

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
КНИГА 2
Учебное пособие

Изложен современный курс сопротивления материалов с элементами теории упругости и строительной механики. Предназначен для студентов строительных, машиностроительных и механических специальностей.

Оглавление

6. Перемещения при изгибе балок.....	7
6.1. Дифференциальное уравнение изогнутой оси упругой балки.....	7
6.2. Примеры прямого интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки.....	12
6.3. Пределы применимости приближённой теории изгиба балок.....	16
6.4. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси балки методом начальных параметров А.Н. Крылова.....	18
6.5. Примеры решения задач по определению перемещений методом начальных параметров.....	21
6.6. Простейшие статически неопределимые задачи при изгибе. Метод сравнения (наложения) перемещений.....	25
6.7. Расчёт на прочность простейших статически неопределимых балок методом допускаемых нагрузок.....	27
6.8. Изгиб балок переменного поперечного сечения.....	30
6.9. Балка равного сопротивления.....	32
6.10. Балка на упругом основании.....	33
7. Общие принципы и методы сопротивления материалов.....	37
7.1. Обобщённые силы и перемещения.....	37
7.2. Потенциальная энергия деформации стержня в общем случае его нагружения.....	39
7.3. Принцип возможных перемещений и формула Лагранжа.....	40
7.4. Принцип возможного изменения сил и формула Кастилиано.....	43
7.5. Формула Мора для перемещений в стержнях и стержневых системах.....	47
7.6. Примеры определения перемещений с помощью формулы Мора.....	50
7.7. Графоаналитический способ Верещагина вычисления интегралов в формуле Мора.....	52
7.8. Примеры вычисления перемещений способом Верещагина.....	55
7.9. Определение температурных перемещений в балках и рамах.....	57

7.10.	Определение напряжений и перемещений в витых пружинах.....	59
7.11.	Теорема о взаимности работ и перемещений.....	60
8.	Применение общих принципов и методов сопротивления материалов к расчёту стержневых систем.....	63
8.1.	Стержневые системы и их классификация.....	63
8.2.	Кинематический анализ стержневых систем.....	64
8.3.	Статически определимые и неопределимые стержневые неизменяемые системы.....	68
8.4.	Расчёт статически неопределимых систем методом сил	71
8.5.	Примеры расчёта статически неопределимых стержневых систем по методу сил	74
8.6.	Использование свойств симметрии при раскрытии статической неопределимости.....	82
8.7.	Метод перемещений.....	85
8.8.	Примеры расчёта стержневых систем методом перемещений.....	92
9.	Устойчивость упругих систем.....	96
9.1.	Концепция устойчивости.....	96
9.2.	Модельные задачи и методы исследования устойчивости упругих систем.....	103
9.3.	Задача Эйлера об устойчивости сжатого стержня.....	109
9.4.	Устойчивость сжатого стержня с шарнирно закреплёнными краями.....	113
9.5.	Устойчивость стержней с иными видами закрепления.....	114
9.6.	Пределы применимости формулы Эйлера.....	120
9.7.	Практический инженерный метод расчёта на устойчивость Ф. Ясинского.....	123
9.8.	Задача Энгессера об устойчивости сжатого стержня из нелинейно-упругого материала.....	131
9.9.	Устойчивость сжатого стержня за пределом упругости. Формула Кармана.....	134
9.10.	Устойчивость стержня в процессе нагружения за пределом упругости. Концепция Шенли.....	141
9.11.	Устойчивость стержней как элементов конструкций. Концепция Ильюшина – Зубчанинова.....	146
9.12.	Продольно-поперечный изгиб упругого стержня.....	154
9.13.	Выпучивание сжатой колонны при внецентренном сжатии.....	158

9.14.	Устойчивость стержня, сжатого следящей силой.....	160
9.15.	Задача А.Р. Ржаницына об устойчивости сжатого стержня в условиях ограниченной ползучести.....	164
9.16.	Устойчивость упругого стержня в условиях неограниченной ползучести.....	168
9.17.	Устойчивость плоской формы изгиба балок.....	172
9.18.	Энергетический метод определения критических нагрузок.....	176
10.	Колебания упругих систем.....	179
10.1.	Степень свободы колеблющейся системы.....	179
10.2.	Канонические уравнения колебания упругих систем с конечным числом степеней свободы.....	181
10.3.	Собственные колебания упругих систем с конечным числом степеней свободы.....	182
10.4.	Вынужденные колебания упругих систем с конечным числом степеней свободы. Резонанс.....	189
10.5.	Приближённые методы определения низших частот собственных колебаний упругих систем.....	192
10.6.	Понятие о приведённой массе.....	196
10.7.	Устойчивость вращающихся валов.....	198
10.8.	Колебания упругих систем при действии ударной нагрузки.....	199
10.9.	Продольные колебания стержня.....	205
10.10.	Поперечные колебания стержня.....	209
11.	Теория сложного напряжённо-деформированного состояния (НДС) твёрдого тела.....	212
11.1.	Напряжённое и деформированное состояние частицы тела.....	212
11.2.	Основные виды напряжённо-деформированного состояния (НДС).....	217
11.3.	Общий случай НДС. Обобщённый закон Гука – Коши....	223
11.4.	Определение напряжений на произвольно ориентированной площадке.....	225
11.5.	Главные оси и главные напряжения в плоских задачах...	228
11.6.	Главные деформации в плоских задачах.....	231
11.7.	Главные нормальные напряжения и направления в общем случае объёмного напряжённого состояния.....	233
11.8.	Общее решение кубического уравнения для определения главных напряжений.....	238

