha + 2\beta) & -\sin^2 \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin \alpha \sin \beta \sin(2\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta) = 0.$$

Учитывая, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, после некоторых преобразований приходим к уравнению

$$\cos^3(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 0,$$

которое имеет следующие решения:

$$\text{а) } \cos^3(\alpha + \beta) = 0 \rightarrow \alpha + \beta = \pm \frac{\pi}{2},$$

$$\text{б) } \cos(\alpha + \beta) = \pm 1 \rightarrow \alpha + \beta = (n-1)\pi, \quad n = 1, 2.$$

Решение б) не имеет физического смысла, так как в этих случаях оси стержней располагаются на одной прямой. Решение $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$

соответствует решению $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, но с переменной мест расположения стержней (рис. 9). Поэтому остается исследовать лишь решение $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = -\frac{\pi}{2} - \alpha$. Подставим это решение в первое из уравнений системы (2):

$$\begin{aligned} k_2 \sin^2 \alpha - k_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= 0; \\ k_2 \sin^2 \alpha - k_1 \cos^2 \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{k_1}{k_1 + k_2}}; \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Например, при $k_1 = k_2 = \frac{\gamma}{[\sigma]}$, получим

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad \alpha = 45^\circ, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

4) Вторые производные от G по α и β :

$$\begin{aligned} G''_{\alpha\alpha} &= \frac{Fl}{\sin^4 \alpha \sin^4 (\alpha + \beta)} \{ [2k_2 \sin \alpha - \\ &- 2k_1 \sin \beta \cos(2\alpha + \beta)] \sin^2 \alpha \sin^2 (\alpha + \beta) - \\ &- [k_2 \sin^2 \alpha - k_1 \sin \beta \sin(2\alpha + \beta)] 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 (\alpha + \beta) + \\ &+ 2 \sin^2 \alpha - \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) \} = \\ &= \frac{2Fl}{\sin^3 \alpha \sin^3 (\alpha + \beta)} [-2k_2 \sin^3 \alpha \cos(\alpha + \beta) - \\ &- k_1 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \cos(2\alpha + \beta) + k_1 \sin \beta \sin^2(2\alpha + \beta)]. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} G''_{\beta\beta} &= \frac{2Fl}{\sin^3 \alpha \sin^3 (\alpha + \beta)} [-2k_1 \sin^3 \beta \cos(\alpha + \beta) - \\ &- k_2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + 2\beta) + k_2 \sin \alpha \sin^2(\alpha + 2\beta)]. \end{aligned}$$

При $k_1 = k_2$ и $\alpha = \beta = 45^\circ$ вторые производные $G''_{\alpha\alpha} > 0$, $G''_{\beta\beta} > 0$, что свидетельствует о том, что найденное решение соответствует минимуму веса стержневой системы.

Задача 5. Абсолютно жесткий невесомый брус AC подвешен на двух тросах и нагружен сосредоточенной силой F (рис. 10). Определить положение груза, при котором его перемещения минимальные.

Решение.

1) Из уравнений статического равновесия бруса ($\sum M_B = 0$, $\sum M_C = 0$) определяем продольные усилия в стержнях (рис. 11):

$$N_1 = F \frac{L-x}{L}; \quad N_2 = F \frac{x}{L}.$$

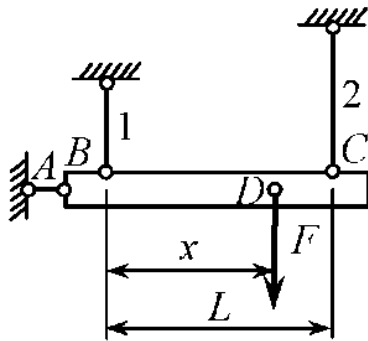


Рис. 10

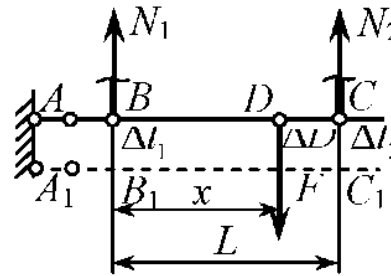


Рис. 11

Абсолютные удлинения стержней будут равны:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}.$$

Вертикальное перемещение сечения D (как функция расстояния x , $\delta_D = \delta_D(x)$) запишется в виде

$$\delta_D(x) = \Delta l_1 + (\Delta l_2 - \Delta l_1) \frac{x}{L} = \frac{Fl_1}{E_1 A_1} \cdot \frac{L-x}{L} + \left(\frac{Fl_2}{E_2 A_2} \cdot \frac{x}{L} - \frac{Fl_1}{E_1 A_1} \cdot \frac{L-x}{L} \right) \frac{x}{L},$$

$$\delta_D(\bar{x}) = \frac{Fl_1}{E_1 A_1} [(\alpha + 1)\bar{x}^2 + 2\bar{x} + 1],$$

где $\alpha = \frac{l_2}{E_2 A_2} \cdot \frac{E_1 A_1}{l_1}$; $\bar{x} = \frac{x}{l}$ – безразмерная координата,

определяющая положение груза.

Математическая формулировка исходной задачи – найти минимум функции $\delta_D(\bar{x})$ на интервале $0 \leq x \leq L$.

2) Производная δ_D по \bar{x}

$$\delta'_D(\bar{x}) = \frac{Fl_1}{E_1A_1} [2(\alpha+1)\bar{x} - 2] = \frac{2Fl_1}{E_1A_1} [(\alpha+1)\bar{x} - 1].$$

3) Приравнявая производную δ'_D нулю, определим положение груза, при котором его перемещение экстремально:

$$\frac{2Fl_1}{E_1A_1} [(\alpha+1)\bar{x} - 1] = 0,$$

откуда

$$\bar{x} = \frac{1}{\alpha+1}, \quad x = \frac{L}{1+\alpha}.$$

4) Найдем вторую производную от δ_D по \bar{x} :

$$\delta''_D = \frac{Fl_1}{E_1A_1} [2(\alpha+1)].$$

Так как $\delta''_D > 0$ во всем материале изменения координаты x , то найденное значение координат $x = \frac{L}{1+\alpha}$ соответствует минимальному перемещению груза.

При одинаковых характеристиках стержней ($l_1 = l_2 = l$, $A_1 = A_2 = A$, $E_1 = E_2 = E$) получим: $\alpha = 1$, $x = \frac{1}{2}L$, $\delta_D = \frac{Fl}{2EA}$.

Задача 6. Гибкая нить с точками подвеса, расположенными на одном уровне, находится под действием собственного веса. Определить длину нити, при которой максимальное напряжение в ней будет наименьшим, если расстояние между точками подвеса l , площадь сечения нити A и объемный вес γ заданы (рис. 12).

Решение.

1) Подвешенная в двух точках гибкая тяжелая нерастяжимая нить принимает форму цепной линии, уравнение которой в декартовых координатах (рис. 13) записывается в виде $[\sigma]y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, где параметр $a = \overline{OC} > 0$. Длина дуги AB :

$$l = 2a \operatorname{sh} \frac{l}{2a}.$$

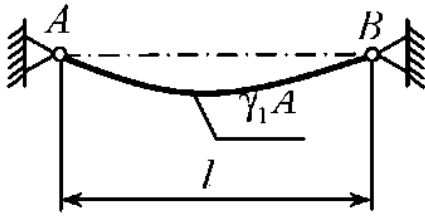


Рис. 12

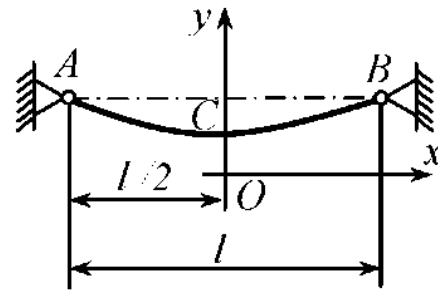


Рис. 13

Наибольшие усилия возникают в точках подвеса нити и могут быть определены из уравнений статического равновесия [8]:

$$V_B = \frac{1}{2} G_H = \frac{1}{2} q_0 L = q_0 a \operatorname{sh} \frac{l}{2a},$$

где q_0 – интенсивность веса нити вдоль ее оси (рис. 14); G_H – вес нити.

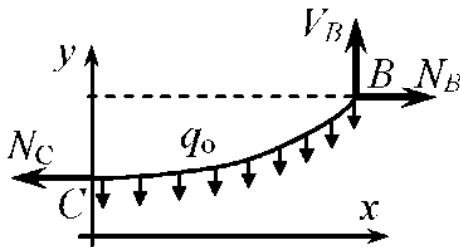


Рис. 14

Продольная сила в нити

$$N_{\max} = N_B = \sqrt{V_B^2 + H_B^2} = q_0 a \operatorname{ch} \frac{l}{2a}.$$

Максимальное напряжение в нити

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{q_0}{A} a \operatorname{ch} \frac{l}{2a}.$$

2) Найдем производную от σ_{\max} по параметру a :

$$\sigma'_{\max} = \frac{q_0}{A} \left[\operatorname{ch} \frac{l}{2a} + a \operatorname{sh} \frac{l}{2a} \left(-\frac{l}{2a^2} \right) \right] = \frac{q_0}{A} \left(\operatorname{ch} \frac{l}{2a} - \frac{l}{2a} \operatorname{sh} \frac{l}{2a} \right).$$

3) Приравниваем нулю производную σ'_{\max} и полагая при этом, что

$\frac{q_0}{A} \neq 0$, получим

$$ch \frac{l}{2a} - \frac{l}{2a} sh \frac{l}{2a} = 0 \quad \text{или} \quad th \frac{l}{2a} = \frac{2a}{l}.$$

Обозначив $\frac{l}{2a} = x$, приходим к трансцендентному уравнению $thx = \frac{1}{x}$, которое решено с точностью до третьего знака после запятой $x = 1,2$ (более точное решение получено на ЭВМ: $x = 1,199678972$, или

$$\alpha = \frac{l}{2x} \approx \frac{l}{2,4}; \quad L = \frac{l}{1,2} sh 1,2 \approx 1,258l.$$

4) Вторая производная от σ_{\max} по параметру a

$$\sigma_{\max}'' = \frac{q_0}{A} \cdot \frac{l}{2a^3} - ch \frac{l}{2a} > 0,$$

т.е. найденное решение соответствует наименьшему значению максимального напряжения в нити.

Задача 7. Показанные на рис. 15 стержневая система изготавливается с начальным монтажным зазором δ , а после сборки нагружается вертикальной силой F . Площадь поперечных сечений и материал всех стержней одинаковы; длина центрального стержня h ; крайние стержни расположены симметрично и наклонены под углом α по отношению к среднему.

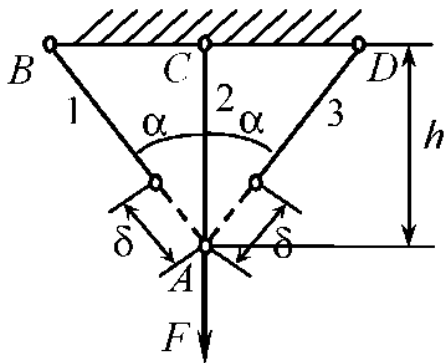


Рис. 15

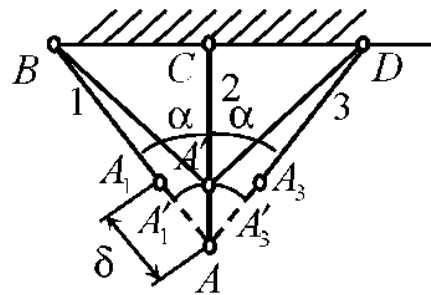


Рис. 16

Подобрать такие монтажные зазоры δ , чтобы конструкция была равнопрочной.

Решение. Система статически неопределима. Степень статической неопределимости равен $n = m - k = 3 - 2 = 1$.

Воспользуемся принципом независимости действия сил и определим отдельно усилия, возникающие в стержнях от наличия монтажных зазоров и приложения внешней силы. Рассмотрим три стороны задачи.

1. Усилия, возникающие в стержнях от наличия монтажных зазоров δ . На рис. 16 представлена система после сборки. Здесь $AA' = \Delta l_2$ – укорочение стержня 2 после сборки; $A_1A'_1 = \Delta l_1$ – удлинение стержня 1.

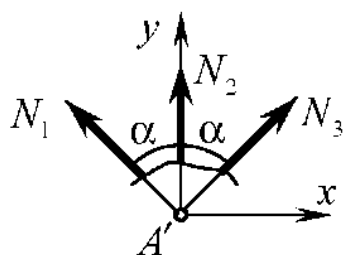


Рис. 17

Статическая сторона задачи. Вырежем мысленно узел A (рис. 17) и рассмотрим его равновесие:

$$\begin{aligned} N_1 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha + N_2 &= 0, \\ -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$N_3 = N_1 \text{ и } 2N_1 \cos \alpha + N_2 = 0. \quad (3)$$

Геометрическая сторона задачи. На рис. 18 представлен узел A в увеличенном масштабе. Из представленной схемы деформирования при сборке следует очевидное геометрическое соотношение:

$$\delta = \Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha. \quad (4)$$

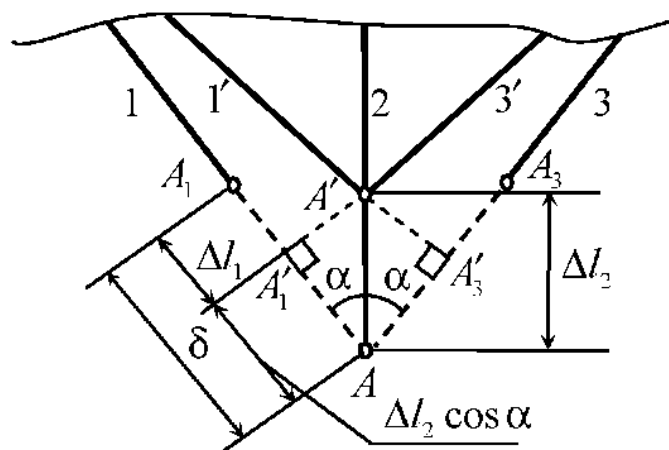


Рис. 18

Физическая сторона задачи:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}. \quad (5)$$

Учитывая, что $E_1 A_1 = E_2 A_2 = E_3 A_3 = EA$, $l_2 = h$, $l_1 = l_3 = \frac{h}{\cos \alpha}$ и решая совместно систему уравнений (3), (4), (5), получим:

$$N_1 = N_1(\delta) = \frac{\delta EA \cos \alpha}{h(1 + 2 \cos^3 \alpha)}, \quad N_2 = N_2(\delta) = \frac{2\delta EA \cos^2 \alpha}{h(1 + 2 \cos^3 \alpha)}.$$

2. Усилия, возникающие в стержнях статически неопределимой системы от приложения силы F (рис. 19).

