

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ, СЖАТИИ, КРУЧЕНИИ И ИЗГИБЕ

Методические указания к расчетно-графической работе для студентов
механических специальностей

Содержатся основные теоретические положения по расчету на прочность и жесткость при растяжении, сжатии, кручении и изгибе. В приведенных числовых примерах на предложенных схемах показывается последовательность выполнения задания, приводятся результаты расчетов и их графическая интерпретация. Пример соответствует содержанию самостоятельных домашних работ, предусмотренных программой курса. Приводится список рекомендуемой литературы.

Табл.1. Ил.4. Библиогр.: 4 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Общий метод расчета на прочность и жесткость.....	4
2. Расчет на прочность и жесткость при растяжении и сжатии.....	5
3. Расчет на прочность и жесткость при кручении.....	6
4. Расчет на прочность и жесткость при поперечном изгибе.....	8
5. Пример расчета на прочность и жесткость при растяжении и сжатии.....	10
5.1. Построение эпюры внутренних усилий N	10
5.2. Построение эпюры нормальных напряжений σ	11
5.3. Нахождение площади поперечного сечения из условия прочности.....	11
5.4. Нахождение площади поперечного сечения из условия жесткости.....	13
5.5. Построение эпюры перемещений λ	14
6. Пример расчета на прочность и жесткость при кручении.....	15
6.1. Построение эпюры M_z	15
6.2. Построение эпюры касательных напряжений τ	16
6.3. Определение диаметра вала из условия прочности.....	17
6.4. Определение диаметра вала из условия жесткости.....	17
6.5. Построение эпюры углов закручивания.....	18
7. Пример расчета на прочность и жесткость при поперечном изгибе.....	19
7.1. Построение эпюр внутренних усилий.....	20
7.2. Определение размеров поперечного сечения балки W_z из условия прочности.....	20
7.3. Построение эпюр прогибов и углов поворота.....	21
7.4. Определение размеров поперечного сечения балки из условия жесткости.....	24
Библиографический список.....	25

Введение

Методические указания содержат примеры расчета на прочность и жесткость при растяжении, сжатии, кручении и изгибе с подробными решениями и пояснениями теоретических положений, которые излагаются в курсе сопротивления материалов.

Прочность – такое свойство элемента конструкции, благодаря которому он воспринимает все силовые воздействия без разрушения.

Жесткость – такое свойство элемента конструкции, благодаря которому от воздействия внешних нагрузок он деформируется таким образом, что не нарушается его безопасная эксплуатация.

1. Общий метод расчета на прочность и жесткость

Надежная работа элементов конструкции будет обеспечена при условии, что возникающие в них напряжения и деформации не превысят определенных величин, зависящих в общем случае от материала и размеров поперечных сечений элементов.

Условие прочности записывается в виде

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (1)$$

где σ_{\max} – наибольшее напряжение, возникающее при работе в его поперечных сечениях; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

Допускаемое напряжение зависит от материала и определяется

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}. \quad (2)$$

Величина σ_0 находится экспериментально и принимается равной σ_m – пределу текучести для пластичных материалов и σ_{np} – пределу прочности для хрупких материалов. Коэффициент запаса прочности n зависит от ряда факторов, таких как ответственность работы конструкции, состояние материала, характера приложения нагрузки и других.

Условие жесткости в общем виде записывается в виде

$$\Delta_{\max} \leq [\Delta], \quad (3)$$

где $\Delta_{\max}, [\Delta]$ – соответственно максимальная и допускаемая абсолютная деформация.

Условия жесткости при растяжении–сжатии, кручении, изгибе, соответственно, имеют вид:

$$\Delta l_{\max} \leq [\Delta l] \text{ м}; \theta_{\max} \leq [\theta] \text{ рад/м}; V_{\max} \leq [V] \text{ м},$$

где Δl_{\max} – наибольшая деформация элемента (при растяжении–сжатии); Δl – допускаемое абсолютное удлинение или укорочение участка; $\theta_{\max}, [\theta]$ – максимальный относительный угол закручивания и допускаемый относительный угол закручивания; $V_{\max}, [V]$ – соответственно максимальный и допускаемый прогиб.

Если по условию задачи даются величины допускаемого напряжения и допускаемой деформации и известна внешняя нагрузка, то целью расчета на прочность и жесткость является подбор таких размеров поперечного сечения, чтобы возникающие в нем напряжения и деформации не превышали заданных допускаемых величин. В результате расчетов на прочность и жесткость принимаются большие размеры поперечного сечения, чтобы были удовлетворены условия прочности и жесткости.

2. Расчет на прочность и жесткость при растяжении и сжатии

При растяжении и сжатии в поперечных сечениях стержня возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила N , которая связана с нормальными напряжениями выражением

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (4)$$

где σ – нормальное напряжение, Па; N – нормальная сила, Н или кН; A – площадь поперечного сечения, м² или см².

При расчетах удобно пользоваться напряжением в мегапаскалях (1 МПа = 10⁶ Па).

Условие прочности записывается в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (5)$$

Если материал стержня по-разному сопротивляется деформациям растяжения и сжатия, то следует учитывать два условия прочности:

$$\text{а) при растяжении} \quad \sigma_{\max.p} \leq [\sigma_p]; \quad (6)$$

$$\text{б) при сжатии} \quad \sigma_{\max.c} \leq [\sigma_c], \quad (7)$$

где $\sigma_{\max.p}$ и $\sigma_{\max.c}$ - наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения, возникающие в поперечных сечениях стержня; $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ – допускаемые значения растягивающих и сжимающих напряжений для данного материала.

Условие жесткости записывается в виде

$$\Delta l_{\max} \leq [\Delta l], \quad (8)$$

где Δl_{\max} – максимальное удлинение или укорочение рассчитываемого стержня, м; $[\Delta l]$ заданное допустимое удлинение или укорочение стержня, м.

Величина Δl определяется как сумма деформации участков стержня:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A_i}, \quad (9)$$

где N_i, l_i, A_i – продольная сила, длина и площадь поперечного сечения на i -ом участке стержня, соответственно; E – модуль упругости первого рода; n – число участков.