11.9. Эллипсоид напряжений Ламе.....	240
11.10. Круги напряжений Мора.....	242
11.11. Напряжения на октаэдрических площадках.....	248
11.12. Определение удлинений и сдвигов для произвольно направленных волокон.....	251
11.13. Главные деформации и сдвиги.....	256
11.14. Общее решение кубического уравнения для определения главных деформаций.....	259
11.15. Дифференциальные уравнения равновесия Коши.....	261
11.16. Уравнение совместности деформаций.....	264
11.17. Кручение призматических стержней произвольного поперечного сечения.....	266
11.18. Кручение стержня эллиптического сечения.....	270
11.19. Кручение стержня прямоугольного сечения.....	271
11.20. Кручение стержня треугольного сечения.....	275
12. Прочность и разрушение материалов и конструкций.....	278
12.1. Постановка вопроса о прочности.....	278
12.2. Хрупкое и пластическое разрушение.....	279
12.3. Условия пластичности и разрушения материалов.....	281
12.4. Теория прочности Мора.(1860 г.).....	283
12.5. Механизм хрупкого разрушения. Простейшая модель разрушения Гриффитса.....	288
12.6. Прочность материалов при переменных напряжениях.....	295
Приложения.....	
Библиографический список.....	

Глава 6.

Перемещения при изгибе балок

6.1. Дифференциальное уравнение изогнутой оси упругой балки

При расчете балок на изгиб инженер интересуется не только напряжениями, возникающими от действия внешних сил, но и перемещениями от действия тех же сил. Одно из требований к элементам конструкций, чтобы перемещение не превосходило некоторого допустимого значения, обусловленного требованиями эксплуатации. Это условие называется *условием жесткости* либо *конструктивной прочности*.

Рассмотрим плоский чистый изгиб балки (рис. 6.1, а).

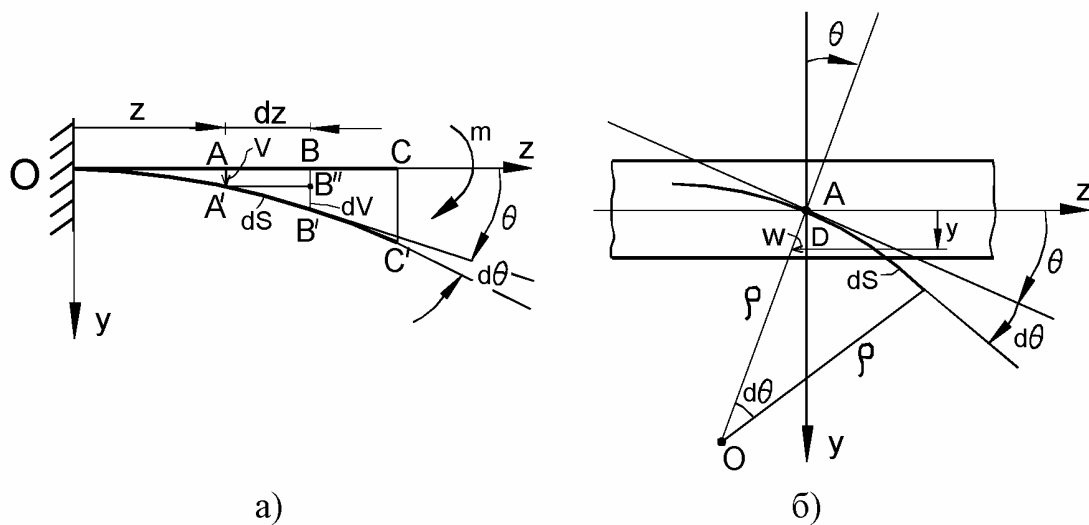


Рис. 6.1

В результате действия изгибающего момента m ось балки OC изгибается и занимает некоторое положение OC' . Произвольная точка A оси балки, характеризуемая координатой z , перемещается в новое положение A' .