Решение этой задачи приводится в учебниках (например, [2]), поэтому приведем лишь конечный результат (при $E_1 A_1 = E_2 A_2 = E_3 A_3 = EA$)

$$N_1(F) = \frac{F \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha},$$

$$N_2(F) = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

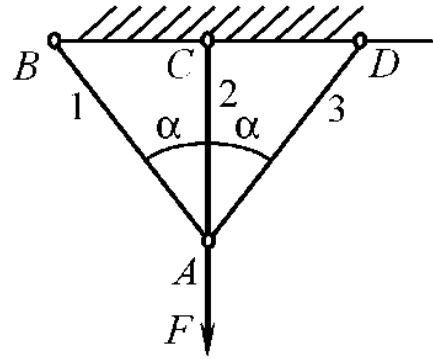


Рис. 19

Складывая усилия $N(\delta)$ и $N(F)$,

получим суммарные усилия, возникающие в стержнях при наличии монтажного зазора и действия силы F :

$$N_1 = \frac{Fh \cos^2 \alpha + \delta EA \cos \alpha}{h(1 + 2 \cos^3 \alpha)}, \quad N_2 = \frac{Fh - 2\delta EA \cos^2 \alpha}{h(1 + 2 \cos^3 \alpha)}. \quad (6)$$

Так как система должна удовлетворять условию равнопрочности, а по условию задачи $A_1 = A_2 = A_3 = A$, то должно удовлетворяться равенство $N_1 = N_2 = N$. Откуда

$$\delta = \frac{Fh \sin^2 \alpha}{EA \cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha)}, \quad (7)$$

$$N = \frac{F}{1 + 2 \cos \alpha}. \quad (8)$$

Как видим, решение возможно при любых углах α , кроме $\alpha = 90^\circ$ ($\cos \alpha \neq 0$). Площадь сечения стержней может быть определена из условия прочности после подстановки выражения (7) в любое из выражений (6). Например, при $\sigma_{\max} = [\sigma]$ имеем

$$A = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{F}{[\sigma](1 + 2 \cos \alpha)}. \quad (9)$$

Полученное решение (7) предполагает, что усилия во всех трех стержнях одного знака. Рассмотрим вариант, при котором усилие в среднем стержне противоположно по знаку усилия в крайних стержнях, т.е. $N_2 = -N_1$. Тогда, используя (6), получим

$$\delta = \frac{Fh(1 + \cos^2 \alpha)}{EA \cos \alpha(2 \cos \alpha - 1)}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что при $\cos \alpha < \frac{1}{2}$ стержни 1 и 3 длиннее стержня 2, в при $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ решение отсутствует.

Сравним вес равнопрочной конструкции с весом такой же системы, изготовленной без начальных зазоров δ .

Вес равнопрочной стержневой системы:

$$G_p = \gamma Ah + \gamma \cdot 2R \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{\gamma Fh}{[\sigma]} \cdot \frac{2 + \cos \alpha}{(1 + 2 \cos \alpha) \cos \alpha},$$

где γ – удельный вес материала стержней.

В статически неопределимой системе при $\delta = 0$ и $E_1 A_1 = E_2 A_2 = E_3 A_3 = EA$ возникают усилия

$$N_1(F) = \frac{F \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}, \quad N_2(F) = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

Площади стержней:

$$A_1 = \frac{F}{[\sigma]} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad A_2 = \frac{F}{[\sigma]} \cdot \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

Вес стержневой системы

$$G_O = \gamma A_1 h + 2\gamma A_2 \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{\gamma F h}{[\sigma]} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} + \frac{\gamma F h}{[\sigma]} \cdot \frac{2}{(1 + 2 \cos^3 \alpha) \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\gamma F h}{[\sigma]} \cdot \frac{2 + \cos^3 \alpha}{(1 + 2 \cos^3 \alpha) \cos \alpha}.$$

Отношение весов

$$\frac{G_O}{G_P} = \frac{(2 + \cos^3 \alpha)(1 + 2 \cos \alpha)}{(1 + 2 \cos^3 \alpha)(2 + \cos \alpha)}.$$

Например, при $\alpha = 60^\circ$ $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ и $\frac{G_O}{G_P} = 1,36$, т.е.

равнопрочная стержневая стержневая система в 1,36 раза легче такой же конструкции, изготовленной без начальных зазоров δ .

Задача 8. Узел B фермы ABC (рис. 20) нагружен силой F , образующей угол θ с вертикалью. Найти такой угол, при котором полное перемещение узла B будет экстремальным.

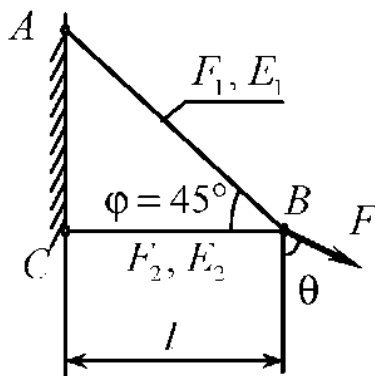


Рис. 20

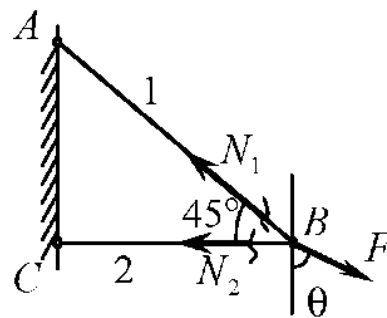


Рис. 21

Решение.

1) Запишем уравнение статического равновесия узла B (рис. 21):

$$N_1 \sin 45^\circ - F \cos \theta = 0, \quad N_1 \cos 45^\circ + N_2 - F \sin \theta = 0,$$

Откуда

$$N_1 = \sqrt{2} F \cos \theta, \quad N_2 = F(\sin \theta - \cos \theta),$$

(при $\theta < 45^\circ$, $N_2 < 0$, при $\theta > 45^\circ$, $N_2 > 0$).

Определим перемещение узла B (рис. 22а,б).

Полное перемещение Δ_B узла B

$$\Delta_B = \overline{BB_1} = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2},$$

где горизонтальная составляющая перемещения $\delta_x = \Delta l_2$.

Вертикальная составляющая δ_y определяется из суммы проекций δ_x и δ_y на направление l_1 :

$$\Delta l_1 = BF + FB' = BF + B_1F = \delta_x \sin 45^\circ + \delta_y \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (\delta_x + \delta_y),$$

$$\delta_y = \sqrt{2}\Delta l_1 - \Delta l_2.$$

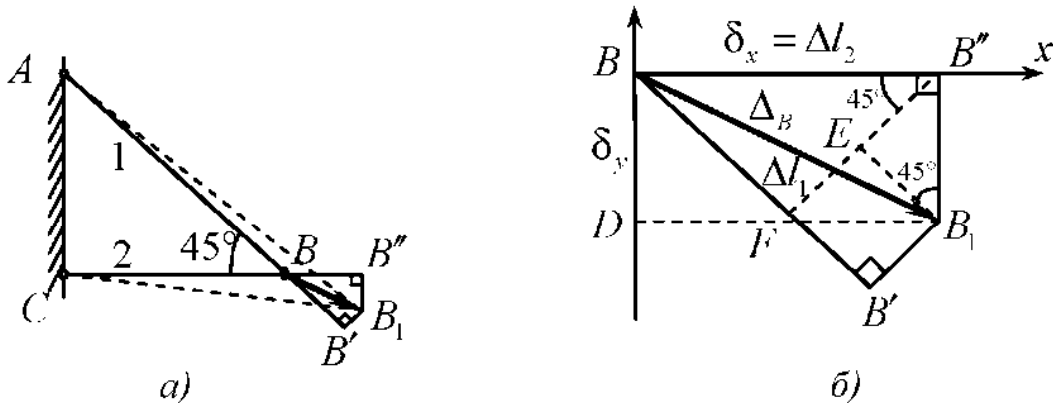


Рис. 22

Абсолютные удлинения стержней 1 и 2:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{\sqrt{2} F \cos \theta \cdot \sqrt{2} l}{E_1 A_1} = \frac{2Fl}{E_1 A_1} \cos \theta,$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{Fl}{E_2 A_2} (\sin \theta - \cos \theta),$$

где

$$l_1 = \frac{l}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}l.$$

Полное перемещение узла B как функции угла θ запишется окончательно в виде

$$\begin{aligned} \Delta_B(\theta) &= \sqrt{(\Delta l_1)^2 + (\sqrt{2}\Delta l_1 - \Delta l_2)^2} = \sqrt{2(\Delta l_1)^2 - 2\sqrt{2}\Delta l_1 + 2(\Delta l_2)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}Fl}{E_1 A_1} \sqrt{4 \cos^2 \theta - 2\sqrt{2} \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta) \alpha + \alpha^2 (\sin \theta - \cos \theta)^2}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}.$$

2) Производная от $\Delta_B(\theta)$ по θ :

$$\begin{aligned} \Delta'_B(\theta) &= \left(\frac{\sqrt{2}Fl}{E_1 A_1} \right)^2 \cdot \frac{-8 \cos \theta \sin \theta + 2\sqrt{2}\alpha \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)}{2\Delta_B} \times \\ &\quad \times \frac{-2\sqrt{2}\alpha \cos \theta (\cos \theta + \sin \alpha)}{2\Delta_B} + \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{2}Fl}{E_1 A_1} \right)^2 \cdot \frac{\alpha^2 2(\sin \theta - \cos \theta)(\cos \theta + \sin \alpha)}{2\Delta_B} = \\ &= -2 \left(\frac{Fl}{E_1 A_1} \right)^2 \cdot \frac{(\alpha + \sqrt{2})(\sqrt{2} \sin 2\theta + \alpha \cos 2\theta)}{\Delta_B}. \end{aligned}$$

3) Приравняем производную Δ'_B нулю и найдем угол θ , при котором перемещение точки B экстремально. Полагаем, что $\frac{Fl}{E_1 A_1} \neq 0$,

$\alpha + \sqrt{2} \neq 0$ и $\Delta'_B \neq 0$, получим

$$\sqrt{2} \sin 2\theta + \alpha \cos 2\theta = 0,$$

Откуда

$$\theta = \frac{1}{2} \left(x - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right).$$

При одинаковых жесткостях стержней $E_1 A_1 = E_2 A_2$ ($\alpha = 1$)

$$\theta = \frac{1}{2} \left(x - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 72^\circ 22'.$$

4) Найдем вторую производную от перемещения $\Delta_B(\theta)$ по углу θ :

$$\Delta_B''(\theta) = 2 \left(\frac{Fl}{E_1 A_1} \right)^2 (\alpha + \sqrt{2}) \frac{(-2\sqrt{2} \cos 2\theta \cdot \alpha \sin 2\theta) \Delta_B +}{\Delta_B^2} \times \\ \times \frac{(\sqrt{2} \sin 2\theta + 2 \cos \theta) \Delta_B'}{\Delta_B^2}.$$

При найденном значении угла $\theta = 72^\circ 22'$ ($\alpha = 1$), полагая, что $\Delta_B > 0$, получим

$$-2\sqrt{2} \cos \theta + 2\alpha \sin 2\theta > 0, \quad \Delta_B' = 0.$$

и $\Delta_B''(\theta) > 0$, т.е. решение соответствует минимальному перемещению узла B .

Задача 9. Стержневая система ABC нагружена в узле A медленно вращающейся силой F (рис. 23). Найти угол α , при котором вес стержней минимален.

Решение. Из уравнений статического равновесия узла A (рис. 24)

$$-N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha - F \sin \theta = 0, \quad N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - F \cos \theta = 0$$

найдем усилия в стержнях

$$N_1 = \frac{F \sin(\alpha - \theta)}{\sin 2\alpha}, \quad N_2 = \frac{F \sin(\alpha + \theta)}{\sin 2\alpha}.$$

Определим сначала направления силы F , при которых в стержнях возникают экстремальные усилия (напряжения), приравняв нулю

производные $\frac{dN_1}{d\theta}$ и $\frac{dN_2}{d\theta}$:

$$\frac{F}{\sin 2\alpha} \cos(\alpha - \theta) = 0; \quad \alpha - \theta = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \theta = \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + n\pi; \quad (11)$$

$$\frac{F}{\sin 2\alpha} \cos(\alpha + \theta) = 0; \quad \alpha + \theta = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \theta = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + n\pi; \quad (12)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

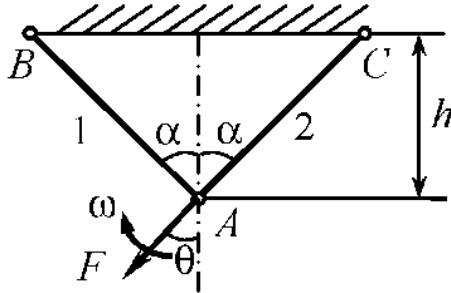


Рис. 23

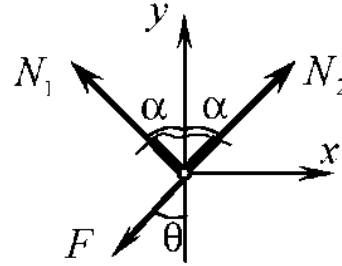


Рис. 24

Таким образом, экстремальные усилия в стержнях возникают при таком положении силы F , когда ее направление перпендикулярно продольной оси одного из стержней (рис. 25).

Положения сил а) и в), а так же б) и г) – симметричны. Таким образом, оба решения (11) и (12) равнозначны.

