ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ
Методические указания и задания к расчетно-графической работе
для студентов очной формы обучения строительных специальностей

Предлагаемые методические указания содержат примеры решения типовых задач, входящих в состав расчетно-графической работы по курсу «Сопротивление материалов», посвященной рассмотрению расчетов балок на прочность и жесткость. Предназначены для студентов 2-го курса всех строительных специальностей очной формы обучения.

1. РАСЧЕТ ДЕРЕВЯННОЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ

Строим эпюры внутренних силовых факторов в заданной консольной балке. Используя ранее построенные эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x, определяем величину и направление опорных реакций балки: $M_A = 7{,}5$ кНм; $V_A = 5$ кН.

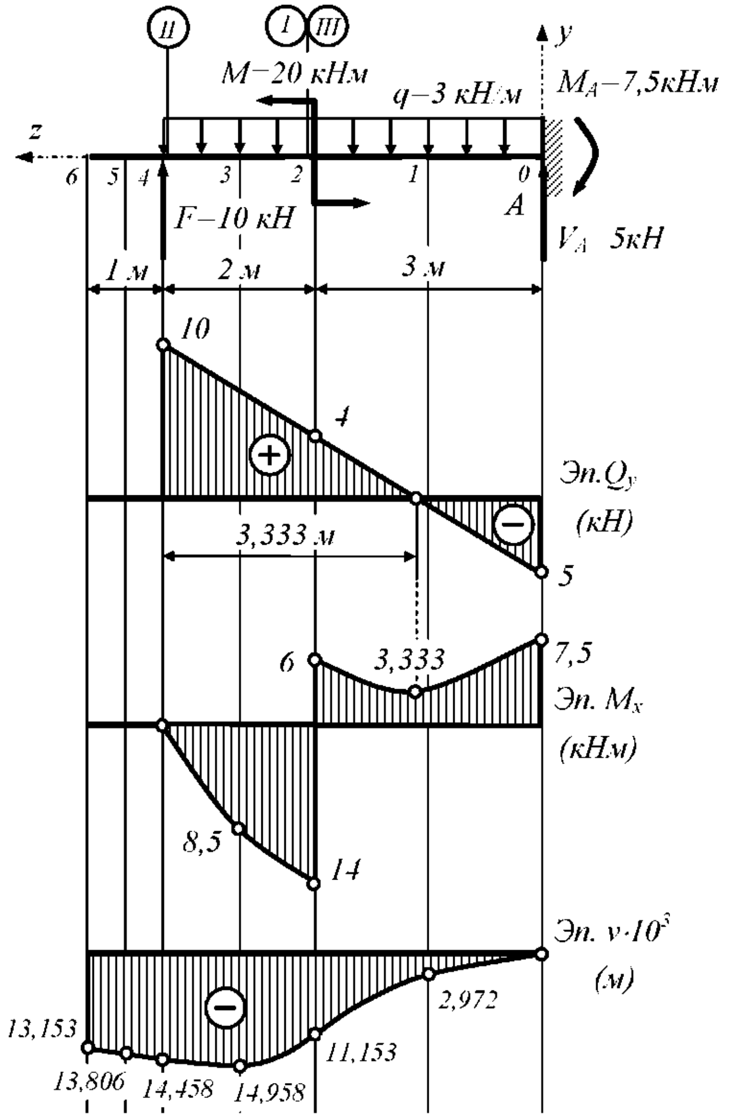

Рис. 1.1. Эпюры в заданной балке

Исходя из построенных эпюр Q_y и M_x, определяем положение опасных сечений трех типов:

– сечение первого типа соответствует точке, где возникает максимальный по модулю изгибающий момент. В этом сечении действуют максимальные нормальные напряжения;
– сечение второго типа соответствует точке, где возникает максимальная по модулю поперечная сила. В этом сечении будут действовать максимальные касательные напряжения;
– сечение третьего типа соответствует точке, где возникают значительные изгибающие моменты и соответствующие им поперечные силы. В этом сечении строят эпюры распределения главных напряжений по его высоте. В рассматриваемом примере опасные сечения первого и третьего типов находятся в точке, расположенной на бесконечно малом расстоянии левее сосредоточенного момента $M = 20$ кНм. Опасное сечение второго типа находится в точке, расположенной на бесконечно малом расстоянии правее сосредоточенной силы $F = 10$ кНм.

Запишем условие прочности при изгибе по максимальным нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \le R = 10\,\text{МПа},$$

где $R = 10$ МПа – расчетное сопротивление дерева;

W_x – момент сопротивление круглого сечения балки, $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$.

Тогда требуемый диаметр круглого поперечного сечения равен:

$$d_{нес} \ge \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{max}}{\pi \cdot R}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 14 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 10 \cdot 10^6}} = 0{,}243\,\text{м}.$$

Округляем полученную величину диаметра в большую сторону до целых сантиметров и принимаем $d = 25$ см. Момент инерции принятого поперечного сечения равен:

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3{,}14 \cdot 25^4}{64} = 19165{,}04\,\text{см}^4 = 1{,}9165 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^4.$$

Выполняем расчет балки на жесткость, для чего необходимо построить эпюру прогибов балки. При построении эпюры прогибов будем использовать уравнение метода начальных параметров:

$$EJ_x v_{(i)} = EJ_x v_{(0)}\Big|_0^6 + EJ_x \theta_{(0)} z_{(i)}\Big|_0^6 + \frac{V_A z_{(i)}^3}{6}\Big|_0^6 - \frac{M_A z_{(i)}^2}{2}\Big|_0^6 - \frac{q z_{(i)}^4}{24}\Big|_0^6 + \frac{M\left(z_{(i)} - 3\right)^2}{2}\Big|_3^6 +$$

$$+ \frac{F\left(z_{(i)} - 5\right)^3}{6}\Big|_5^6 + \frac{q\left(z_{(i)} - 5\right)^4}{24}\Big|_5^6.$$

При использовании записанного уравнения следует помнить, что в выбранной системе координат положительные изгибающие моменты создают положительные вертикальные перемещения.