Перемещение, изображаемое направленным отрезком $\overline{AA'}$, назовем прогибом балки для точки A с координатой z и обозначим v . Проведем в точке A' касательную к изогнутой оси балки. Она образует с осью z угол θ . Из рис. 6.1, б видно, что этот угол в силу взаимной перпендикулярности сторон в точности равен углу поворота поперечного сечения. При изменении z , т.е. при переходе к другим точкам оси балки, прогиб v и угол пово-

рота θ поперечного сечения изменяется. Следовательно, они являются функциями z :

$$v = v(z), \theta = \theta(z). \quad (6.1)$$

Горизонтальное перемещение w произвольной точки D поперечного сечения на расстоянии y от оси балки равно:

$$w = -y \operatorname{tg} \theta. \quad (6.2)$$

Из треугольника $A'B'B''$ следует, что первая производная от функции прогиба $v(z)$:

$$\frac{dv}{dz} = \operatorname{tg} \theta \quad (6.3)$$

равна тангенсу угла наклона касательной к изогнутой оси балки в точке A с координатой z . Из этого же треугольника получаем

$$A'B' = ds = \sqrt{dz^2 + dv^2} = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2}. \quad (6.4)$$

Из рис. 6.1, б находим $ds = \rho d\theta$, где ρ - радиус кривизны дуги $A'B' = ds$. Следовательно, кривизна изогнутой оси в точке A равна:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}. \quad (6.5)$$

Дифференцируя (6.3) по z и учитывая (6.1), (6.4), (6.5), получаем:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dz} = (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \frac{ds}{dz} \frac{1}{\rho},$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 v}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} > 0. \quad (6.6)$$

В п. 5.2 была получена формула (5.6) для кривизны балки

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}.$$

для положительных значений M_x . В нашем примере на рис. 6.1 изгибающий момент $M_x = -m < 0$. Поэтому формулу (5.6) мы должны использовать в виде:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M_x}{EJ_x}. \quad (6.7)$$

Приравнивая (6.6), (6.7), получаем точное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$\frac{\frac{d^2 v}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{M_x}{EJ_x}. \quad (6.8)$$

Если прогибы v балки малы по сравнению с ее линейными размерами, то и углы поворота сечений θ - малые величины и, согласно (6.3)-(6.6), можно считать:

$$\frac{dv}{dz} = \operatorname{tg} \theta \approx \theta, \quad ds \approx dz, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v}{dz^2}.$$

Тогда дифференциальное уравнение (6.8) упрощается и принимает вид

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x}. \quad (6.9)$$

Уравнение (6.9) носит название приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси упругой балки. Оно получено для случая чистого изгиба, но может быть использовано и при поперечном, когда момент $M_x(z)$ является функцией z .

Интегрируя (6.9), получаем:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dz} = C_1 - \int_0^z \frac{M_x(z)}{EJ_x} dz, \\ v = C_1 z + C_2 - \int_0^z \int_0^z \frac{M_x}{EJ_x} dz dz. \end{cases} \quad (6.10)$$

Произвольные постоянные C_1, C_2 в (6.10) имеют простой геометрический смысл. Обозначим через $v_0, \theta_0 = dv_0 / dz$ прогиб и угол поворота сечения соответственно в начале координат при $z = 0$. Тогда при $z = 0$ из (6.10) получаем:

$$\theta_0 \approx \frac{dv_0}{dz} = C_1, \quad v_0 = C_2.$$

Величины v_0, θ_0 называют *начальными параметрами* задачи по определению перемещений в балках.

Соотношения (6.10) запишем в виде

$$\begin{cases} v = v_0 + \theta_0 z - \int_0^z \int_0^z \frac{M_x(z)}{EJ_x} dz dz, \\ \theta \approx \frac{dv}{dz} \approx \theta_0 - \int_0^z \frac{M_x(z)}{EJ_x} dz. \end{cases} \quad (6.11)$$

Так как

$$\int_0^z \int_0^z \frac{M_x(z)}{EJ_x} dz dz = \int_0^z \frac{M_x(t)}{EJ_x} (z - t) dt,$$

то решение (6.11) можно записать в виде:

$$\begin{cases} v = v_0 + \theta_0 z - \int_0^z \frac{M_x(t)}{EJ_x} (z - t) dt, \\ \theta = \theta_0 - \int_0^z \frac{M_x(z)}{EJ_x} dz. \end{cases}$$

В соответствии с дифференциальными зависимостями Журавского

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}, \quad \frac{dQ_y}{dz} = \frac{d^2 M}{dz^2} = -q_y. \quad (6.12)$$

Дифференцируя (6.9) дважды по z и используя зависимости (6.12), находим

$$Q_y = -\frac{d}{dz} \left[EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} \right], \quad (6.13)$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} \left[EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} \right] = q_y. \quad (6.14)$$

При постоянной жесткости EJ_x получаем

$$Q_y = -EJ_x \frac{d^3 v}{dz^3}, \quad (6.15)$$

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q_y}{EJ_x}. \quad (6.16)$$

Уравнения (6.14), (6.16) представляют собой вторую форму дифференциальных уравнений изогнутой оси балки четвертого порядка.

Общее решение неоднородного уравнения (6.16) имеет вид

$$v = C_1 z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_4 + v_*, \quad (6.17)$$

где v_* - его частное решение. Постоянные $C_k (k=1, 2, 3)$ находятся из условий на опорах балки. Эти условия называют граничными или краевыми.

