ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Методические указания к выполнению контрольной работы №1

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Примеры решения задач, приведенные в данном методическом указании, относятся к двум видам простого сопротивления материалов: растяжению-сжатию и кручению.

В целях более глубокого понимания предлагаемых решений студентам необходимо изучить по литературным источникам соответствующие разделы курса «Сопротивление материалов». Особое внимание следует обратить на решения задач приведенные в учебниках. Кроме того, следует самостоятельно изучить раздел курса, посвященный определению геометрических характеристик плоских сечений.

К выполняемым контрольным работам предъявляется следующие требования. Каждая контрольная работа должна состоять из расчетов и пояснений к ним. Расчетные схемы и чертежи эпюр можно выполнять в тетради, но лучше это делать на отдельных листах миллиметровой бумаги.

Все схемы и чертежи должны быть выполнены карандашом и в масштабе, удобном для изображения. Схемы и чертежи должны иметь необходимые числовые размеры.

Расчеты в пояснительной записке должны состоять из озаглавленных частей, соответствующих условию задач.

Расчет должен выполняться в следующей последовательности:

1. Записывается расчетная формула или уравнение в общем виде.
2. В формулы или уравнение, подставляются числовые значения, входящих в них величин и приводится результат вычисления. Промежуточные выкладки следует проводить только для сложных выражений.

Все задачи контрольных работ выполняются строго по шифру. Отклонения от шифра влечет за собой возврат контрольной работы и ее повторное выполнение в соответствии с шифром.

Выполненная контрольная работа передается для рецензирования преподавателю кафедры. Работа, выполненная с ошибками, возвращается студенту. Исправление ошибок производится на отдельных листах, вклеенных в не зачтенную работу, и отсылается на повторное рецензирование.

1. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ИЛИ СЖАТИЕ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

В первом разделе будут рассмотрены статически определимые стержни и стержневые системы, внутренние усилия или реакции связей которых можно определить с помощью уравнений статики.

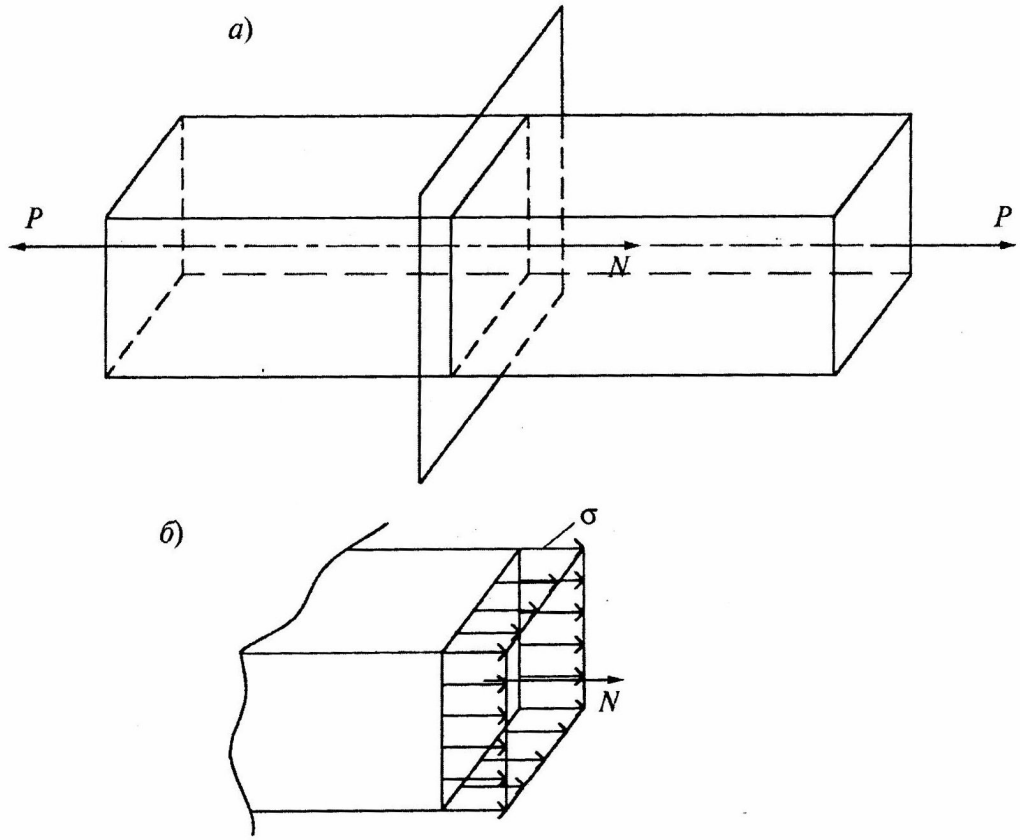
Центральным растяжением (или центральным сжатием) называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении стержня возникает только одно усилие, продольная сила N (растягивающая или сжимающая). При центральном растяжении или сжатии внешние силы, включая опорные реакции, или их равнодействующие, направлены вдоль оси стержня.

Определение продольных сил

Метод сечений позволяет определять продольную силу в поперечном сечении любого силового участка. Стержень рассекают воображаемой плоскостью перпендикулярно его продольной оси, мысленно отбрасывают одну из образовавшихся частей, а действие на оставшуюся часть заменяют неизвестной продольной силой N (рис. 1,а). Далее составляют единственное уравнение равновесия оставшейся части $\sum Z = 0$.

Из этого уравнения определяют значение N, т.е. продольная сила в любом сечении бруса равна сумме проекций внешних сил, действующих на оставшуюся часть, на направление внешней нормали к сечению, взятой с обратным знаком.

Правило знаков



Силу N принято считать положительной при растяжении, т.е. когда она направлена от сечения. При сжатии, наоборот, продольная сила отрицательна и направлена к сечению.

Эпюра (график) продольных сил дает наглядное представление о законе изменения этих сил на каждом силовом участке, стержня. Эпюра позволяет быстро находить опасные сечения стержня.

Силовой участок стержня – это участок, в котором продольная сила действует по одному определенному закону.

Границами силовых участков стержня являются места приложения внешних сил, включая и реакцию заделки стержня.

Напряжения

При центральном растяжении или сжатии в поперечных сечениях стержня возникают равномерно распределенные нормальные напряжения (рис. 1,б), равные отношению продольной силы N к площади поперечного сечения

$$\sigma = \frac{N}{F} \qquad [\text{Н/м}^2] = [\text{Па}] \qquad (1.1)$$

Эпюра напряжений для стержней постоянного сечения аналогична эпюре продольных сил, а при ступенчатом изменении площади сечения стержней, эпюра напряжений имеет скачки не только в местах приложения внешних сил, но и в местах изменения сечения. Это связано с тем, что напряжение обратно пропорционально площади сечения.