Определим продольные усилия в стержнях при $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$;

$$N_1 = \frac{F \sin(\alpha - \theta)}{\sin 2\alpha} = F \frac{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin 2\alpha} = -F \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -F \operatorname{ctg} 2\alpha;$$

$$N_2 = \frac{F \sin(\alpha + \theta)}{\sin 2\alpha} = \frac{F}{\sin 2\alpha}.$$

При $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ получим

$$N_1 = \frac{F}{\sin 2\alpha}, \quad N_2 = -F \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Так как $\alpha = 0$ противоречит физическому смыслу задачи, и $\cos 2\alpha < 1$, то

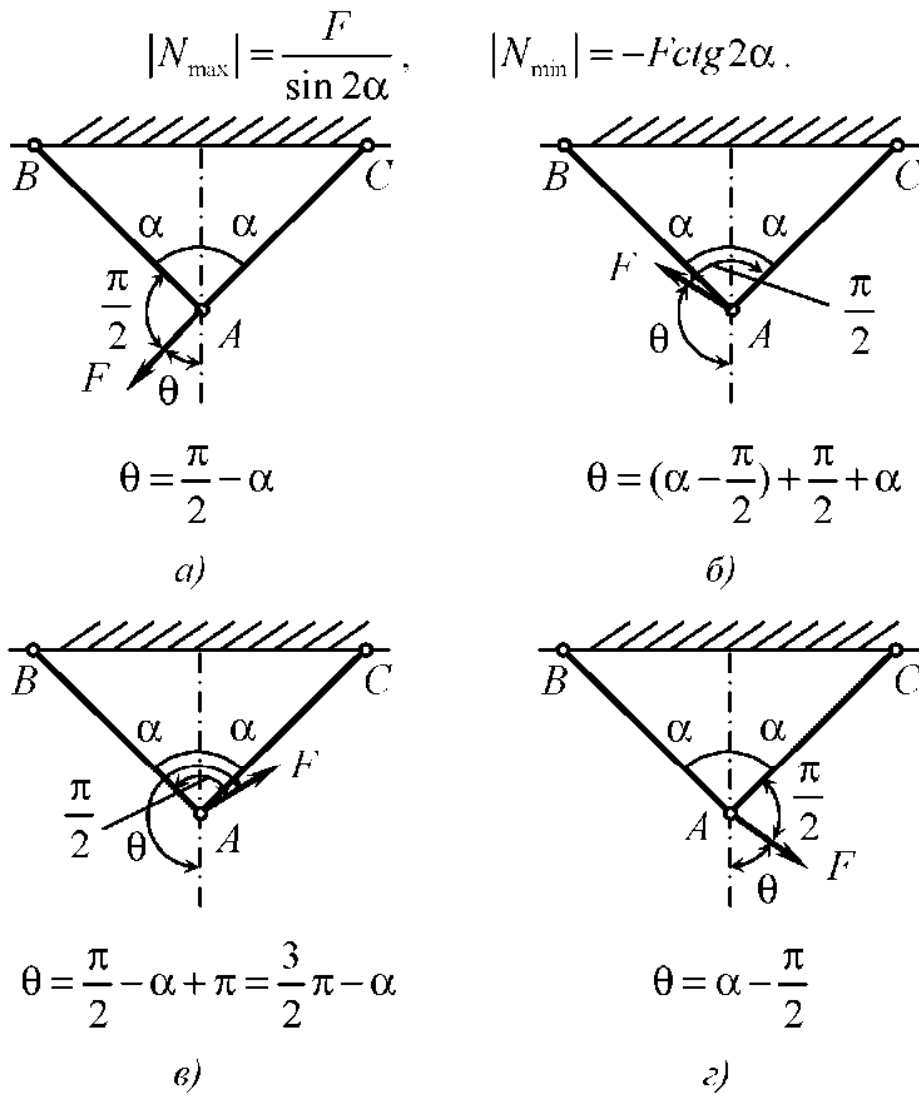


Рис. 25

Найдем угол α , при котором вес стержневой системы минимален.

Так как нагрузка вращающаяся, то усилие N_{\max} попеременно возникает то в одном, то в другом стержне, являясь в зависимости от угла θ растягивающим, либо сжимающим, поэтому площади сечений обеих стержней должны быть одинаковы. Полагая $\sigma_{\max} = [\sigma]$, получим

$$A_1 = A_2 = A = \frac{F}{[\sigma] \sin 2\alpha}.$$

Вес стержневой системы

$$G = 2\gamma A \ell = \frac{2\gamma F h}{\cos \alpha} = \frac{2\gamma F h}{[\sigma]} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha \cos \alpha}.$$

Производная от G по α

$$G'_\alpha = \frac{2\gamma F h}{[\sigma]} \cdot \frac{-(2 \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha)}{\sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha}.$$

Приравнивая производную G'_α нулю и полагая при этом, что

$\sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha \neq 0$, т.е. $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, получим

$$2 \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$\cos^2 \alpha = \frac{2}{3}, \quad \alpha \cong 35^\circ 13'.$$

1.2. Задачи для самостоятельного решения

1.2.1. Статически определимые системы

Задача 1. Сила F нагружает конструкцию, как указано на рис. 26. Исходя из материалов (табл. 1) и исходных данных (табл. 2):

- 1) спроектировать конструкцию минимального веса;
- 2) спроектировать конструкцию наименьшей стоимости (принимается, что форма сечения не влияет на стоимость конструкции).

Таблица 1

Материал	Допускаемые напряжения $[\sigma]$, МПа	Плотность ρ , кг/м ³	Условная стоимость 1 кг массы конструкции C , руб/кг
1	160	2700	1,1
2	400	4500	1,6
3	1000	7800	2,8

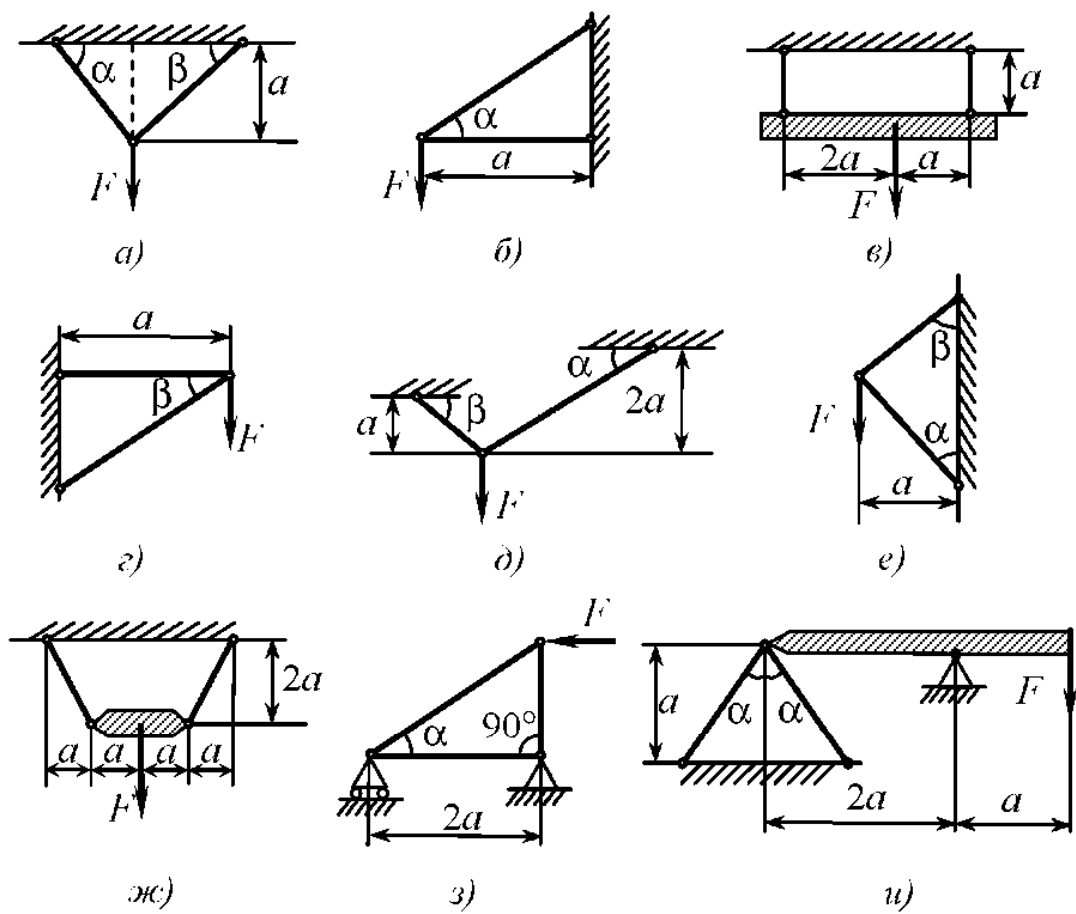


Рис. 26

Таблица 2

Вариант	F , кН	α , град	β , град	a , м	Форма поперечного сечения стержня
1	100	30	45	1	квадрат со стороной b
2	120	30	60	1,1	круг диаметром D
3	140	45	60	1,2	Прямоугольник $h/b = 2$
4	160	30	45	1,3	Кольцо $c = d/D = 0,6$
5	180	30	60	1,4	равносторонний треугольник

1.2.2. Статически неопределимые системы

Задача 2. Какой должна быть величина монтажного зазора δ , чтобы изображенная конструкция имела наименьший вес? Брус AC – абсолютно жесткий (рис. 27). $[\sigma]_1 = 160$ МПа, $[\sigma]_2 = 120$ МПа, $\rho_1 = 7800$ кг/м³, $\rho_2 = 4500$ кг/м³.

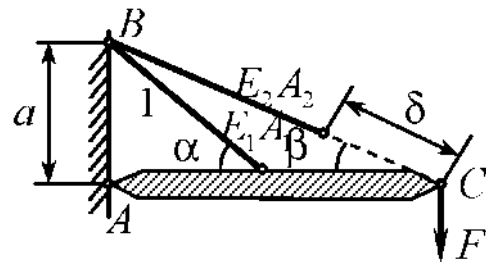


Рис. 27

Задача 3. Абсолютно жесткий брус AB весом Q поддерживается двумя стержнями, материал и поперечные сечения которых различны. Каким должен быть зазор δ , чтобы напряжения в стержнях после сборки были равными (рис. 28)?

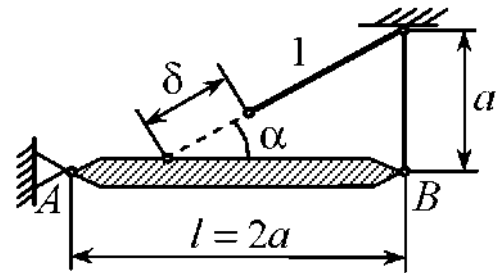


Рис. 28

Задача 4. Абсолютно жесткая плита опирается на три стойки одинаковой высоты и заданной жесткости. Определить координаты точки приложения вертикальной силы при условии, что плита остается горизонтальной после деформации (рис. 29).

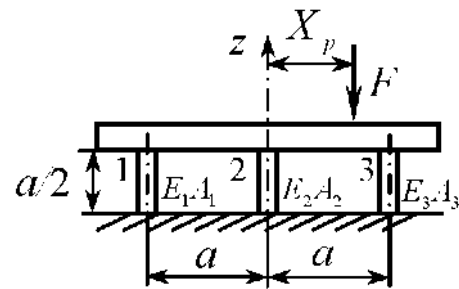


Рис. 29

Задача 5. На какой высоте следует поместить шарнир O , чтобы вес стержневой системы (рис. 30) был минимальным? Материалы и площади поперечных сечений стержней одинаковы, размер h задан. Произвести расчет
а) по допускаемому напряжению,
б) по несущей способности.

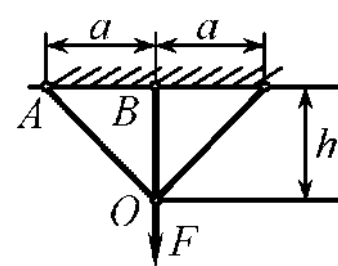


Рис. 30

Исходные данные к задачам 2, 3, 4 приведены в табл. 3.

Таблица 3

Вариант	a , м	α , град	β , град	$E_1 \cdot 10^{-5}$, МПа	$E_2 \cdot 10^{-5}$, МПа	$E_3 \cdot 10^{-5}$, МПа	A_1 , см ²	A_2 , см ²	A_3 , см ²	F кН
1	0,5	40	20	0,7	2,0	1,0	3,0	2,0	10	10
2	0,6	45	20	0,8	2,1	1,1	3,5	2,5	12	12
3	0,7	50	20	0,9	2,0	1,2	4,0	3,0	14	14
4	0,8	55	20	1,0	2,1	1,1	4,5	3,5	16	16
5	0,9	60	20	1,1	2,0	0,9	4,0	4,0	14	18
6	1,0	55	30	1,2	2,1	0,8	3,5	4,5	12	20
7	1,1	50	30	1,1	2,0	0,7	3,0	5,0	10	22
8	1,2	45	30	1,0	2,1	0,9	2,5	4,0	8	24
9	1,3	60	40	0,9	2,0	1,0	3,0	3,0	6	26
10	1,4	70	40	0,7	2,1	1,1	3,0	4,0	5	28

1.2.3. Разные задачи

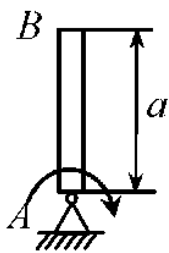


Рис. 31

Задача 6. Брус AB длиной a вращается с угловой скоростью ω . Удельный вес материала бруса γ . Найти закон изменения поперечного сечения по длине, обеспечивающий равнонапряженность бруса (рис. 31).

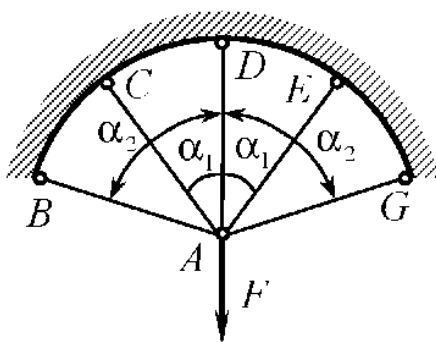


Рис. 32

Задача 7. Где должен быть расположен узел K , чтобы напряжения в стержнях были одинаковыми? Материал всех стержней одинаков, система симметричная (рис. 32).

Задача 8. Цилиндрическая оболочка радиусом R и толщиной h нагружена постоянным радиальным давлением q и осевой силой F . Определить, при каком соотношении нагрузок q и F коэффициент запаса по четвертой теории прочности будет максимальным, если материал цилиндра имеет допускаемое значение нормального напряжения, равный $[\sigma]$ (рис. 33).

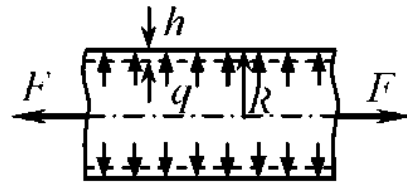


Рис. 33

Задача 9. Нить длиной L вращается относительно оси AB с угловой скоростью ω и удерживается силой F . Найти значения силы F , при котором напряжения в нити будут наименьшими, если удельный вес материала нити γ , площадь сечения равна A_0 (рис. 34).

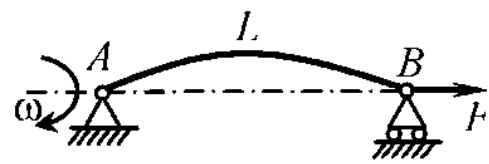


Рис. 34

Задача 10. Конический сосуд высотой H заполнен жидкостью с удельным весом γ . Определить, на какой высоте a от дна сосуда располагается сечение, в котором коэффициент запаса по третьей теории прочности минимален (рис. 35).

