

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ  
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПЛОСКИХ ФИГУР  
ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ**

Методические указания и задания  
к расчетно-графической работе для студентов  
заочной формы обучения

Содержатся задачи для выполнения контрольных работ по темам:

- геометрические характеристики плоских фигур;
- построение эпюр внутренних усилий при изгибе балок в одной плоскости;
- расчеты на прочность и жесткость при поперечном изгибе.

Излагается последовательность выполнения каждой контрольной работы, приводятся варианты расчетных схем и исходных данных задач, сформулированы вопросы для самоконтроля, приведены примеры выполнения контрольных работ, приводится список рекомендуемой литературы.

Табл. 6. Ил. 22. Библиогр.: 9 назв.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
1. Работа № 1. Определение геометрических характеристик плоских фигур .....	5
1.1. Цель работы .....	5
1.2. Краткие теоретические сведения .....	5
1.3. Задания к работе № 1 .....	7
1.4. Вопросы для самоконтроля .....	9
1.5. Пример выполнения работы № 1 .....	10
2. Работа № 2. Построение эпюр внутренних усилий при поперечном изгибе .....	13
2.1. Цель работы .....	13
2.2. Краткие теоретические сведения .....	13
2.3. Задания к работе № 2 .....	15
2.4. Вопросы для самоконтроля .....	15
2.5. Пример выполнения работы № 2 .....	18
3. Работа № 3. Расчеты на прочность и жесткость при поперечном изгибе .....	23
3.1. Цель работы .....	23
3.2. Краткие теоретические сведения .....	23
3.3. Задания к работе № 3 .....	24
3.4. Вопросы для самоконтроля .....	25
3.5. Пример выполнения работы № 3 .....	27
Библиографический список .....	33

## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания содержат задания по трем расчетным работам, выполняемым студентами заочной формы обучения в первом семестре изучения курса сопротивления материалов.

Вариант задания для выполнения работы связан с номером зачетной книжки студента и включает вариант расчетной схемы и вариант исходных данных. Варианты заданий выдаются преподавателем. Студенты, выполнившие работы не соответствующие выданному варианту, *к защите работ не допускаются.*

Перед выполнением каждого задания студентам необходимо изучить рекомендуемый в методических указаниях теоретический материал, соответствующий теме выполняемой контрольной работы, и ознакомиться с алгоритмами решения задач. Для проверки полученных теоретических знаний и подготовке к защите работ служат приводимые вопросы для самоконтроля.

Каждое задание содержит раздел о целях выполнения работы, способствующий пониманию связи данной работы с изучаемым курсом.

В разделах, содержащих краткие теоретические сведения, даются понятия, имеющие первостепенное значение для выполнения расчетной работы по соответствующей теме.

Приводимые примеры выполнения расчетных работ направлены не только на закрепление теоретических знаний и практических навыков, но и могут служить образцами оформления расчетных работ. Задачи примеров фактически являются алгоритмами решения задач по теме, и вместе с тем, они наиболее приближены к заданиям, которые выдаются студентам.

Общим является требование вычислений по формулам, в соответствии с которым за приводимой формулой следует запись числовых значений всех величин, входящих в формулу, и далее записывается полученный результат вычислений с указанием единиц измерения. Графики и рисунки выполняются с использованием линейки, лезвия и т.д.

Каждая расчетная работа должна начинаться с новой страницы. Все три оформленные работы брошюруются в одну папку, имеющую общий титульный лист.

# 1. РАБОТА № 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ ФИГУР

## 1.1. Цель работы

Целью работы является закрепление знаний по основам теории, относящимся к рассматриваемой теме, и освоение практических навыков, необходимых для определения геометрических характеристик поперечных сечений стержней.

## 1.2. Краткие теоретические сведения

Геометрическими характеристиками плоских фигур являются: *площадь*; *центр тяжести фигуры*; *статические моменты* и *моменты инерции* относительно координатных осей, связанных с фигурой.

Статические моменты выделенной элементарной площадки  $dA$  относительно осей  $x$  и  $y$  (рис. 1) определяются по формулам:

$$dS_x = dA \cdot y; \quad dS_y = dA \cdot x. \quad (1.1)$$

Интегрированием (1.1) по всей площади  $A$  вычисляются полные статические моменты фигуры:

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA.$$

Координатные оси, имеющие начало в центре тяжести фигуры, называют *центральными осями*. На рис. 2 центр тяжести отмечен точкой  $C$ .

Если известна площадь фигуры и положение её центра тяжести, то статические моменты площади фигуры относительно произвольных осей  $X$  и  $Y$  определяются по формулам:

$$S_X = A \cdot Y_C; \quad S_Y = A \cdot X_C, \quad (1.2)$$

где  $X_C$ ,  $Y_C$  – координаты центра тяжести фигуры в осях  $X$ ,  $Y$ . На рис. 2 координаты  $X_C$  и  $Y_C$  положительны.

Моменты инерции выделенной элементарной площадки  $dA$  отно-

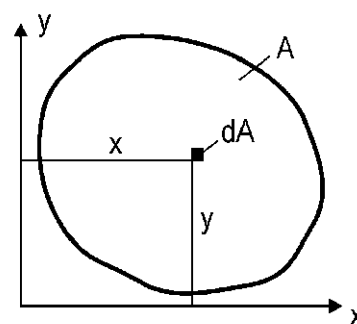


Рис. 1. Координаты элементарной площадки

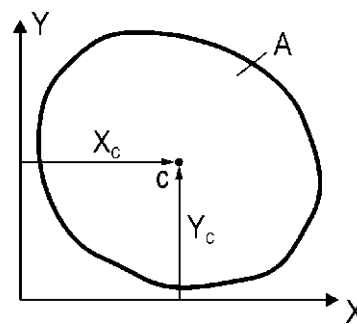


Рис. 2. Координаты центра тяжести фигуры

сительно осей  $x$  и  $y$  (см. рис. 1) определяются по формулам:

$$dJ_x = dA \cdot y^2; \quad dJ_y = dA \cdot x^2; \quad dJ_{xy} = dA \cdot xy. \quad (1.3)$$

Интегрированием (1.3) по всей площади  $A$  вычисляются полные моменты инерции фигуры

$$J_x = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A x^2 dA, \quad J_{xy} = \int_A xy dA.$$

Моменты  $J_x$  и  $J_y$  называют *осевыми моментами инерции*, а момент относительно осей  $x$  и  $y$  – *центробежным моментом инерции*.

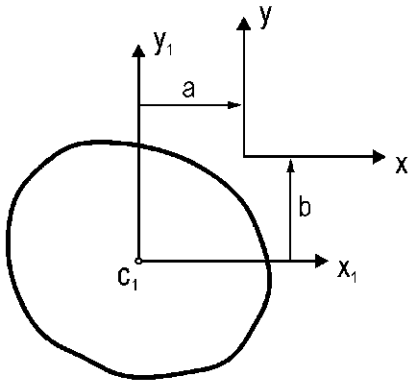


Рис. 3. Относительное положение координатных осей

Моменты инерции относительно осей  $x$  и  $y$ , параллельных центральным осям  $x_1, y_1$  (рис. 3), выражаются через моменты инерции относительно центральных осей согласно следующих равенств:

$$J_x = J_{x_1} + b^2 A; \quad J_y = J_{y_1} + a^2 A; \\ J_{xy} = J_{x_1 y_1} + ab A, \quad (1.4)$$

где  $a$  и  $b$  – расстояния от центральных осей  $x_1, y_1$  до осей  $x, y$ . На рис. 3 величины  $a$  и  $b$  положительны.

В системе координатных осей  $u_1, v_1$ , повернутых на угол  $\beta$  относительно осей  $x, y$  (рис. 4), моменты инерции фигуры являются зависимыми от угла  $\beta$ . Изменением  $\beta$  можно получить  $J_{u_1 v_1} = 0$ . В этом случае один из осевых моментов инерции ( $J_{u_1}$  или  $J_{v_1}$ ) будет максимальным, а другой – минимальным.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называют *главными осями*.

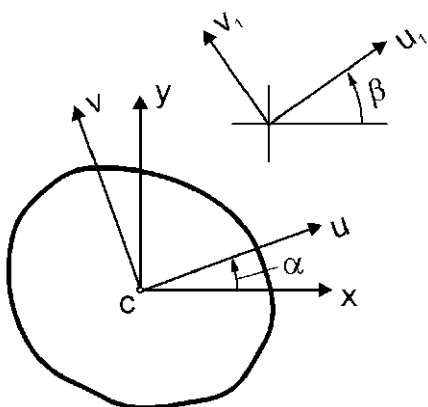


Рис. 4. Системы координатных осей

Аналогично, в системе центральных осей  $u$  и  $v$ , повернутых на угол  $\alpha$  относительно осей  $x, y$  (рис. 4), можно найти такое значение угла  $\alpha$ , при котором  $J_{uv}$  будет равен нулю, а моменты  $J_u$  и  $J_v$  примут экстремальные значения. Такие оси называют *главными центральными осями*.

Моменты инерции фигуры относительно главных центральных осей называют *главными центральными моментами инерции*. Например,  $J_u = J_{max}$  и

$J_v = J_{min}$  или наоборот:  $J_u = J_{min}$  и  $J_v = J_{max}$ .

Если известны моменты инерции относительно каких-либо центральных осей  $x$  и  $y$ , то главные центральные моменты инерции фигуры вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} J_{max} &= \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_y - J_x}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}; \\ J_{min} &= \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_y - J_x}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для определения положения главных осей можно воспользоваться следующими выражениями:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{J_x - J_{max}}{J_{xy}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{J_y - J_{min}}{J_{xy}}. \quad (1.6)$$

При положительных углах  $\alpha_0$  или  $\alpha$  оси  $u$ ,  $v$  необходимо повернуть относительно осей  $x$ ,  $y$  против хода часовой стрелки (см. рис. 4), а при отрицательных углах – по ходу стрелки.

Второе и третье выражения являются предпочтительными, так как, например, второе выражение дает значение угла между осью  $x$  и осью, относительно которой момент инерции максимален. Следовательно, без дополнительного анализа определяется положение оси, относительно которой момент инерции будет наибольшим. Третье выражение (1.6) дает значение угла между осью  $y$  и осью, относительно которой момент инерции минимален.

### 1.3. Задания к работе № 1.

**Задана фигура**, составленная из двух фигур: поперечного сечения стандартного стального прокатного профиля и прямоугольника или треугольника. **Требуется:**

- определить положение центра тяжести составной фигуры;
- вычислить моменты инерции фигуры (осевые и центробежный) относительно произвольных центральных осей;
- вычислить главные центральные моменты инерции;
- определить положение главных центральных осей;
- вычертить фигуру в масштабе, при этом показать все необходимые оси с указанием расстояний между ними, а также всех используемых размеров фигур, составляющих общую фигуру. Рисунок выпол-

нить на отдельном листе формата А4.