Рассмотрим типичные условия закрепления или опирания балок (рис. 6.2). Изогнутая ось балки изображена тонкой линией.

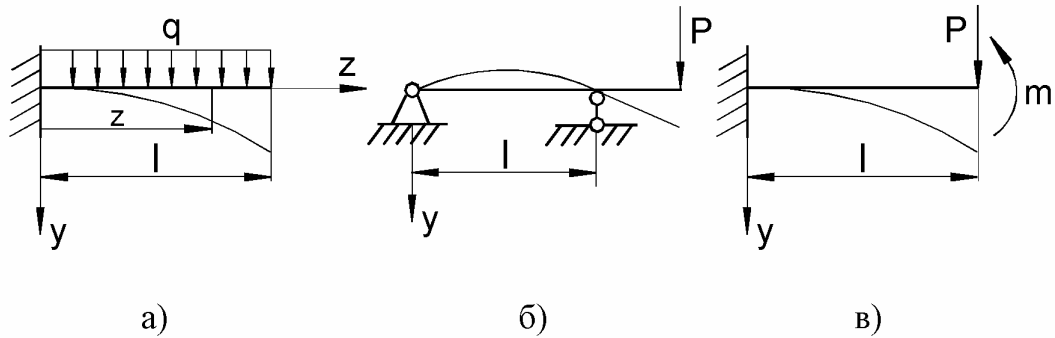


Рис. 6.2

а) Край балки жестко зашлемлен (рис. 6.2,а). При $z = 0$ на зашлемленном крае прогиб и угол поворота сечения равны нулю, т.е.

$$v = 0, \quad \theta \approx \frac{dv}{dz} = 0.$$

б) Край балки свободен от закрепления и нагрузки (рис. 6.2,а). В этом случае при $z = l$ равны нулю: момент и перерезывающая сила:

$$M_x = -E J_x \frac{d^2 v}{dz^2} = 0, \quad Q_y = -E J_x \frac{d^3 v}{dz^3} = 0.$$

в) Край балки шарнирно закреплен либо свободно опёрт (рис. 6.2,б). При $z = 0$ край балки шарнирно закреплен. Здесь прогиб v и момент M_x равны нулю, т.е.

$$v = 0, \quad M_x = -E J_x \frac{d^2 v}{dz^2} = 0, \quad \left(\frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \right).$$

При $z = l$ балка свободно лежит на опоре. Прогиб равен нулю, но изгибающий момент в сечении балки отличен от нуля. Поэтому здесь только одно граничное условие $v = 0$.

г) Незакрепленный край балки с действующими сосредоточенными силой и моментом (рис. 6.2,в).

В этом случае при $z = l$ имеем статические граничные условия:

$$M_x = -E J_x \frac{d^2 v}{dz^2} = m, \quad Q_y = -E J_x \frac{d^3 v}{dz^3} = P.$$

6.2. Примеры прямого интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки

Пример 6.1. Однопролетная шарнирно опертая балка находится под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 6.3).

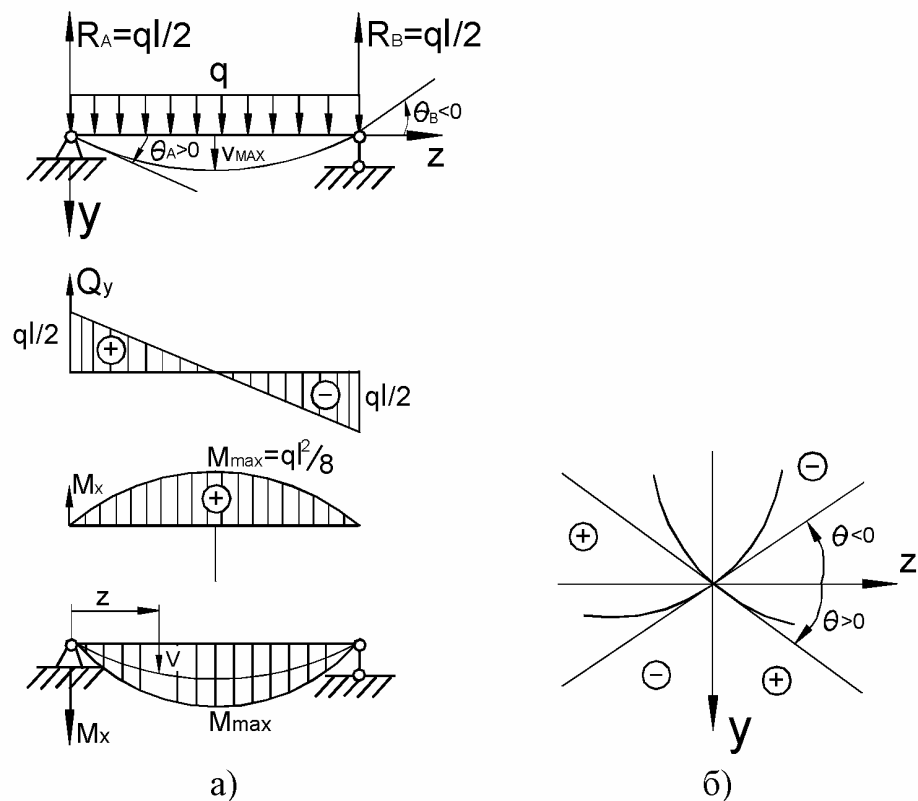


Рис.6.3

Опорные реакции в этой задаче $R_A = R_B = ql/2$. Перерезывающая сила и изгибающий момент, согласно методу сечений, равны:

$$Q_y = R_A - qz = q\left(\frac{l}{2} - z\right), \quad M_x = R_A z - \frac{qz^2}{2} = \frac{qz}{2}(l - z). \quad (1)$$

Строим для наглядности эпюры Q_y , M_x по правилам, изложенным в главах 1 и 5 (рис. 6.3,а).

Подставляя найденное выражение для M_x в дифференциальные уравнения изогнутой оси балки (6.10), получим:

$$EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{qz}{2}(l-z). \quad (2)$$

Интегрируя (2) дважды, находим:

$$\begin{cases} \theta \approx \frac{dv}{dz} = -\frac{q}{2EJ_x} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) + \theta_0, \\ v = -\frac{q}{2EJ_x} \left(\frac{lz^3}{6} - \frac{z^4}{12} \right) + v_0 + \theta_0 z. \end{cases} \quad (3)$$

На краях балки при $z=0$, $z=l$ имеем $v=0$. Поэтому из (3) следует:

$$v_0 = 0, \quad \theta_0 = \frac{ql^3}{24EJ_x} > 0. \quad (4)$$

Подставляя полученные значения v_0 , θ в (3), находим:

$$\begin{cases} \theta \approx \frac{dv}{dz} = \frac{q}{24EJ_x} (l^3 + 4z^3 - 6lz^2), \\ v = \frac{qz}{24EJ_x} (l^3 + z^3 - 2lz^2) \end{cases} \quad (5)$$

Максимальный прогиб имеет место в середине пролета при $z=l/2$ и равен:

$$v_{\max} = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EJ_x} > 0. \quad (6)$$

Прогиб положителен, т.е. направлен вниз по оси y . Угол поворота $\theta \approx dv/dz$. Геометрический смысл первой производной состоит в том, что она равна тангенсу угла наклона касательной в точке изогнутой оси с координатой z . На рис. 6.3,б показано, в каких четвертях тангенс положителен и отрицателен, а также изображены фрагменты касательных к изогнутой оси, отвечающие положительным и отрицательным углам поворота сечений θ .

Перевернутая эпюра на рис. 6.3,а построена на растянутых волокнах балки. Она напоминает изогнутую ось балки.

Пример 6.2. Консольная балка изгибается силой P на конце (рис. 6.4).

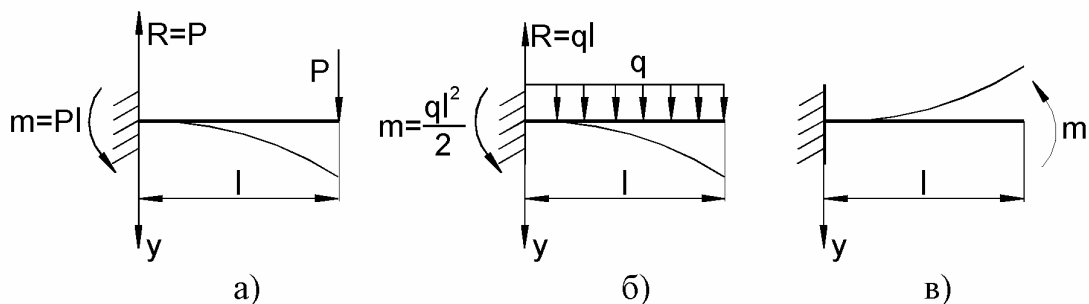


Рис. 6.4

Из рис. 6.4, а находим методом сечений:

$$Q_y = P; \quad M_x = -P(l - z). \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение изгиба

$$EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} = P(l - z). \quad (2)$$

Интегрируя, находим:

$$\begin{cases} \theta \approx \frac{dv}{dz} = \frac{P}{EJ_x} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right) + \theta_0, \\ v = \frac{P}{2EJ_x} \left(lz - \frac{z^3}{3} \right) + v_0 + \theta_0 z. \end{cases} \quad (3)$$

При $z = 0$ имеем граничные условия:

$$v(0) = v_0 = 0, \quad \theta(0) = \theta_0 = 0. \quad (4)$$

Следовательно,

$$v = \frac{Pz^2}{2EJ_x} \left(l - \frac{z}{3} \right), \quad \frac{dv}{dz} \approx \theta = \frac{Pz}{EJ_x} \left(l - \frac{z}{2} \right). \quad (5)$$

Максимальный прогиб и угол поворота имеют место на конце консоли при $z = l$, т.е.

$$v_{\max} = \frac{Pl^3}{3EJ_x}, \quad Q_{\max} = \frac{Pl^2}{2EJ_x}. \quad (6)$$

Пример 6.3. Консольная балка изгибается распределенной нагрузкой (рис. 6.4,б).