Границами участков при построении эпюры напряжений для стержня переменного сечения являются не только места приложения внешних сил, но и места ступенчатого изменения площади сечения.

Оценка прочности элементов конструкции, испытывающих растяжение или сжатие, производится по наибольшему нормальному напряжению.

Условие прочности, которое требуется для нормальной эксплуатации конструкции, записывается в виде:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{N}{F} \le [\sigma], \qquad (1.2)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение (задается в расчетных нормах или в справочниках).

Допускаемые напряжения равны опасным напряжениям $\sigma_{оп}$, деленным на коэффициент запаса прочности n:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{оп}}{n}. \qquad (1.3)$$

Для хрупких материалов за опасные напряжения принимают предел прочности $\sigma_{оп} = \sigma_в$, поэтому

$$[\sigma] = \frac{\sigma_в}{n_1},$$

для пластичных материалов – предел текучести $\sigma_{оп} = \sigma_T$, следовательно,

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_2}.$$

Очевидно, что коэффициент запаса n_1, должен быть больше n_2, так как

после появления пластических деформаций стержень еще не разрушается.

Деформации и перемещения

Напряжения, не превосходящие предела пропорциональности, связаны с относительными деформациями законом Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \tag{1.4}$$

где $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ - относительная деформация;

Δl - абсолютная продольная деформация (удлинение или укорочение участка бруса длиной l с постоянными напряжениями в поперечных сечениях, м;

E - модуль упругости при растяжении, Па.

Под действием продольных сил происходит удлинение или укорочение силовых участков стержня, а, следовательно, и всего стержня. Если на силовом участке продольная сила и площадь поперечного сечения постоянны, то

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l},$$

где l – длина стержня до деформации, м;

l_1 – то же, после деформации.

Подставляя выражения для ε и σ в (1.4), можно получить формулу для определения абсолютного удлинения стержня.

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F} \tag{1.5}$$

В случае, когда величина силы N изменяется в пределах силового участка по известному закону, деформация участка складывается из деформаций бесконечно-малых участков dz, по длине которых величину силы N можно считать постоянной. Тогда, применяя формулу (1.5) можно записать

$$\Delta dz = \frac{N(z)dz}{EF}. \tag{1.6}$$

Полная деформация участка

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dz = \int_0^l \frac{N(z)dz}{EF}; \qquad (1.7)$$

Если на участке с постоянным поперечным сечением действует равномерно распределенная продольная погонная нагрузка $t\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right]$, то усилие $N(z)$ от этой нагрузки будет изменяться по закону

$$N(z) = t\,z\,. \qquad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.7), получим

$$\Delta l_q = \int_0^l \frac{tz\,dz}{EF} = \frac{t}{EF}\int_0^l z\,dz = \frac{t\,l^2}{2EF} = \frac{T\,l}{2EF}, \qquad (1.9)$$

где $T = t\,l$ - равнодействующая равномерно распределенной погонной нагрузки на данном участке.

Для стержня, имеющего несколько силовых участков, абсолютное изменение длины стержня определяется как алгебраическая сумма деформаций отдельных силовых участков:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \ldots + \Delta l_n, \qquad (1.10)$$

где $\Delta l_1, \Delta l_2$ - абсолютные деформации соответствующих силовых участков стержня, определяемые по формуле (1.5) и (1.9).

Перемещение поперечных сечений стержня вдоль его оси обозначается буквой U и является следствием деформации силовых участков стержня.

Перемещение произвольного сечения стержня равно абсолютному удлинению той части стержня, которая заключена между этим сечением и заделкой. Если известно перемещение $U_н$ сечения в начале участка, длиной l, то перемещение $U_к$ сечения в конце участка в котором действует нормальная сила N и, кроме того, по длине участка приложена равномерно распределенная нагрузка, может быть вычислено по формуле

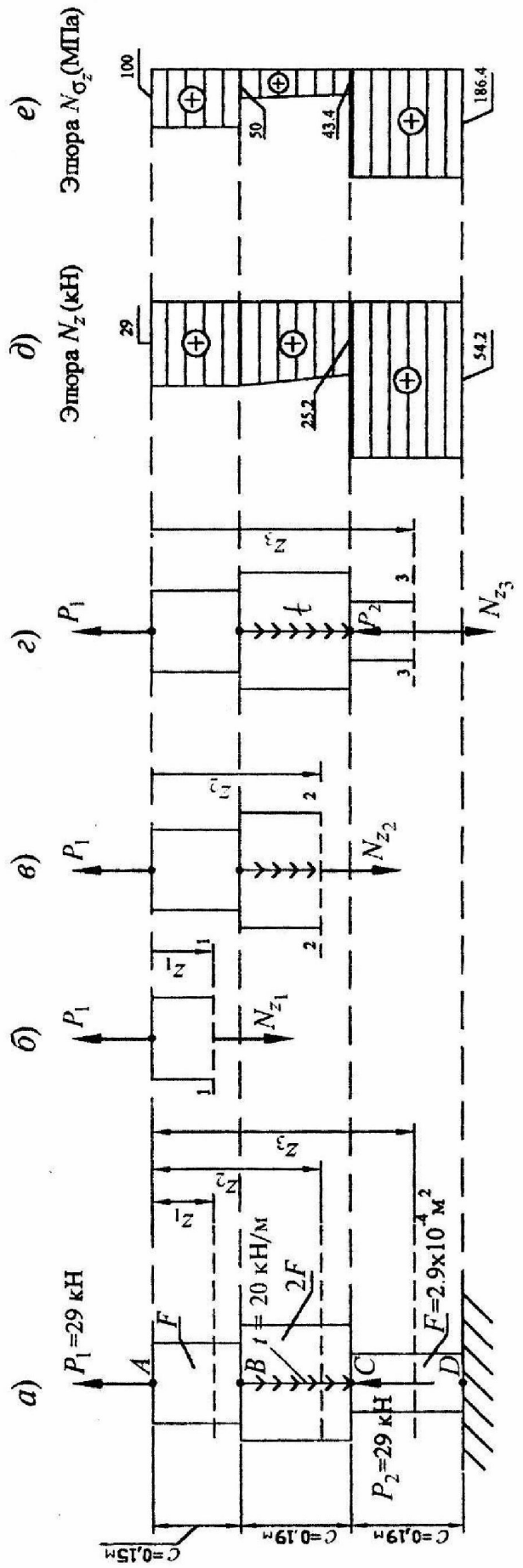
$$U_к = U_н \pm \frac{Nl}{EF} \pm \frac{Tl}{2EF}; \qquad (1.11)$$

Знаки у слагаемых определяются соответствием выбранного положительного направления U и направлением действия сил.