3. Расчет на прочность и жесткость при кручении

При кручении в поперечных сечениях стержня возникает один силовой фактор M_X – крутящий момент. На кручение обычно работают валы, имеющие круглое поперечное сечение. Для валов касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_X}{W_\rho}, \quad (10)$$

где τ_{\max} – касательное напряжение, Па или МПа; M_X – крутящий момент в данном сечении, Нм или кНм; W_ρ – полярный момент сопротивления, м³, равный для круга $W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$.

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_X}{W_\rho} \leq [\tau], \quad (11)$$

где $W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$ – полярный момент сопротивления для круглого сечения; $[\tau]$ – допускаемые касательные напряжения.

Следовательно,
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_X}{\pi[\tau]}}. \quad (12)$$

Условие жесткости при кручении

$$\theta_{\max} = \frac{M_X \cdot l}{GJ_\rho} \leq [\theta], \quad (13)$$

где θ_{\max} – максимальный относительный угол закручивания; l – длина участка; G – модуль упругости второго рода; J_ρ – полярный момент инерции.

Из условия жесткости

$$J_\rho \geq \frac{M_X \cdot l}{G[\theta]}. \quad (14)$$

Учитывая, что

$$J_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \quad (15)$$

находим

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_X l}{\pi \cdot G[\theta]}}. \quad (16)$$

Угол закручивания одного участка вала определяется из выражения

$$\varphi_i = \frac{M_{X_i} \cdot l_i}{GJ_{\rho_i}}, \quad (17)$$

где φ_i – угол закручивания i -го участка вала, рад; l_i – длина участка, м; J_{ρ_i} – полярный момент инерции сечения вала на этом участке, м⁴.

Алгебраически суммируя эти углы закручивания, начиная от неподвижного сечения, получим полный угол закручивания для всего вала φ :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{X_i} \cdot l_i}{GJ_{\rho_i}}, \quad (18)$$

где n – число участков вала.

Угол закручивания φ и относительный угол закручивания θ (рад/м) связаны зависимостью

$$\theta = \frac{d\varphi}{dl}.$$

Допускаемый угол закручивания $[\theta^0]$ обычно задается в $\frac{1^0}{\text{м}}$.

При расчете на жесткость строится эпюра углов закручивания, позволяющая определить угол любого сечения вала и тем самым не допустить деформацию, которая бы превышала заданные наибольшие значения.

4. Расчет на прочность и жесткость при поперечном изгибе

При поперечном изгибе ось стержня искривляется, а в поперечных сечениях возникают два силовых фактора – изгибающий момент M_Z и поперечная сила Q . Стержни, работающие на изгиб, называют балками.

Прочность балки в основном зависит от величины нормальных напряжений, определяемых по формуле

$$\sigma = \frac{M_Z}{W_Z}, \quad (19)$$

где W_Z – осевой момент сопротивления, м^3 .

Условие прочности балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{Z\max}}{W_Z} \leq [\sigma], \quad (20)$$

из которого определяется осевой момент сопротивления

$$W_Z = \frac{M_{Z\max}}{[\sigma]}. \quad (21)$$

Условие жесткости имеет вид

$$V_{\max} \leq [V], \quad (22)$$

где V_{\max} – максимальный прогиб балки, $[V]$ – допускаемый прогиб, величина которого зависит от значения и условий работы балки.

Определение прогибов балки, построение упругой линии и нахождение максимального прогиба производится при помощи метода начальных параметров. Начало координат помещают в крайнюю левую точку балки (рис.1). Абсцисса X определяет расстояние от начала координат до сечения $n - n$, прогиб в котором нужно определить.

Универсальное уравнение прогибов имеет вид

$$EJV_{(x)} = EJV_0 + EJ\Theta_0 + \frac{1}{EJ} \left(M_0 \cdot \frac{x^2}{2} + Q_0 \cdot \frac{x^3}{6} + \sum \frac{M(x-a)^2}{2} + \right. \quad (23)$$

$$\left. + \sum \frac{Q(x-b)^3}{6} + \sum \frac{q(x-c)^4}{24} \right).$$

Уравнение углов поворота сечений:

$$EJ\Theta_{(x)} = EJ\Theta_0 + \frac{1}{EJ} \left(M_0 \cdot x + Q_0 \cdot \frac{x^2}{2} + \sum M \cdot (x-a) + \sum Q \cdot \frac{(x-b)}{2} + \right. \quad (24)$$

$$\left. + \sum q \cdot \frac{(x-c)^3}{6} \right).$$

На рис.1 показана схема загрузки с положительным направлением всех нагрузок.