Из рис. 6.4,б методом сечений находим:

$$Q_y = q(l - z), \quad M_x = qlz - \frac{q}{2}(l^2 + z^2). \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение изгиба:

$$EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} = -qlz + \frac{q}{2}(l^2 + z^2). \quad (2)$$

Интегрируя, получаем:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dz} \approx \theta = \theta_0 + \frac{q}{2EJ_x} \left(-lz^2 + l^2 z + \frac{z^3}{3} \right), \\ v = v_0 + \theta_0 z + \frac{q}{24EJ_x} \left(-4lz^3 + 6l^2 z^2 + z^3 \right) \end{cases} \quad (3)$$

В защемлении балки при $z=0$ имеем $v = v_0 = 0$, $\theta = \theta_0 = 0$. Максимальные угол поворота и прогиб имеют место на конце консоли при $z = l$ т.е.

$$\theta_{\max} = \frac{ql^3}{6EJ_x}, \quad v_{\max} = \frac{ql^4}{8EJ_x}. \quad (4)$$

Пример 6.4. Консольная балка изгибается моментом на конце (рис. 6.4,в). В этом случае $Q_y = 0$, $M_x = m$.

Дифференциальное уравнение изгиба:

$$EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} = m. \quad (1)$$

Интегрируя, получаем:

$$\frac{dv}{dz} \approx \theta = \frac{mz}{EJ_x} + \theta_0, \quad v = v_0 + \theta_0 z + \frac{mz^2}{2EJ_x}. \quad (2)$$

Так как при $z = 0$ $v = 0$, $v' = 0$, то получаем $v_0 = 0$, $\theta_0 = 0$. Следовательно,

$$\frac{dv}{dz} \approx \theta = \frac{mz}{EJ_x}, \quad v = \frac{mz^2}{2EJ_x}. \quad (3)$$

Пример 6.5. Изгиб однопролетной балки моментом в опоре (рис. 6.5, а).

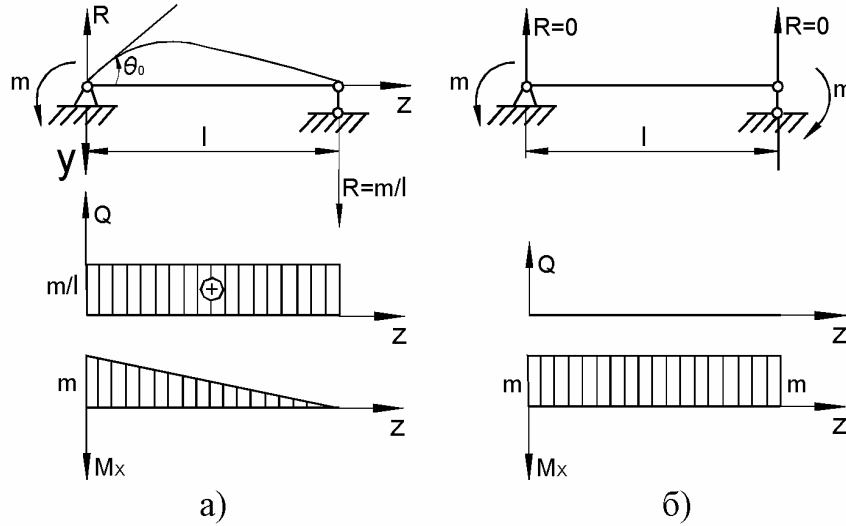


Рис. 6.5

Перерезывающая сила и изгибающий момент в произвольном сечении z равны:

$$Q_y = R = \frac{m}{l}, \quad M_x = Rz - m = -m \left(1 - \frac{z}{l} \right). \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение изгиба:

$$EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} = m \left(1 - \frac{z}{l} \right), \quad (2)$$

откуда после интегрирования получаем:

$$\frac{dv}{dz} \approx \theta = \theta_0 + \frac{m}{EJ_x} \left(z - \frac{z^2}{2l} \right), \quad v = v_0 + \theta_0 z + \frac{m}{2EJ_x} \left(z^2 - \frac{z^3}{3l} \right). \quad (3)$$

Из граничных условий $v = 0$ при $z = 0$ и $z = l$ получаем:

$$\theta_0 = -\frac{m}{3EJ_x}, \quad v_0 = 0. \quad (4)$$

Следовательно,

$$\theta = \frac{m}{EJ_x} \left(z - \frac{z^2}{2l} - \frac{l}{3} \right), \quad v = \frac{m}{EJ_x} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6l} - \frac{lz}{3} \right). \quad (5)$$