**Варианты заданий:** схемы фигур изображены на рис. 5, а исходные данные представлены в табл. 1.

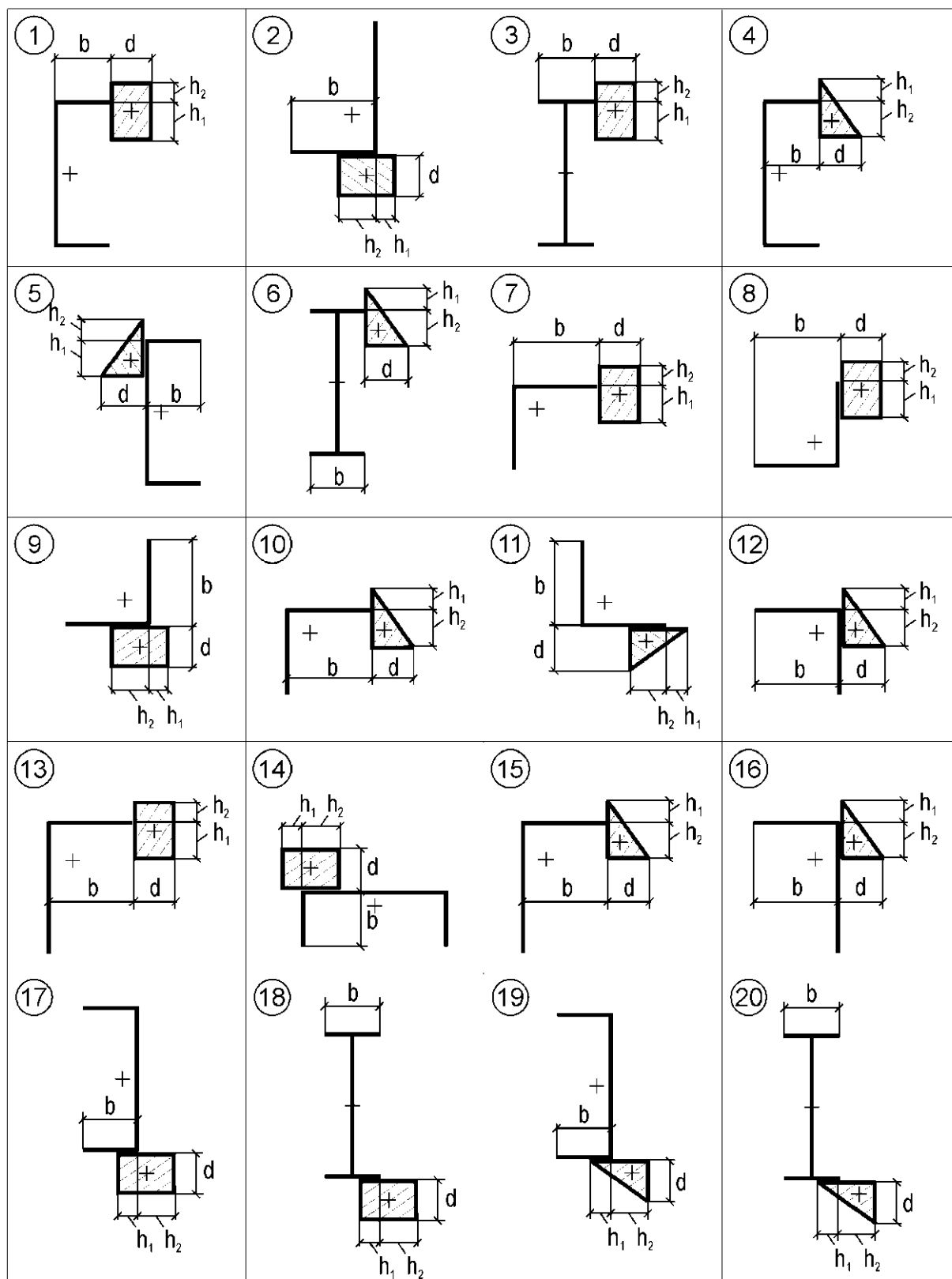


Рис. 5. Варианты схем составных фигур

Таблица 1

Но- мер стро- ки	Номер дву- тавра	Номер швел- лера	Уголок неравнополочный		Уголок равнополочный		Размеры прямоуголь- ника или треугольника		
			Номер	Толщи- на пол- ки	Номер	Толщи- на пол- ки	$h_1$	$h_2$	$d$
1	14	22	9/5,6	6	11	8	$b$	0	$0,5b$
2	16	24	18/11	10	7	5	$0,75b$	$0,25b$	$0,6b$
3	18	27	12,5/8	10	8	7	$0,5b$	$0,5b$	$0,7b$
4	20	30	10/6,3	8	10	10	$0,25b$	$0,75b$	$0,8b$
5	22	14	20/12,5	12	12,5	10	0	$b$	$0,9b$
6	24	16	14/9	10	7,5	6	$b$	0	$b$
7	27	18	16/10	10	9	8	$0,75b$	$0,25b$	$0,5b$
8	30	20	9/5,6	6	11	8	$0,5b$	$0,5b$	$0,6b$
9	14	22	18/11	10	7	5	$0,25b$	$0,75b$	$0,7b$
10	16	24	12,5/8	10	8	7	0	$b$	$0,8b$
11	18	27	10/6,3	8	10	10	$b$	0	$0,9b$
12	20	30	20/12,5	12	12,5	10	$0,75b$	$0,25b$	$b$
13	22	14	14/9	10	7,5	6	$0,5b$	$0,5b$	$0,5b$
14	24	16	16/10	10	9	8	$0,25b$	$0,75b$	$0,6b$
15	27	18	9/5,6	6	11	8	0	$b$	$0,7b$
16	30	20	18/11	10	7	5	$b$	0	$0,8b$
17	14	22	12,5/8	10	8	7	$0,75b$	$0,25b$	$0,9b$
18	16	24	10/6,3	8	10	10	$0,5b$	$0,5b$	$b$
19	18	27	20/12,5	12	12,5	10	$0,25b$	$0,75b$	$0,5b$
20	20	30	14/9	10	7,5	6	0	$b$	$0,6b$

Для выполнения работы необходимо изучить теоретический материал, содержащийся в [1, гл. 4], [2, гл. 7], [3, гл. 2], [4, гл. 4], [5, гл. 2]. Сведения о размерах и геометрических характеристиках прокатных профилей приведены в [1 – 9].

#### 1.4. Вопросы для самоконтроля

1. Как формулируется понятие статического момента площади фигуры относительно заданной оси?



2. Какие оси называют центральными осями?
3. Как определить положение центра тяжести простых фигур: прямоугольника, треугольника, полукруга?
4. Как определить положение центра тяжести составной фигуры?
5. Как вычислить осевые и полярный моменты инерции круга?
6. Как вычислить осевые моменты инерции прямоугольника и треугольника?
7. Какие оси называют главными осями?
8. Какие оси называют главными центральными осями?
9. Как вычислить главные центральные моменты инерции составной фигуры?
10. Как определить положение главных центральных осей составной фигуры?

### 1.5. Пример выполнения работы № 1

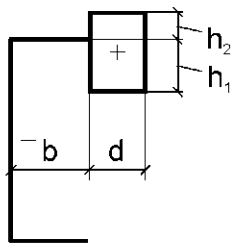


Рис. 6. Схема фигуры

В примере приняты схема, изображенная на рис. 6, и данные, представленные в табл. 2.

Таблица 2

Номер швеллера	Размеры прямоугольника		
	$h_1$	$h_2$	$d$
18	$0,75b$	$0,25b$	$0,7b$

#### Исходные данные фигур

Швеллер № 18 (см. [1], стр. 553):

$H = 18$  см – высота швеллера;

$b = 7$  см – ширина полки;

$A = 20,7$  см<sup>2</sup> – площадь поперечного сечения;

$J_{max} = 1090$  см<sup>4</sup> – наибольший момент инерции;

$J_{min} = 86$  см<sup>4</sup> – наименьший момент инерции;

$z_0 = 1,94$  см – расстояние от наружной грани до центральной оси.

Прямоугольник:

$h_1 = 0,75b = 0,75 \cdot 7 = 5,25$  см;

$h_2 = 0,25b = 0,25 \cdot 7 = 1,75$  см;

$d = 0,7b = 0,7 \cdot 7 = 4,9$  см;