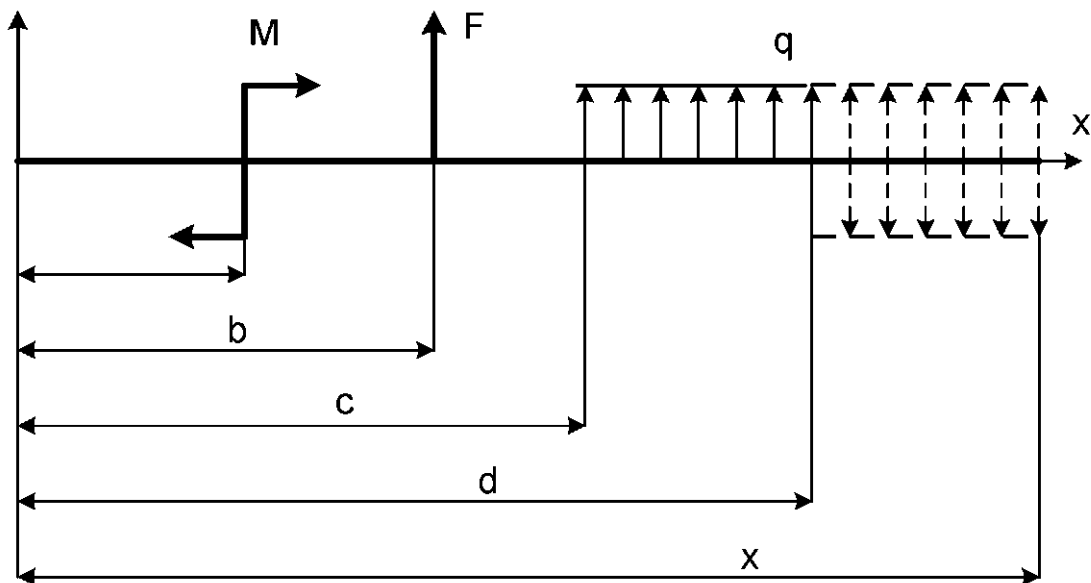


Рис.1

В уравнениях (23) и (24) $V_{(x)}$ – искомый прогиб балки; Θ_x – искомый угол поворота балки; V_0, Θ_0, M_0, Q_0 – прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в начале координат соответственно (начальные параметры); $\Sigma M, \Sigma Q, \Sigma q$ – сосредоточенные моменты, сосредоточенные силы (реакции опор, распределенные нагрузки), соответственно расположенные левее рассматриваемого сечения; a, b, c, d – расстояния от левого конца балки до M, F , а также от начала и конца q . Если распределенная нагрузка q не доходит до рассматриваемого сечения, то ее продляют до этого сечения и прикладывают такую же нагрузку q в противоположном направлении.

5. Пример расчета на прочность и жесткость при растяжении и сжатии

Подобрать из условий прочности и жесткости размеры прямоугольного поперечного сечения чугунного стержня (см. рис. 2, а). Дано: $F = 40$ кН; $l = 0,4$ м; $[\sigma_p] = 350$ МПа; $[\sigma_c] = 800$ МПа; $E = 1,2 \cdot 10^5$ МПа; $[\Delta l] = \frac{l}{200}$; $h/b = 2$, где h – высота, b – ширина поперечного сечения.

5.1. Построение эпюры внутренних усилий N

Стержень разделен на 3 участка в зависимости от изменения внешней нагрузки и площади поперечного сечения. Применяя метод сечений, определяем продольную силу на каждом участке.

На участке 1: $N_1 = -F = -40$ кН.

На участке 2: $N_2 = -F + 3F = 2F = 80$ кН.

На участке 3: $N_3 = -F + 3F - 2F = F = 40$ кН.

Эпюра N приведена на рис. 2, б.

5.2. Построение эпюры нормальных напряжений

Найдем напряжения на участках стержня.

$$\text{На участке 1: } \sigma_1 = \frac{N_1}{2A} = \frac{-40 \cdot 10^3}{2A} = \frac{-20 \cdot 10^3}{A} \text{ Па.}$$

$$\text{На участке 2: } \sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{80 \cdot 10^3}{A} \text{ Па.}$$

$$\text{На участке 3: } \sigma_3 = \frac{N_3}{2A} = \frac{40 \cdot 10^3}{2A} = \frac{20 \cdot 10^3}{A} \text{ Па.}$$

Эпюра σ приведена на рис. 2, в.

5.3. Нахождение площади поперечного сечения из условия прочности

Наибольшие растягивающие напряжения возникают на участке 2, наибольшие сжимающие напряжения – на участке 1. Для вычисления площади поперечного сечения используем условия прочности (6) и (7).

Напряжения на участке 1 равны

$$\sigma_1 = \frac{-20 \cdot 10^3}{A} \text{ Па.}$$

Тогда
$$\sigma_1 = \frac{-20 \cdot 10^3}{A} \leq [\sigma_c].$$

Следовательно,
$$A \geq \frac{20 \cdot 10^3}{[\sigma_c]} = \frac{20 \cdot 10^3}{800 \cdot 10^6} = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \Rightarrow 0,25 \text{ см}^2.$$

Напряжения на участке 2 равны

$$\sigma_2 = \frac{80 \cdot 10^3}{A}.$$

По условию прочности
$$\sigma_2 = \frac{80 \cdot 10^3}{A} \leq [\sigma_p].$$

Отсюда:

$$A \geq \frac{80 \cdot 10^3}{[\sigma_p]} = \frac{80 \cdot 10^3}{350 \cdot 10^6} = 2,28 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \Rightarrow 2,28 \text{ см}^2.$$