Отсюда следует, что перемещение поперечных сечений стержня может происходить и на участках, не подверженных деформации, а как результат влияния деформации соседних силовых участков. Это основное отличительное свойство перемещения от деформации.

Определяют перемещения по формуле (1.11) и начинают от неподвижного конца, т.е. от заделки.

***Пример* 1**. Стальной стержень (E = 2·10^5 МПа), один конец которого жестко защемлен, другой – свободен, находится под действием продольных сил P и распределенной нагрузки t = 20 кН/м. Продольные силы и нагрузка вызваны взаимодействием стержня с остальными частями механизма, не показанными на схеме. Отдельные участки стержня имеют различную площадь поперечного сечения, F или $2F$ (рис.2,а).


а)
б)
в)
г)
д)
е)
Эпюра N_z(кН)
Эпюра N_{σ_z}(МПа)
P_1=29 кН
P_2=29 кН
t = 20 кН/м
F
$2F$
F=2.9×10^{-4} м^2
A
B
C
D
N_{z_1}
N_{z_2}
N_{z_3}
100
50
43.4
186.4
29
25.2
54.2
c=0,15м
c=0,19м
c=0,19м

Требуется:

1) сделать схематический чертеж бруса по заданным размерам, соблюдая масштаб длин по вертикали;

2) вычислить значения продольной силы N и нормального напряжения σ, построить их эпюры;

3) найти перемещение точки B.

Решение

I. Определение количества участков

Нормальная сила N_z зависит от величин внешних сил, поэтому границами участков будут сечения, в которых приложены эти силы, а также сечения совпадающие с началом (концом) действия распределенной нагрузки.

Таким образом, рассматриваемый брус имеет три самостоятельных участка, начиная со свободного конца:

I участок от A (точка приложения силы P) до B (начало действия распределенной нагрузки)

II участок от B до C (конец действия распределенной нагрузки)

III участок от C до D (точка закрепления бруса).

II. Определение значений продольной силы N

и нормального напряжения σ

Для этой цели воспользуемся методом сечений.

I участок (A – B) $\quad 0 \text{ м} \le z_1 \le 0{,}15 \text{ м}$

Проведем сечение 1–1 на расстоянии z_1 от начала координат (точка A), отбросим нижнюю часть (рис.2). Рассмотрим равновесие верхней отсеченной части. На нее действует только внешняя сила P и продольная сила $N(z)$, показанная в положительном направлении, которая учитывает воздействие нижней отброшенной части (рис. 2,б).

Составим уравнение равновесия и выразим продольную силу, действующую на первом участке:

$$\sum Z = 0; \qquad N(z_1) - P = 0; \qquad N(z_1) = P = 29 \text{ кН}.$$

Для нормального напряжения (при $F_1 = F = \text{const}$):

$$\sigma(z_1) = \frac{N(z_1)}{F_1} = \frac{29}{2{,}9 \cdot 10^{-4}} = 10^5 \text{ кПа} = 100 \text{ МПа}.$$

Полученные величины продольной силы $N(z_1)$ и нормального напряжения $\sigma(z_1)$ не меняются по всей длине первого участка.

II участок (B – C) $\quad 0{,}15 \text{ м} \le z_2 \le 0{,}34 \text{ м}$

Аналогично предыдущему проведем сечение 2–2 на расстоянии z_2 от свободного конца бруса, в пределах II-го участка (рис. 2,в). Для верхней части составим уравнение равновесия $\sum Z = 0$.

В это уравнение войдут: сосредоточенная сила $P = 29$ кН, равнодействующая продольной распределенной нагрузки t по длине отсеченной части второго участка $T(z_2) = q(z_2 - c)$, а также сила $N(z_1)$, показанная в положительном направлении.

При этом уравнение равновесия примет вид:

$$N(z_2) + T(z_2) - P = 0,$$

отсюда

$$N(z_2) = -T(z_2) + P = -t(z_2 - c) + P = -20\,(z_2 - 0{,}15) + 29 = 32 - 20z_2 \text{ кН}.$$

Учитывая постоянство площади поперечного сечения на втором участке, выражение для нормального напряжения может быть записано таким образом:

$$\sigma(z_2) = \frac{N(z_2)}{F_2}$$

Анализируя полученные выражения, видим, что величины продольной силы $N(z_2)$ и $\sigma(z_2)$ имеют линейную зависимость от ординаты

z_2. Поэтому для построения эпюр достаточно определить их значения в начале и конце участка:

при $z_2 = 0{,}15$: $N(0{,}15) = 32 - 2 \cdot 0{,}15 = 29$ кН;

$$\sigma(0{,}15) = \frac{29}{2 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^4 \text{ кПа} = 50 \text{ МПа};$$

при $z_2 = 0{,}34$: $N(0{,}34) = 32 - 20 \cdot 0{,}34 = 25{,}2$ кН;

$$\sigma(0{,}34) = \frac{25{,}2}{2 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-4}} = 4{,}34 \cdot 10^4 \text{ кПа} = 43{,}4\text{МПа}.$$

Проводим сечение 3–3 на расстоянии z_3 от свободного конца бруса, в пределах III-го участка (рис. 2,г).

III участок (C – D) $0{,}34 \text{ м} \le z_3 \le 0{,}53$ м

Уравнение равновесия принимает вид:

$$\sum Z = 0: \qquad N(z_3) - P + T_2 - P = 0,$$

Выразив $N(z_3)$, получаем:

$$N(z_3) = P - T_2 + P = P - t \cdot b + P = 29 - 20 \cdot 0{,}19 + 2{,}9 = 54{,}2 \text{ кН}.$$

Выражение для нормального напряжения может быть записано таким образом: $\sigma(z_3) = \frac{N(z_3)}{F_3}$.

Подставив числовые значения в приведенную формулу, получаем:

$$\sigma(z_3) = \frac{54{,}2}{2{,}9 \cdot 10^{-4}} = 18{,}69 \cdot 10^4 \text{ кПа} = 186{,}9 \text{ МПа}..$$

По полученным значениям строим эпюры N_z и σ_z (рис. 2,д,е). Необходимым условием правильности построения этих графиков является выполнение следующих требований:

– растягивающие усилия N_z и нормальные напряжения σ_z со знаком “+” откладываем влево от базисной линии 0–0, отрицательные вправо;

– если нагрузка равномерно распределена по длине участка, то эпюра ограничена наклонной линией;
– скачок в эпюре N должен находиться в точке приложения сосредоточенного усилия и быть равным по величине значению этой силы;
– скачки в эпюре σ должны совпадать с точками приложения внешней силы P и изменения площади поперечного сечения бруса.