$$A = b \cdot 0,7b = 7^2 \cdot 0,7 = 34,3 \text{ см}^2.$$

Рисунок фигуры в масштабе

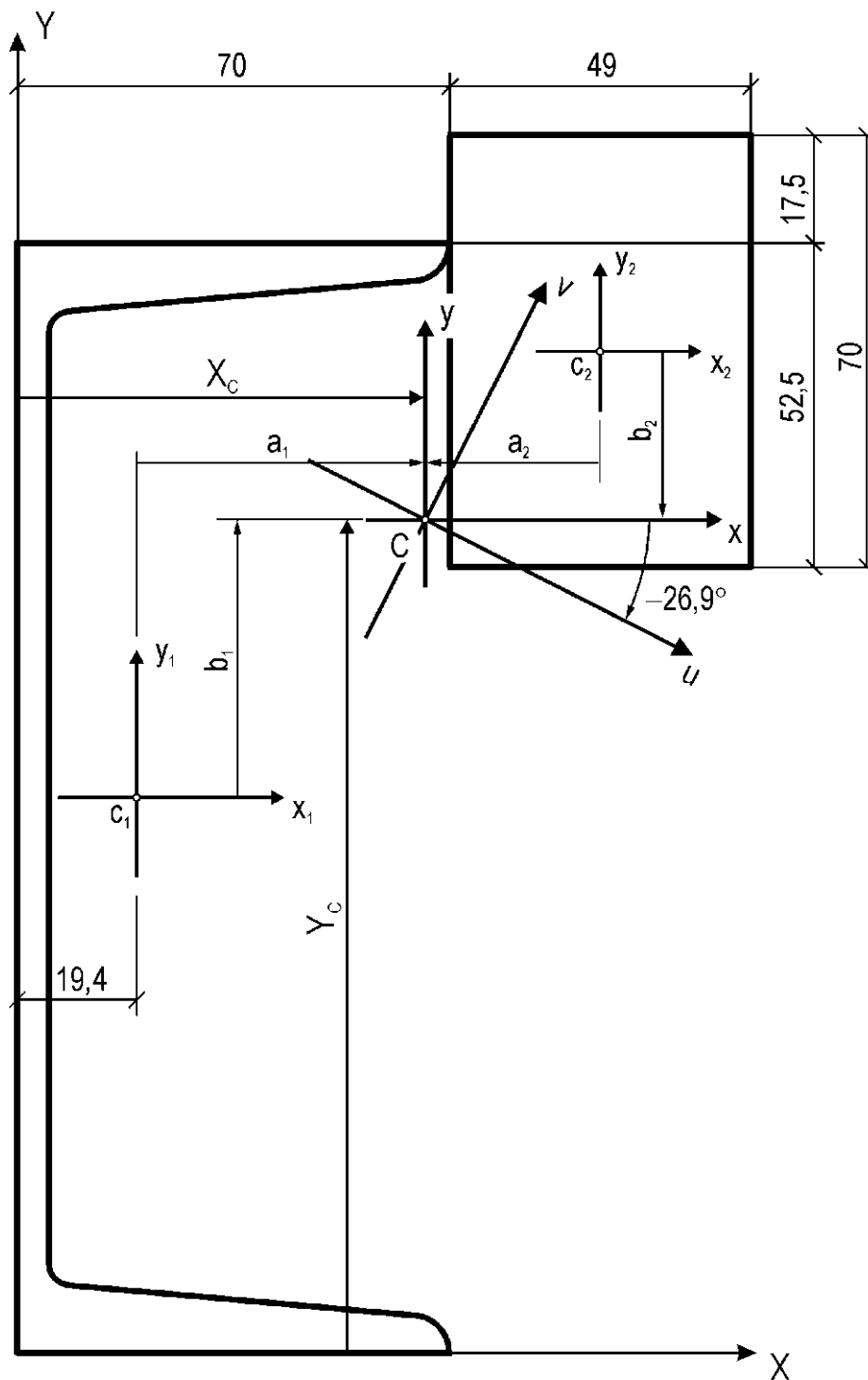


Рис. 7. Расчетные положения систем координатных осей составной фигуры

*Примечание:* оси, обозначения размеров или размеры наносятся на рисунок по мере выполнения расчетов.

**Определение положения центра тяжести составной фигуры**  
(Далее индекс 1 относится к параметрам швеллера, а 2 – прямоугольника).

Определяются координаты центров тяжести отдельных фигур в выбранных осях  $X, Y$  (рис. 7):

$$X_1 = z_0 = 1,94 \text{ см};$$

$$Y_1 = H/2 = 18/2 = 9 \text{ см};$$

$$X_2 = b + d/2 = 7 + 4,9/2 = 9,45 \text{ см};$$

$$Y_2 = H - h_1 + b/2 = 18 - 5,25 + 7/2 = 16,25 \text{ см}.$$

Вычисляются координаты центра тяжести всей фигуры (см. форм. (1.2)):

$$X_C = \frac{S_Y}{A} = \frac{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2}{A_1 + A_2} = \frac{20,7 \cdot 1,94 + 34,3 \cdot 9,45}{20,7 + 34,3} = 6,62 \text{ см};$$

$$Y_C = \frac{S_X}{A} = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2}{A_1 + A_2} = \frac{20,7 \cdot 9 + 34,3 \cdot 16,25}{20,7 + 34,3} = 13,52 \text{ см}.$$

Через центр тяжести (точка  $C$ ) проводятся центральные оси  $x, y$ .

**Определение моментов инерции фигуры относительно центральных осей  $x, y$**

Предварительно вычисляются расстояния от центральных осей отдельных фигур до центральных осей  $x, y$  (см. рис. 7):

$$a_1 = X_C - X_1 = 6,62 - 1,94 = 4,68 \text{ см};$$

$$b_1 = Y_C - Y_1 = 13,52 - 9 = 4,52 \text{ см};$$

$$a_2 = X_C - X_2 = 6,62 - 9,45 = -2,83 \text{ см};$$

$$b_2 = Y_C - Y_2 = 13,52 - 16,25 = -2,73 \text{ см}.$$

Вычисляются моменты инерции фигуры относительно центральных осей  $x, y$  (см. форм. (1.4)):

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x_1} + b_1^2 A_1 + J_{x_2} + b_2^2 A_2 = \\ &= 1090 + 4,52^2 \cdot 20,7 + \frac{4,9 \cdot 7^3}{12} + (-2,73)^2 \cdot 34,3 = 1908,6 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y_1} + a_1^2 A_1 + J_{y_2} + a_2^2 A_2 = \\ &= 86 + 4,68^2 \cdot 20,7 + \frac{7 \cdot 4,9^3}{12} + (-2,83)^2 \cdot 34,3 = 882,7 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1} + a_1 b_1 A_1 + J_{x_2 y_2} + a_2 b_2 A_2 =$$

$$= 0 + 4,68 \cdot 4,52 \cdot 20,7 + 0 + (-2,83)(-2,73) \cdot 34,3 = 702,9 \text{ см}^4.$$

**Определение главных центральных моментов инерции фигуры (см. форм. (1.5))**

$$J_{min}^{max} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_x}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} =$$

$$= \frac{1908,6 + 882,7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{882,7 - 1908,6}{2}\right)^2 + 702,9^2} = 1395,7 \pm 870,2 \text{ см}^4.$$

$$J_{max} = 2265,9 \text{ см}^4. \quad J_{min} = 525,5 \text{ см}^4.$$

**Определение положения главных центральных осей (см. форм. (1.6))**

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{J_x - J_{max}}{J_{xy}} = \frac{1908,6 - 2265,9}{702,9} = -0,508, \quad \alpha = -26,9^\circ.$$

Через центр тяжести фигуры проводятся главные центральные оси  $u$ ,  $v$  (см. рис.7).

Таким образом,

$$J_u = J_{max} = 2265,9 \text{ см}^4,$$

$$J_v = J_{min} = 525,5 \text{ см}^4.$$

## 2. РАБОТА № 2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

### 2.1. Цель работы

Целью работы является освоение практических навыков построения эпюр внутренних усилий при изгибе балок.

### 2.2. Краткие теоретические сведения

В стержнях внутренние силы, распределенные по всей площади произвольного поперечного сечения, определяются по величинам интегральных внутренних усилий (далее в тексте просто *внутренних усилий*), приведенных к главным центральным осям сечения. В свою очередь, внутренние усилия определяются по заданной внешней нагрузке, действующей на стержень.

Построение графиков (эпюр) внутренних усилий, изменяющихся при переходе от одного поперечного сечения к другому, является первоочередной задачей при расчетах стержней на прочность и жесткость.

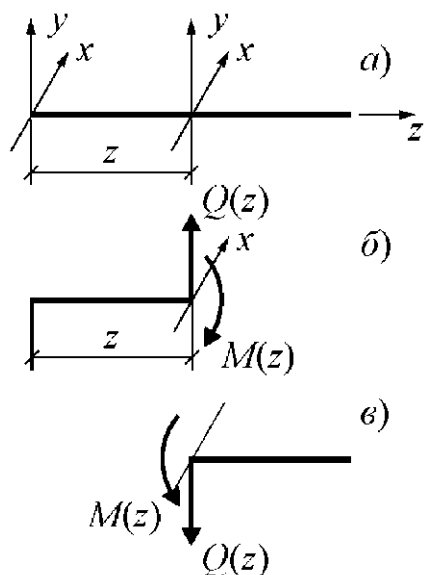


Рис. 8. Положительные направления внутренних усилий в сечении

На рис. 8а изображена ось стержня. Неподвижная система координатных осей  $xuz$  связана с его началом. Подвижная (локальная) система координатных осей  $xy$  связана с поперечным сечением, координата  $z$  которого зависит от выбранного начала отсчета.

Стержни, изгибаемые внешними моментами и поперечными нагрузками, называют *балками*. При изгибе балки в плоскости  $yz$  в поперечных сечениях возникают распределенные по площади сечения силы, дающие в сумме поперечную силу  $Q_y(z)$  и изгибающий момент  $M_x(z)$  (далее просто  $Q(z)$  и  $M(z)$ ).

При построении эпюр  $Q(z)$  и  $M(z)$  можно руководствоваться следующим алгоритмом.

1. Вся балка делится на участки. Границами участков являются:
  - начало и конец балки;
  - начало и конец внешней распределенной нагрузки;
  - точки приложения внешних сосредоточенных сил и моментов, включая реакции опор.
2. На схеме балки обозначается длина каждого участка.
3. Поочередно в пределах каждого из участков поперечным сечением балка рассекается на две части. Координата сечения  $z$  указывается на схеме балки.
4. Мысленно отбрасывается одна из частей (левая или правая), то есть временно исключается из рассмотрения.
5. К оставшейся части балки прикладывается внешняя нагрузка, действующая на эту часть. Дополнительно в сечении прикладываются внутренние усилия  $Q$  и  $M$ . Положительные направления внутренних усилий для левой оставшейся части балки показаны на рис. 8б, а для правой части на рис. 8в.
6. Из уравнений равновесия оставшейся части определяются

внутренние усилия на рассматриваемом участке.

7. В результате записываются аналитические выражения для  $Q(z)$  и  $M(z)$  для каждого участка.

8. Вычисляются значения внутренних усилий в характерных точках участков, и строятся эпюры  $Q$  и  $M$  с учетом дифференциальных зависимостей:  $\frac{dQ}{dz} = -q$  и  $\frac{dM}{dz} = Q$ .

### 2.3. Задания к работе № 2.

Для трех заданных расчетных схем **требуется**:

- разбить балку на участки, обозначив длину каждого из них;
- при необходимости определить реакции опор;
- используя уравнения равновесия, записать аналитические выражения для внутренних усилий  $Q$  и  $M$  в произвольном сечении каждого из участков;
- построить эпюры внутренних усилий в выбранном масштабе;
- проверить правильность построения эпюр, используя дифференциальные зависимости между  $M$ ,  $Q$  и  $q$ .

**Варианты заданий:** расчетные схемы изображены на рис. 9, а исходные данные представлены в табл. 3.

Для выполнения *работы 2* необходимо изучить теоретический материал, содержащийся в [1, гл. 4], [2, гл. 8], [3, гл. 4], [4, гл. 5], [5, гл. 6].

### 2.4. Вопросы для самоконтроля

1. Как определяются границы участков при делении оси балки на участки?

2. Каков физический смысл понятий "поперечная сила" и "изгибающий момент" в произвольном сечении балки?

3. Какие направления  $Q$  и  $M$  принимаются положительными?

4. Как записать аналитическое выражение для поперечной силы в произвольном сечении?

5. Как записать аналитическое выражение для изгибающего момента в произвольном сечении?

6. Какими дифференциальными зависимостями связаны величины  $M$ ,  $Q$  и  $q$ ?