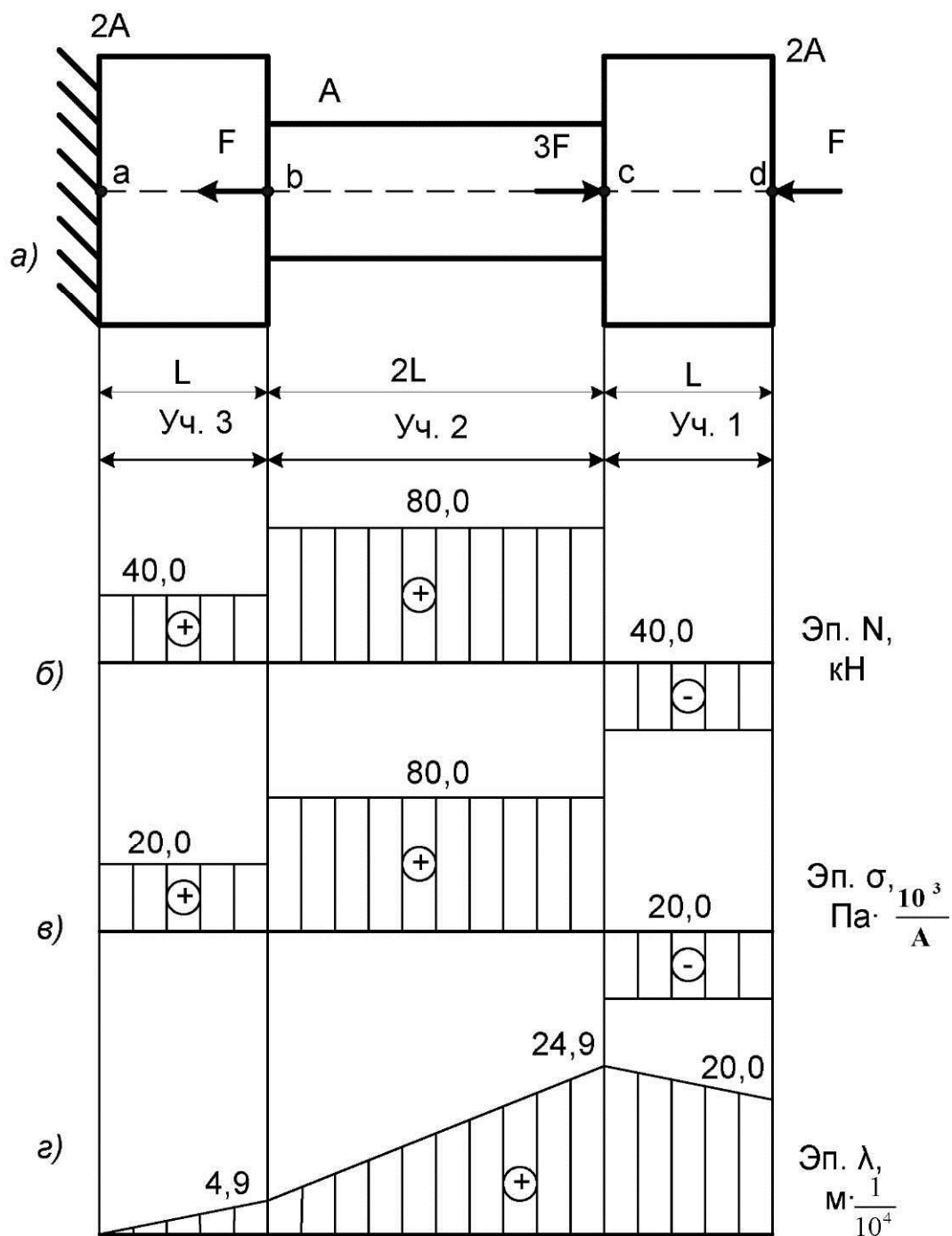


Рис. 2

Напряжения на участке 3 равны

$$\sigma_3 = \frac{20 \cdot 10^3}{A} \text{ Па.}$$

Тогда
$$\sigma_3 = \frac{20 \cdot 10^3}{A} \leq [\sigma_p].$$

Следовательно,
$$A \geq \frac{20 \cdot 10^3}{[\sigma]_p} = \frac{20 \cdot 10^3}{350 \cdot 10^6} = 0,57 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \Rightarrow 0,57 \text{ см}^2.$$

Необходимую площадь сечения следует принять из условия прочности при растяжении:

$$A \geq 2,28 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \Rightarrow 2,28 \text{ см}^2.$$

При заданном соотношении $h/b = 2$ площадь поперечного сечения можно записать, как $A = h \cdot b = 2b^2$. Размеры поперечного сечения будут равны:

$$b = \sqrt{\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{2,28}{2}} = 1,06 \text{ см};$$
$$h = 2b = 2,12 \text{ см}.$$

5.4. Нахождение площади поперечного сечения из условия жесткости

При расчете на жесткость следует учитывать, что перемещение в точке d будет равно сумме деформаций всех участков стержня. Величину абсолютной деформации для каждого участка найдем по формуле (9).

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{EA_i} \text{ или } \Delta l_i = \frac{\sigma_i \cdot l_i}{E}.$$

На участке 1:
$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 \cdot l_1}{E} = \frac{-40 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{A \cdot 1,2 \cdot 10^{11}} = \frac{-0,13 \cdot 10^{-6}}{A} \text{ м.}$$

На участке 2:
$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 \cdot l_2}{E} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,4}{A \cdot 1,2 \cdot 10^{11}} = \frac{0,53 \cdot 10^{-6}}{A} \text{ м.}$$

На участке 3: $\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 \cdot l_3}{E} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{A \cdot 1,2 \cdot 10^{11}} = \frac{0,13 \cdot 10^{-6}}{A}$ м.

Абсолютная деформация всего стержня:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{10^{-6}}{A} (-0,13 + 0,53 + 0,13) = \frac{0,53 \cdot 10^{-6}}{A} \text{ м.}$$

Из условия жесткости $\Delta l \leq [\Delta l]$, $[\Delta l] = \frac{l}{200} = \frac{0,4}{200} = 2 \cdot 10^{-3}$ м,

найдем

$$\frac{0,53 \cdot 10^{-6}}{A} \leq 2 \cdot 10^{-3}, \text{ откуда}$$

$$A \geq \frac{0,53 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} = 2,65 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \Rightarrow 2,65 \text{ см}^2.$$

Размеры поперечного сечения будут равны:

$$b = \sqrt{\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{2,65}{2}} = 1,15 \text{ см.}$$

$$h = 2b = 2 \cdot 1,15 = 2,30 \text{ см.}$$

Сопоставляя результаты расчета на прочность и жесткость, принимаем большее значение площади поперечного сечения $A = 2,65 \text{ см}^2$.

5.5. Построение эпюры перемещений λ

Для определения перемещения любого сечения стержня строят эпюру перемещений λ . За начало отсчета принимаем сечение в заделке, так как перемещение этого сечения равно нулю. При построении эпюры последовательно определяем перемещения характерных сечений стержня, которые равны алгебраической сумме изменений длин всех участков от начала отсчета до рассматриваемого сечения. Сечение а: $\lambda_a = 0$.

Сечение б: $\lambda_b = \lambda_a + \Delta l_3 = 0 + \frac{0,13 \cdot 10^{-6}}{A} = \frac{0,13 \cdot 10^{-6}}{2,65 \cdot 10^{-4}} = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$

$$\begin{aligned} \text{Сечение с: } \lambda_c &= \lambda_b + \Delta I_2 = 4,9 \cdot 10^{-4} + \frac{0,53 \cdot 10^{-6}}{A} = 4,9 \cdot 10^{-4} + \\ &+ \frac{0,53 \cdot 10^{-6}}{2,65 \cdot 10^{-4}} = 24,9 \cdot 10^{-4} \text{ м} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Сечение d: } \lambda_d &= \lambda_c + \Delta I_1 = 24,9 \cdot 10^{-4} + \frac{-0,13 \cdot 10^{-6}}{A} = 24,9 \cdot 10^{-4} + \\ &+ \frac{-0,13 \cdot 10^{-6}}{2,65 \cdot 10^{-4}} = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м.} \end{aligned}$$

Эпюра перемещений λ представлена на рис.2, з.

6. Пример расчета на прочность и жесткость при кручении

Подобрать из условия прочности и жесткости диаметр ступенчатого вала круглого поперечного сечения (см. рис.3, а).