III. Вычисление перемещения точки B

Для определения перемещения точки B стержня необходимо помнить, что смещение сечения зависит от деформации не всего бруса, а лишь некоторой его части между сечением и заделкой. Так в нашем случае перемещение точки B равно суммарному изменению длины участков BC и CD:

$$U_B = \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD}.$$

При вычислении абсолютных деформаций участков можно применить принцип независимости действия сил и формулы (1.5) и (1.9).

На участок CD как внешние силы действуют: $2P$ – растягивающая и T_2 – сжимающая.

$$\Delta l_{CD} = \frac{2P \cdot a}{EF} - \frac{T_2 \cdot a}{EF} = \frac{N_3 \cdot a}{EF} =$$

$$\frac{58 \cdot 0{,}19}{2 \cdot 10^8 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-4}} - \frac{3{,}8 \cdot 0{,}19}{2 \cdot 10^8 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-4}} = \frac{54{,}2 \cdot 0{,}19}{2 \cdot 10^8 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-4}} = 1{,}77 \cdot 10^{-4}\text{ м} = 0{,}177 \cdot 10^{-3}\text{ м}$$

На участок CB как внешняя сила действует P = 29 кН и равномерно распределенная нагрузка t = 20 кН/м.

$$\Delta l_{BC} = \frac{P \cdot b}{2 \cdot EF} - \frac{T_2 b}{2 \cdot 2 \cdot EF} = \frac{29 \cdot 0{,}19}{2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-4}} - \frac{3{,}8 \cdot 0{,}19}{4 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= 0{,}475 \cdot 10^{-4} - 0{,}031 \cdot 10^{-4} = 0{,}444 \cdot 10^{-4}\text{ м} = 0{,}0444 \cdot 10^{-3}\text{ м}.$$

Таким образом,

$$U_B = 0{,}177 \cdot 10^{-3} + 0{,}0444 \cdot 10^{-3} = 0{,}2214 \cdot 10^{-3}\text{ м}.$$

Точка В перемещается вверх.

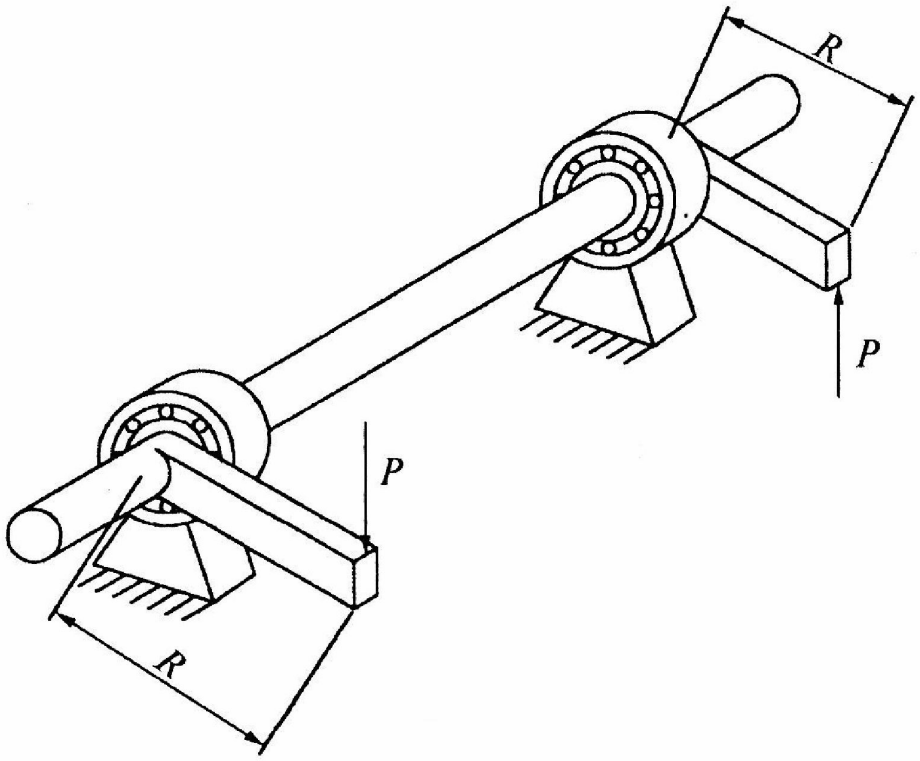
Вопросы для самопроверки

1. Что такое центральное растяжение и сжатие?
2. Что понимается под продольной силой в брусе, и каким способом она определяется?
3. Какое правило знаков принято при определении продольной силы? Какова размерность продольной силы?
4. Что такое эпюра продольной силы? Как она строится и с какой целью?
5. Что такое напряжение? Чем определяется знак напряжения? Какова размерность напряжения? Какие факторы влияют на величину напряжения?
6. Напишите условие прочности при растяжении или сжатии.
7. Что называется абсолютной (полной) продольной деформацией? Напишите формулу абсолютной деформации.
8. Как формулируется закон Гука? Напишите формулы, выражающие закон Гука, для относительной и абсолютной продольной деформации бруса.

II. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Кручением называется такой случай деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – момент относительно продольной оси M_z, который называется крутящим моментом $M_{кр}$.

Стержни, работающие на кручение, называются валами. Кручение валов часто сопровождается изгибом (см. задачу № 7). На рис. 3 показана часть вала, подверженная кручению без изгиба. Силы P с помощью рычагов создают внешние крутящие $M = PR$, не вызывая изгиба, так как в месте прикрепления рычагов размещаются опоры, препятствующие перемещениям направленным перпендикулярно оси вала, но не препятствующим повороту поперечных сечений относительно оси Z.