Начальные параметры $v_{(0)}$ и $\theta_{(0)}$ определяем из условия закрепления балки. В точке A расположено защемление, препятствующее вертикальным и угловым перемещениям балки. Следовательно, начальные параметры рассматриваемой задачи $v_{(0)} = 0$ и $\theta_{(0)} = 0$.

Жесткость при изгибе подобранного круглого поперечного сечения балки равна $EJ_x = 1 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}9165 \cdot 10^{-4} = 1916{,}5$ кНм^2. Используя найденные значения начальных параметров, определяем ординаты эпюры прогибов в расчетных сечениях:

– сечение 1: $z_{(1)} = 1{,}5$ м; $EJ_x v_{(1)} = \frac{5 \cdot 1{,}5^3}{6} - \frac{7{,}5 \cdot 1{,}5^2}{2} - \frac{3 \cdot 1{,}5^4}{24} = -5{,}695$ кНм^2;

$$v_{(1)} = \frac{-5{,}695}{1916{,}5} = -2{,}972 \cdot 10^{-3}\,\text{м};$$

– сечение 2: $x_{(2)} = 3$ м; $EJ_x v_{(2)} = \frac{5 \cdot 3^3}{6} - \frac{7{,}5 \cdot 3^2}{2} - \frac{3 \cdot 3^4}{24} = -21{,}375$ кНм^2;

$$v_{(2)} = \frac{-21{,}375}{1916{,}5} = -11{,}153 \cdot 10^{-3}\,\text{м};$$

– сечение 3: $x_{(3)} = 4$ м;

$$EJ_x v_{(3)} = \frac{5 \cdot 4^3}{6} - \frac{7{,}5 \cdot 4^2}{2} - \frac{3 \cdot 4^4}{24} + \frac{20 \cdot (4-3)^2}{2} = -28{,}667\,\text{кНм}^2;$$

$$v_{(3)} = \frac{-28{,}667}{1916{,}5} = -14{,}958 \cdot 10^{-3}\,\text{м};$$

– сечение 4: $x_{(4)} = 5$ м;

$$EJ_x v_{(4)} = \frac{5 \cdot 5^3}{6} - \frac{7{,}5 \cdot 5^2}{2} - \frac{3 \cdot 5^4}{24} + \frac{20 \cdot (5-3)^2}{2} = -27{,}708\,\text{кНм}^2;$$

$$v_{(4)} = \frac{-27{,}708}{1916{,}5} = -14{,}458 \cdot 10^{-3}\,\text{м};$$

– сечение 5: $x_{(5)} = 5{,}5$ м;

$$EJ_x v_{(5)} = \frac{5 \cdot 5{,}5^3}{6} - \frac{7{,}5 \cdot 5{,}5^2}{2} - \frac{3 \cdot 5{,}5^4}{24} + \frac{20 \cdot (5{,}5-3)^2}{2} + \frac{10 \cdot (5{,}5-5)^3}{6} + \frac{3 \cdot (5{,}5-5)^4}{24} =$$

$$= -26{,}458\,\text{кНм}^2;$$

$$v_{(5)} = \frac{-26{,}458}{1916{,}5} = -13{,}806 \cdot 10^{-3}\,\text{м};$$

– сечение 6: $x_{(6)} = 6$ м;

$$EJ_x v_{(6)} = \frac{5 \cdot 6^3}{6} - \frac{7{,}5 \cdot 6^2}{2} - \frac{3 \cdot 6^4}{24} + \frac{20 \cdot (6-3)^2}{2} + \frac{10 \cdot (6-5)^3}{6} + \frac{3 \cdot (6-5)^4}{24} =$$

$$= -25{,}208\,\text{кНм}^2;\; v_{(6)} = v_{(B)} = \frac{-25{,}208}{1916{,}5} -13{,}153 \cdot 10^{-3}\,\text{м}.$$

Проверка жесткости балки. Условие жесткости: $[f] \geq v_{max}$. Как следует из эпюры прогибов балки, максимальное вертикальное перемещение равно $|v_{max}| = 1{,}446$ см. Для деревянных конструкций величина допускаемого прогиба определяется из следующего условия:

$$\left[\frac{f}{l}\right] = \frac{1}{300},$$

здесь l – вылет консоли балки.

Следовательно, величина допускаемого прогиба балки равна

$$[f] = \frac{l}{300} = \frac{6{,}0}{300} = 2 \cdot 10^{-2}\,\text{м} = 2\ \text{см}.$$

Условие жесткости балки $v_{max} = 1{,}446\,\text{см} < [f] = 2\,\text{см}$ выполняется. Таким образом, принятые размеры поперечного сечения удовлетворяют условиям прочности и жесткости.