Дано: $M_1 = 9$ кНм; $M_2 = 4$ кНм; $M_3 = 3$ кНм; $[\tau] = 150$ МПа; $G = 0,8 \cdot 10^{11}$ Па; $l = 0,5$ м, допускаемый угол закручивания $[\theta^0] = \frac{l}{4}$ град/м.

6.1. Построение эпюры M_X

Вал разделен на 3 участка в зависимости от изменения внешней нагрузки и площади поперечного сечения. Применяя метод сечений, определяем M_X на каждом участке.

На участке 1:

$$M_{X1} = M_1 = 9 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

На участке 2:

$$M_{X2} = M_1 - M_3 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

На участке 3:

$$M_{X3} = M_1 - M_3 - M_2 = -2 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Эпюра M_X приведена на рис. 3, б.

6.2. Построение эпюры касательных напряжений τ

Так как диаметр вала изменяется по длине вала, для определения наиболее опасного сечения построим эпюру касательных напряжений, используя формулу (10).

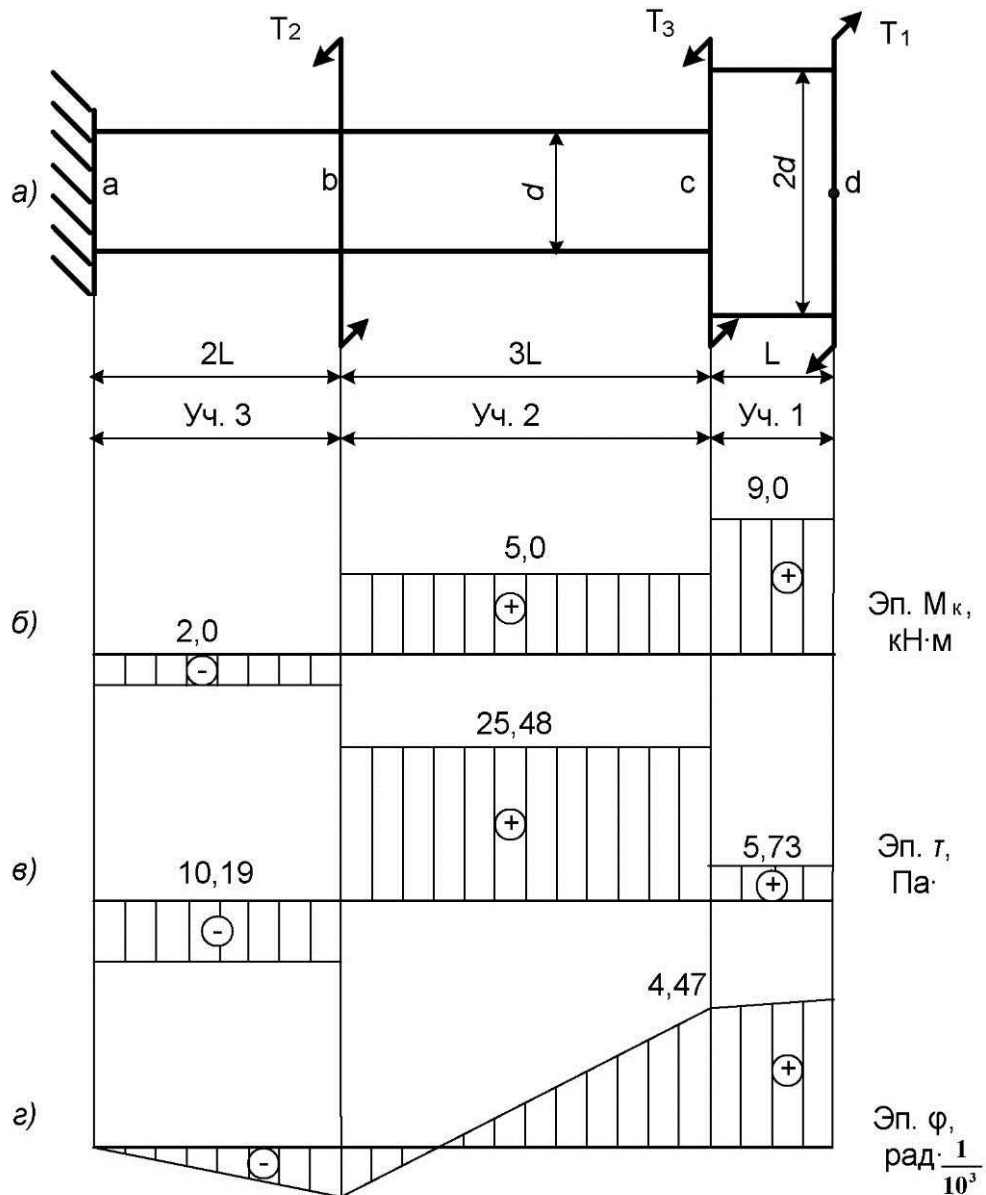


Рис. 3

$$\text{Участок 1. } \tau_1 = \frac{M_{X1}}{W_\rho} = \frac{M_{X1} \cdot 16}{\pi \cdot (2d)^3} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot (2d)^3} = \frac{5,73 \cdot 10^3}{d^3} \text{ Па.}$$

$$\text{Участок 2. } \tau_1 = \frac{M_{X2}}{W_\rho} = \frac{M_{X2} \cdot 16}{\pi \cdot (2d)^3} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot d^3} = \frac{25,48 \cdot 10^3}{d^3} \text{ Па.}$$

$$\text{Участок 3. } \tau_1 = \frac{M_{X3}}{W_\rho} = \frac{M_{X3} \cdot 16}{\pi \cdot (2d)^3} = \frac{-2 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot d^3} = \frac{10,19 \cdot 10^3}{d^3} \text{ Па.}$$

По этим результатам построена эпюра касательных напряжений (рис. 3, в).