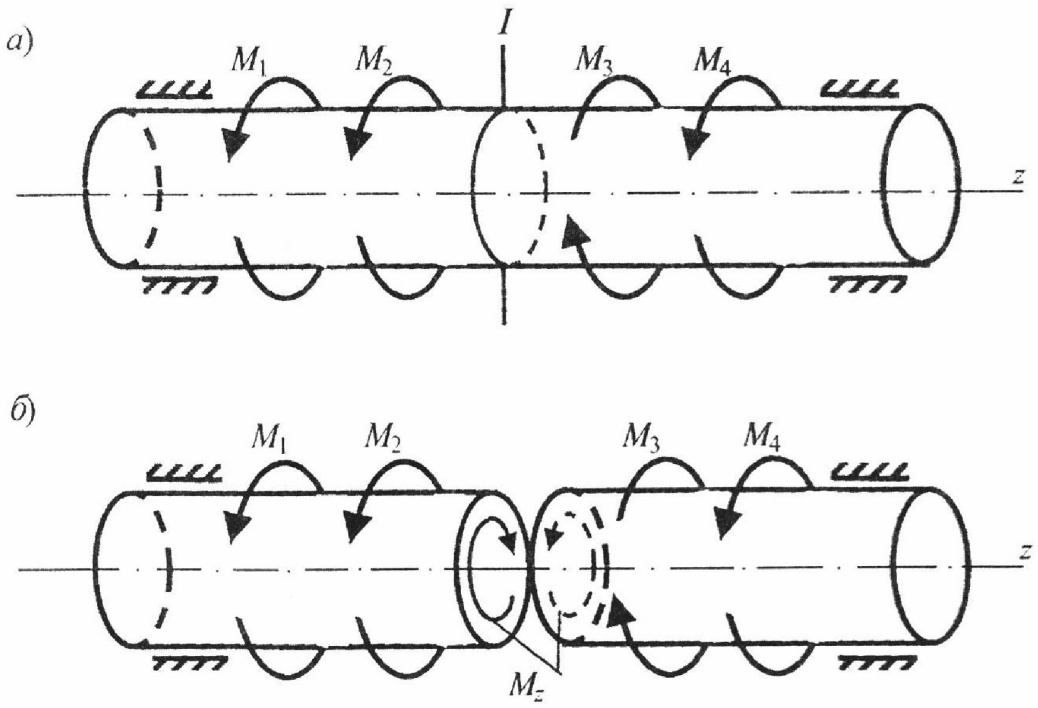
Для определения внутренних усилий, возникающих в поперечных сечениях вала под действием внешних моментов, используется метод сечений.

Правило знаков: крутящий момент считается положительным, если при взгляде на поперечное сечение оставшейся части он виден вращающим по ходу часовой стрелки.

Рассмотрим случай, когда все внешние моменты уравновешены и действуют в плоскостях, перпендикулярных оси стержня (рис. 4,а).

$$-M_1 - M_2 + M_3 - M_4 = 0 \qquad 2.1)$$

Для определения крутящих моментов в каком-либо сечении, например I–I, мысленно разрежем вал по этому сечению на две части и приложим к каждой части крутящие моменты M_z. Величину крутящего момента можно найти из условия равновесия любой из отсеченных частей. Для этого необходимо приравнять нулю сумму моментов относительно продольной оси стержня.



Так, например, для случая, показанного на рис. 4,б, из уравнения равновесия левой части $\sum M_z = 0$ находим

$$-M_1 - M_2 + M_z = 0,$$

откуда

$$M_z = M_1 + M_2 . \qquad (2.2)$$

Для случая, когда берется равновесие правой части, имеем

$$M_z - M_3 + M_4 = 0.$$

Следовательно $$M_z = M_3 - M_4. \qquad (2.3)$$

Легко заметить, что оба момента M_z равны между собой. Это видно из равенства (2.1), откуда

$$M_1 + M_2 = M_3 - M_4.$$

В общем случае вместо уравнения (2.2) или соответственно уравнения (2.3) можно было бы написать:

$$M_z = \sum M_{лев},$$

$$M_z = \sum M_{пр}.$$

Таким образом, крутящий момент M_z в сечении стержня численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, действующих по одну сторону от сечения.

В круглом или трубчатом поперечном сечении скручиваемого стержня возникают касательные напряжения, которые определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_\rho} \cdot \rho, \qquad (2.4)$$

где $M_{кр}$ – крутящий момент в сечении; J_ρ – полярный момент инерции сечения; ρ – расстояние от оси стержня до точки поперечного сечения в окрестности которой определяется напряжение.

Касательные напряжения направлены перпендикулярно радиусу в сторону соответствующую направлению $M_{кр}$ (рис. 5).

Для круглого сечения

$$J_\rho = \frac{\pi D^4}{32} = 0{,}1D^4. \qquad (2.5)$$

Для трубчатого сечения

$$J_\rho = \frac{\pi D^4}{32}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]. \qquad (2.6)$$

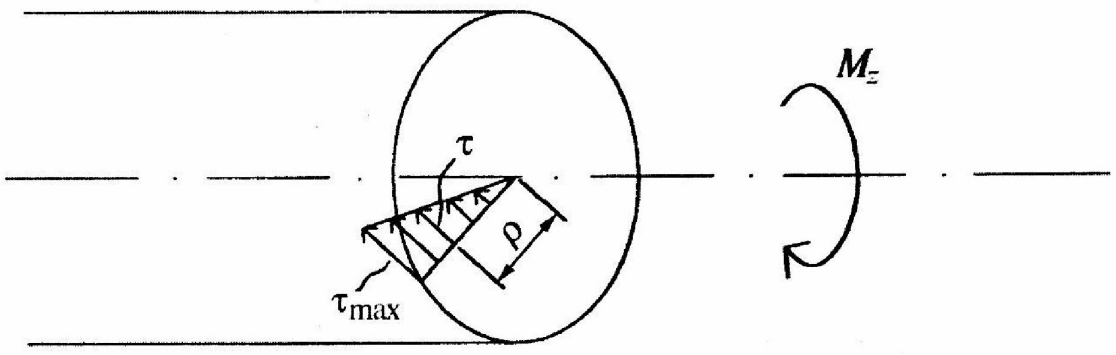
где D и d – диаметры внешней и внутренней окружности.

Максимального значения напряжения достигают в крайних точках сечения у поверхности вала.

При $\rho = r$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{J_\rho} \cdot r = \frac{M_{кр}}{W_\rho}, \qquad (2.7)$$

где $W_\rho = \frac{J_\rho}{r}$ – полярный момент сопротивления круглого сечения, r – радиус вала.



Для круглого сечения

$$W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} = 0{,}2D^3. \qquad (2.8)$$

Для трубчатого сечения

$$W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] = 0{,}2D^3\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]. \qquad (2.9)$$

Деформация при кручении валов состоит во взаимном повороте двух сечений относительно продольной оси Z. Два сечения в начале и конце участка с постоянными моментами поворачиваются на угол

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{GJ_\rho}, \qquad (2.10)$$

здесь l – длина участка вала; GJ_ρ – жесткость при кручении; G – модуль сдвига.

Угол закручивания, приходящийся на единицу длины, называют относительным углом закручивания Θ

$$\Theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{кр}}{GJ_{\rho}}. \qquad (2.11)$$

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}^{\max}}{W_{\rho}} \le [\tau], \qquad (2.12)$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение.