2. РАСЧЕТ СТАЛЬНОЙ ДВУХОПОРНОЙ БАЛКИ

Определяем величину опорных реакций заданной балки:

$$\sum m_A = 0\ V_B = -\frac{10 + 4 \cdot 4^2 / 2 - 10 \cdot 2 - 20 \cdot 1 - 20}{4} = -4{,}5\,\text{кН};$$

$$\sum m_B = 0;\ V_A = \frac{20 + 4 \cdot 4^2 / 2 - 10 \cdot 2 + 20 \cdot 5 - 10}{4} = 30{,}5\,\text{кН};$$

Проверка:

$\sum y = 0;\ V_A - V_B - F_1 + F_2 - q \cdot 4 = 0;\quad 30{,}5 - 4{,}5 - 20 + 10 - 4 \cdot 4 = 0$, следовательно, опорные реакции найдены верно.

Используя полученные значения опорных реакций, строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x. Исходя из построенных эпюр, определяем положение опасных сечений трех типов:

- сечение первого типа соответствует точке, где возникает максимальный по модулю изгибающий момент. В этом сечении действуют максимальные нормальные напряжения;
- сечение второго типа соответствует точке, где возникает максимальная по модулю поперечная сила. В этом сечении будут действуют максимальные касательные напряжения;
- сечение третьего типа соответствует точке, где возникают значительные изгибающие моменты и соответствующие им поперечные силы. В этом сечении строят эпюры распределения главных напряжений по его высоте.

В рассматриваемом примере сечения всех трех типов находятся в точке, расположенной на бесконечно малом расстоянии левее опоры A. Величина внутренних усилий в этих сечениях равна: $M_x = -20\,\text{кНм}$ и $Q_y = -20\,\text{кН}$.

Условие прочности при изгибе по максимальным нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \le R = 160\,\text{МПа}.$$

Вычисляем требуемый момент сопротивления поперечного сечения балки:

$$W_{nec} = \frac{M_{x,max}}{R} = \frac{20 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 125 \cdot 10^{-6}\,\text{м}^3 = 125\,\text{см}^3.$$

Определяем размеры поперечных сечений заданных типов:

– круглое поперечное сечение:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}\ \ d_{nec} \ge \sqrt[3]{\frac{32 W_{nec}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 125}{3{,}14}} = 10{,}84\,\text{см, принимаем } d = 109\,\text{мм}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 10{,}9^2}{4} = 93{,}27\,\text{см}^2;$$