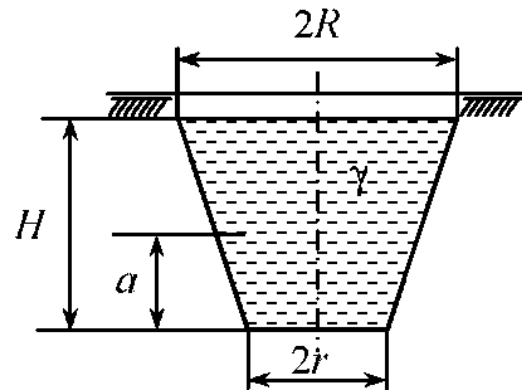


Рис. 35

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

2.1. Задачи с решениями

Задача 1. На какую величину h нужно срезать первоначально круглое сечение (рис.36), чтобы получить сечение с наибольшей прочностью на изгиб?

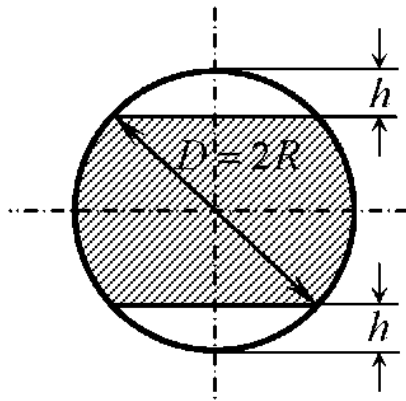


Рис. 36

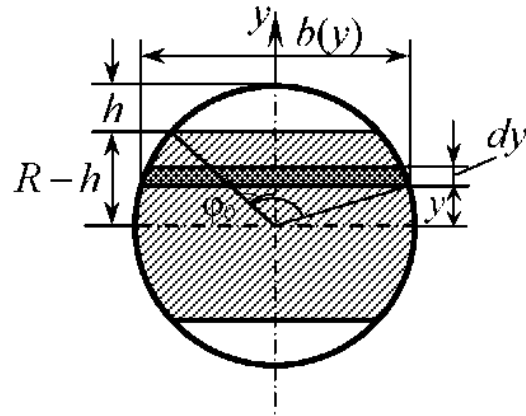


Рис. 37

Решение. Из условия прочности при изгибе $\frac{|M_x|}{W_x} \leq [\sigma]$ следует,

что чем больше момент сопротивления изгибу, тем выше прочность балки. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти высоту срезов h , при которой $W_x \rightarrow \max$.

1). Вычислим момент инерции фигуры, изображенной на рис.36, относительно оси x :

$$J_x = \int_A y^2 dA. \quad (3)$$

Выделим на расстоянии y от оси x элементарную полоску шириной $b(y)$ и высотой dy (рис.37). Площадь этой полоски $dA = b(y)dy$, $b(y) = 2R \sin \varphi$ и $dA = 2R \sin \varphi d\varphi$. Расстояние $y = R \cos \varphi$ и, следовательно, $dy = -\sin \varphi d\varphi$. Подставляя эти выражения в уравнение (3), получим

$$J_x = \int_{-(R-h)}^{R-h} y^2 b(y) dy = 2 \int_0^{R-h} y^2 b(y) dy = 2 \int_{\pi/2}^{\varphi_0} (R \cos \varphi)^2 2R \sin \varphi (-R \sin \varphi) d\varphi =$$

$$= R^4 \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{R^4}{2} \left[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right]_{\varphi_0}^{\pi/2} = \frac{R^4}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) + \frac{\sin 4\varphi_0}{4} \right].$$

Выражение для момента сопротивления изгибу будет иметь вид

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{R^3}{2} \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) + \frac{\sin 4\varphi_0}{4}}{\cos \varphi_0},$$

где $y_{\max} = R - h = R \cos \varphi_0$.

2). Продифференцируем выражение для W_x по параметру φ_0 , определяющему высоту срезок h :

$$\frac{dW_x}{d\varphi_0} = \frac{R^3}{2} \frac{\cos \varphi_0 [(-1) + \cos 4\varphi_0] - \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) + \frac{\sin 4\varphi_0}{4} \right] (-\sin \varphi_0)}{\cos^2 \varphi_0} =$$

$$= \frac{R^3}{2} \frac{\cos \varphi_0 (\cos 4\varphi_0 - 1) + \sin \varphi_0 \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) + \frac{\sin 4\varphi_0}{4} \right]}{\cos^2 \varphi_0}.$$

3). Для определения точек экстремума приравняем $\frac{dW_x}{d\varphi_0}$ нулю:

$$\frac{R^3}{2} \frac{\cos \varphi_0 (\cos 4\varphi_0 - 1) + \sin \varphi_0 \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) + \frac{1}{4} \sin 4\varphi_0 \right]}{\cos^2 \varphi_0} = 0.$$

Полагая, что $\cos^2 \varphi_0 \neq 0$, и приравняв нулю числитель, получим $\varphi_0 = 0,208 \text{ рад} = 11^{\circ}55'$ (решение получено на ЭВМ) и $h = R(1 - \cos \varphi_0) \cong 0,0216R$.

4). Найдем вторую производную от W_x по φ_0 :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_x}{d\varphi_0^2} &= \frac{R^3}{2 \cos^4 \varphi_0} \left\{ \left[-\sin \varphi_0 (\cos 4\varphi_0 - 1) + \cos \varphi_0 (-4 \sin 4\varphi_0) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \varphi_0 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 + \frac{\sin 4\varphi_0}{4} \right) + \sin \varphi_0 (-1 + \cos 4\varphi_0) \right] \cos^2 \varphi_0 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi_0 \left[\cos \varphi_0 (\cos 4\varphi_0 - 1) + \sin \varphi_0 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 + \frac{\sin 4\varphi_0}{4} \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{R^3}{2 \cos^4 \varphi_0} \left\{ \cos^3 \varphi_0 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \frac{15}{4} \sin 4\varphi_0 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin 2\varphi_0 \left[\cos \varphi_0 (\cos 4\varphi_0 - 1) + \sin \varphi_0 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 + \frac{1}{4} \sin 4\varphi_0 \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

При $\varphi_0 = 0,208 \text{ рад} = 11^\circ 55'$ получим $\frac{d^2 W_x}{d\varphi_0} < 0$, следовательно, найденное решение соответствует максимальному значению W_x .

2.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. На какую величину h нужно срезать первоначальные сечения (рис.38), чтобы получить сечение:

- с наибольшей прочностью на изгиб;
- с моментом сопротивления изгибу, равным W_x первоначального сечения?

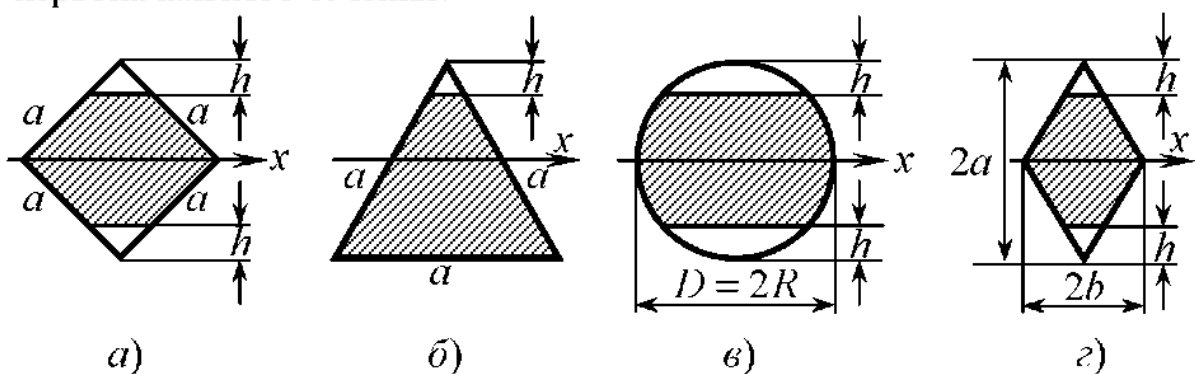


Рис. 38

Какое увеличение момента сопротивления изгибу можно при этом получить? На сколько процентов можно снизить вес конструкции за счет такого изменения формы поперечного сечения для балки с постоянным сечением по длине?

Задача 2. Как обтесать круглое бревно, чтобы полученный из него брусок прямоугольного поперечного сечения (рис.39) обладал:

- а) наибольшей прочностью при изгибе;
- б) наибольшей жесткостью при изгибе?

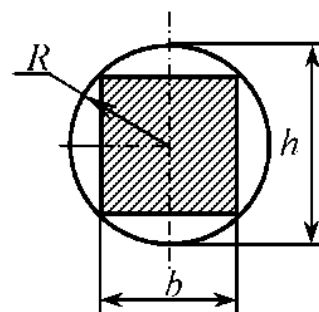


Рис. 39

3. ИЗГИБ

3.1. Задачи с решениями

Задача 1. Найти закон изменения высоты прямоугольного поперечного сечения балки по длине, обеспечивающей минимум ее веса (рис.40).

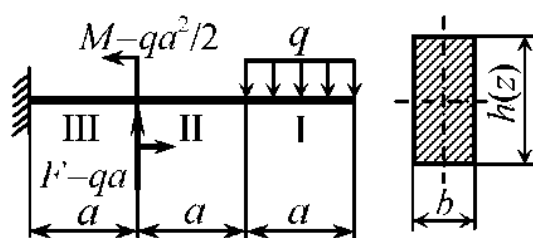


Рис. 40

Решение. Так как балка является статически определимой, то условие минимума ее веса совпадает с условием равнопрочности, т.е. $\sigma(z) = const$. Балка содержит три участка, в пределах которых выражения для изгибающего момента в произвольных сечениях имеют вид

$$M_x(z) = \begin{cases} qa \cdot z - \frac{qz^2}{2} & \text{при } 0 \leq z \leq a \text{ (I участок),} \\ qa \cdot z - qa \left(z - \frac{a}{z} \right) & \text{при } a \leq z \leq 2a \text{ (II участок),} \\ qa \cdot z - qa \left(z - \frac{a}{2} \right) + M_0 + qa(z - 2a) & \text{при } 2a \leq z \leq 3a. \end{cases}$$

Момент сопротивления изгибу прямоугольного сечения

$$W_x = \frac{bh^2(z)}{6}.$$

Из условия равнопрочности

$$\sigma(z) = \frac{M_x(z)}{W_x} = \frac{6M_x(z)}{bh^2(z)} = [\sigma],$$

получаем

$$h(z) = \sqrt{\frac{6M_x(z)}{b[\sigma]}}.$$

Так как $M_x(z)$ имеет различные аналитические выражения на каждом из участков, то и закон изменения высоты сечения на каждом участке будет свой:

$$\text{при } 0 \leq z \leq a \quad h_I(z) = \sqrt{\frac{6qz \left(a - \frac{z}{2} \right)}{b[\sigma]}};$$

$$\text{при } a \leq z \leq 2a \quad h_{II}(z) = \sqrt{\frac{3qa^2}{b[\sigma]}};$$

$$\text{при } 2a \leq z \leq 3a \quad h_{III}(z) = \sqrt{\frac{6qz(z-a)}{b[\sigma]}}.$$

Задача 2. Балка постоянного поперечного сечения длиной l нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис.41). Найти отношение a/l , обеспечивающее минимум ее веса.

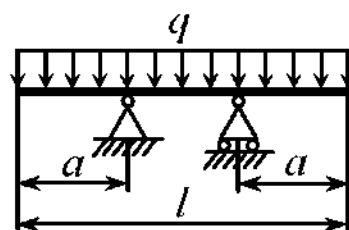


Рис. 41

Решение. В этой задаче спроектировать балку с $\sigma(z) = const$ невозможно, т.к. балка имеет постоянное поперечное сечение $A(z) = const$. Для выяснения условия оптимальности рассмотрим характер изменения эпюры изгибающего момента по длине балки (рис.42).

Величина изгибающего момента в сечениях над опорами $M_1 = -\frac{qa^2}{2}$, в среднем по длине сечения балки

$$M_2 = \frac{ql}{2} \left(\frac{l}{2} - a \right) - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql}{2} \left(\frac{l}{4} - a \right), \quad \left(R_a = R_b = \frac{ql}{2} \right).$$

Из эпюры изгибающих моментов видно, что если $|M_1| \neq M_2$, то либо в сечениях над опорами, либо в середине пролета балка будет недогружена, что приведет к избыточному весу конструкции. Поэтому условие оптимальности будет состоять в том, чтобы $|M_1| = M_2$, т.е.

$$\frac{qa^2}{2} = \frac{ql}{2} \left(\frac{l}{4} - a \right) \text{ или}$$

$$a^2 + la - \frac{l^2}{4} = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим

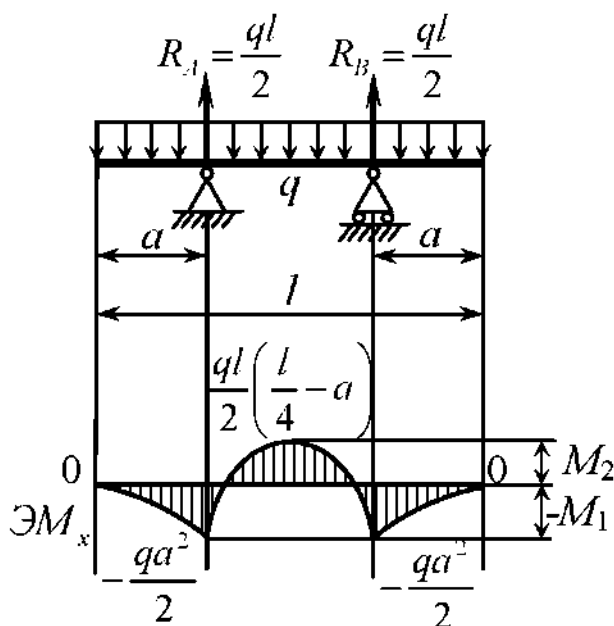


Рис. 42

$$a_1 = \frac{l}{2}(\sqrt{2} - 1) \cong 0,207 l; \quad a_2 = -\frac{l}{2}(\sqrt{2} + 1) \cong 1,207 l.$$

Так как второе решение не имеет физического смысла, получаем $a = 0,207 l$.

Задача 3. При каком соотношении моментов инерции J_1 и J_2 участков AB и BC стальной балки, изображенной на рис.43, максимальное перемещение будет иметь место в сечении, где приложена нагрузка F ?

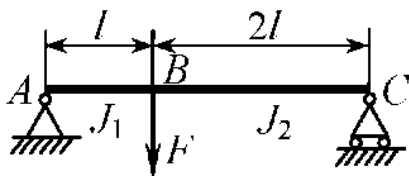


Рис. 43

Решение. Для того, чтобы прогиб в сечении B был наибольшим, угол поворота в этом сечении должен быть равен нулю, т.к. $\frac{dy}{dz} = 0$.