При проектировании диаметр вала определяется из условий прочности и жесткости

Для круглого сечения

$$W_{\rho} \ge \frac{M_{кр}^{\max}}{[\tau]}$$

и

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{M_{кр}^{\max}}{0{,}2 \cdot [\tau]}}. \qquad (2.13)$$

Для обеспечения требуемой жесткости вала необходимо, чтобы наибольший относительный угол закручивания не превосходил допускаемого значения угла закручивания на единицу длины [Θ]. Условие жесткости при кручении

$$\Theta_{\max} = \left(\frac{M_{кр}}{GJ_{\rho}}\right)_{\max} \le [\Theta]. \qquad (2.14)$$

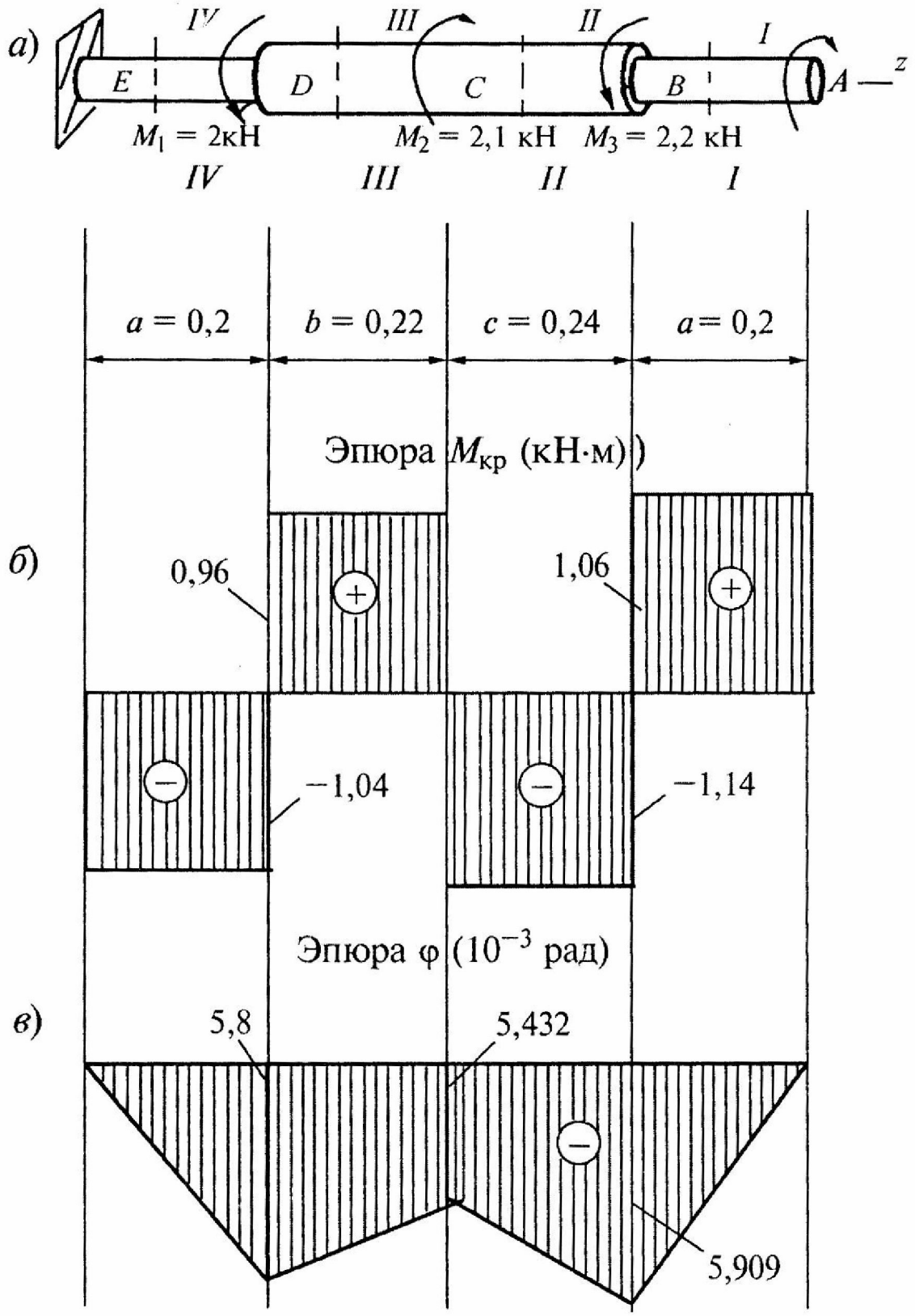
Допускаемый угол закручивания [Θ] на погонный метр длины, принимается для разных конструкций и видов нагрузки в пределах не более 2°/м.

Отсюда для круглого поперечного сечения

$$d \ge \sqrt[4]{\frac{M_{кр}}{0{,}1 \cdot G \cdot [\Theta]}}. \qquad (2.15)$$

Из двух значений, определяемых по (2.13) и (2.15), выбирается большее и округляется в соответствии с ГОСТ.

Пример 2. Стальной вал переменного сечения (G = 8·10^4 МПа; $[\Theta] = 1{,}8^{\circ}$/м, $[\tau]$ = 120 МПа), испытывает кручение от приложенных к нему трех известных моментов M_1, M_2, M_3 и одного неизвестного $M_A = X$ (рис. 6, а). Схема получается из задания задачи № 2, если условно принять сечение E неподвижным.


а)
IV
III
II
I
E
D
C
B
A
z
M1 = 2кН
M2 = 2,1 кН
M3 = 2,2 кН
IV
III
II
I
a = 0,2
b = 0,22
c = 0,24
a = 0,2
б)
Эпюра Mкр (кН·м)
0,96
1,06
−1,04
−1,14
в)
Эпюра φ (10−3 рад)
5,8
5,432
5,909

Требуется:

1) установить при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю;

2) для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов;

3) определить размеры поперечного сечения вала из условий прочности и жесткости, приняв, что участки длиною a - имеют диаметр d_1, а b и c – диаметр d_2, и $\frac{d_1}{d_2} = 0{,}5$;

4) показать распределение касательных напряжений в поперечных сечениях;

5) построить эпюру углов закручивания.

Решение

I. Определение количества силовых участков

Силовой участок – это участок вала между двумя внешними моментами.

Для определения величины неизвестного момента X выразим угол поворота свободного конца (сечение A) через действующие моменты и приравняем его нулю.

Для этого применим принцип независимости действия сил, который для нашего случая формулируется так: для того, чтобы вычислить угол поворота φ_A от группы моментов нужно вычислить этот угол от каждого сосредоточенного момента, действующего отдельно, и все результаты алгебраически сложить.