Угол поворота на правой опоре:

$$\theta(l) = \frac{ml}{6EJ_x}. \quad (6)$$

Пример 6.6. Чистый изгиб однопролетной балки моментами m (рис. 6.5, б). В этом случае $Q_y = 0$, $M_x = -m$. Дифференциальное уравнение изгиба:

$$EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} = m, \quad (1)$$

откуда после интегрирования:

$$\frac{dv}{dz} \approx \theta = \theta_0 + \frac{mz}{EJ_x}, \quad v = v_0 + \theta_0 z + \frac{mz^2}{2EJ_x}. \quad (2)$$

Из граничных условий $v = 0$ при $z = l$ и $z = 0$ находим $v_0 = 0$, $\theta_0 = -ml/2EJ_x$. Следовательно,

$$\frac{dv}{dz} \approx \theta = \frac{m}{EJ_x} \left(z - \frac{l}{2} \right), \quad v = -\frac{mz}{2EJ_x} (l - z). \quad (3)$$

Максимальный прогиб в середине пролета:

$$v_{\max} = v\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{ml^2}{8EJ_x}. \quad (4)$$

6.3. Пределы применимости приближенной теории изгиба балок

При выводе дифференциального уравнения изогнутой оси балки (6.10) выражение для кривизны $\chi = 1/\rho$ балки было выбрано приближенно. Выясним степень точности приближенного уравнения (6.9). Для этого рассмотрим задачу о чистом изгибе консольной балки (рис. 6.6).

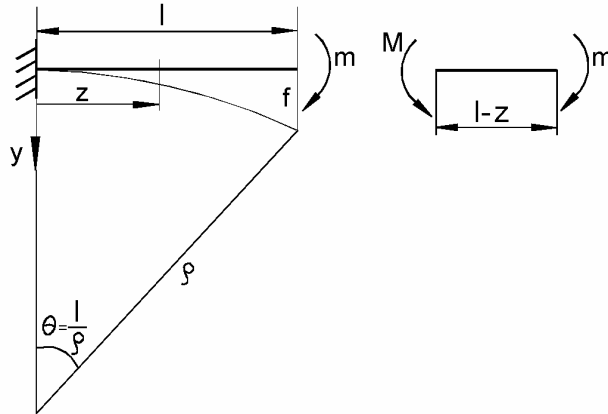


Рис. 6.6

В этом случае $M_x = -m = \text{const}$ и поэтому $\rho = \text{const}$. Из рис. 6.6 прогиб на конце консоли:

$$f = \rho(1 - \cos \theta).$$

Разложим косинус в ряд и ограничимся тремя первыми элементами:

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 -$$

Выражение для прогиба f принимает вид:

$$f = \frac{1}{2}\rho\theta^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{12}\right)$$

или с учетом $\theta = l/\rho$ и (6.7):

$$f = \frac{ml^2}{2EJ_x} \left(1 - \frac{m^2 l^2}{12(EJ_x)^2}\right). \quad (6.18)$$

Дадим теперь приближенное решение задачи. Интегрируя уравнение

$$EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} = -M_x$$

при $M_x = -m$, получаем:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{mz}{EJ_x} + \theta_0, \quad v = \frac{mz^2}{2EJ_x} + v_0 + \theta_0 z.$$

Так как при $z = 0$ прогиб $v_0 = 0$, угол поворота $\theta_0 = 0$, то

$$v = \frac{mz^2}{2EJ_x}.$$

При $z = l$ на конце консоли прогиб:

$$v(l) = f_0 = \frac{ml^2}{2EJ_x}. \quad (6.19)$$

Сравнивая решения (6.18), (6.19), находим:

$$\frac{f}{l} = \frac{f_0}{l} - \frac{1}{3} \left(\frac{f_0}{l}\right)^3.$$

Удовлетворимся при определении прогибов по приближенной теории точностью в 3%. Полагая

$$\frac{1}{3} \left(\frac{f_0}{l}\right)^3 = 0,03 = 3\%,$$

получаем:

$$\frac{f_0}{l} = 0,3.$$

Таким образом, приближенное дифференциальное уравнение (6.9) изо-

гнутой оси упругой балки дает достаточную точность решения задачи даже в том случае, когда прогиб составляет 30% от длины стержня. Такие прогибы возможны только у очень гибких балок большой длины или очень малой толщины типа гибкой стальной линейки.

6.4. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси балки методом начальных параметров А. Н. Крылова

Рассмотрим балку, нагруженную силами и моментами P, q, m (рис. 6.7). Силы P, q считаем положительными, если они направлены в положительном направлении координатной оси y , т.е. вниз. Момент m считаем положительным, если он вращает сечение балки против часовой стрелки, когда мы смотрим на него с конца положительной оси x , ортогональной к плоскости yz . В этом случае прогибы $v(z)$ любой точки оси стержня с координатой z направлены вниз по оси y .