6.3. Определение диаметра вала из условия прочности

Наибольшие касательные напряжения возникают на втором участке вала. Следовательно, из условия прочности по формуле (13) диаметр вала должен быть равен

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{X2}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 150 \cdot 10^6}} = 5,53 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 5,53 \text{ см.}$$

6.4. Определение диаметра вала из условия жесткости

Для нахождения наибольшего относительного угла закручивания следует рассмотреть участки, где имеют наибольшее значение крутящие моменты и касательные напряжения. Следовательно, необходимо найти θ на первом и втором участках, так как жесткости на этих участках имеют различные значения.

$$\text{Участок 1. } \theta_1 = \frac{M_{X1}}{GJ_\rho} = \frac{M_{X1} \cdot 32}{G\pi(2d)^4} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 32}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 3,14(2d)^4} = \frac{7,16 \cdot 10^{-8}}{d^4} \text{ рад/м.}$$

$$\text{Участок 2. } \theta_2 = \frac{M_{X2}}{GJ_\rho} = \frac{M_{X2} \cdot 32}{G\pi \cdot d^4} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 32}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot d^4} = \frac{63,69 \cdot 10^{-8}}{d^4} \text{ рад/м.}$$

По условию жесткости $\theta_{\max} \leq [\theta]$ находим диаметр вала, учитывая, что

$$[\theta^0] = \frac{l}{4} \text{ град/м} = \frac{\pi}{180 \cdot 4} \text{ м}^{-1}, \quad \frac{63,69 \cdot 10^{-8}}{d^4} \leq \frac{\pi}{180 \cdot 4},$$

отсюда $d \geq \sqrt[4]{\frac{69,63 \cdot 10^{-8} \cdot 180 \cdot 4}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{69,63 \cdot 10^{-8} \cdot 180 \cdot 4}{3,14}} = 0,112 \text{ м}$
 $\Rightarrow 11,2 \text{ см.}$

Сопоставляя результаты расчета на прочность и жесткость, принимаем большее значение диаметра вала $d = 11,2 \text{ см.}$

6.5. Построение эпюры углов закручивания

За начало отсчета принимаем сечение в заделке, так как угол закручивания этого сечения равен нулю. При расчете пользуемся формулами (18) и (19).

Сечение *a*. $\varphi_a = 0$.

Сечение *b*.

$$\varphi_b = \varphi_a + \frac{M_{X3} \cdot 2l}{GJ_\rho} = 0 + \frac{M_{X3} \cdot 2l \cdot 32}{G\pi(d)^4} = \frac{-2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 32}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 0,112^4} = -1,6 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Сечение *c*.

$$\varphi_c = \varphi_b + \frac{M_{X2} \cdot 3l}{GJ_\rho} = 1,6 \cdot 10^{-3} + \frac{M_{X2} \cdot 3l \cdot 32}{G\pi(d)^4} = -1,6 \cdot 10^{-3} + \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 0,5 \cdot 32}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 0,112^4} = 4,47 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Сечение *d*.

$$\varphi_d = \varphi_c + \frac{M_{X1} \cdot l}{GJ_\rho} = 4,47 \cdot 10^{-3} + \frac{M_{X1} \cdot l \cdot 32}{G\pi(2d)^4} = 4,47 \cdot 10^{-3} + \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 32}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot (2 \cdot 0,112)^4} = 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Эпюра углов закручивания представлена на рис.3, з.

7. Пример расчета на прочность и жесткость при поперечном изгибе

Подобрать из расчета на прочность и жесткость прямоугольное $h = 2b$, круглое и двутавровое поперечные сечения балки, расчетная схема которой показана на рис. 4, а.

Дано: $F = 50 \text{ кН}$; $M = 24 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $q = 30 \text{ кН/м}$; $L = 4 \text{ м}$; $[V] = \frac{l}{200}$;
 $[\sigma] = 240 \text{ МПа}$; $E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

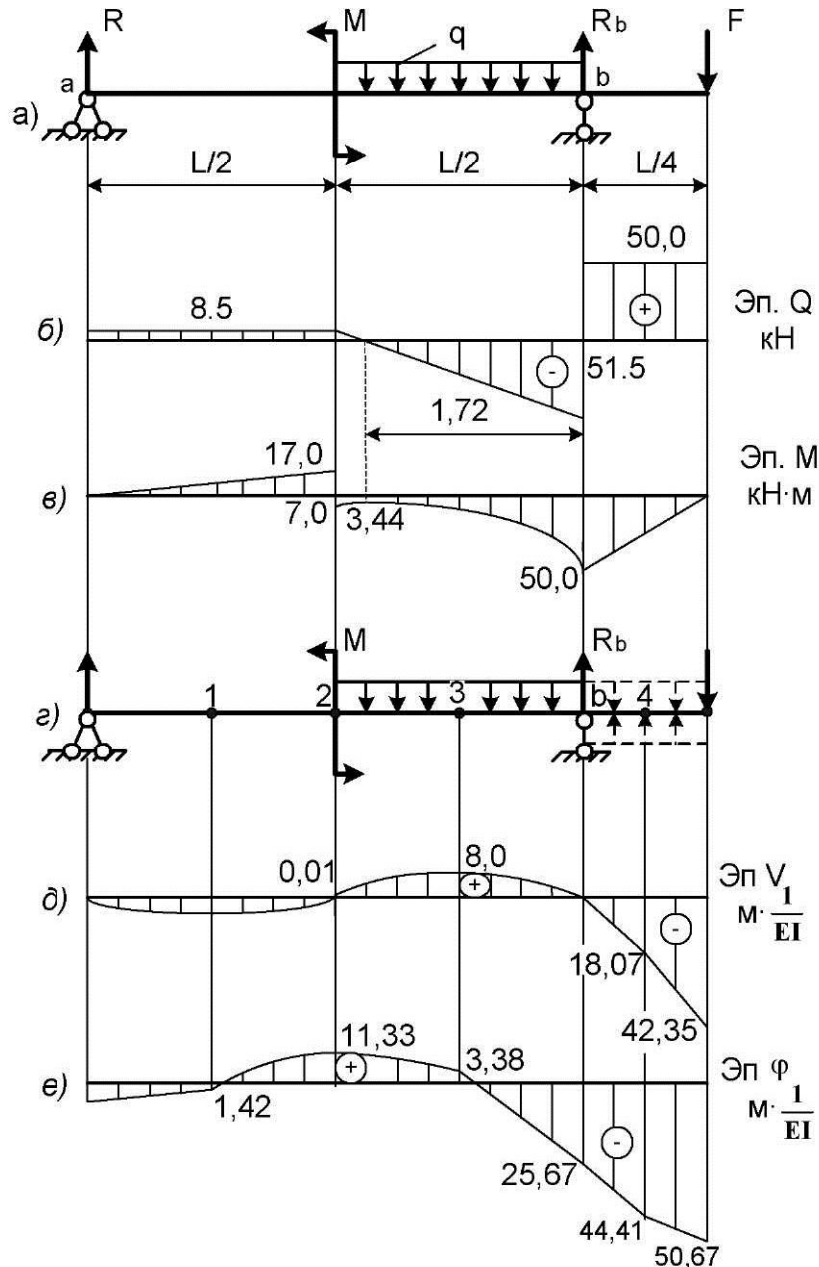


Рис. 4

7.1. Построение эюр внутренних усилий

Из условия равновесия балки, взяв сумму моментов относительно точек a и b , находим реакции в опорах: $R_a = 8,5$ кН, $R_b = 101,5$ кН.