При действии только сосредоточенного момента X кручению подвергаются все участки вала. Используя (2.10) получим

$$\varphi_{AX} = \frac{Xa}{GJ_{\rho 1}} + \frac{X(b+c)}{GJ_{\rho 2}} + \frac{Xa}{GJ_{\rho 1}};$$

При действии только момента M_1 кручению подвергается четвертый участок – поворачивается сечение D, а вслед за ним на тот же угол поворачивается остальные участки без деформации $\varphi_{AM_1} = -\frac{M_1 a}{GJ_{\rho 1}}$.

Таким же путем находим

$$\varphi_{AM_2} = \frac{M_2 b}{GJ_{\rho 2}} + \frac{M_2 a}{GJ_{\rho 1}};\ \ \varphi_{AM3} = -\frac{M_3(b+c)}{GJ_{\rho 2}} - \frac{M_3 a}{GJ_{\rho 1}}.$$

Окончательно,

$$\varphi_A = \varphi_{AX} + \varphi_{AM_1} + \varphi_{AM_2} + \varphi_{AM_3} = 0.$$

$$\frac{X}{G}\left[2\frac{a}{J_{\rho 1}} + \frac{(b+c)}{J_{\rho 2}}\right] - \frac{M_1 a}{GJ_{\rho 1}} + \frac{M_2}{G}\left[\frac{b}{J_{\rho 2}} + \frac{a}{J_{\rho 1}}\right] - \frac{M_3}{G}\left[\frac{b+c}{J_{p2}} + \frac{a}{J_{\rho 1}}\right] = 0;$$

Учтем, что $J_{\rho 1} \approx 0{,}1d_1^4;\ \ J_{\rho 2} \approx 0{,}1d_2^4;$

при $\frac{d_1}{d_2} = 0{,}5;\ \ J_{\rho 1} = 0{,}1(0{,}5d_2)^4 = 0{,}0625 \cdot 0{,}1d_2^4 = 0{,}0625\, J_{\rho 2}.$

Умножив обе части расчетного уравнения на $GJ_{\rho 2}$, получим

$$X\left[\frac{2a}{0{,}0625} + b + c\right] - \frac{M_1 a}{0{,}0625} + M_2\left[b + \frac{a}{0{,}0625}\right] - M_3\left[b + c + \frac{a}{0{,}0625}\right] = 0;$$

$$X[6{,}4 + 0{,}46] - 2 \cdot 3{,}2 + 2{,}1[0{,}22 + 3{,}2] - 2{,}2[0{,}46 + 3{,}2] = 0;$$

$$X \cdot 6{,}86 - 6{,}4 + 7{,}182 - 8{,}052 = 0;$$

$$X \cdot 6{,}86 - 7{,}27 = 0;\ \ X = 1{,}06 \text{ кНм}.$$

II. Построение эпюры крутящих моментов с учетом *X*

Определим крутящий момент на каждом силовом участке, применив метод сечений:

$M_{кр1} = X = 1{,}06$ кНм;

$M_{кр2} = X - M_3 = 1{,}06 - 2{,}2 = -1{,}14$ кНм;

$M_{кр3} = X - M_3 + M_2 = 1{,}06 - 0{,}1 = 1{,}05$ кНм;

$M_{кр4} = X - M_3 + M_2 - M_1 = 1{,}06 - 2{,}1 = -1{,}04$ кНм.

По полученным значениям крутящих моментов строим эпюру $M_{кр}$ (рис. 6,б).

III. Определение размеров поперечных сечений вала

Расчет на прочность

На участках I и IY круглые поперечные сечения одинаковые с диаметром $d_1 = 0{,}5\,d_2$. Наиболее опасным из этих двух участков является участок I $M_{кр} = 1{,}06$ кНм .

$$\tau_{\max_1} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho 1}} = \frac{1{,}06}{0{,}2\,d_1^3} = \frac{1{,}06}{0{,}2\,(0{,}5)^3\,d_2^3} = \frac{42{,}4}{d_2^3};\ \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

На участках II и III – сечение диаметром d_2. Наибольший по модулю момент $|M_{кр}| = 1{,}14$ кНм на участке II.

$$\tau_{\max_2} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho 2}} = \frac{1{,}14}{0{,}2\,d_2^3} = \frac{5{,}7}{d_2^3};$$

Таким образом, для всего вала опасным по прочности является I участок.

Находим диаметр d_2 из условия прочности

$$\tau_{\max_1} = \frac{42{,}4}{d_2^3} \le [\tau].$$

Отсюда $d_2 \ge \sqrt[3]{\dfrac{42{,}4}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\dfrac{42{,}4 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6}} = \sqrt[3]{0{,}353 \cdot 10^{-3}} = 0{,}07069$ м.

Расчет на жесткость

Выражаем относительные углы закручивания через d_2.

$$\left|\Theta_{IV}\right| = \frac{1{,}04 \cdot 10^3}{GJ_{\rho 1}} = \frac{1{,}04 \cdot 10^3}{G \cdot 0{,}0625 \cdot J_{\rho 2}} = \frac{16640}{GJ_{\rho 2}};$$

$$\Theta_{III} = \frac{1{,}05 \cdot 10^3}{GJ_{\rho 2}} = \frac{1050}{GJ_{\rho 2}};$$

$$\left|\Theta_{III}\right| = \frac{1{,}14 \cdot 10^3}{GJ_{\rho 2}} = \frac{1140}{GJ_{\rho 2}};$$

$$\Theta_{I} = \frac{1{,}06 \cdot 10^3}{G \cdot 0{,}0625 \cdot J_{\rho 2}} = \frac{16960}{GJ_{\rho 2}};$$

Следовательно, на первом участке имеет место максимальный угол закручивания.