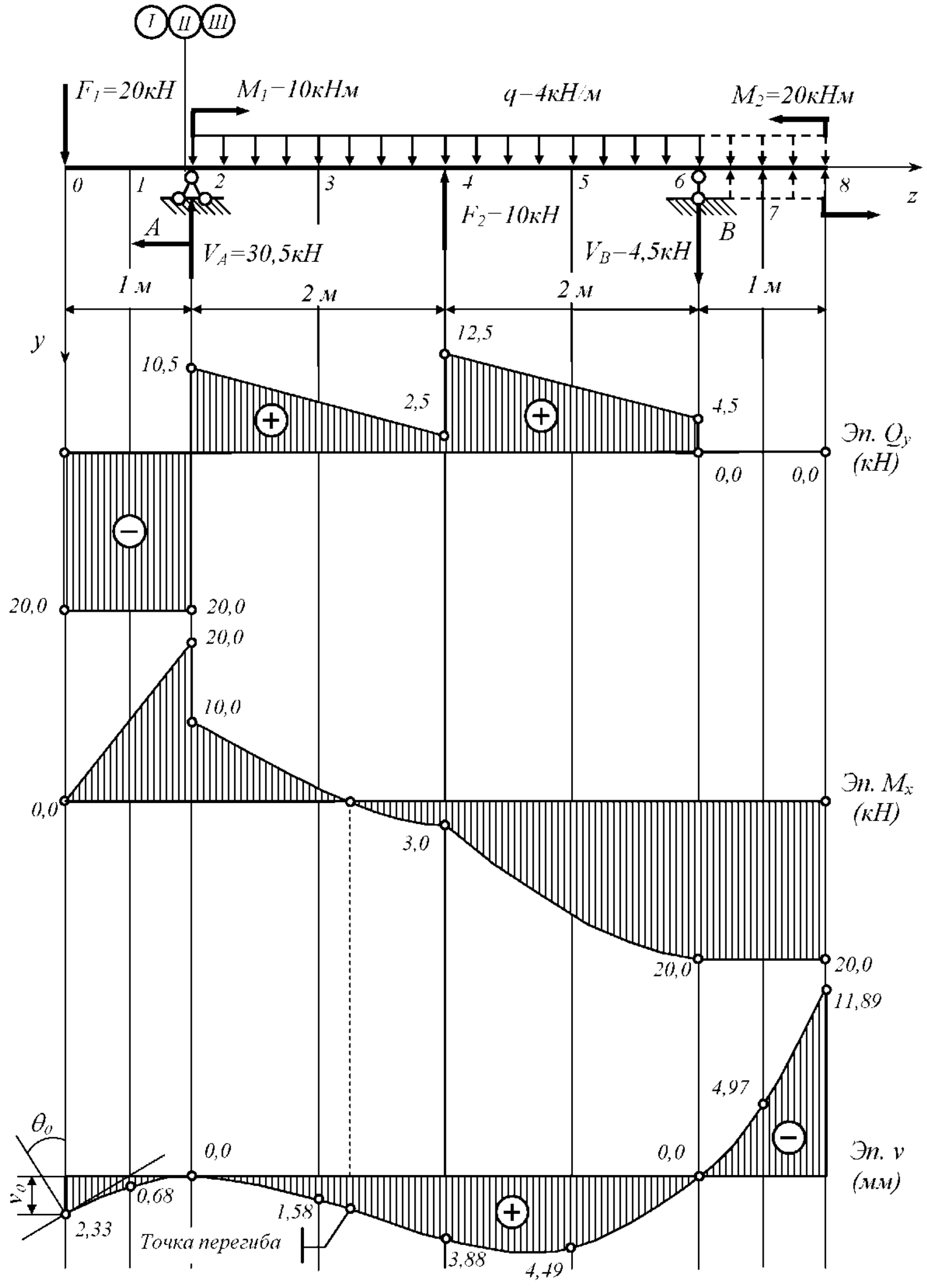

Рис. 2.1. Эпюры внутренних силовых факторов и перемещений заданной стальной балки

– квадратное поперечное сечение:

$W_x = \frac{a^3}{6}$ $a_{нес} \geq \sqrt[3]{6W_{нес}} = \sqrt[3]{6 \cdot 125} = 9{,}09$ см, принимаем $a = 91$ мм

$A = a^2 = 9{,}1^2 = 82{,}81$ см^2;

– прямоугольное поперечное сечение с соотношением сторон $h/b = 2/1$:

$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{4b^3}{6}$ $b_{нес} \geq \sqrt[3]{\frac{6W_{нес}}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 125}{4}} = 5{,}72$ см, принимаем $b = 58$ мм $h = 2 \cdot 58 = 116$ мм; $A = ah = 5{,}8 \cdot 11{,}6 = 67{,}28$ см^2;

– прямоугольное поперечное сечение с соотношением сторон $h/b = 3/1$:

$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{9b^3}{6}$ $b_{нес} \geq \sqrt[3]{\frac{6W_{нес}}{9}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 125}{9}} = 4{,}37$ см, принимаем $b = 44$ мм $h = 3 \cdot 44 = 132$ мм; $A = ah = 4{,}4 \cdot 13{,}2 = 58{,}08$ см^2;

– сечение, составленное из двух швеллеров, сложенных полками:

$W_{x\,шв} \geq \frac{W_{нес}}{2} = \frac{125}{2} = 62{,}5$ см^3, по сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8240-89) принимаем швеллер №14 с $W_{шв} = 70{,}2$ см^3 и $A_{шв} = 31{,}2$ см^2. Общая площадь составного сечения $A = 31{,}2 \cdot 2 = 62{,}4$ см^2.

– двутавровое сечение: $W_x \geq W_{нес} = 125$ см^3, по сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-89) принимаем двутавр №18 с $W_x = 143$ см^3, $A_x = 23{,}4$ см^2, $S_x = 81{,}4$ см^3, $J_x = 1290$ см^4, $h = 180$ мм, $b = 90$ мм, $d = 5{,}1$ мм и $t = 8{,}1$ мм.

Сравнивая площади подобранных сечений приходим к выводу, что наиболее рациональным по расходу материала является двутавровое сечения, которое обладает минимальной площадью. Указанное сечение принимаем для дальнейших расчетов.

Используя формулу Журавского, проверяем подобранное двутавровое сечение по максимальным касательным напряжениям:

$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{x,max}^{отс}}{J_x b_x} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 81{,}4 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-3}} = 24{,}75$ МПа $< R_s = 100$ МПа, следовательно, условие прочности сечения по максимальным касательным напряжениям выполняется.

Строим эпюры распределения нормальных, касательных и главных напряжений по высоте сечения по формулам:

$$\sigma_{(i)} = \frac{M_x \cdot y_{(i)}}{J_x}; \quad \tau_{(i)} = \frac{Q \cdot S_{x(i)}}{J_x \cdot b_{(i)}}; \quad \sigma_{1,3(i)} = \frac{\sigma_{(i)}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{(i)}^2 + 4\tau_{(i)}^2}.$$

Построения ведем для опасного сечения третьего типа, для которого $M_x = -20$ кНм и $Q_y = -20$ кН. Напряжения вычисляем в точках 1-7 двутаврового сечения (рис. 2).

Точка 1: $y_{(1)} = -\frac{h}{2} = -\frac{18}{2} = -9$ см; $\sigma_{(1)} = \frac{(-20)\cdot 10^3 \cdot (-9)\cdot 10^{-2}}{1290\cdot 10^{-8}} = 139{,}53$ МПа;

$S_{x(1)}^{отс} = 0$; $\tau_{(1)} = 0$; $\sigma_{1,3(1)} = \frac{139{,}53}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{139{,}53^2 + 4\cdot 0^2} = 69{,}765 \pm 69{,}765$ МПа;

$\sigma_{1(1)} = 139{,}53$ МПа; $\sigma_{3(1)} = 0$ МПа.