Применяя метод сечений, находим значения изгибающего момента M_z и поперечной силы Q в сечениях балки. По найденным значениям строим эюры Q и M_z (рис. 4, б, в).

7.2. Определение размеров поперечного сечения балки W_z из условия прочности

По эюре находим наибольший изгибающий момент, возникающий в сечениях балки $M_{z\max} = 50$ кН·м. Используя условие прочности, по формуле (22) определяем момент сопротивления:

$$W_z \geq \frac{M_{z\max}}{[\sigma]} \geq \frac{50 \cdot 10^3}{240 \cdot 10^6} = 208,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 208,3 \text{ см}^3.$$

Определив W_z , находим размеры поперечного сечения.

а) Прямоугольное сечение.

Момент сопротивления прямоугольного сечения определяется по формуле

$$W_z = \frac{bh^2}{6},$$

где $h = 2b$.

$$\text{Следовательно, } W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3 = 208,3 \text{ см}^3.$$

$$\text{Отсюда } b = \sqrt[3]{\frac{208,3 \cdot 3}{2}} = 6,8 \text{ см. } h = 2b = 13,6 \text{ см.}$$

Площадь прямоугольного сечения равна $A = h \cdot b = 92,48 \text{ см}^2$.

б) Круглое сечение.

Момент сопротивления круглого сечения определяется по формуле

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Тогда $W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = 208,3 \text{ см}^3$, отсюда

$$d = \sqrt[3]{\frac{208,3 \cdot 32}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{208,3 \cdot 32}{3,14}} = 12,85 \text{ см}.$$

Площадь круглого сечения

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 12,85^2}{4} = 129,62 \text{ см}^2.$$

в) Двутавровое сечение.

По таблице сортамента (ГОСТ 8239-72*) подбираем двутавр ($W_z \geq 208,3 \text{ см}^3$) № 22 с моментом сопротивления $W_z = 232 \text{ см}^3$ и площадью сечения $A = 30,6 \text{ см}^2$.

Сравнив площади поперечных сечений, можно сделать вывод, что наиболее рациональным является двутавровое поперечное сечение.

7.3. Построение эпюр прогибов и углов поворота

Для построения эпюр прогибов и углов поворота используем универсальные уравнения прогибов и углов поворота метода начальных параметров (24) и (25).

На рис. 4, г приведена расчетная схема.

Начальные параметры равны: $Q_0 = R_a = 8,5 \text{ кН}$; $M_0 = 0$; $V_0 = 0$; $\varphi_0 \neq 0$.

Неизвестным начальным параметром является φ_0 . Для определения φ_0 составим уравнение прогибов в сечении на правой опоре, учитывая, что здесь $V_b = 0$.

$$V_b(x=L) = \varphi_0 \cdot 4 + \frac{1}{EI} \left[R_a \frac{4^3}{6} + \sum M \frac{2^2}{2} - \sum q \frac{2^4}{24} \right] = 0.$$

Подставив значения, получим

$$\varphi_0 \cdot 4 + \frac{1}{EI} \left[8,5 \frac{4^3}{6} + \sum 24 \frac{2^2}{2} - \sum 30 \frac{2^4}{24} \right] = 0.$$

В результате получим $\varphi_0 = -\frac{5,67}{EI}$ рад.

Для построения эпюр прогибов и углов поворота разобьем пролет балки на четыре части, а консоль на две.

$$a_1) V_1\left(x = \frac{L}{4}\right) = \varphi_0 \cdot 1 + \frac{1}{EI} \left[R_a \frac{1^3}{6} \right] = -\frac{5,67}{EI} \cdot 1 + \frac{1}{EI} \left[8,5 \cdot \frac{1^3}{6} \right] = \\ = -\frac{4,25}{EI} \text{ м.}$$

$$b_1) \varphi_1\left(x = \frac{L}{4}\right) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[R_a \frac{1^2}{2} \right] = -\frac{5,67}{EI} + \frac{1}{EI} \left[8,5 \frac{1^2}{2} \right] = -\frac{1,42}{EI} \text{ рад.}$$

$$a_2) V_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \varphi_0 \cdot 2 + \frac{1}{EI} \left[R_a \frac{2^3}{6} \right] = -\frac{5,67}{EI} \cdot 2 + \frac{1}{EI} \left[8,5 \cdot \frac{2^3}{6} \right] = \\ = -\frac{0,01}{EI} \text{ м.}$$

$$b_2) \varphi_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[R_a \frac{2^2}{2} \right] = -\frac{5,67}{EI} + \frac{1}{EI} \left[8,5 \frac{2^2}{2} \right] = \frac{11,33}{EI} \text{ рад.}$$

$$a_3) V_3\left(x = \frac{3L}{4}\right) = \varphi_0 \cdot 3 + \frac{1}{EI} \left[R_a \frac{3^3}{6} - M \frac{1^2}{2} - q \frac{1^4}{24} \right] = -\frac{5,67}{EI} \cdot 3 + \\ + \frac{1}{EI} \left[8,5 \frac{3^3}{6} - 24 \frac{1^2}{2} - 30 \frac{1^4}{24} \right] = \frac{8}{EI} \text{ м;}$$

$$b_3) \varphi_3\left(x = \frac{3L}{4}\right) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[R_a \frac{3^2}{2} - M \cdot 1 - q \frac{1^3}{6} \right] = -\frac{5,67}{EI} + \\ + \frac{1}{EI} \left[8,5 \frac{3^2}{2} - 24 \cdot 1 - 30 \frac{1^3}{6} \right] = \frac{3,58}{EI} \text{ рад;}$$