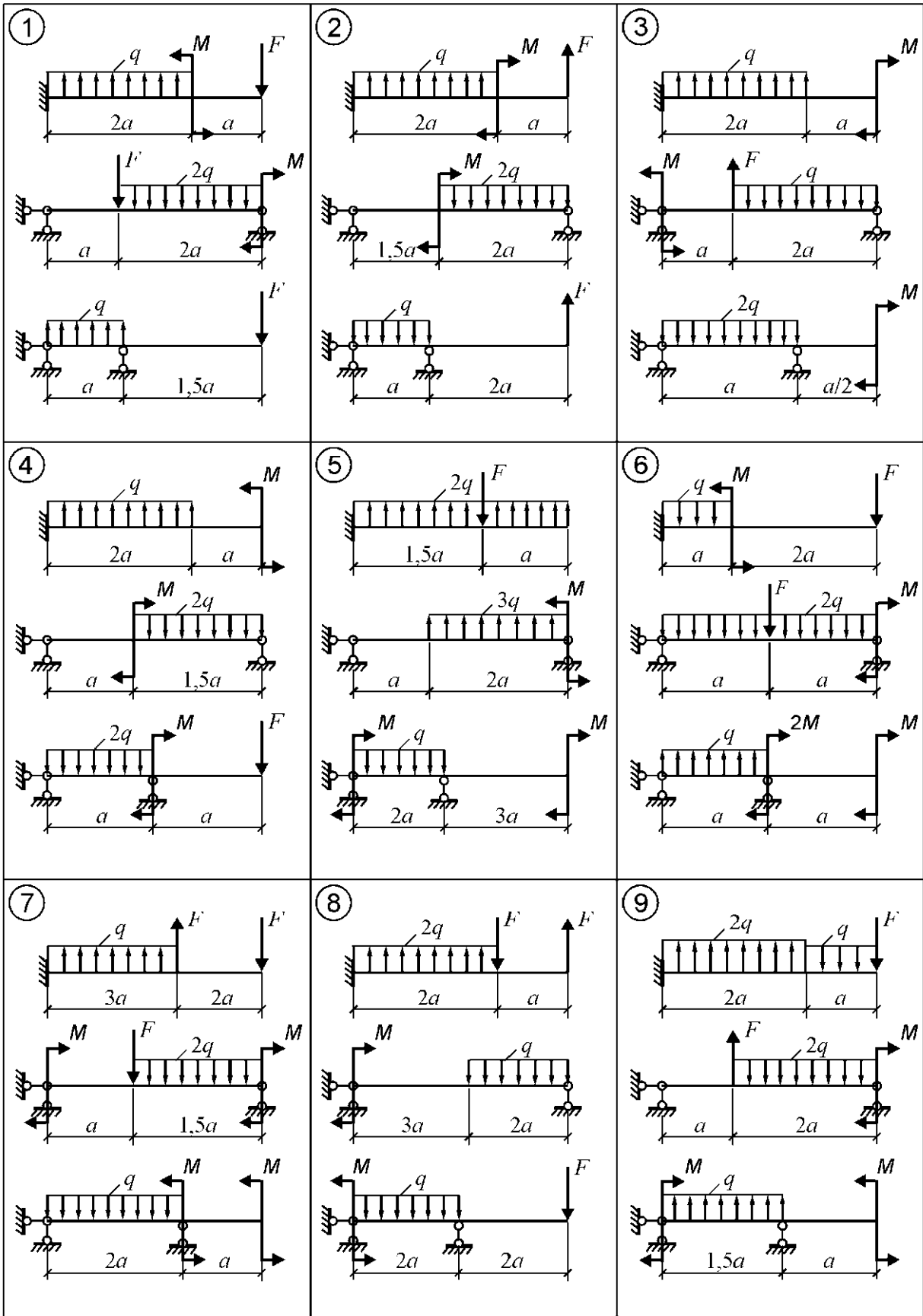


Рис. 9. Варианты схем (начало)

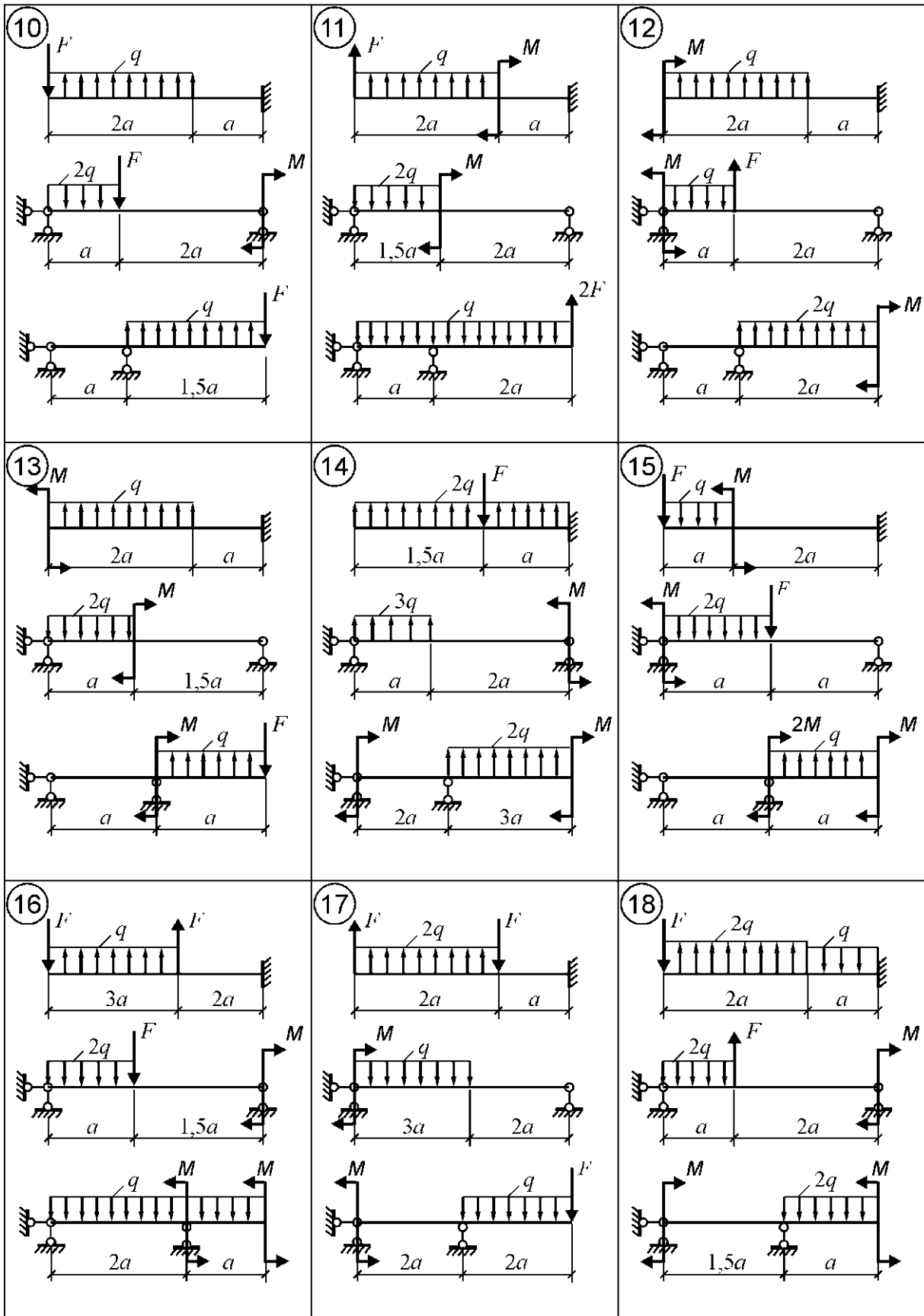
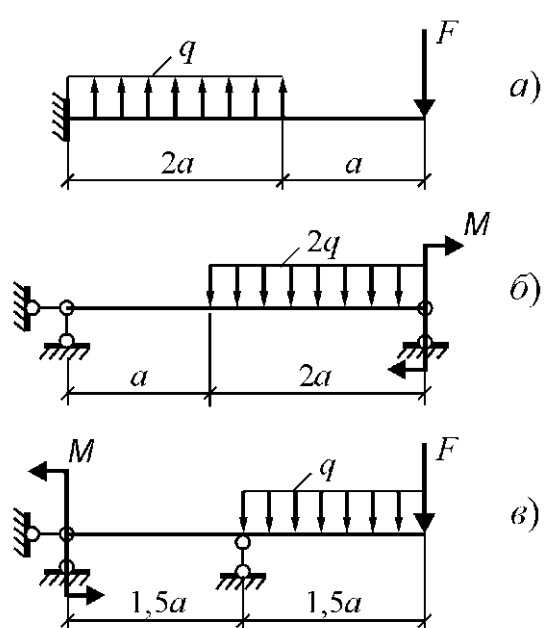


Рис. 9. Варианты схем (окончание)



Номер строки	$a$ , м	$q$ , кН/м	$F$ , кН	$M$ , кН·м
1	4,0	3	10	30
2	3,0	5	14	12
3	2,0	4	12	24
4	2,5	8	16	18
5	3,5	10	20	20
6	4,0	7	18	22
7	3,0	6	10	16
8	2,0	9	14	26
9	3,5	3	12	28
10	4,0	5	16	14
11	2,0	4	20	22
12	2,5	8	18	30
13	3,5	10	10	24
14	4,0	7	14	16
15	2,5	6	12	20
16	2,0	9	16	28
17	3,5	3	20	14
18	3,0	5	18	18

### 2.5. Пример выполнения работы № 2



В примере приняты расчетные схемы, изображенные на рис. 10, и данные, представленные в табл. 4.