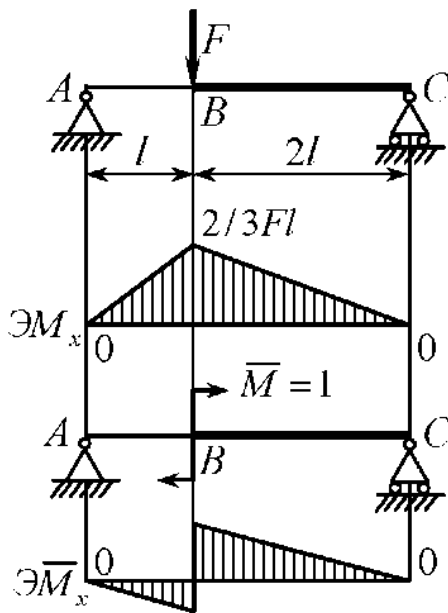


Рис. 44

Получим выражение для определения угла поворота в сечении B . Для этого построим эпюры изгибающих моментов от нагрузки F и единого момента, приложенного в сечении B (рис.44) и перемножим эти эпюры по правилу Верещагина:

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{1}{EJ_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Fl \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + \\ &+ \frac{1}{EJ_2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Fl \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) = \\ &= -\frac{2}{27} \cdot \frac{Fl^2}{EJ_1} + \frac{8}{27} \cdot \frac{Fl^2}{EJ_2}. \end{aligned}$$

Приравняем угол поворота в сечении B нулю:

$$-\frac{2}{27} \cdot \frac{Fl^2}{EJ_1} + \frac{8}{27} \cdot \frac{Fl^2}{EJ_2} = 0, \text{ откуда находим } \frac{J_1}{J_2} = \frac{1}{4}.$$

Задача 4. Стальная ступенчатая балка прямоугольного сечения имеет постоянную ширину b . Найти соотношения h_1/h_2 и a/l , при которых вес балки будет наименьшим, если балка нагружена сосредоточенной силой F на конце консоли (рис.45 а). Допускаемое напряжение для материала балки $[\sigma]$, удельный вес γ .

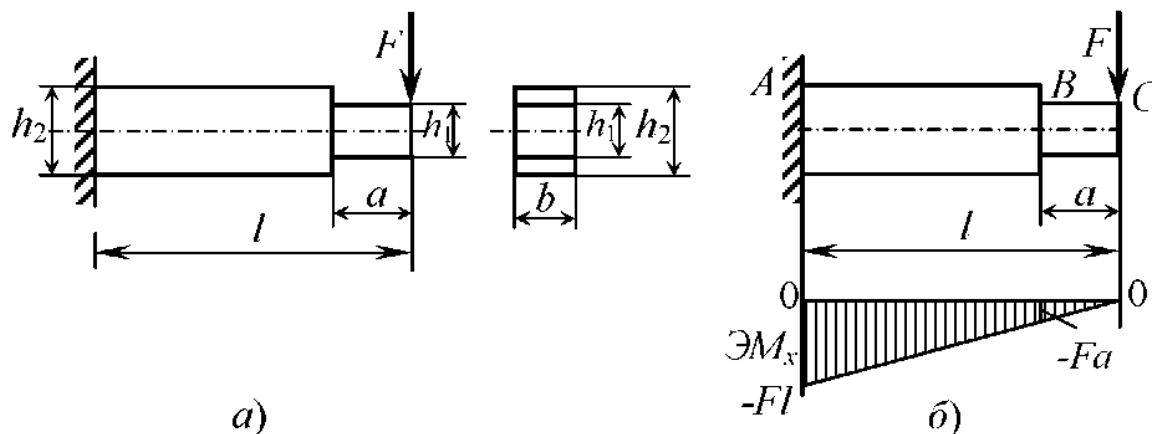


Рис. 45

Решение. 1). Построим эпюру изгибающих моментов для рассматриваемой балки (рис.45 б). Из условия прочности в защемлении

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} = \frac{6Fl}{bh_2^2} = [\sigma].$$

Находим высоту сечения в заделке:

$$h_2 = \sqrt{\frac{6Fl}{b[\sigma]}}.$$

Запишем выражение для веса балки:

$$G = \gamma b h_1 a + \gamma b h_2 (l - a). \quad (4)$$

В сечении В балки должно выполняться условие прочности

$$\frac{6Fa}{bh_1^2} = [\sigma],$$

откуда находим

$$a = \frac{b[\sigma]}{6F} h_1^2. \quad (5)$$

Подставляя (5) в выражение (4), получаем для функции веса выражение

$$G = \gamma b^2 h_1^3 \frac{[\sigma]}{6F} + \gamma b h_2 \left(l - \frac{b[\sigma]}{6F} h_1^2 \right).$$

2). Вычислим производную:

$$\frac{\partial G}{\partial h_1} = 3h_1^2 \frac{\gamma b^2 [\sigma]}{6F} - 2h_1 \frac{\gamma b^2 [\sigma]}{6F} h_2.$$

3). Приравняем ее нулю:

$$\frac{\gamma b^2 [\sigma]}{6F} h_1 (3h_1 - 2h_2) = 0.$$

Получаем следующие два решения:

а) $h_1 = 0$ и $a = 0$, что соответствует балке постоянного сечения по длине с высотой $h = h_2 = const$;

$$\text{б) } 3h_1 - 2h_2 = 0, \quad h_1 = \frac{2}{3}h_2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{6Fl}{b[\sigma]}} \quad \text{и} \quad a = \frac{4}{9}l.$$

4). Вычислим вторую производную:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial h_1^2} = 6h_1 \frac{\gamma b^2 [\sigma]}{6F} - 2h_2 \frac{\gamma b^2 [\sigma]}{6F} = \frac{\gamma b^2 [\sigma]}{3F} (3h_1 - h_2).$$

Исследуем полученные решения:

$$\text{а) } h_1 = 0: \quad \frac{\partial^2 G}{\partial h_1^2} = -\frac{\gamma b^2 [\sigma]}{3F} h_2 < 0 \quad \text{— следовательно, это решение}$$

соответствует максимальному весу балки;

$$\text{б) } h_1 = \frac{2}{3}h_2: \quad \frac{\partial^2 G}{\partial h_1^2} = \frac{1}{3F} \gamma b^2 [\sigma] h_2 > 0 \quad \text{— следовательно, второе}$$

решение соответствует минимальному весу балки.

Задача 5. Балка постоянного поперечного сечения длиной $2l$ нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q . Зазор между средней опорой и балкой в ненагруженном состоянии составляет Δ (рис.46).

Подобрать Δ таким образом, чтобы вес балки был наименьшим.

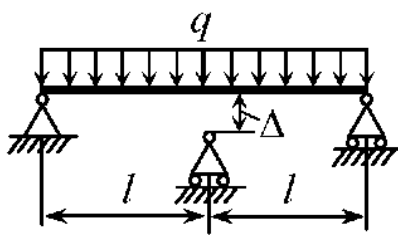


Рис. 46

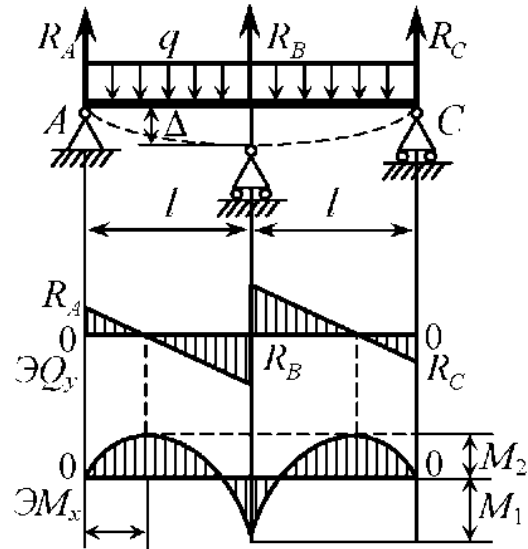


Рис. 47

Решение. Ожидаемый характер эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для рассматриваемого случая нагружения представлен на рис.47. На основании рассуждений, аналогичных проведенным в задаче 3, можно записать условие оптимальности в виде $|M_1| = M_2 = M_3$ (это следует из характера эпюры изгибающих моментов).

Для определения величин реакций R_A и R_B (из условия симметрии $R_C = R_A$) составим уравнения равновесия левой части балки:

$$\begin{cases} M_x(z=l) = R_A l - \frac{ql^2}{2} = -M; \\ M_x(z=z_0) = R_A z_0 - \frac{qz_0^2}{2} = M; \\ Q_y(z=z_0) = R_A - qz_0 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $z_0 = 0,41l$ и $R_A = 0,41ql$. Величина реакции R_B будет равна

$$R_B = 2ql - R_A - R_C = 2ql - 2 \cdot 0,41ql = 1,18ql.$$

Зная R_B , величину зазора Δ можно определить, например, с помощью интегралов Мора, вычисляемых по правилу Верещагина. Для этого построим отдельно эпюры изгибающих моментов q , R_B и единичной нагрузки (рис.48). Перемножая по правилу Верещагина эпюры изгибающих моментов от q и R_B на эпюру от единичной нагрузки и складывая, получим

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2}{EJ_x} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} R_B \frac{l}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right] = \\ &= \frac{ql^4}{EJ_x} \left[\frac{5}{24} - \frac{1,18}{6} \right] = 0,0117 \frac{ql^4}{EJ_x}. \end{aligned}$$

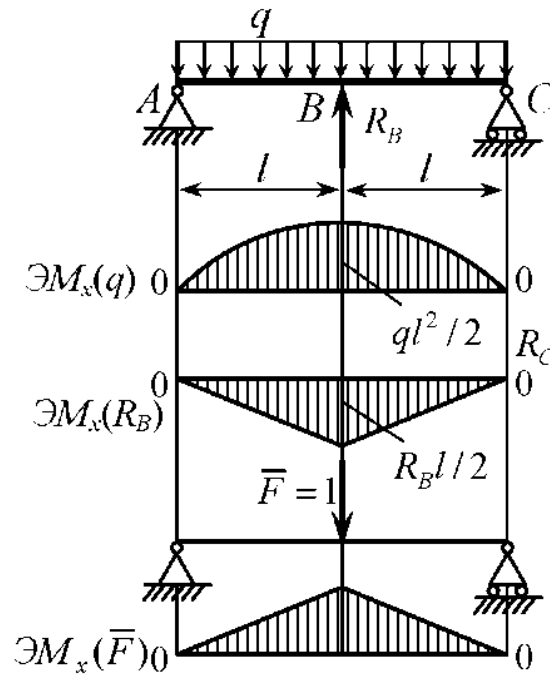


Рис. 48

Задача 6. Балка прямоугольного поперечного сечения заданной ширины « b » нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q . Найти закон изменения высоты сечения по длине

балки, при котором максимальный прогиб будет равен допусжаемому, а вес балки будет минимальным (рис.49).

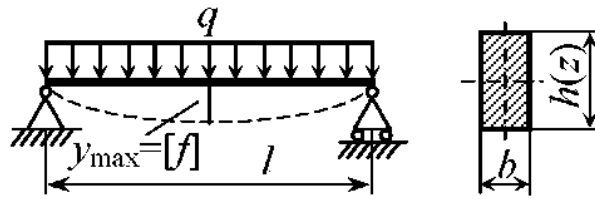


Рис. 49

Решение. 1). Максимальный прогиб в середине балки может быть вычислен с помощью интеграла Мора:

$$y_{\max} = \int_0^l \frac{M_x \bar{M}_1}{EJ_x} dz ,$$

где $M_x = \frac{1}{2} qlz(1-z)$ – изгибающий момент в произвольном сечении

от внешних нагрузок; $\bar{M}_1 = \frac{1}{2} lz$ – изгибающий момент от единичной силы, приложенной в месте наибольшего прогиба. Вес балки прямоугольного сечения

$$G = \gamma l \int_0^l bh(z) dz ,$$

где γ – удельный вес материала.

Введем безразмерную координату $u = z/l$. Тогда

$$M_x = \frac{ql^2}{2} u(1-u); \quad \bar{M}_1 = \frac{1}{2} ul; \quad 0 \leq u \leq 1,$$

$$G = \gamma l \int_0^1 bh(u) du = \gamma bl \int_0^1 h(u) du .$$

Учитывая, что $J_x = \frac{bh^3}{12}$, выражение для прогиба (6) может быть записано в виде

$$\int_0^1 \frac{3ql^4}{Ebh^3} u^2 (1-u) du = [f]$$

или

$$\int_0^1 u^2 (1-u) h^{-3} du = \frac{Eb[f]}{3ql^4} = C,$$

где $C = const$.

Окончательно задача может быть сформулирована таким образом: необходимо найти минимум интеграла

$$G = \gamma bl \int_0^1 h(u) du$$

при условии, что другой интеграл

$$\int_0^1 u^2 (1-u) h^{-3}(u) du = C \quad (7)$$

сохраняет постоянное значение.

Задачи такого типа относятся к изопериметрическим задачам вариационного исчисления. Решение осуществляется следующим образом. Составляется новая функция, называемая функцией Лагранжа:

$$L(u) = \gamma bl h(u) + \lambda u^2 (1-u) h^{-3}(u),$$

где $\lambda = const$, и по правилам вариационного исчисления отыскивается минимум функционала:

$$\int_0^1 [\gamma bl h(u) + \lambda u^2 (1-u) h^{-3}(u)] du.$$

2). Необходимым условием экстремума такого функционала является выполнение уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial h} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial h'} \right) = 0.$$

3). В данном случае это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \gamma bl - 3\lambda u^2 (1-u) h^{-4}(u) = 0$$

или

$$h^4(u)\gamma bl - 3\lambda u^2(1-u) = 0,$$

откуда

$$h(u) = \left[\frac{3\lambda u^2(1-u)}{\gamma bl} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (8)$$

Подставляя уравнение (8) в (7), найдем λ :

$$\int_0^1 u^2(1-u^2) \left[\frac{3\lambda u^2(1-u)}{\gamma bl} \right]^{-\frac{3}{4}} du = C,$$

откуда

$$\lambda = \left[\frac{1}{C} \left(\frac{3}{\gamma bl} \right)^{-\frac{3}{4}} \int_0^1 u^2(1-u)^4 du \right]^{\frac{4}{3}} = \frac{\gamma bl}{3} \left[\frac{1}{C} \int_0^1 u^2(1-u)^4 du \right]^{\frac{4}{3}}.$$

Интеграл в квадратных скобках представляет собой бета-функцию

$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$, которая может быть вычислена по формуле

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

где Γ – гамма-функция, значения которой табулированы [6]. В нашем случае $x = 1,5$, $y = 1,25$ и

$$B(1,5; 1,25) = \frac{\Gamma(1,5) \cdot \Gamma(1,25)}{\Gamma(2,75)} = \frac{0,88623 \cdot 0,90640}{1,75 \cdot 0,91906} = 0,49944.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{\gamma bl}{3} c^{-\frac{4}{3}} [0,49944]^{\frac{4}{3}},$$

$$h(u) = \left\{ c^{-\frac{4}{3}} [0,49944]^{\frac{4}{3}} u^2(1-u) \right\}^{\frac{1}{4}} = 0,7934 c^{-\frac{1}{3}} [u^2(1-u)]^{\frac{1}{4}},$$

где $c = \frac{Eb[f]}{3ql^4}$.