Точка 2: $y_{(2)} = -\left(\frac{h}{2} - t\right) = -\left(\frac{18}{2} - 0{,}81\right) = -8{,}19$ см;

$\sigma_{(2)} = \frac{(-20)\cdot 10^3 \cdot (-8{,}19)\cdot 10^{-2}}{1290\cdot 10^{-8}} = 126{,}98$ МПа;

$S_{x(2)}^{отс} = A_{(2)}^{отс} \cdot y_{c(3)}^{отс} = b\cdot t\cdot\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 9\cdot 0{,}81\cdot\left(\frac{18}{2} - \frac{0{,}81}{2}\right) = 62{,}66$ см^3.

Рассматриваем сечение со стороны полки: $b'_{(2)} = b = 90$ мм;

$\tau'_{(2)} = \frac{(-20)\cdot 10^3 \cdot 62{,}66\cdot 10^{-6}}{1290\cdot 10^{-8}\cdot 9\cdot 10^{-2}} = -1{,}08$ МПа;

$\sigma'_{1,3(2)} = \frac{126{,}98}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{126{,}98^2 + 4\cdot 1{,}08^2} = 63{,}49 \pm 63{,}50$ МПа;

$\sigma'_{1(2)} = 126{,}99$ МПа; $\sigma'_{3(2)} = -0{,}01$ МПа.

Рассматриваем сечение со стороны стенки: $b''_{(2)} = d = 5{,}1$ мм;

$\tau''_{(2)} = \frac{(-20)\cdot 10^3 \cdot 62{,}66\cdot 10^{-6}}{1290\cdot 10^{-8}\cdot 5{,}1\cdot 10^{-3}} = -19{,}05$ МПа;

$\sigma''_{1,3(2)} = \frac{126{,}98}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{126{,}98^2 + 4\cdot 19{,}05^2} = 63{,}49 \pm 66{,}29$ МПа;

$\sigma''_{1(2)} = 129{,}78$ МПа; $\sigma''_{3(2)} = -2{,}80$ МПа.

Точка 3: $y_{(3)} = -\frac{h}{4} = -\frac{18}{4} = -4{,}5$ см; $\sigma_{(3)} = \frac{(-20)\cdot 10^3 \cdot (-4{,}5)\cdot 10^{-2}}{1290\cdot 10^{-8}} = 69{,}77$ МПа;

$$S_{x(3)}^{отс} = A_{(3)}^{отс} \cdot y_{c(3)}^{отс} = S_{x(2)}^{отс} + \left(y_{(3)} - t\right)\cdot d\cdot\left(\frac{h}{2} - \frac{y_{(3)} - t}{2} - t\right) =$$

$$= 62{,}66 + (4{,}5 - 0{,}81)\cdot 0{,}51\cdot\left(\frac{18}{2} - \frac{4{,}5 - 0{,}81}{2} - 0{,}81\right) = 74{,}46 \text{ см}^3.$$

$b_{(3)} = d = 5{,}1$ мм; $\tau_{(3)} = \frac{(-20)\cdot 10^3 \cdot 74{,}46\cdot 10^{-6}}{1290\cdot 10^{-8}\cdot 5{,}1\cdot 10^{-2}} = -22{,}64$ МПа;

$\sigma_{1,3(3)} = \frac{69{,}77}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{69{,}77^2 + 4\cdot 22{,}74^2} = 34{,}89 \pm 41{,}59$ МПа;

$\sigma_{1(3)} = 76{,}48$ МПа; $\sigma_{3(3)} = -6{,}70$ МПа.

Точка 4: $y_{(4)} = 0$ см; $\sigma_{(4)} = 0$ МПа; $S_{x(4)}^{отс} = S_{x,max}^{отс} = 81{,}4$ см^3. $b_{(4)} = d = 5{,}1$ мм;

$$\tau_{(4)} = \frac{(-20)\cdot 10^3 \cdot 81{,}4 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-2}} = -24{,}75\,\text{МПа};$$

$$\sigma_{1,3(4)} = \frac{0}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 4 \cdot 24{,}75^2} = 0 \pm 24{,}75\,\text{МПа};$$

$\sigma_{1(4)} = 24{,}75\,\text{МПа}$; $\sigma_{3(4)} = -24{,}75\,\text{МПа}$.

Точка 7: $y_{(7)} = \dfrac{h}{2} = \dfrac{18}{2} = 9\,\text{см}$; $\sigma_{(7)} = \dfrac{(-20)\cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^{-2}}{1290 \cdot 10^{-8}} = -139{,}53\,\text{МПа}$;

$S_{x(7)}^{отс} = 0$; $\tau_{(7)} = 0$; $\sigma_{1,3(7)} = -\dfrac{139{,}53}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{139{,}53^2 + 4 \cdot 0^2} = -69{,}765 \pm 69{,}765\,\text{МПа}$;

$\sigma_{1(7)} = 0\,\text{МПа}$; $\sigma_{3(7)} = -139{,}53\,\text{МПа}$.