Таблица 4

$a$ , м	$q$ , кН/м	$F$ , кН	$M$ , кН·м
1	10	15	20

Рис. 10. Расчетные схемы балок

### Задача 1 (расчетная схема 1, рис. 10а)

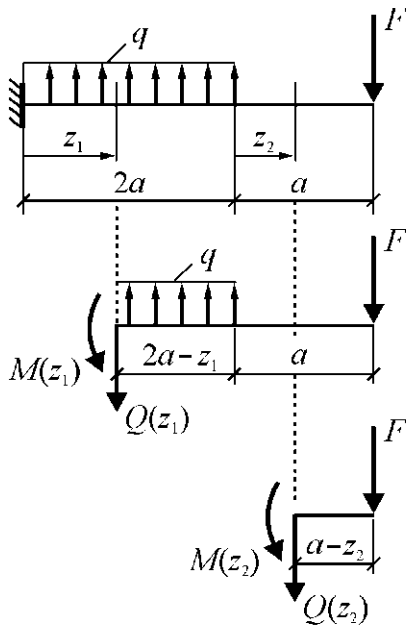


Рис. 11. Координаты сечений и схемы нагружения выделяемых частей балки

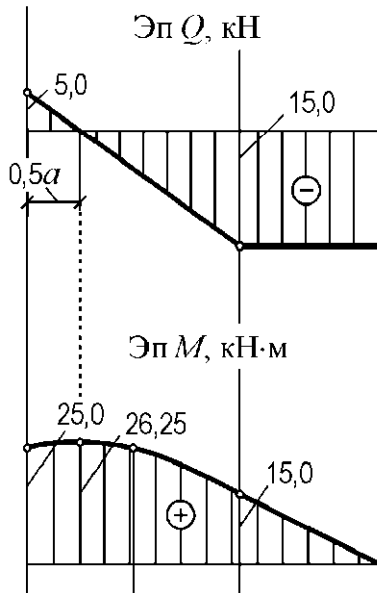


Рис. 12. Эпюры  $Q$  и  $M$  для расчетной схемы 1

### Построение эпюр внутренних усилий

**Участок 1:**  $0 \leq z_1 \leq 2a$ .

Выражения для  $Q(z_1)$  и  $M(z_1)$ , полученные из уравнений равновесия *правой* части балки (рис. 11):

$$Q(z_1) = - \{ -q(2a - z_1) + F \};$$

$$M(z_1) = - \left\{ q(2a - z_1) \cdot \frac{2a - z_1}{2} - F(2a - z_1 + a) \right\}.$$

Для построения эпюр вычисляются значения  $Q(z_1)$  и  $M(z_1)$  в характерных точках участка 1.

$$Q(0) = 2q \cdot a - F = 2 \cdot 10 \cdot 1 - 15 = 5 \text{ кН.}$$

$$Q(2a) = -F = -15 \text{ кН.}$$

$$M(0) = -q \cdot 2a^2 + F \cdot 3a = -10 \cdot 2 \cdot 1^2 + 15 \cdot 3 \cdot 1 = 25 \text{ кН·м.}$$

$$M(a) = -\frac{1}{2}q \cdot a^2 + F \cdot 2a =$$

$$= -0,5 \cdot 10 \cdot 1^2 + 15 \cdot 2 \cdot 1 = 25 \text{ кН·м.}$$

$$M(2a) = F \cdot a = 15 \cdot 1 = 15 \text{ кН·м.}$$

В пределах участка знак поперечной силы изменяется, следовательно,  $M(z_1)$  имеет на участке точку экстремума. Координата точки  $Q(z_1) = 0$ :  $z_1 = 0,5a$ . Момент в точке экстремума:

$$M(0,5a) = -0,5q(2a - 0,5a)^2 + F(3a - 0,5a) = -0,5 \cdot 10 \cdot (1,5 \cdot 1)^2 + 15 \cdot (2,5 \cdot 1) = 26,25 \text{ кН·м.}$$

**Участок 2:**  $0 \leq z_2 \leq a$ .

Выражения для  $Q(z_2)$  и  $M(z_2)$ , полученные из уравнений равновесия *правой* части балки (см. рис. 11):

$$Q(z_2) = - \{ F \} = \text{const};$$

$$M(z_2) = - \{ -F(a - z_2) \}.$$

Для построения эпюр вычисляются значения  $Q$  и  $M$  в характерных точках участка 2.

$$Q = \text{const} = -F = -15 \text{ кН.}$$

$$M(0) = F \cdot a = 15 \cdot 1 = 15 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$M(a) = 0.$$

Эпюры  $Q$  и  $M$ , построенные по вычисленным значениям внутренних усилий в выбранных точках участков, изображены на рис. 12.

## Задача 2 (расчетная схема 2, рис. 10б)

### Определение реакции $R_A$ (рис. 13)

$$\sum M_B = 0. \quad R_A \cdot 3a - 2q \cdot 2a \cdot \frac{2a}{2} + M = 0.$$

Отсюда

$$R_A = \frac{1}{3a}(4q \cdot a^2 - M) = \frac{1}{3 \cdot 1}(4 \cdot 10 \cdot 1^2 - 20) = 6,67 \text{ кН.}$$

### Построение эпюр внутренних усилий

**Участок 1:**  $0 \leq z_1 \leq a$ .

Выражения для  $Q(z_1)$  и  $M(z_1)$ , полученные из уравнений равновесия *левой* части балки (см. рис. 13):

$$Q(z_1) = -\{R_A\};$$

$$M(z_1) = -\{R_A \cdot z_1\}.$$

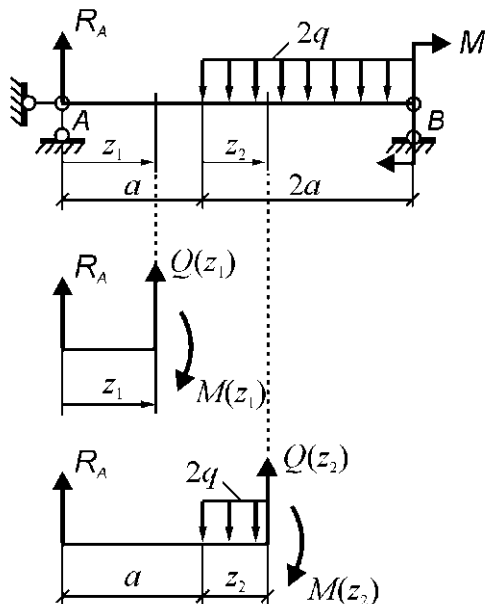


Рис. 13. Координаты сечений и схемы нагружения выделяемых частей балки

Для построения эпюр вычисляются значения  $Q$  и  $M$  в характерных точках участка 1.

$$Q = \text{const} = -R_A = -6,67 \text{ кН.}$$

$$M(0) = 0.$$

$$M(a) = R_A \cdot a = 6,67 \cdot 1 = 6,67 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

**Участок 2:**  $0 \leq z_2 \leq 2a$ .

Выражения для  $Q(z_2)$  и  $M(z_2)$ , полученные из уравнений равновесия *левой* части балки (см. рис. 13):

$$Q(z_2) = -\{R_A - 2q \cdot z_2\};$$

$$M(z_2) = -\{R_A(a + z_2) - 2q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2}\}.$$

Для построения эпюр вычисляются значения  $Q$  и  $M$  в характерных точках участка 2.

$$Q(0) = -R_A = -6,67 \text{ кН.}$$

$$Q(2a) = -R_A + 2q \cdot 2a = -6,67 + 4 \cdot 10 \cdot 1 = 33,33 \text{ кН.}$$

$$M(0) = -R_A \cdot a = -6,67 \cdot 1 = -6,67 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

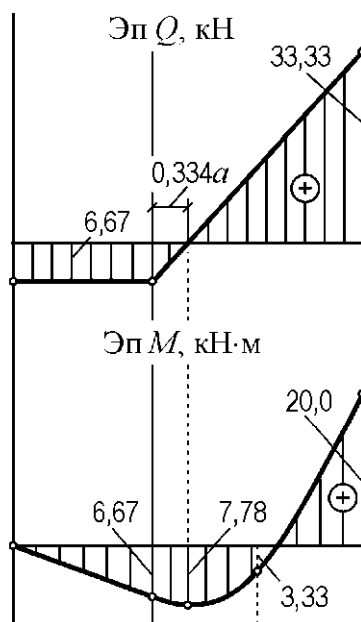


Рис. 14. Эпюры  $Q$  и  $M$  для расчетной схемы 2

$$M(a) = -R_A \cdot 2a + q \cdot a^2 = -6,67 \cdot 2 \cdot 1 + 10 \cdot 1^2 = -3,33 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$M(2a) = -R_A(a + 2a) + q(2a)^2 = -6,67 \cdot 3 \cdot 1 + 10 \cdot (2 \cdot 1)^2 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Так как в пределах участка знак поперечной силы изменяется, то  $M(z_2)$  имеет на участке точку экстремума. Координата точки экстремума:  $z_2 = 0,334a$ . Момент в точке экстремума:

$$M(0,334a) = -R_A(a + 0,334a) + q(0,334a)^2 = -6,67 \cdot 1,334 \cdot 1 + 10 \cdot (0,334 \cdot 1)^2 = -7,78 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Эпюры  $Q$  и  $M$ , построенные по вычисленным значениям внутренних усилий в выбранных точках участков, изображены на рис. 14.

### Задача 3 (расчетная схема 3, рис. 10в)

#### Определение реакции $R_A$ (рис. 15)

$$\sum M_B = 0.$$

$$R_A \cdot 1,5a - M + q \cdot 1,5a \cdot \frac{1,5a}{2} + F \cdot 1,5a = 0.$$

Отсюда

$$R_A = \frac{1}{1,5a} (M - \frac{1}{2} q \cdot 1,5^2 a^2 - F \cdot 1,5a) = \frac{1}{1,5 \cdot 1} (20 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1,5^2 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1,5 \cdot 1) = -9,17 \text{ кН.}$$

#### Построение эпюр внутренних усилий

Участок I:  $0 \leq z_1 \leq 1,5a$ .

Выражения для  $Q(z_1)$  и  $M(z_1)$ , полученные из уравнений равновесия *левой* части балки (см. рис. 15):

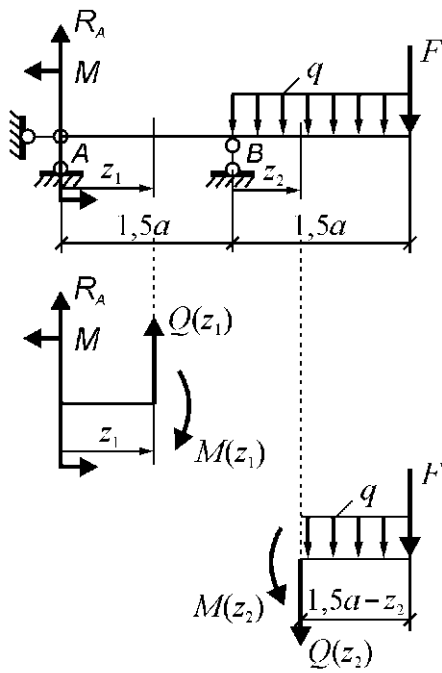


Рис. 15. Координаты сечений и схемы нагружения выделяемых частей балки

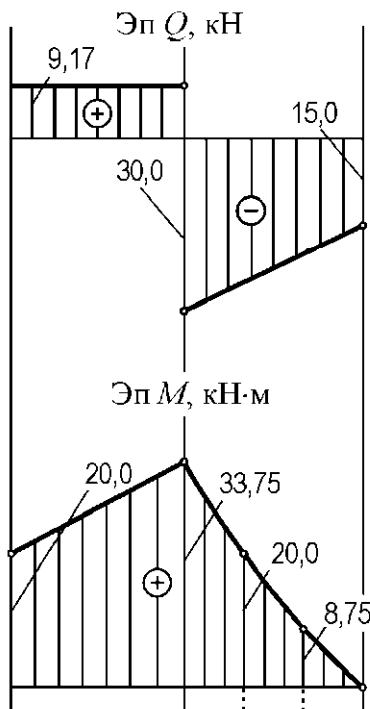


Рис. 16. Эпюры  $Q$  и  $M$  для расчетной схемы 3

$$Q(z_1) = -\{R_A\};$$

$$M(z_1) = -\{R_A \cdot z_1 - M\}.$$

Для построения эпюр вычисляются значения  $Q$  и  $M$  в характерных точках участка 1.