Следует отметить, что найденный закон изменения высоты сечения балки прямоугольного сечения по длине (9) обеспечивает наименьший вес при выполнении только условия жесткости $y_{\max} = [f]$ в предположении, что условие прочности при этом удовлетворяется. В действительности, необходимо было ввести ограничение по прочности в виде неравенства $\sigma_{\max}(z) \leq [\sigma]$, что привело бы к гораздо более сложной вариационной задаче.

Задача 7. Двухпролетная балка AC постоянного поперечного сечения нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q и сосредоточенной силой $F = 2ql$ (рис.50). Определить положение промежуточной опоры B , при котором вес балки будет наименьшим. Допускаемое напряжение для материала балки принять равным $[\sigma]$.

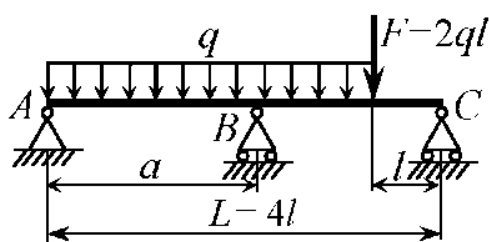


Рис. 50

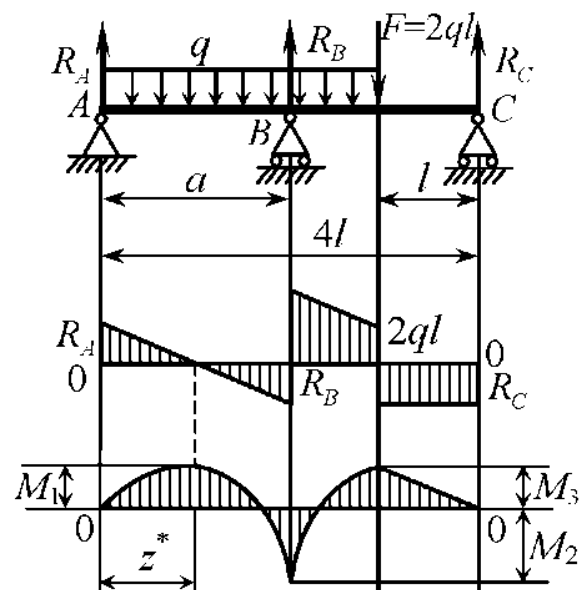


Рис. 51

Решение. Ожидаемый характер эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для рассматриваемого случая нагружения

представлен на рис.51. Из характера эпюры изгибающих моментов следует, что условие оптимальности можно записать в виде $M_1 = |M_2| = M_3 = M$. Составим уравнение равновесия левой и правой частей балки и воспользуемся тем обстоятельством, что в сечении $z = z_0$ эпюра изгибающих моментов имеет экстремум и соответственно $Q_y(z_0) = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) Q_y(z = z_0) = R_A - qz_0 = 0, \\ 2) M_x^{слева}(z = z_0) = R_A z_0 - \frac{qz_0^2}{2} = M, \\ 3) M_x^{слева}(z = a) = R_A a - \frac{qa^2}{2} = -M, \\ 4) M_x^{справа}(z = l) = R_C l = M, \\ 5) M_x^{справа}(z = 4l - a) = R_C(4l - a) - F(3l - a) - \frac{q(3l - a)^2}{2} = -M. \end{array} \right. \quad (10)$$

Система пяти уравнений (10) содержит 5 неизвестных: z_0 , R_A , R_C , M , a . Исключая последовательно неизвестные, получим уравнение относительно неизвестной a : из первого уравнения системы (10) $z_0 = R_A / q$; подставляя это значение во второе уравнение, найдем $R_A = \sqrt{2qM}$, после подстановки этого выражения в третье уравнение и возведения его в квадрат, получим

$$\frac{q^2 a^4}{4} - 3qMa^2 + M^2 = 0. \quad (11)$$

Из четвертого уравнения системы $R_C = \frac{M}{l}$, из пятого -

$$M \frac{4l - a}{l} - F(3l - a) - \frac{q(3l - a)^2}{2} = -M$$

и

$$M = \frac{l}{5l-a} \left[F(3l-a) + \frac{q}{2}(3l-a)^2 \right] \quad (12)$$

Подставляя уравнение (12) в (11) и учитывая при этом, что $L = 4l$, $F = 2ql$, после некоторых преобразований получим

$$a^6 - 4la^5 - 64l^2a^4 + 406l^3a^3 - 488l^4a^2 - 420l^3a + 441 = 0 \quad (13)$$

Так как отношение a/l не должно зависеть от размера L , то зададим решение в виде $a = kl$, где k – некоторая постоянная. Подставляя это решение в уравнение (13) после сокращения на l^6 , приходим к уравнению

$$k^6 - 4k^5 - 64k^4 + 406k^3 - 488k^2 - 420k + 441 = 0.$$

Решениями которого в интервале $0 \leq k \leq 4$ являются $k_1 = 0,753$, $k_2 = 2,4302$ (решения получены с использованием ЭВМ). Раскрытие статической неопределимости и построение эпюр изгибающих моментов показало, что первое решение даст $|M_2| = M_3 = 1,65ql^2$, второе $M_1 = M_3 = 0,77ql^2$ (значение M_2 близко к нулю) и является оптимальным. Вариант решения $M_1 = |M_2| = M_3$ с расположением опоры B в пролете AC нереализуем по условиям нагружения.

Задача 8. Ступенчатая балка круглого поперечного сечения нагружена сосредоточенной силой F в середине пролета (рис.52). Найти величины диаметров D и d , при которых максимальный прогиб будет равен допускаемому, а вес балки будет минимальным.

Решение. 1). Определим перемещение сечения C с помощью интегралов Мора, используя для их вычисления правило Верещагина. Для этого построим эпюры $M_x(F)$ и $\bar{M}_x(F=1)$ (рис.53). Тогда

$$y_C = 2 \left[\frac{1}{EJ_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Fa}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EJ_2} \cdot \frac{Fa}{4} \cdot \frac{a}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{4} + \frac{a}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4}a \right) \frac{a}{2} \cdot \frac{Fa}{2} \right] = \frac{Fa^3}{2E} \left[\frac{1}{6J_1} + \frac{23}{46J_2} \right]. \quad (14)$$

Подставляя выражения для осевых моментов инерции сечений $J_1 = \pi d^4 / 64$, $J_2 = \pi D^4 / 64$ в уравнение (14) и приравнявая прогиб допускаемому значению, получим

$$y_c = \frac{F'a^3}{2E} \left[\frac{64}{6\pi d^4} + \frac{23 \cdot 64}{48\pi D^4} \right] = \frac{F'a^3}{3\pi E} \left(\frac{16}{d^4} + \frac{46}{D^4} \right) = [f]$$

или

$$\frac{8}{d^4} + \frac{23}{D^4} = \frac{3\pi E[f]}{2Fa^3}.$$

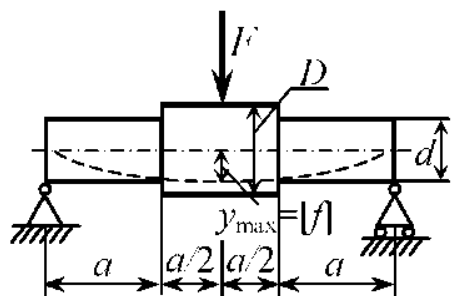


Рис. 52

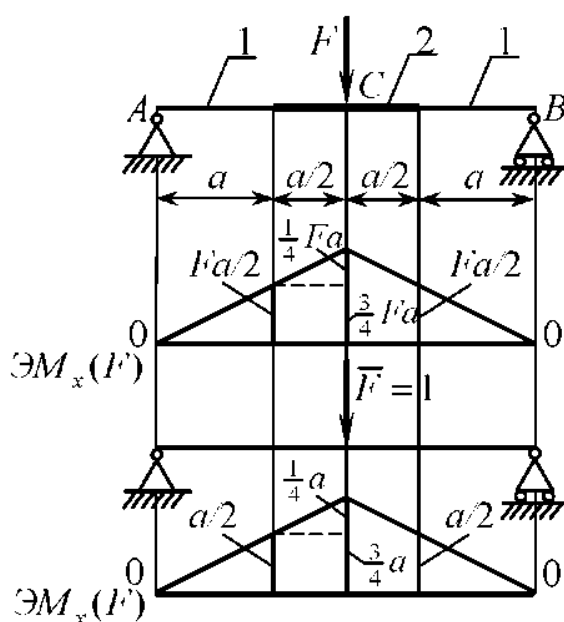


Рис. 53

Обозначив $\frac{3\pi E[f]}{2Fa^3} = C$, приходим к уравнению

$$\frac{8}{d^4} + \frac{23}{D^4} - C = 0. \quad (15)$$

Вес балки

$$G = 2 \frac{\pi d^2}{4} \alpha \gamma + \frac{\pi D^2}{4} \alpha \gamma = \frac{\pi \alpha \gamma}{4} (2d^2 + D^2). \quad (16)$$

Требуется найти минимум функций веса балки G (16) при выполнении соотношения (15), которое в этом случае называется

уравнением связи, а сама задача называется задачей на условный экстремум.

2). Составим функцию Лагранжа:

$$L = G + \lambda \left(\frac{8}{d^4} + \frac{23}{D^4} - C \right),$$

где λ – множитель Лагранжа. Экстремум функции L отыскивается обычными методами, т.е. приравниваются нулю ее первые производные по искомым функциям. Составим выражения для первых

производных $\frac{\partial L}{\partial d}$ и $\frac{\partial L}{\partial D}$:

$$\frac{\partial L}{\partial d} = \pi\alpha\gamma d - 32\lambda d^{-5},$$

$$\frac{\partial L}{\partial D} = \pi\alpha\gamma \frac{D}{2} - 92\lambda D^{-5}.$$

3). Приравнивая нулю производные и присоединяя уравнение связи (15)

$$\begin{cases} \pi\alpha\gamma d - \frac{32\lambda}{d^5} = 0, \\ \pi\alpha\gamma D - \frac{184\lambda}{D^5} = 0, \\ \frac{8}{d^4} + \frac{23}{D^4} - C = 0, \end{cases} \quad (17)$$

получим систему уравнений (19), которая содержит три неизвестных: d , D , λ .

Исключая параметр λ , поделив первое уравнение системы (17) на второе:

$$\frac{\pi\alpha\gamma d}{\pi\alpha\gamma D} = -\frac{\frac{32\lambda}{d^5}}{\frac{184\lambda}{D^5}}, \text{ откуда } d = D \sqrt{\frac{4}{23}} = 0,747D.$$

Подставляя это соотношение в последнее уравнение системы (17), получим

$$\frac{8}{(0,747D)^4} + \frac{23}{D^4} = C = \frac{3\pi t [f]}{2Fa^3},$$

откуда

$$D = 2,386 \left(\frac{Fa^3}{\pi t [f]} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad d = 1,782 \left(\frac{Fa^3}{\pi t [f]} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

4). Исследуем квадратичную форму:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial d^2} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial D^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial d \partial D} \right)^2, \quad (18)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 L}{\partial d^2} = \pi a \gamma + 160 \lambda d^{-6}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial D^2} = \pi a \gamma + 460 \lambda D^{-6}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial d \partial D} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Из системы необходимых условий экстремума (17) находим

$$\lambda = \frac{\pi a \gamma d^6}{32} = \frac{\pi a \gamma D^6}{184}. \quad (20)$$

Подставляя уравнения (19) и (20) в (18), получим

$$\frac{\partial^2 L}{\partial d^2} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial D^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial d \partial D} \right)^2 = (\pi a \gamma + 5 \pi a \gamma) \left(\pi a \gamma + \frac{5}{2} \pi a \gamma \right) > 0,$$

а так как $\frac{\partial^2 L}{\partial d^2} > 0$, то найденное решение даст минимум веса балки.

3.2. Задачи для самостоятельного решения

3.2.1. Статически определимые системы

Задача 1. Найти закон изменения размеров поперечного сечения балок по длине, обеспечивающий минимум веса (рис. 54).

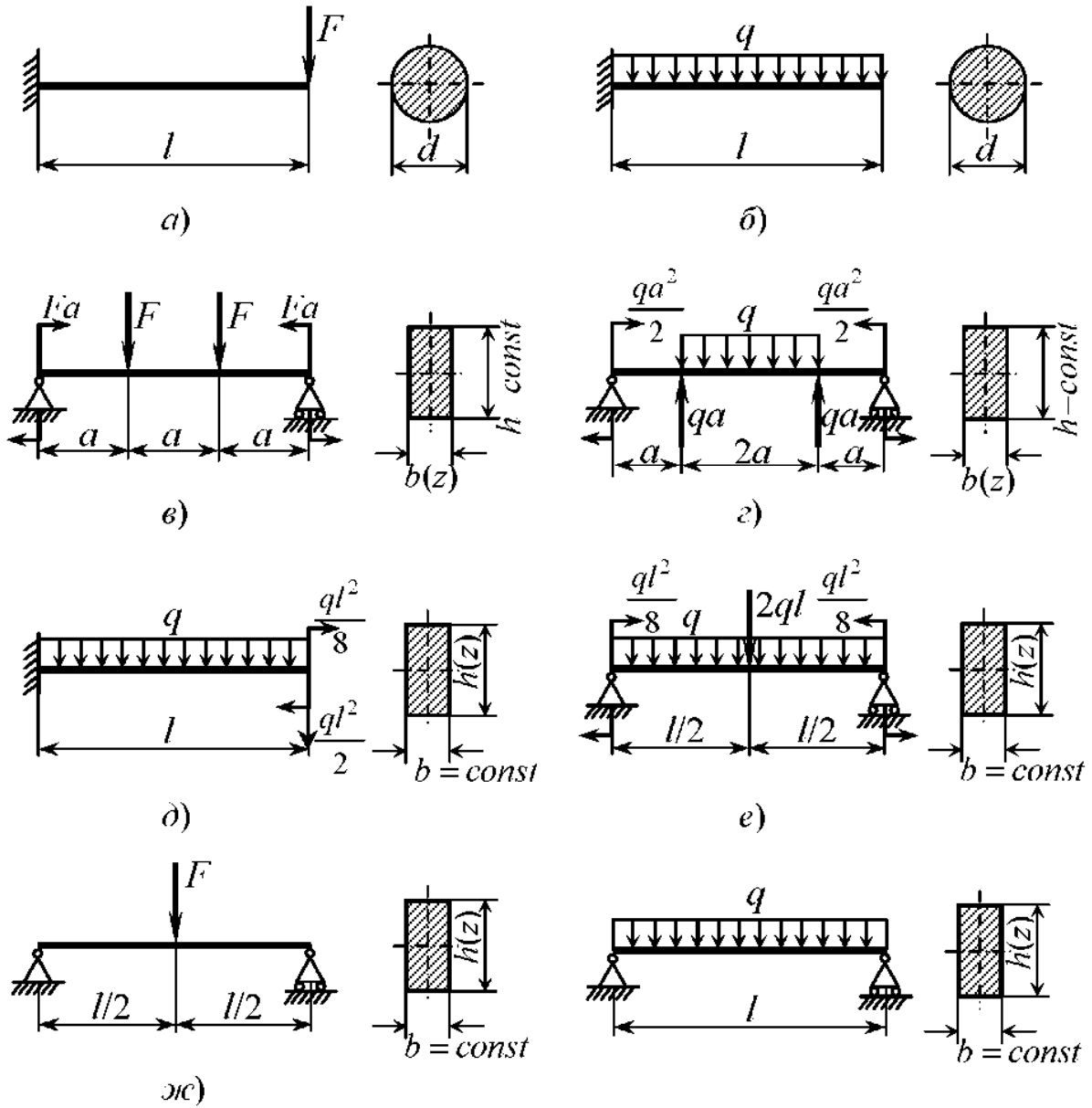


Рис. 54

Задача 2. Найти оптимальное по прочности расположение опор ($a/l = ?$) для балок постоянного поперечного сечения по длине (рис.55), обеспечивающее минимум веса балок.