$$a_4) V_b(x = L) = 0;$$

$$b_4) \varphi_b(x = L) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[R_a \frac{4^2}{2} - M \cdot 2 - q \frac{2^3}{6} \right] = -\frac{5,67}{EI} + \\ + \frac{1}{EI} \left[8,5 \frac{4^2}{2} - 24 \cdot 2 - 30 \frac{2^3}{6} \right] = -\frac{25,67}{EI} \text{ рад;}$$

$$a_5) V_4(x = \frac{9L}{8}) = \varphi_0 \cdot 4,5 + \frac{1}{EI} \left[R_a \frac{4,5^3}{6} - M \frac{2,5^2}{2} - q \frac{2,5^4}{24} + q \frac{0,5^4}{24} \right] =$$

$$= -\frac{5,67}{EI} 4,5 + \frac{1}{EI} \left[8,5 \frac{4,5^3}{6} - 24 \frac{2,5^2}{2} - 30 \frac{2,5^4}{24} + 30 \frac{0,5^4}{24} \right] = \frac{18,07}{EI} \text{ м};$$

$$b_5) \varphi_4(x = \frac{9L}{8}) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[R_a \frac{4,5^2}{2} - M \cdot 2,5 - q \frac{2,5^3}{6} + q \frac{0,5^3}{6} \right] =$$

$$= -\frac{5,67}{EI} + \frac{1}{EI} \left[8,5 \frac{4,5^2}{2} - 24 \cdot 2,5 - 30 \frac{2,5^3}{6} + 30 \frac{0,5^3}{6} \right] = -\frac{44,41}{EI} \text{ рад};$$

$$a_6) V_5(x = \frac{5L}{4}) = \varphi_0 \cdot 5 + \frac{1}{EI} \left[R_a \frac{5^3}{6} + R_b \frac{1^3}{6} - M \frac{3^2}{2} - q \frac{3^4}{24} + q \frac{1^4}{24} \right] =$$

$$= -\frac{5,67}{EI} 5 + \frac{1}{EI} \left[8,5 \frac{5^3}{6} + 101,5 \frac{1^3}{6} - 24 \frac{3^2}{2} - 30 \frac{3^4}{24} + 30 \frac{1^4}{24} \right] = -\frac{42,35}{EI} \text{ м};$$

$$b_6) \varphi_5(x = \frac{5L}{4}) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[R_a \frac{5^2}{2} + R_b \frac{1^2}{2} - M \cdot 3 - q \frac{3^3}{6} + q \frac{1^3}{6} \right] =$$

$$= -\frac{5,67}{EI} + \frac{1}{EI} \left[8,5 \frac{5^2}{2} + 101,5 \frac{1^2}{2} - 24 \cdot 3 - 30 \frac{3^3}{6} + 30 \frac{1^3}{6} \right] = -\frac{50,67}{EI} \text{ рад}.$$

Вычисленные результаты сводим в таблицу.

Значения прогибов и углов поворота балки

x	0	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{3l}{4}$	l	$\frac{9}{8}l$	$\frac{5}{4}l$
V м	0	$-\frac{4,25}{EI}$	$-\frac{0,01}{EI}$	$\frac{8}{EI}$	0	$-\frac{18,07}{EI}$	$-\frac{42,35}{EI}$
φ рад	$-\frac{5,67}{EI}$	$-\frac{1,42}{EI}$	$\frac{11,33}{EI}$	$\frac{3,58}{EI}$	$-\frac{25,67}{EI}$	$-\frac{44,41}{EI}$	$-\frac{50,67}{EI}$

По данным этой таблицы строим эпюры прогибов и углов поворота балки (см. рис.4, д, е).

7.4. Определение размеров поперечного сечения балки из условия жесткости

По эпюре прогибов определяем наибольший прогиб, который равен $V_{\max} = \frac{20,56 \cdot 10^{-8}}{J_z}$, где J_z – момент инерции балки относительно оси Z .

Используя условие жесткости балки

$$V_{\max} \leq [V],$$

найдем
$$\frac{20,56 \cdot 10^{-8}}{J_z} \leq [V].$$

По условию задачи

$$[V] = \frac{l}{200} = \frac{4}{200} = 0,02 \text{ м.}$$

$$J_z \geq \frac{20,56 \cdot 10^{-8}}{0,02} \geq 1028 \cdot 10^{-8} = 1028 \text{ см}^4.$$

а) Прямоугольное сечение:

$$J_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{b \cdot (2b)^3}{12} = \frac{2 \cdot b^3}{3} = 1028 \text{ см}^4.$$

Отсюда $b = \sqrt[4]{\frac{1028 \cdot 3}{2}} = 10,55 \text{ см}, h = 2b = 23,1 \text{ см}.$

Площадь прямоугольного сечения равна $A = h \cdot b = 273,705 \text{ см}^2.$

б) Круглое сечение:

$$J_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 1028 \text{ см}^4.$$

Тогда $\frac{\pi \cdot d^4}{64} = 1028 \text{ см}^4,$ отсюда

$$d = \sqrt[4]{\frac{1028 \cdot 64}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{1028 \cdot 64}{3,14}} = 12,03 \text{ см}.$$

Площадь круглого сечения

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 12,03^2}{4} = 113,6 \text{ см}^2.$$

в) Двутавровое сечение.

По таблице сортамента (ГОСТ 8239-72*) подбираем двутавр ($J_z \geq 1028 \text{ см}^4$) № 18 с моментом сопротивления $J_z = 1290 \text{ см}^4$ и площадью сечения $A = 23,4 \text{ см}^2$.

Таким образом, сравнивая все полученные сечения, окончательно принимаем двутавр № 22 как наиболее рациональное сечение, обеспечивающее выполнение условий прочности и жесткости.

Библиографический список

1. Александров А. В., Потапов В.Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2000. – 560 с.
2. Дарков А. В. Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.
3. Расчет на прочность и жесткость при растяжении, сжатии, кручении и изгибе: Методические указания для студентов 2 курса механических специальностей. Сост.: Е.С. Щербаков, Ю.Л. Лейбов. – Омск: Изд-во СибАДИ, 1983. – 20 с.
4. Макаров Е. Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 512 с.: ил.