$$Q = \text{const} = -R_A = 9,17 \text{ кН.}$$

$$M(0) = M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$M(1,5a) = -R_A \cdot 1,5a + M =$$

$$= 9,17 \cdot 1,5 \cdot 1 + 20 = 33,75 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

**Участок 2:**  $0 \leq z_2 \leq 1,5a$ .

Выражения для  $Q(z_2)$  и  $M(z_2)$ , полученные из уравнений равновесия *правой* части балки (см. рис. 15):

$$Q(z_2) = -\{F + q(1,5a - z_2)\};$$

$$M(z_2) = -\{-F(1,5a - z_2) - \frac{1}{2}q(1,5a - z_2)^2\}.$$

Для построения эпюр вычисляются значения  $Q$  и  $M$  в характерных точках участка 2.

$$Q(0) = -F - q \cdot 1,5a = -15 - 10 \cdot 1,5 \cdot 1 =$$

$$= -30 \text{ кН.}$$

$$Q(1,5a) = -F = -15 \text{ кН.}$$

$$M(0) = F \cdot 1,5a + 0,5q(1,5a)^2 =$$

$$= 15 \cdot 1,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 10 \cdot 1,5^2 \cdot 1^2 =$$

$$= 33,75 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$M(0,5a) = F \cdot a + 0,5q \cdot a^2 =$$

$$= 15 \cdot 1 + 0,5 \cdot 10 \cdot 1^2 = 20,0 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$M(a) = F \cdot 0,5a + 0,5q(0,5a)^2 =$$

$$= 15 \cdot 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 10 \cdot 0,5^2 \cdot 1^2 =$$

$$= 8,75 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$M(1,5a) = 0.$$

Эпюры  $Q$  и  $M$ , построенные по вычисленным значениям внутренних усилий в выбранных точках участков, изображены на рис. 16.

### 3. РАБОТА № 3. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

#### 3.1. Цель работы

Целью работы является освоение практических навыков определения размеров поперечных сечений балок при плоском изгибе, обеспечивающих их прочность и жесткость.

#### 3.2. Краткие теоретические сведения

Размеры поперечных сечений балок назначаются исходя из условий прочности и жесткости.

Условие **прочности** по нормальным напряжениям имеет вид:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_u} \leq R, \quad (3.1)$$

где  $\sigma_{max}$  – максимальное нормальное напряжение в балке;  $M_{max}$  – наибольший по модулю (расчетный) изгибающий момент;  $W_u$  – момент сопротивления сечения при изгибе;  $R$  – расчетное сопротивление материала (заданная величина).

Если определен расчетный изгибающий момент  $M_{max}$ , то из условия (3.1) находится момент сопротивления сечения  $W_u$ , при котором обеспечивается прочность балки по нормальным напряжениям, т.е.  $\sigma_{max} \leq R$ .

Таким образом, задача расчета балки на прочность заключается в определении требуемого момента сопротивления сечения согласно формуле (3.1):

$$W_u \geq \frac{M_{max}}{R}. \quad (3.2)$$

Для решения задачи по эпюре  $M(z)$  находится  $M_{max}$  и далее по формуле (3.2) вычисляется необходимая величина  $W_u$ . Так как форма поперечного сечения задается, то определяются и размеры сечения.

Условие **жесткости** по максимальному прогибу имеет вид:

$$v_{max} \leq [v], \quad (3.3)$$

где  $v_{max}$  – наибольший по модулю (расчетный) прогиб;  $[v]$  – нормативный прогиб (заданная величина).

Если жесткость балки при изгибе  $EJ$  постоянна, то по методу начальных параметров составляется универсальное уравнение проги-

бов, по которому строится эпюра  $EJv$ . По эпюре определяется расчетная величина  $(EJv)_{max}$ . Условие (3.3) в этом случае представляется в виде

$$v_{max} = \frac{(EJv)_{max}}{EJ} \leq [v].$$

Отсюда находится требуемый момент инерции сечения

$$J \geq \frac{(EJv)_{max}}{E[v]}. \quad (3.4)$$

В итоге по формуле (3.4) определяется момент инерции, а следовательно, и размеры сечения, так как форма сечения известна.

При составлении универсальных уравнений метода начальных параметров необходимо руководствоваться следующими правилами.

1. Каждая распределенная нагрузка должна заканчиваться в конечной точке оси балки. Если имеющаяся нагрузка приложена не до конца балки, то ее необходимо продлить, а на тех участках, где нагрузка продлена, приложить противоположную распределенную нагрузку такой же интенсивности, что и продленная нагрузка.

2. Текущая координата сечения на каждом участке отсчитывается от начала балки.

3. Интегрирование дифференциальных уравнений, связывающих величины  $Q$ ,  $M$ ,  $\varphi$  и  $v$ , ведется без раскрытия скобок, заключающих разность между текущей координатой сечения  $z$  и координатой начальной точки рассматриваемого участка.

### 3.3. Задания к работе 3

**Заданы:** схема балки; действующая нагрузка; форма поперечного сечения и др. величины, необходимые для расчета.

**Требуется:**

- разбить балку на участки, обозначив длину каждого из них;
- определить реакции опор;
- записать аналитические выражения для внутренних усилий на каждом участке;
  - построить эпюры внутренних усилий в выбранном масштабе;
  - по эпюре определить максимальный по модулю изгибающий момент и назначить размеры поперечного сечения, используя условие прочности по нормальным напряжениям;
  - записать уравнения метода начальных параметров для моментов, углов поворота сечений и прогибов;

- построить эпюры углов поворота и прогибов;
- проверить правильность построения эпюр по дифференциальным зависимостям между моментами, углами поворота и прогибами;
- найти максимальный по модулю прогиб и назначить размеры поперечного сечения по условию жесткости;
- назначить окончательные размеры поперечного сечения по условиям прочности и жесткости.

**Варианты заданий:** расчетные схемы представлены на рис. 17, а исходные данные приведены в табл. 5.

Дополнительно для всех вариантов **принять:** форму поперечного сечения балки – стандартный двутавровый профиль; расчетное сопротивление стали  $R = 200$  МПа; нормативный прогиб  $[\nu] = a/300$ ; модуль упругости стали  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Для выполнения *работы 3* необходимо изучить теоретический материал, содержащийся в [1, гл. 6, 8], [2, гл. 8], [3, гл. 4], [4, гл. 5, 10], [5, гл. 6].

### 3.4. Вопросы для самоконтроля

1. По какой формуле определяются нормальные напряжения в сечениях балки при чистом и поперечном изгибах?
2. Как распределены нормальные напряжения по сечению балки при изгибе?
3. Как записывается условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе?
4. Какой параметр в условии прочности используется для определения размеров сечения?
5. По какой формуле определяются касательные напряжения при поперечном изгибе? Как распределены эти напряжения по сечению?
6. Какими дифференциальными зависимостями связаны между собой внутренние усилия и перемещения при поперечном изгибе?
7. Как записываются уравнения метода начальных параметров для поперечной силы, изгибающего момента, углов поворота сечений и прогибов?
8. Перечислить начальные параметры уравнений метода начальных параметров при поперечном изгибе. Как они определяются?
9. Как записывается условие жесткости при изгибе?
10. Какой параметр в условии жесткости используется для определения размеров сечения?



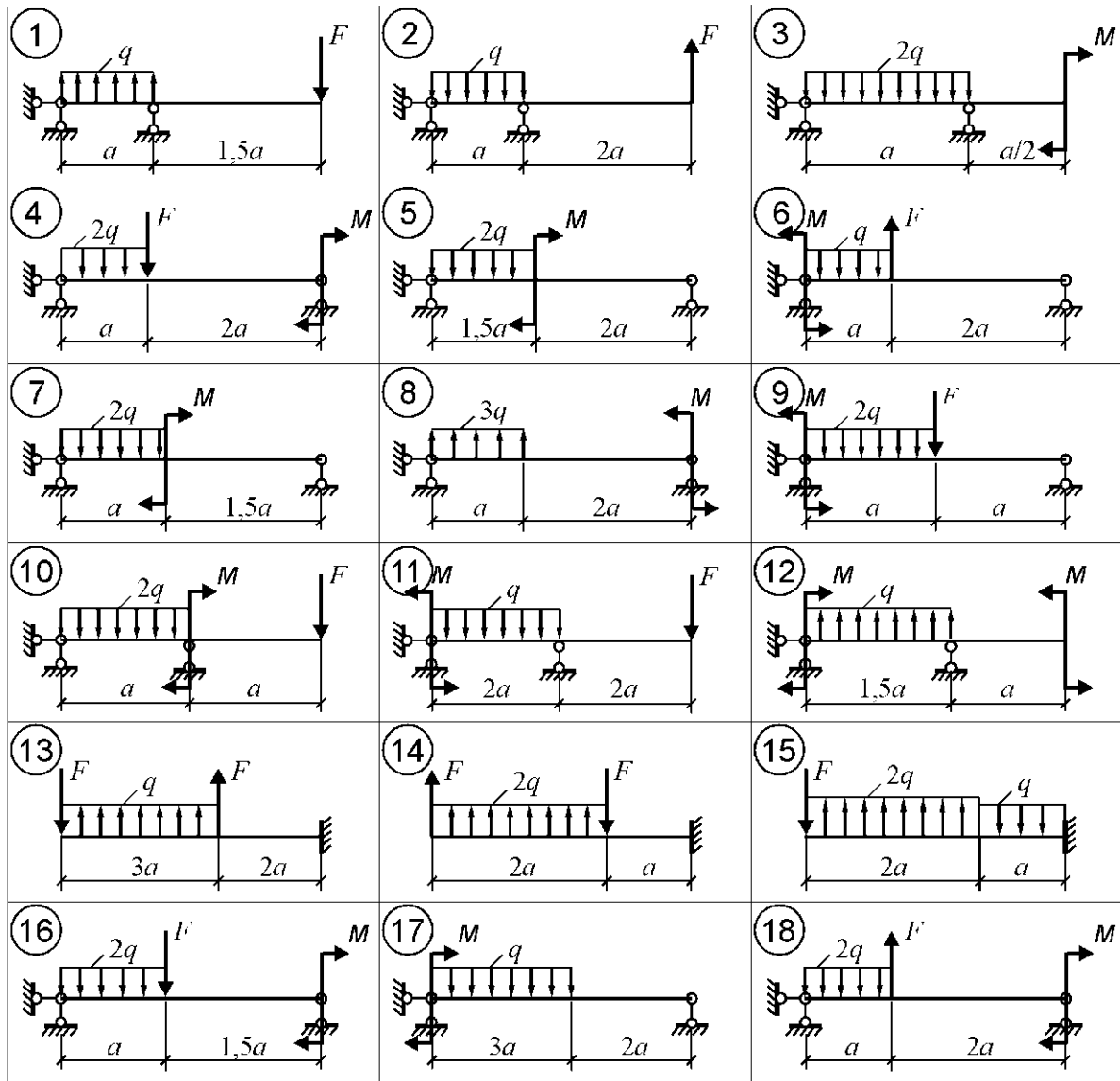


Рис. 17. Варианты схем

Таблица 5

Номер строки	$a$ , м	$q$ , кН/м	$F$ , кН	$M$ , кН·м	Номер строки	$a$ , м	$q$ , кН/м	$F$ , кН	$M$ , кН·м
1	2,0	8	14	26	10	2,0	4	14	14
2	3,0	4	10	18	11	4,0	5	12	28
3	4,0	5	20	14	12	3,5	3	10	26
4	3,5	3	18	28	13	3,0	9	18	16
5	2,0	9	10	20	14	2,5	6	20	22
6	2,5	6	14	16	15	2,0	7	16	20
7	4,0	7	12	24	16	3,0	10	12	18
8	3,5	10	16	30	17	4,0	8	14	24
9	2,5	8	20	22	18	3,5	5	10	30