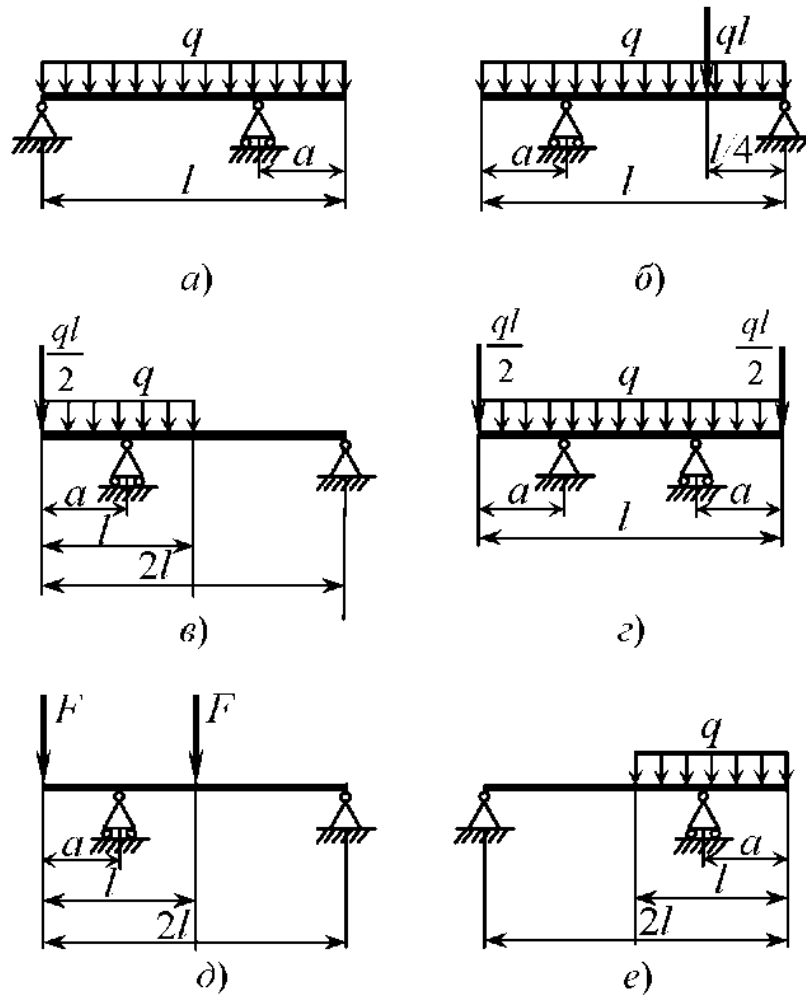


Рис. 55

Задача 3. Найти оптимальное по прочности расположение опор ($a/l = ?$) для рам постоянного поперечного сечения (рис.56).

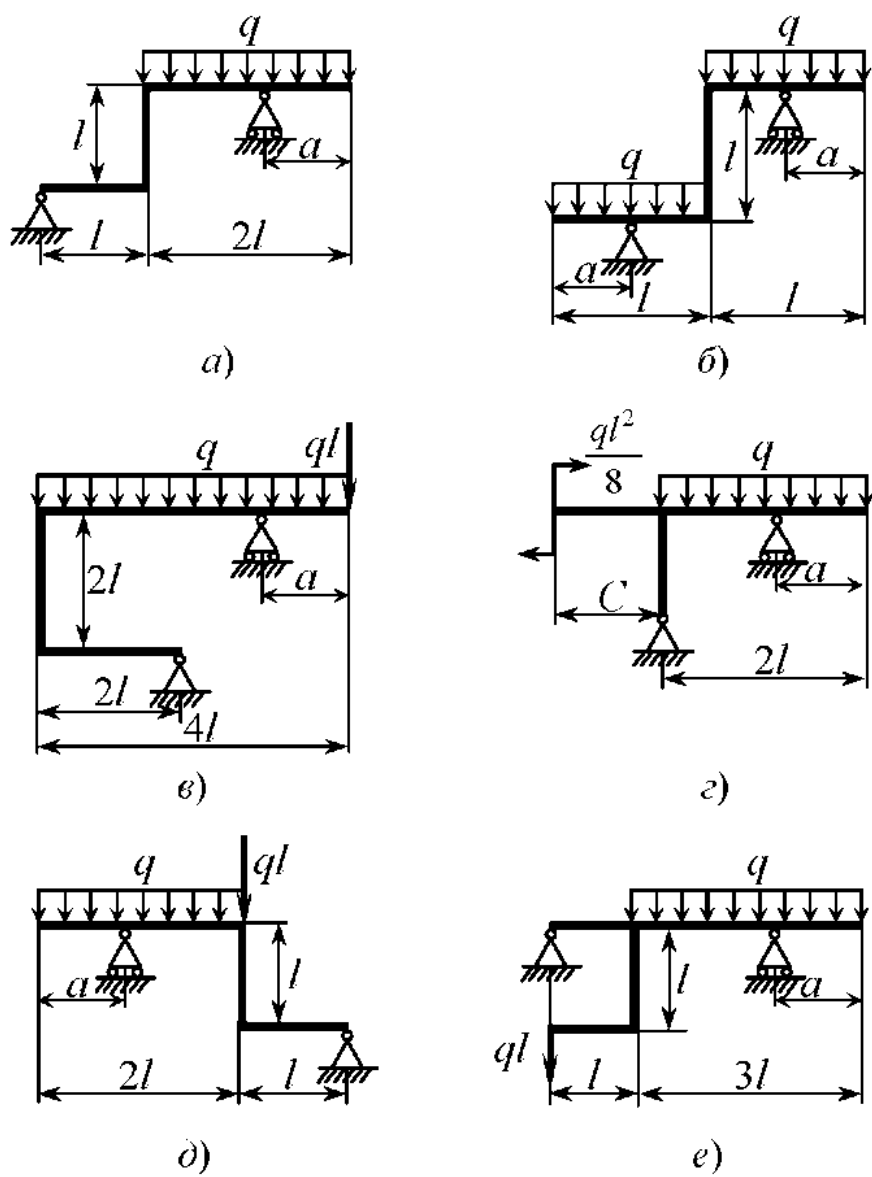


Рис. 56

Задача 4. Для балок постоянной жесткости (рис.57) найти величину силы $F(k=?)$, при которой максимальные нормальные напряжения имеют наименьшее значение.

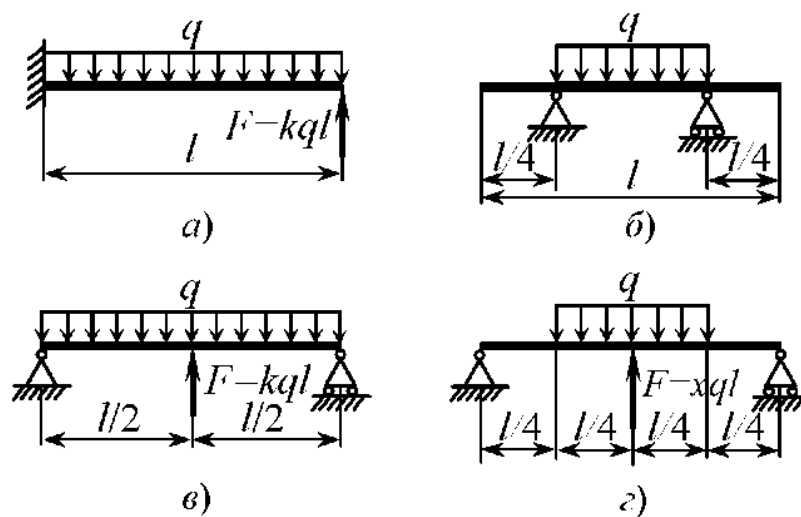


Рис. 57

3.2.2. Статически неопределимые системы

Задача 5. Балки постоянного поперечного сечения нагружены, как указано на рис.58. В каком месте ($a/l=?$) необходимо установить дополнительную опору B , чтобы максимальные напряжения изгиба имели наименьшее значение? Балки находятся в условиях плоского изгиба, материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию.

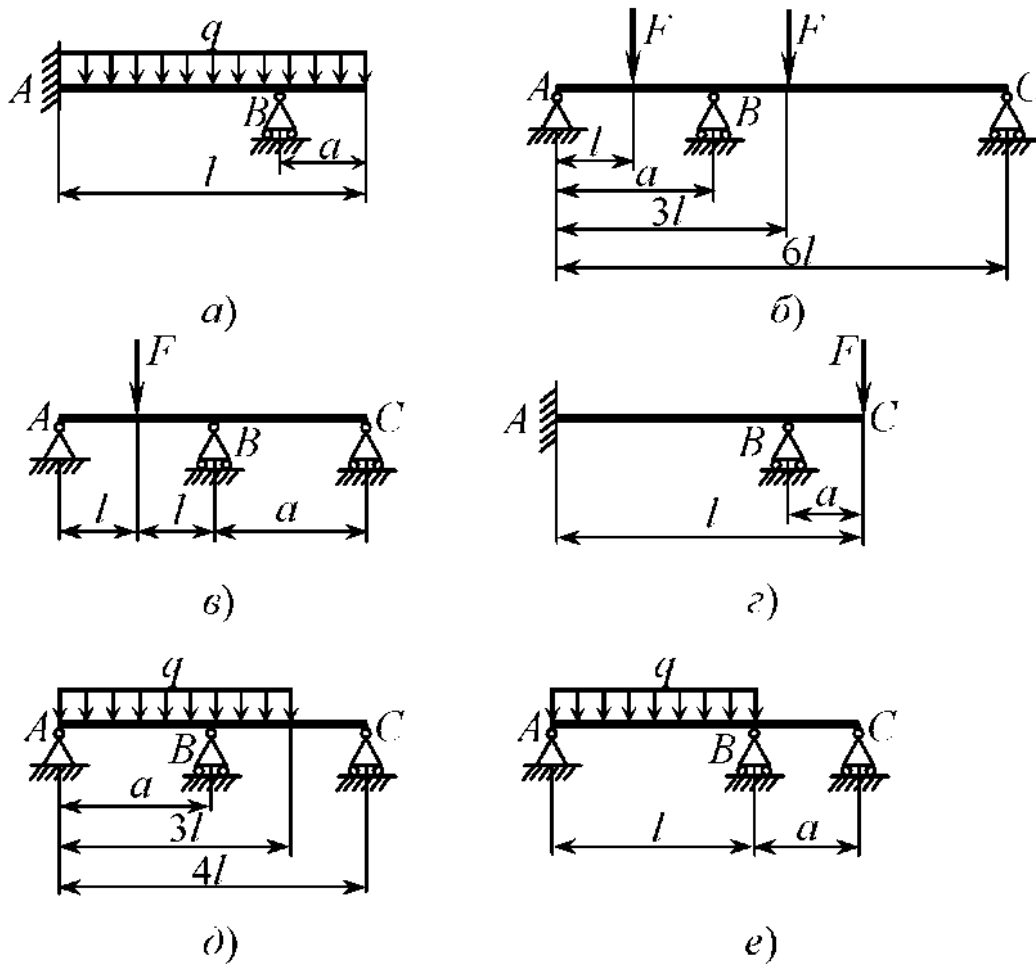


Рис. 58

Задача 6. Для рам постоянной жесткости (рис.59) определить положение опоры C ($a/l = ?$), при котором реакция этой опоры минимальна, и определить величину реакции R_C .

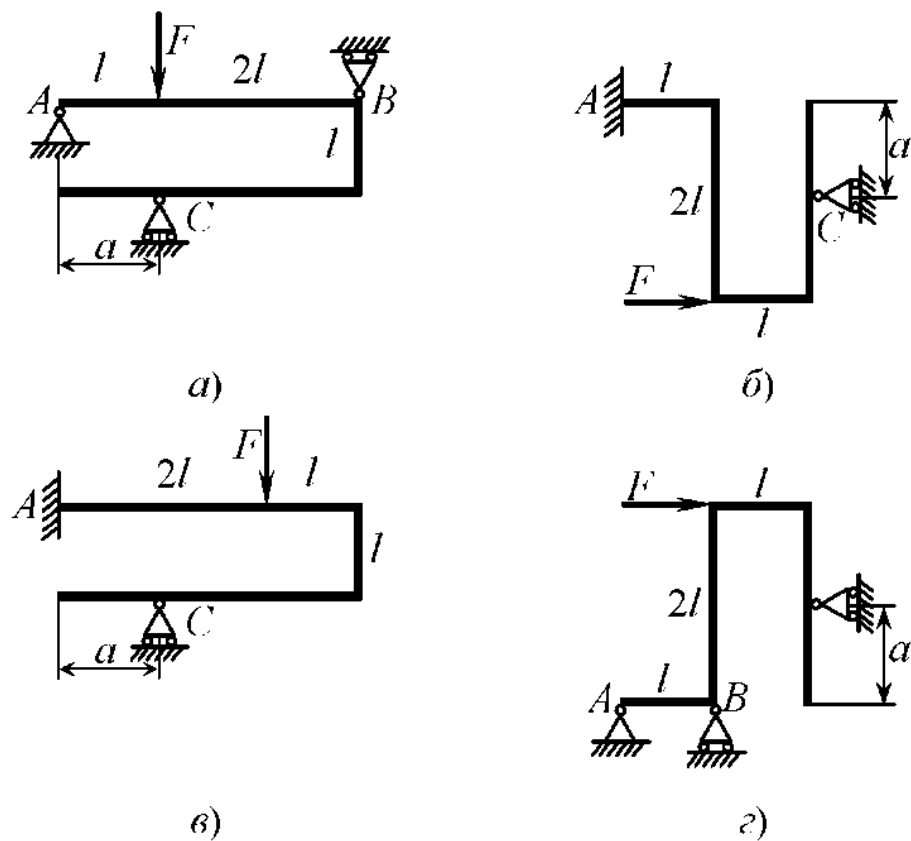


Рис. 59

Задача 7. Определить зазоры Δ , при которых наибольшие нормальные напряжения в балках заданной жесткости сечения EJ (рис.60) будут иметь наименьшие значения.