Точка 6: $y_{(6)} = \dfrac{h}{2} - t = \dfrac{18}{2} - 0{,}81 = 8{,}19\,\text{см}$;

$$\sigma_{(6)} = \frac{(-20)\cdot 10^3 \cdot 8{,}19 \cdot 10^{-2}}{1290 \cdot 10^{-8}} = -126{,}98\,\text{МПа};$$

$$S_{x(6)}^{отс} = A_{(6)}^{отс} \cdot y_{c(6)}^{отс} = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 9 \cdot 0{,}81 \cdot \left(\frac{18}{2} - \frac{0{,}81}{2}\right) = 62{,}66\,\text{см}^3.$$

Рассматриваем сечение со стороны полки: $b'_{(6)} = b = 90\,\text{мм}$;

$$\tau'_{(6)} = \frac{(-20)\cdot 10^3 \cdot 62{,}66 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 9 \cdot 10^{-2}} = -1{,}08\,\text{МПа};$$

$$\sigma'_{1,3(6)} = -\frac{126{,}98}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{126{,}98^2 + 4 \cdot 1{,}08^2} = -63{,}49 \pm 63{,}50\,\text{МПа};$$

$\sigma'_{1(6)} = 0{,}01\,\text{МПа}$: $\sigma'_{3(6)} = -126{,}99\,\text{МПа}$.

Рассматриваем сечение со стороны стенки: $b''_{(6)} = d = 5{,}1\,\text{мм}$;

$$\tau''_{(6)} = \frac{(-20)\cdot 10^3 \cdot 62{,}66 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-3}} = -19{,}05\,\text{МПа};$$

$$\sigma''_{1,3(5)} = -\frac{126{,}98}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{126{,}98^2 + 4 \cdot 19{,}05^2} = -63{,}49 \pm 66{,}29\,\text{МПа};$$

$\sigma''_{1(6)} = 2{,}80\,\text{МПа}$; $\sigma''_{3(6)} = -129{,}78\,\text{МПа}$.

Точка 5: $y_{(5)} = \dfrac{h}{4} = \dfrac{18}{4} = 4{,}5\,\text{см}$; $\sigma_{(5)} = \dfrac{(-20)\cdot 10^3 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-2}}{1290 \cdot 10^{-8}} = -69{,}77\,\text{МПа}$;

$$S_{x(5)}^{отс} = A_{(5)}^{отс} \cdot y_{c(5)}^{отс} = S_{x(6)}^{отс} + \left(y_{(5)} - t\right) \cdot d \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{y_{(5)} - t}{2} - t\right) =$$

$$= 62{,}66 + (4{,}5 - 0{,}81) \cdot 0{,}51 \cdot \left(\frac{18}{2} - \frac{4{,}5 - 0{,}81}{2} - 0{,}81\right) = 74{,}46\,\text{см}^3.$$

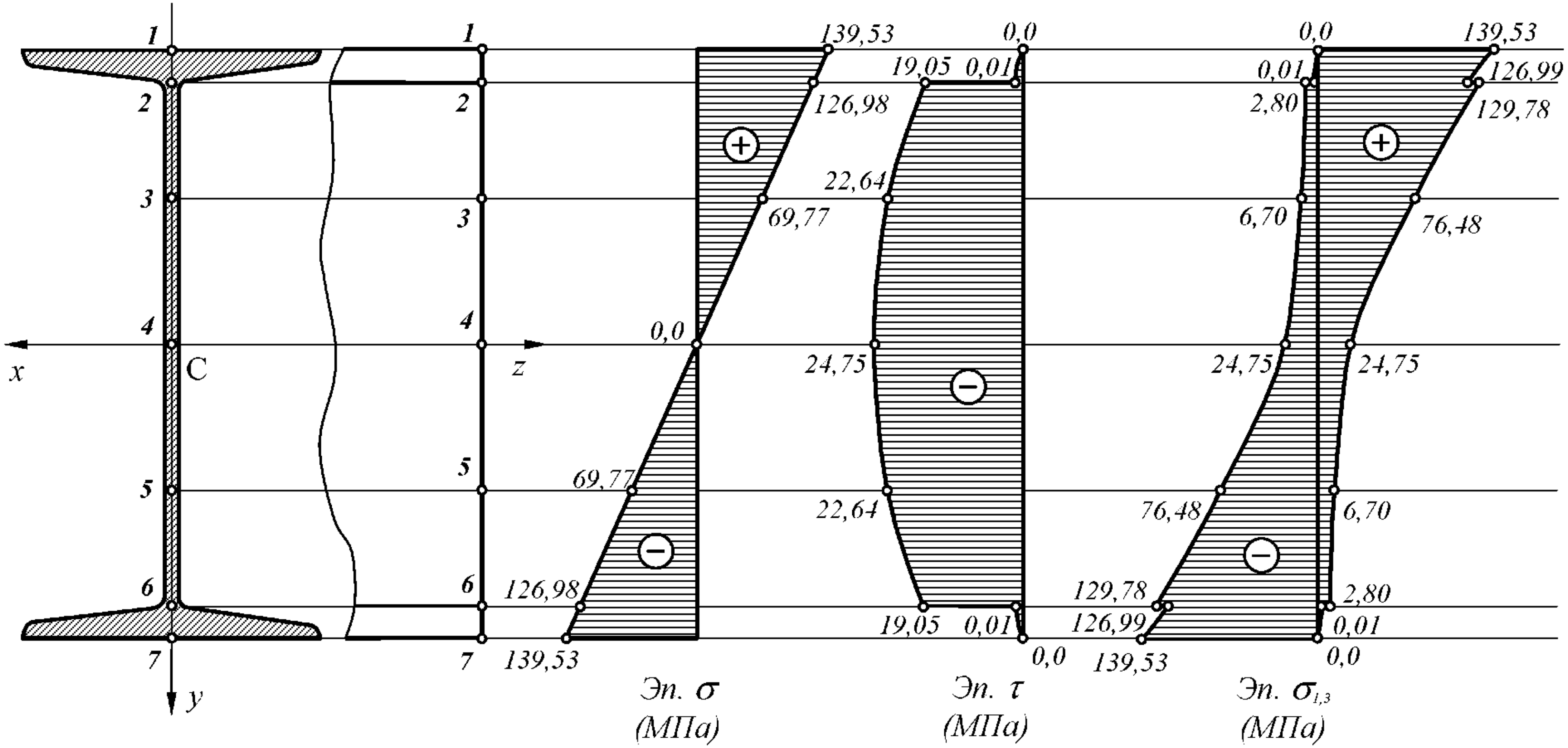

Рис. 2.2. Эпюры распределения напряжений по высоте сечения стальной двутавровой балки