По условию жесткости, переведя градусы в радианы, получим

$$\frac{16960}{GJ_{\rho 2}} \le [\Theta] = 1{,}8\frac{\pi}{180} = 3{,}141 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$J_{\rho 2} \ge \frac{16960}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 3{,}141 \cdot 10^{-2}} = 67482 \cdot 10^{-10} = 6748{,}2 \cdot 10^{-9}\ \text{м};$$

$$0{,}1d_2^4 \ge 6718{,}2 \cdot 10^{-9};$$

$$d_2 \ge \sqrt[4]{\frac{6748{,}2 \cdot 10^{-9}}{0{,}1}} = 9{,}06 \cdot 10^{-2} = 0{,}0906\ \text{м}.$$

Из условий прочности и жесткости $d_2 \ge 0{,}0906$ м $d_1 \ge 0{,}0453$ м. Округляем до целых мм: $d_1 \ge 0{,}046$ м, отсюда $d_2 = 0{,}092$ м

IV. Построение эпюр касательных напряжений τ в поперечных сечениях вала (рис.7)

Сечение I-I

$$W_{\rho 1} = 0{,}2d_1^3 = 0{,}2\cdot(0{,}046)^3 = 1{,}947\cdot 10^{-5}\ \text{м}^3;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{крI}}{W_{\rho_1}} = \frac{1{,}06\cdot 10^3}{1{,}947\cdot 10^{-5}} = 0{,}544\cdot 10^8\ \frac{\text{н}}{\text{м}^2} = 54{,}4\ \text{МПа}.$$

Сечение II-II

$$W_{\rho 2} = 0{,}2d_2^3 = 1{,}947\cdot 8\cdot 10^{-5} = 15{,}576\cdot 10^{-5}\ \text{м}^3;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{крII}}{W_{\rho_2}} = -\frac{1{,}14\cdot 10^3}{15{,}576\cdot 10^{-5}} = -0{,}0732\cdot 10^8\ \frac{\text{н}}{\text{м}^2} = -7{,}32\ \text{МПа}.$$

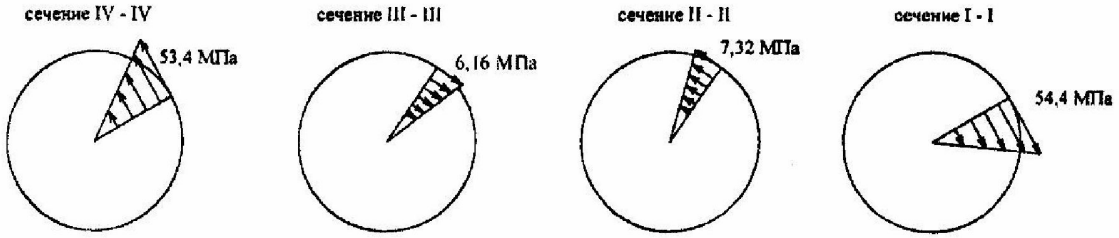
Сечение III-III

$$W_{\rho 2} = 15{,}576\cdot 10^{-5}\ \text{м}^3;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{крIII}}{W_{\rho_2}} = \frac{1{,}05\cdot 10^3}{15{,}576\cdot 10^{-5}} = 0{,}0674\cdot 10^8\ \frac{\text{н}}{\text{м}^2} = 6{,}74\ \text{МПа}.$$

Сечение IY-IY

$$\tau_{\max} = \frac{M_{крIY}}{W_{\rho_1}} = -\frac{1{,}04\cdot 10^3}{1{,}947\cdot 10^{-5}} = -0{,}534\cdot 10^8\ \frac{\text{н}}{\text{м}^2} = -53{,}4\ \text{МПа}.$$



Y. Построение эпюры узлов поворота сечений вала

Полярные моменты инерции сечений для:

участков I и IY $J_{\rho 1} = 0{,}1d_1^4 = 0{,}1\cdot(0{,}046)^4 = 44{,}77\cdot 10^{-8}\ \text{м}^4;$

участков II и III $J_{\rho 2} = 0{,}1d_2^4 = 0{,}1\cdot(0{,}092)^4 = 716{,}39\cdot 10^{-8}\ \text{м}^4.$

Жесткость сечений на кручение

$$GJ_{\rho 1} = 8 \cdot 10^7 \cdot 44{,}77 \cdot 10^{-8} = 35{,}82 \text{ кНм}^2;$$

$$GJ_{\rho 2} = 8 \cdot 10^7 \cdot 716{,}39 \cdot 10^{-8} = 573{,}1 \text{ кНм}^2.$$

Углы поворота отдельных сечений вала определяются по отношению к неподвижному сечению (в нашем случае жесткая заделка) $\varphi_E = 0$:

$$\varphi_E = 0;\ \varphi_D = \frac{M_{кр4} \cdot a}{GJ_{\rho 1}} = -\frac{1{,}04 \cdot 0{,}2}{35{,}82} = -5{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$\varphi_C = \varphi_D + \frac{M_{кр3} \cdot b}{GJ_{\rho 2}} = -5{,}8 \cdot 10^{-3} + \frac{1{,}05 \cdot 0{,}22}{573{,}1} = -5{,}8 \cdot 10^{-3} + 0{,}4 \cdot 10^{-3} = -5{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$\varphi_B = \varphi_C + \frac{M_{кр2} \cdot c}{GJ_{\rho 2}} = -5{,}4 \cdot 10^{-3} - \frac{1{,}14 \cdot 0{,}24}{573{,}1} = -5{,}4 \cdot 10^{-3} - 0{,}477 \cdot 10^{-3} = -5{,}877 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$\varphi_A = \varphi_B + \frac{M_{кр1} \cdot a}{GJ_{\rho 1}} = -5{,}877 \cdot 10^{-3} + \frac{1{,}06 \cdot 0{,}2}{35{,}82} = (-5{,}8 + 0{,}918) \cdot 10^{-3} = -0{,}041 \cdot 10^{-3} \approx 0.$$

Ошибка составляет $\frac{0{,}041}{5{,}918} \cdot 100\% = 0{,}7\%$.

По вычисленным значениям φ строим эпюру углов закручивания (рис. 6,в). Так как крутящие моменты на всех участках постоянны, то ординаты эпюры углов закручивания линейно зависят от координаты Z – расстояние от начала участка до сечения

$$\varphi(z) = \varphi_н + \frac{M_{кр} z}{GJ_\rho}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какой вид деформации называется кручением?
2. Внутренние усилия при кручении.
3. Как называются стержни работающие на кручение?
4. Какие напряжения возникают в поперечном сечении стержня при кручении?
5. Условие прочности при кручении.
6. Как определяются абсолютный и относительный углы закручивания при кручении?
7. Что называется жесткостью вала при кручении?
8. Условие жесткости при кручении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П.* Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1995. – 560 с.
2. *Сидоров В.Н.* Лекции по сопротивлению материалов и теории упругости. – М.: Изд. Центр генштаба Вооруженных сил РФ, 2002. – 352 с.
3. *Дарков А.В., Шапиро Г.С.* Сопротивление материалов: учеб. Для студентов заочных вузов и вфакультетов. –5-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 1989.- 654 с.
4. *Смирнов А.Ф.* Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1975. – 390 с.
5. *Артамонов М.И., Кушнаренко Е.М., Казей С.И.* Сопротивление материалов: Методические указания к выполнению контрольной работы № 1. – М.: ВЗИИТ, 1991.