### 3.5. Пример выполнения работы 3

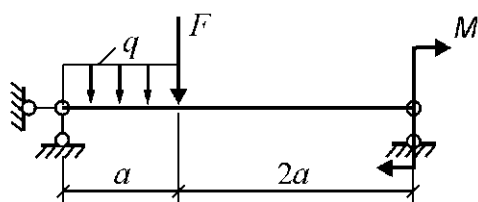


Рис. 18. Схема балки

В примере приняты схема, изображенная на рис. 18, и данные, представленные в табл. 6.

Таблица 6

$a$ , м	$q$ , кН/м	$F$ , кН	$M$ , кН·м
1,5	15	20	25

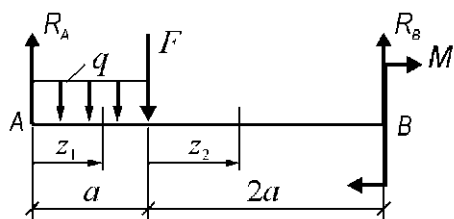


Рис. 19. Расчетная схема балки

#### Определение реакций опор

Из уравнений статики всей балки (рис. 19) определяются реакции  $R_A$  и  $R_B$ .

$$\sum M_B = 0.$$

$$R_A \cdot 3a - q \cdot a(0,5a + 2a) - F \cdot 2a + M = 0.$$

$$\sum F_y = 0.$$

$$R_A - q \cdot a - F + R_B = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{1}{3a}(q \cdot 2,5a^2 + F \cdot 2a - M) = \\ &= \frac{1}{3 \cdot 1,5}(15 \cdot 2,5 \cdot 1,5^2 + 20 \cdot 2 \cdot 1,5 - 25) = 26,53 \text{ кН}, \end{aligned}$$

$$R_B = -R_A + q \cdot a + F = -26,53 + 15 \cdot 1,5 + 20 = 15,97 \text{ кН}.$$

#### Построение эпюр внутренних усилий

**Участок I:**  $0 \leq z_1 \leq a$ .

Выражения для  $Q(z_1)$  и  $M(z_1)$ , полученные из уравнений равновесия *левой* оставляемой для рассмотрения части балки (см. рис. 19):

$$Q(z_1) = -\{R_A - q \cdot z_1\};$$

$$M(z_1) = -\left\{R_A \cdot z_1 - q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2}\right\}.$$

Для построения эпюр вычисляются значения  $Q$  и  $M$  в характерных точках участка I.

$$Q(0) = -R_A = -26,53 \text{ кН}.$$

$$Q(a) = -R_A + q \cdot a = -26,53 + 15 \cdot 1,5 = -4,03 \text{ кН}.$$

$$M(0) = 0.$$

$$M(0,5a) = -R_A \cdot 0,5a + 0,5q(0,5a)^2 =$$

$$= -26,53 \cdot 0,5 \cdot 1,5 + 0,5 \cdot 15(0,5 \cdot 1,5)^2 = -15,68 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$M(a) = -R_A \cdot a + \frac{1}{2} q \cdot a^2 = -26,53 \cdot 1,5 + \frac{1}{2} 15 \cdot 1,5^2 = -22,92 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

**Участок 2:**  $0 \leq z_2 \leq 2a$ .

Выражения для  $Q(z_2)$  и  $M(z_2)$ , полученные из уравнений равновесия *левой* оставляемой для рассмотрения части балки (см. рис. 19):

$$Q(z_2) = -\{R_A - q \cdot a - F\};$$

$$M(z_2) = -\{R_A(a + z_2) - q \cdot a(0,5a + z_2) - F \cdot z_2\}.$$

Для построения эпюр вычисляются значения  $Q$  и  $M$  в характерных точках участка 2.

$$Q = \text{const} = -R_A + q \cdot a + F = -26,53 + 15 \cdot 1,5 + 20 = 15,97 \text{ кН}.$$

$$M(0) = -R_A \cdot a + 0,5 q \cdot a^2 = -26,53 \cdot 1,5 + 0,5 \cdot 15 \cdot 1,5^2 = -22,92 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$M(2a) = -R_A \cdot 3a + q \cdot a(0,5a + 2a) + F \cdot 2a = -26,53 \cdot 3 \cdot 1,5 + 15 \cdot 1,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5 + 20 \cdot 2 \cdot 1,5 = 25,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры  $Q$  и  $M$ , построенные по вычисленным значениям внутренних усилий в выбранных точках участков, изображены на рис. 20.

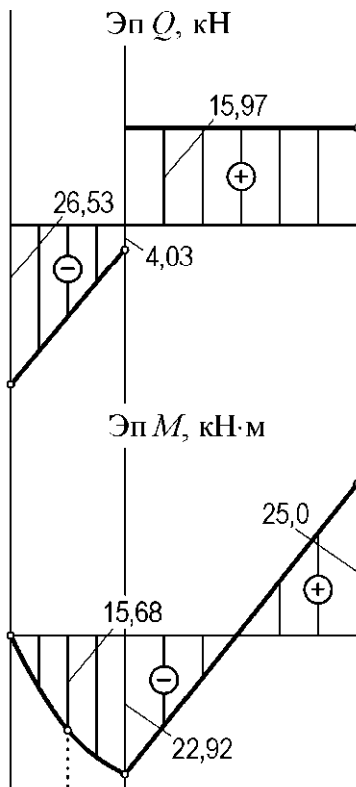


Рис. 20. Эпюры  $Q$  и  $M$

### Определение размеров сечения по условию прочности

По эпюре изгибающих моментов (рис. 20) находится наибольший по модулю (расчетный) момент  $M_{max} = 25,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Определяется необходимый момент сопротивления сечения при изгибе (см. форм. (3.2))

$$W_u \geq \frac{M_{max}}{R} = \frac{25,0 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 125 \text{ см}^3.$$

По таблице стандартных прокатных профилей (см., например, [1], стр. 552) выбирается и назначается двутавровый профиль № 18, у которого

$$W_u = 143 \text{ см}^3.$$

## Составление уравнений метода начальных параметров для изгибающих моментов, углов поворота сечений и прогибов

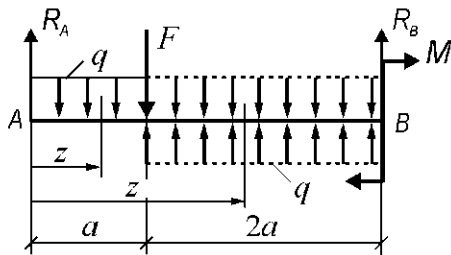


Рис. 21. Схема для составления универсальных уравнений

В соответствии с правилами составления универсальных уравнений распределенная нагрузка  $q$ , действующая только на участке 1, продлевается до конца балки, т.е. до конца участка 2, а на участке 2 прикладывается нагрузка  $q$  противоположного направления (рис. 21). Таким образом, на участке 2, свободном от нагрузки  $q$ , продленная и вновь примененная

нагрузки уравновешены и обе заканчиваются в конце балки. Координаты сечений  $z$  на участках 1 и 2 отсчитываются от начала балки. По схеме, изображенной на рис. 21, составляется аналитическое выражение для изгибающих моментов на участках 1 и 2 в форме одного универсального уравнения

$$M(z) = -R_A \cdot z + q \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_I + F(z-a) - q \cdot \frac{(z-a)^2}{2} \Big|_2 \quad (3.5)$$

Интегрированием дифференциального соотношения

$$EJ \frac{d\varphi}{dz} = M(z)$$

с учетом формулы (3.5) находится выражение для определения углов поворота сечений:

$$EJ\varphi(z) = EJ\varphi_0 - R_A \cdot \frac{z^2}{2} + q \cdot \frac{z^3}{6} \Big|_I + F \cdot \frac{(z-a)^2}{2} - q \cdot \frac{(z-a)^3}{6} \Big|_2 \quad (3.6)$$

где  $EJ\varphi_0$  – постоянная интегрирования, пропорциональная углу поворота  $\varphi_0 = \varphi(0)$ .

Интегрированием дифференциального уравнения

$$EJ \frac{dv}{dz} = -EJ\varphi(z)$$

с учетом равенства (3.6) получается выражение для определения прогибов:

$$EJv(z) = EJv_0 - EJ\varphi_0 \cdot z + R_A \cdot \frac{z^3}{6} - q \cdot \frac{z^4}{24} \Big|_I - \\ - F \cdot \frac{(z-a)^3}{6} + q \cdot \frac{(z-a)^4}{24} \Big|_2 \quad (3.7)$$

где  $EJv_0$  – постоянная интегрирования, пропорциональная прогибу в начале координат, т.е. прогибу  $v_0 = v(0)$ .