$b_{(5)} = d = 5{,}1\text{мм};\ \tau_{(5)} = \dfrac{(-20)\cdot 10^3 \cdot 74{,}46\cdot 10^{-6}}{1290\cdot 10^{-8}\cdot 5{,}1\cdot 10^{-2}} = -22{,}64\,\text{МПа};$

$\sigma_{1,3(5)} = -\dfrac{69{,}77}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{69{,}77^2 + 4\cdot 22{,}74^2} = -34{,}89 \pm 41{,}59\,\text{МПа};$

$\sigma_{1(3)} = 6{,}70\,\text{МПа};\ \sigma_{3(5)} = -76{,}48\,\text{МПа}.$

По полученным значениям строим искомые эпюры (рис. 2).

Выполняем расчет балки на жесткость, для чего необходимо построить эпюру прогибов балки. При построении эпюры прогибов будем использовать уравнение метода начальных параметров:

$$EJ_x v_{(i)} = EJ_x v_{(0)}\Big|_0^6 + EJ_x \theta_{(0)} z_{(i)}\Big|_0^6 + \frac{F_1 z_{(i)}^3}{6}\Big|_0^6 - \frac{V_A (z_{(i)}-1)^3}{6}\Big|_1^6 - \frac{M_1 (z_{(i)}-1)^2}{2}\Big|_1^6 +$$

$$+\frac{q(z_{(i)}-1)^4}{24}\Big|_1^6 - \frac{F_2 (z_{(i)}-3)^3}{6}\Big|_3^6 + \frac{V_B (z_{(i)}-5)^3}{6}\Big|_5^6 - \frac{q(z_{(i)}-5)^4}{24}\Big|_5^6.$$

Следует помнить, что в принятой системе координат отрицательный изгибающий момент создает положительные перемещения.

Начальные параметры $v_{(0)}$ и $\theta_{(0)}$ определяем из условия закрепления балки. В точках A и B расположены опорные устройства, препятствующие вертикальным перемещениям балки. Запишем уравнения метода начальных параметров для указанных точек:

$z_{(A)} = 1$ м;

$$EJ_x v_{(A)} = EJ_x v_{(0)} + EJ_x \theta_{(0)}\cdot 1 + \frac{20\cdot 1^3}{6} = 0;$$

$z_{(B)} = 5$ м;

$$EJ_x v_{(B)} = EJ_x v_{(0)} + EJ_x \theta_{(0)} 5 + \frac{20\cdot 5^3}{6} - \frac{30{,}5\cdot(5-1)^3}{6} - \frac{10(5-1)^2}{2} + \frac{4(5-1)^4}{24} - \frac{10\cdot(5-3)^3}{6} = 0.$$

Решаем полученную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} EJ_x v_{(A)} = EJ_x v_{(0)} + EJ_x\theta_{(0)}\cdot 1 + 3{,}333 = 0 \\ EJ_x v_{(B)} = EJ_x v_{(0)} + EJ_x\theta_{(0)}\cdot 5 + 40{,}667 = 0 \end{cases}$$

$EJ_x\theta_{(0)} = -9{,}333$ кНм^2; $EJ_x v_{(0)} = 6$ кНм^3. Жесткость подобранного сечения при изгибе равна $EJ_x = 2\cdot 10^{11}\cdot 1290\cdot 10^{-8} = 2580$ кНм^2, тогда величина перемещений в начале координат равна:

– угол поворота сечения $\theta_{(0)} = -\dfrac{9{,}333}{EJ_x} = -\dfrac{9{,}333}{2580} = -3{,}62\cdot 10^{-3}$ рад;

– вертикальное перемещение $v_{(0)} = \dfrac{6}{EJ_x} = \dfrac{6}{2580} = 2{,}33\cdot 10^{-3}$м.

Используя найденные значения начальных параметров, определяем ординаты эпюры прогибов в расчетных точках:

– точка 1: $z_{(1)} = 0{,}5$ м; $EJ_x v_{(1)} = 6 - 9{,}333 \cdot 0{,}5 + \dfrac{20 \cdot 0{,}5^3}{6} = 1{,}75$ кНм^2;

$$v_{(1)} = \frac{1{,}75}{2580} = 0{,}68 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

– точка 2: $z_{(2)} = 1$ м; $EJ_x v_{(2)} = 6 - 9{,}333 \cdot 1 + \dfrac{20 \cdot 1^3}{6} = 0{,}0003 \approx 0$; $v_{(2)} = v_{(A)} = 0$ м;