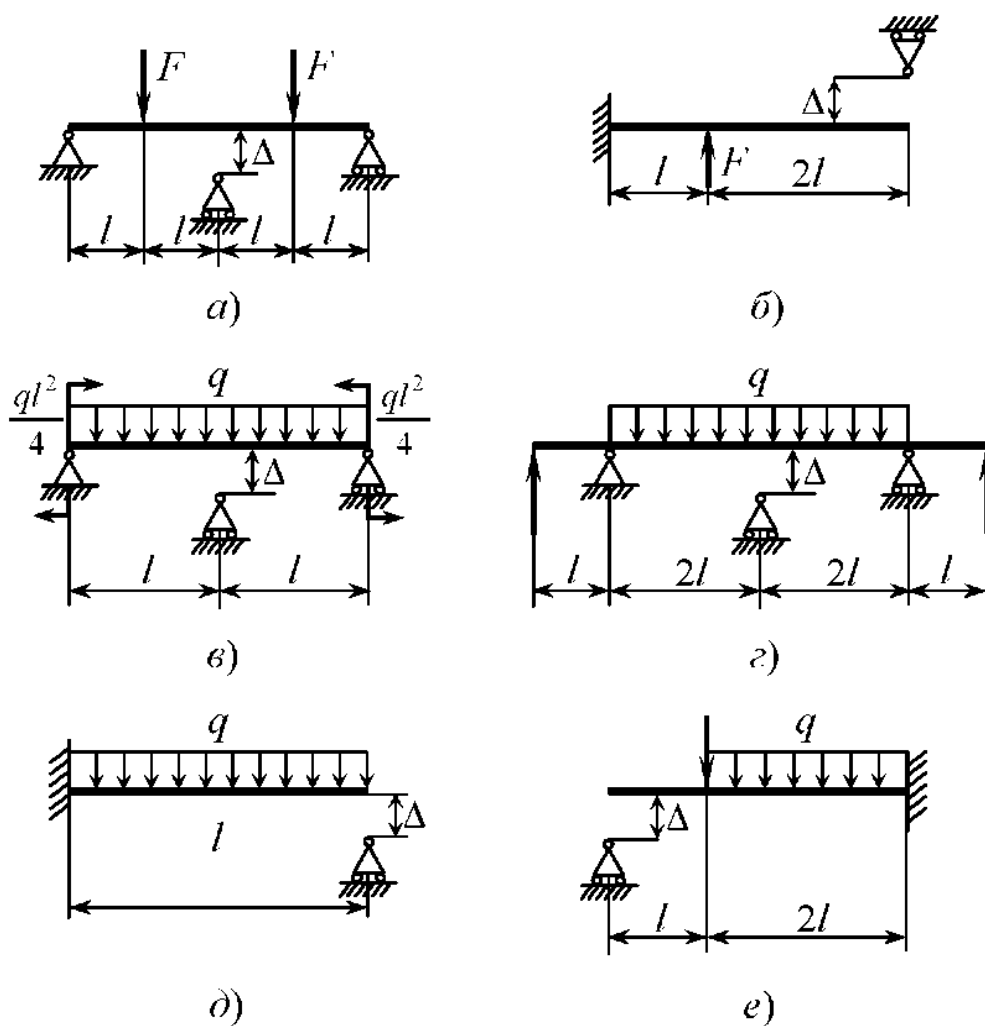


Рис. 60

Задача 8. На какую величину Δ необходимо опустить средние опоры упругих балок (рис.61), чтобы изгибающие моменты в сечениях под этими опорами обратились в нуль?

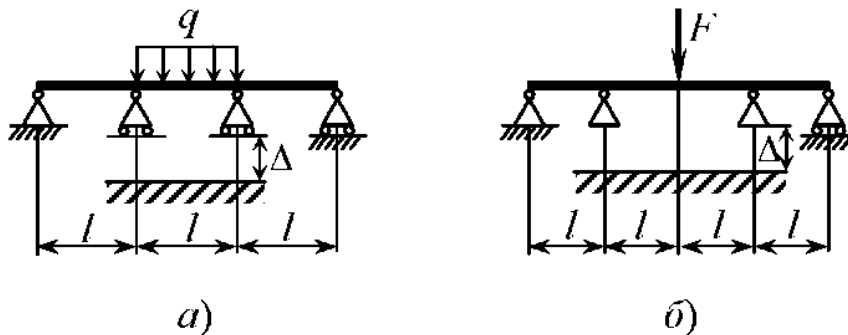


Рис. 61

3.2.3. Разные задачи

Задача 9. Определить размер l из условия равнопрочности стержня AB и балки CD (рис.62) при $F = 5$ кН, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 0,5$ м, $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{TAB} = 400$ МПа, $\sigma_{TAC} = 200$ МПа; стержень AB – пруток, $d = 8$ мм; балка CD – тонкостенная труба, $D_{cp} = 80$ мм, $h = 4$ мм.

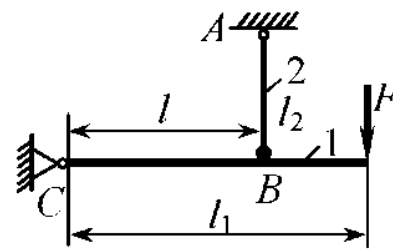


Рис. 62

Задача 10. Балка прямоугольного поперечного сечения заданной ширины b нагружена, как указано на рис.63. Найти закон изменения высоты сечения по длине балки, при котором максимальный прогиб будет равен допуску, а вес балки будет минимальным.

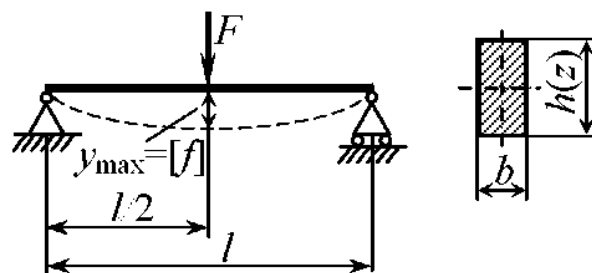


Рис. 63

Задача 11. Консольная балка AB нагружена парой сил, приложенной к ее свободному концу (рис.64). Определить оптимальную (из условия прочности) ширину балки b , если предел текучести материала балки при сжатии в 3 раза больше предела текучести при растяжении.

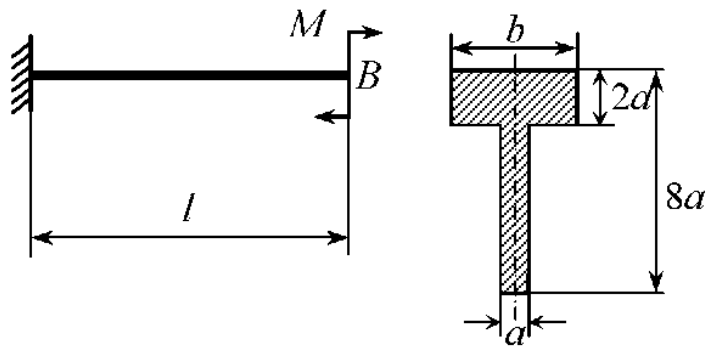


Рис. 64

Задача 12. Найти закон изменения высоты h балок прямоугольного сечения постоянной ширины b по длине, обеспечивающей минимум веса (рис.65). Интенсивность распределенной нагрузки изменяется по параболическому закону с вершиной параболы на свободном конце.

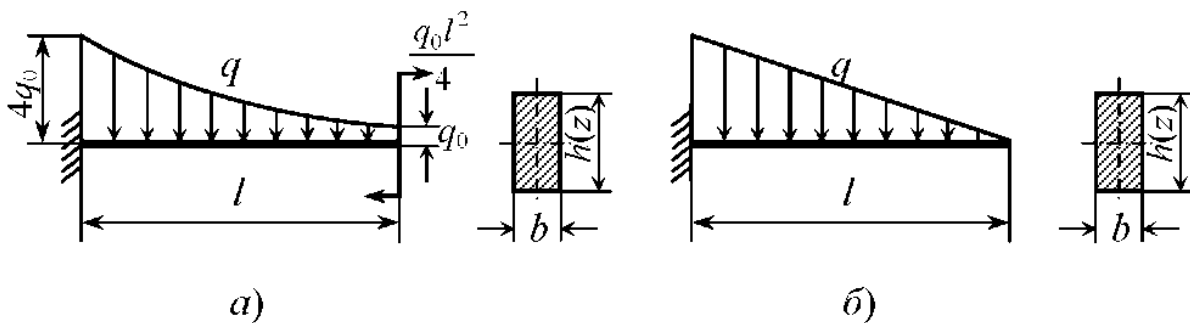


Рис. 65

Задача 13. Гибкий брус с погонным весом q лежит на абсолютно твердой поверхности. Найти минимальное отношение b/a , при котором брус касается плоскости лишь в двух точках (рис.66).

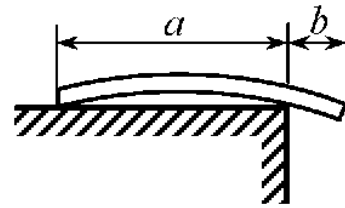


Рис. 66

Задача 14. Сечение изгибаемого стержня (рис.67а) показано на рис.67б. При заданном a определить высоту сечения h с тем, чтобы отношение наибольших растягивающих и сжимающих напряжений было равно 0,6.

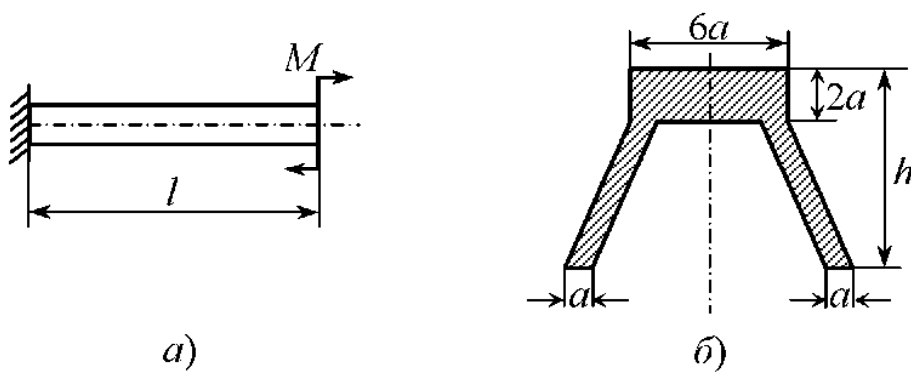


Рис. 67

Задача 15. При заданных величинах a и b определить, при каком отношении моментов инерции поперечных сечений $J_1 : J_2$ линейное перемещение сечения, где приложен момент M , равно нулю. Чему равен при этом угол поворота указанного сечения (рис.68)?

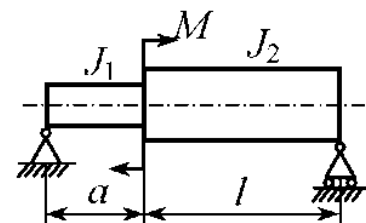


Рис. 68

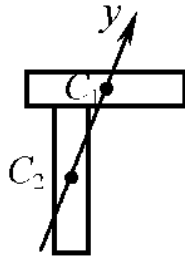


Рис. 69

Задача 16. Доказать, что ось y , проходящая через центры тяжести двух одинаковых прямоугольников, является главной (рис.69).

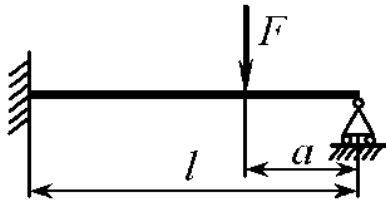


Рис. 70

Задача 17. Определить положение сечения ($a/l = ?$) приложения нагрузки, при котором предельная нагрузка будет иметь наименьшее значение (рис.70).

Литература

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986, 512 с.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. М.: Высш. Школа, 1969, 734 с.
3. Сборник задач по сопротивлению материалов. Под ред. В.К. Качурина. М.: Наука, 1972, 430 с.
4. Лихарев К.К., Сухова Н.А. Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов». М.: Машиностроение, 1980, 224 с.
5. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973, 400 с.
6. Серазутдинов М.Н. и др. Механика. Вопросы теоретической механики, сопротивления материалов, деталей машин. Казань: Центр инновационных технологий, 2007, 328 с.
7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. М.: Наука, 1986, 976 с.
8. Фомин А.П. Прикладная механика твердого деформированного тела. М.: Наука, 1975. Т.1.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974, Т.1У, ч.1.
10. Габасов Р.А., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1975.
11. Рейтман М.И., Шпиро Г.С. Методы оптимального проектирования деформируемых тел. М.: Наука, 1976, 265 с.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
13. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.
14. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.
15. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование. М.: Мир, 1983.
16. Уайлд Д. Оптимальное проектирование. М.: Мир, 1981.
17. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
18. Миролюбов И.Н. др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. М.: Высш. школа, 1967, 484 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Освоение растяжения-сжатия.....	7
1.1. Задачи с решениями.....	7
1.2. Задачи для самостоятельного решения.....	29
1.2.1. Статически определимые системы.....	29
1.2.2. Статически неопределимые системы.....	31
1.2.3. Разные задачи.....	32
2. Геометрические характеристики плоских сечений.....	34
2.1. Задачи с решениями.....	34
2.2. Задачи для самостоятельного решения.....	36
3. Изгиб.....	37
3.1. Задачи с решениями.....	37
3.2. Задачи для самостоятельного решения.....	54
3.2.1. Статически определимые системы.....	54
3.2.2. Статически неопределимые системы.....	58
3.2.3. Разные задачи.....	61
Литература.....	65