### Определение постоянных $EJ\varphi_0$ и $EJv_0$

Из анализа закрепления оси балки (рис. 19) составляются условия в точках закрепления:

$$\begin{aligned} EJv(0) &= 0; \\ EJv(3a) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Используя условия (3.8) и равенство (3.7), записываются два уравнения, содержащих две искомые константы:

$$\begin{aligned} EJv_0 &= 0, \\ -EJv_0 + 3a \cdot EJ\varphi_0 &= R_A \cdot \frac{(3a)^3}{6} - q \cdot \frac{(3a)^4}{24} - F \cdot \frac{(2a)^3}{6} + q \cdot \frac{(2a)^4}{24}. \end{aligned}$$

Решением этой системы уравнений определяются значения постоянных:

$$\begin{aligned} EJv_0 &= 0; \\ EJ\varphi_0 &= 23,836 \text{ кН}\cdot\text{м}^2. \end{aligned}$$

### Построение эпюр $EJ\varphi(z)$ и $EJv(z)$

Для построения эпюры  $EJ\varphi(z)$  вычисляются значения этой функции в характерных точках участков 1 и 2 по выражению (3.6).

$$EJ\varphi(0) = EJ\varphi_0 = 23,836 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

$$EJ\varphi(0,5a) = 23,836 - 26,53 \cdot \frac{(0,5 \cdot 1,5)^2}{2} + 15 \cdot \frac{(0,5 \cdot 1,5)^3}{6} = 17,429 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

$$EJ\varphi(a) = 23,836 - 26,53 \cdot \frac{1,5^2}{2} + 15 \cdot \frac{1,5^3}{6} = 2,427 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

$$\begin{aligned} EJ\varphi(1,5a) &= 23,836 - 26,53 \cdot \frac{(1,5 \cdot 1,5)^2}{2} + 15 \cdot \frac{(1,5 \cdot 1,5)^3}{6} + \\ &+ 20 \cdot \frac{(0,5 \cdot 1,5)^2}{2} - 15 \cdot \frac{(0,5 \cdot 1,5)^3}{6} = -10,271 \text{ кН}\cdot\text{м}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EJ\varphi(2a) &= 23,836 - 26,53 \cdot \frac{(2 \cdot 1,5)^2}{2} + 15 \cdot \frac{(2 \cdot 1,5)^3}{6} + \\ &+ 20 \cdot \frac{1,5^2}{2} - 15 \cdot \frac{1,5^3}{6} = -13,987 \text{ кН}\cdot\text{м}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EJ\varphi(2,5a) &= 23,836 - 26,53 \cdot \frac{(2,5 \cdot 1,5)^2}{2} + 15 \cdot \frac{(2,5 \cdot 1,5)^3}{6} + \\ &+ 20 \cdot \frac{(1,5 \cdot 1,5)^2}{2} - 15 \cdot \frac{(1,5 \cdot 1,5)^3}{6} = -8,719 \text{ кН}\cdot\text{м}^2. \end{aligned}$$

$$EJ\varphi(3a) = 23,836 - 26,53 \cdot \frac{(3 \cdot 1,5)^2}{2} + 15 \cdot \frac{(3 \cdot 1,5)^3}{6} + \\ + 20 \cdot \frac{(2 \cdot 1,5)^2}{2} - 15 \cdot \frac{(2 \cdot 1,5)^3}{6} = 5,532 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Для построения эпюры  $EJ\nu(z)$  вычисляются значения этой функции в характерных точках участков 1 и 2 по выражению (3.7).

$$EJ\nu(0) = EJ\nu_0 = 0.$$

$$EJ\nu(0,5a) = -23,836 \cdot 0,5 \cdot 1,5 + 26,53 \cdot \frac{(0,5 \cdot 1,5)^3}{6} - 15 \cdot \frac{(0,5 \cdot 1,5)^4}{24} = \\ = -16,209 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$EJ\nu(a) = -23,836 \cdot 1,5 + 26,53 \cdot \frac{1,5^3}{6} - 15 \cdot \frac{1,5^4}{24} = -16,209 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$EJ\nu(1,5a) = -23,836 \cdot 1,5 \cdot 1,5 + 26,53 \cdot \frac{(1,5 \cdot 1,5)^3}{6} - 15 \cdot \frac{(1,5 \cdot 1,5)^4}{24} - \\ - 20 \cdot \frac{(0,5 \cdot 1,5)^3}{6} + 15 \cdot \frac{(0,5 \cdot 1,5)^4}{24} = -23,995 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$EJ\nu(2a) = -23,836 \cdot 2 \cdot 1,5 + 26,53 \cdot \frac{(2 \cdot 1,5)^3}{6} - 15 \cdot \frac{(2 \cdot 1,5)^4}{24} - \\ - 20 \cdot \frac{1,5^3}{6} + 15 \cdot \frac{1,5^4}{24} = -10,834 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$EJ\nu(2,5a) = -23,836 \cdot 2,5 \cdot 1,5 + 26,53 \cdot \frac{(2,5 \cdot 1,5)^3}{6} - 15 \cdot \frac{(2,5 \cdot 1,5)^4}{24} - \\ - 20 \cdot \frac{(1,5 \cdot 1,5)^3}{6} + 15 \cdot \frac{(1,5 \cdot 1,5)^4}{24} = -1,758 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$EJ\nu(3a) = -23,836 \cdot 3 \cdot 1,5 + 26,53 \cdot \frac{(3 \cdot 1,5)^3}{6} - 15 \cdot \frac{(3 \cdot 1,5)^4}{24} - \\ - 20 \cdot \frac{(2 \cdot 1,5)^3}{6} + 15 \cdot \frac{(2 \cdot 1,5)^4}{24} = 0.$$

Дополнительно вычисляются значения  $EJ\nu(z)$  в точках, близких к точке смены знака функции  $EJ\varphi(z)$ .

$$EJ\nu(1,05a) = -23,836 \cdot 1,05 \cdot 1,5 + 26,53 \cdot \frac{(1,05 \cdot 1,5)^3}{6} - 15 \cdot \frac{(1,05 \cdot 1,5)^4}{24} - \\ - 20 \cdot \frac{(0,05 \cdot 1,5)^3}{6} + 15 \cdot \frac{(0,05 \cdot 1,5)^4}{24} = -24,114 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$EJv(1,1a) = -23,836 \cdot 1,1 \cdot 1,5 + 26,53 \cdot \frac{(1,1 \cdot 1,5)^3}{6} - 15 \cdot \frac{(1,1 \cdot 1,5)^4}{24} -$$

$$- 20 \cdot \frac{(0,1 \cdot 1,5)^3}{6} + 15 \cdot \frac{(0,1 \cdot 1,5)^4}{24} = -24,110 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Эпюры  $EJ\varphi(z)$  и  $EJv(z)$ , построенные по вычисленным значениям этих функций в выбранных точках участков, изображены на рис. 22.

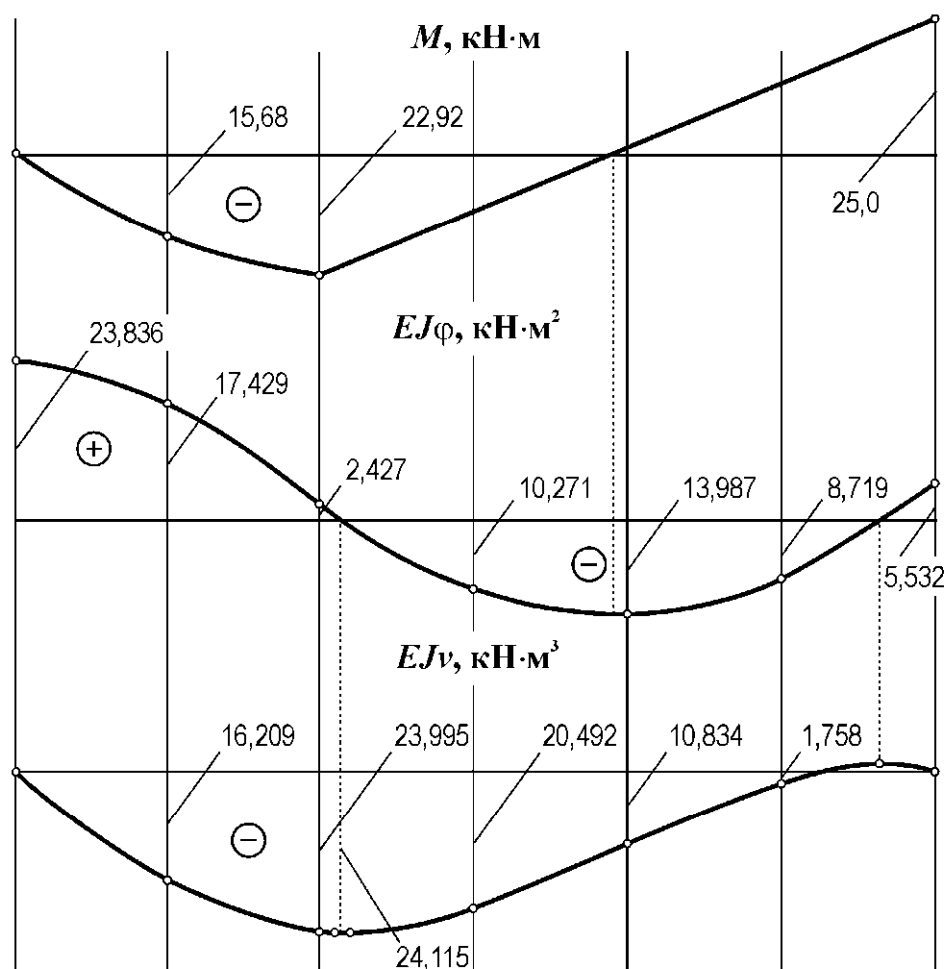


Рис. 22. Эпюры изгибающих моментов, относительных углов поворота сечений и прогибов

### Определение размеров сечения по условию жесткости

По эпюре относительных прогибов определяется расчетная величина  $(EJv)_{max}$  (см. рис. 22).

$$(EJv)_{max} = 24,115 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Находится требуемый момент инерции сечения (см. форм. (3.4))

$$J \geq \frac{(EJv)_{max}}{E[v]} = \frac{24,115 \cdot 10^3 \cdot 300}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1,5} = 24,115 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4 = 2411,5 \text{ см}^4.$$

По таблице стандартных прокатных профилей (см., например, [1], стр. 552) выбирается и назначается двутавровый профиль № 22, у которого

$$J = 2550 \text{ см}^4.$$

### **Установление размеров сечения балки по условиям прочности и жесткости**

Из расчетов размеров сечения по условиям прочности и жесткости окончательно устанавливается двутавровый профиль № 22, обеспечивающий и прочность, и жесткость балки.

### **Библиографический список**

1. Александров А.В., Потатов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 560 с.
2. Горшков А.Г., Трошин В.Н., Шалашилин В.И. Сопротивление материалов: Учеб. пос. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
3. Копнов В.А., Кривошапко С.Н. Сопротивление материалов: Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2005. – 351 с.
4. Сопротивление материалов: Учеб. пос. – 3-е изд., перераб. и доп. / Н.А. Костенко, С.В. Балясникова, Ю.Э. Волошановская и др.; Под ред. Н.А. Костенко. – М.: Высш. шк., 2007. – 351 с.
5. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности: Основы теории с примерами расчетов: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 286 с.
6. Варданян Г.С., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов (с основами строительной механики): Учебник. – М.: Инфра-М, 2003. – 480 с.
7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1996.
8. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Сопротивление материалов: Наук. думка, 1988. – 736 с.
9. Вишукуров Е.Ф., Балыкин М.К., Голубев И.А. Справочник по сопротивлению материалов. – Минск: Наука и техника, 1988. – 463 с.