– точка 3: $z_{(3)} = 2$ м;

$$EJ_x v_{(3)} = 6 - 9{,}333 \cdot 2 + \frac{20 \cdot 2^3}{6} - \frac{30{,}5 \cdot (2-1)^3}{6} - \frac{10 \cdot (2-1)^2}{2} + \frac{4 \cdot (2-1)^4}{24} = 4{,}08 \text{ кНм}^2;$$

$$v_{(3)} = \frac{10{,}0}{2580} = 1{,}58 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

– точка 4: $z_{(4)} = 3$ м;

$$EJ_x v_{(4)} = 6 - 9{,}333 \cdot 3 + \frac{20 \cdot 3^3}{6} - \frac{30{,}5 \cdot (3-1)^3}{6} - \frac{10 \cdot (3-1)^2}{2} + \frac{4 \cdot (3-1)^4}{24} = 10{,}01 \text{ кНм}^2;$$

$$v_{(4)} = \frac{10{,}01}{2580} = 3{,}88 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

– точка 5: $z_{(5)} = 4$ м;

$$EJ_x v_{(5)} = 6 - 9{,}333 \cdot 4 + \frac{20 \cdot 4^3}{6} - \frac{30{,}5 \cdot (4-1)^3}{6} - \frac{10 \cdot (4-1)^2}{2} + \frac{4 \cdot (4-1)^4}{24} -$$

$$-\frac{10 \cdot (4-3)^3}{6} = 11{,}585 \text{ кНм}^2; \quad v_{(5)} = \frac{11{,}585}{2580} = 4{,}49 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

– точка 6: $z_{(6)} = 5$ м;

$$EJ_x v_{(6)} = 6 - 9{,}333 \cdot 5 + \frac{20 \cdot 5^3}{6} - \frac{30{,}5 \cdot (5-1)^3}{6} - \frac{10 \cdot (5-1)^2}{2} + \frac{4 \cdot (5-1)^4}{24} -$$

$$-\frac{10 \cdot (5-3)^3}{6} = 0{,}0017 \text{ кНм}^2; \; v_{(6)} = v_{(B)} = \frac{0{,}0017}{2580} \approx 0 \text{ м};$$

– точка 7: $z_{(7)} = 5{,}5$ м;

$$EJ_x v_{(7)} = 6 - 9{,}333 \cdot 5{,}5 + \frac{20 \cdot 5{,}5^3}{6} - \frac{30{,}5 \cdot (5{,}5-1)^3}{6} - \frac{10 \cdot (5{,}5-1)^2}{2} + \frac{4 \cdot (5{,}5-1)^4}{24} -$$

$$-\frac{10 \cdot (5{,}5-3)^3}{6} + \frac{4{,}5 \cdot (5{,}5-5)^3}{6} - \frac{4 \cdot (5{,}5-5)^4}{24} = -12{,}832 \text{ кНм}^2;$$

$$v_{(7)} = -\frac{12{,}832}{2580} = -4{,}97 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

– точка 8: $z_{(8)} = 6$ м;

$$EJ_x v_{(8)} = 6 - 9{,}333\cdot 6 + \frac{20\cdot 6^3}{6} - \frac{30{,}5\cdot(6-1)^3}{6} - \frac{10\cdot(6-1)^2}{2} + \frac{4\cdot(6-1)^4}{24} -$$

$$- \frac{10\cdot(6-3)^3}{6} + \frac{4{,}5\cdot(6-5)^3}{6} - \frac{4\cdot(6-5)^4}{24} = -30{,}665\,\text{кНм}^2;$$

$$v_{(8)} = -\frac{30{,}665}{2580} = -11{,}89\cdot 10^{-3}\,\text{м}.$$

Проверка жесткости балки. Условие жесткости: $[f] \geq v_{max}$. Как следует из эпюры прогибов балки, максимальное вертикальное перемещение равно $|v_{max}| = 1{,}19\,\text{см}$. Для стальных конструкций величина допускаемого прогиба определяется из следующего условия: $\left[\frac{f}{l}\right] = \frac{1}{250}$. Здесь l – расстояние между опорами или вылет консоли балки. Максимальный прогиб балки возникает на консольном участке вылетом $l = 1\,\text{м}$, следовательно, величина допускаемого прогиба равна $[f] = \frac{l}{250} = \frac{1}{250} = 4\cdot 10^{-3}\,\text{м} = 0{,}4$ см. Условие жесткости балки $v_{max} = 1{,}19\,\text{см} > [f] = 0{,}4\,\text{см}$ не выполняется. Необходимо увеличить размеры поперечного сечения. Назначаем новые размеры двутаврового сечения, для чего максимальный прогиб балки в точке 8 приравняем величине допускаемого прогиба $v_{max} = \frac{30{,}665}{EJ_x} = \frac{30{,}665\cdot 10^3}{2\cdot 10^{11}\cdot J_x} \leq [f] = 4\cdot 10^{-3}\,\text{кНм}^2$, тогда требуемый момент инерции поперечного сечения равен

$$J_{x,нес} \geq \frac{30{,}665\cdot 10^3}{2\cdot 10^{11}\cdot 4\cdot 10^{-3}} = 3833{,}12\cdot 10^{-8} = 3833{,}12\ \text{см}^4.$$

По сортаменту прокатной стали (ГОСТ8239-89) принимаем двутавр №27 с $J_x = 5010$ см^4.Условия прочности по нормальным и касательным напряжениям для нового сечения будут заведомо выполняться.