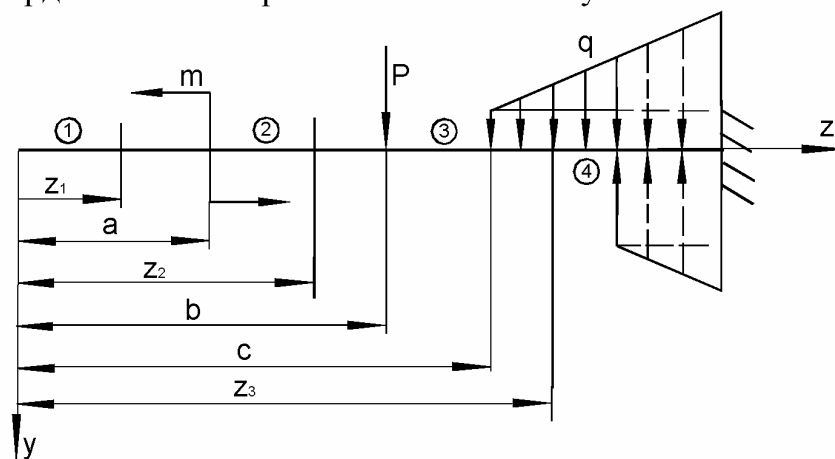


Рис. 6.7

Балку по длине можно разбить на несколько участков, на которых аналитические выражения изгибающих моментов $M_x(z)$ будут различны. Границей этих участков являются те сечения, над которыми к балке приложены сосредоточенные силы P , момент m либо меняется характер нагружения так, как в сечении $z = C$, с которого начинается действие распределенной нагрузки $q(z)$.

Интегрируем дважды дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (6.9):

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M_x(z)}{EJ_x}$$

В результате получаем:

$$\frac{dv}{dz} = \theta_0 - \int_0^z \frac{M_x(z)}{EJ_x} dz, \quad v = v_0 + \theta_0 z - \int_0^z \left[\int_0^z \frac{M_x(z)}{EJ_x} dz \right] dz, \quad (6.20)$$

где v_0, θ_0 - прогиб и угол поворота сечения в начале координат при $z = 0$, называемые начальными параметрами задачи по определению перемещений. Вычислим в (6.20) интеграл:

$$\int_0^z \frac{M_x(z)}{EJ_x} dz$$

при одновременном действии m, P, q , считая жесткость EJ_x при изгибе постоянной величиной. Для этого найдем аналитические выражения момента $M_x(z)$ для двух сечений от каждого внешнего силового воздействия. Пусть первое сечение z лежит левее рассматриваемой внешней силы или момента, а второе - правее. Тогда получаем (см. рис. 6.7):

$$M_x = \begin{cases} 0, & 0 < z < a, \\ -m, & z > a, \end{cases}$$

$$M_x = \begin{cases} 0, & 0 < z < b, \\ -P(z - b), & z > b, \end{cases}$$

$$M_x = \begin{cases} 0, & 0 < z < c, \\ -\frac{q(z - c)^2}{2}, & z > c. \end{cases}$$

Полагая последовательно при почленном интегрировании $dz = d(z - a) = d(z - b) = d(z - c)$, получаем:

$$\int_0^z \frac{M_x(z)}{EJ_x} dz = -\frac{1}{EJ_x} \left[m(z - a) + \frac{P(z - b)^2}{2} + \frac{q(z - c)^3}{6} \right].$$

Интегрируя полученное выражение еще раз, найдем:

$$\int_0^z \int_0^z \frac{M_x(z)}{EJ_x} dz = -\frac{1}{EJ_x} \left[\frac{m(z - a)^2}{2} + \frac{P(z - b)^3}{6} + \frac{q(z - c)^4}{24} \right].$$

Подставляя полученные выражения интегралов в (6.20), получим формулы:

$$\frac{dv}{dz} \approx \theta = \theta_0 + \frac{1}{EJ_x} \left[m(z-a) + \frac{P(z-b)^2}{2} + \frac{1(z-c)^3}{6} \right], \quad (6.21)$$

$$v = v_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{m(z-a)^2}{2} + \frac{P(z-b)^3}{6} + \frac{q(z-c)^4}{24} \right], \quad (6.22)$$

называемые универсальными для угла поворота сечения и прогиба точки оси балки.

Если распределенная нагрузка $q(z)$ не является постоянной, то ее можно разложить в ряд Тейлора в окрестности значения $z = c$:

$$q(z) = q(c) + \frac{q'(c)}{1!}(z-c) + \frac{q''(c)}{2!}(z-c)^2 + \dots + \frac{q^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ - факториал числа n .

В этом случае после интегрирования (6.20) получаем:

$$v = v_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{m(z-a)^2}{2!} + \frac{P(z-b)^3}{3!} + \frac{q(z-c)^4}{4!} + \frac{q'(z-c)^5}{5!} + \dots + \frac{q^{(n)}(c)}{(n+4)!}(z-c)^{n+4} \right]. \quad (6.23)$$

При наличии в балке внутреннего шарнира К в сечении $z = dk$ первая производная от прогиба v по z претерпевает в этом случае скачок на величину $\Delta\theta_k$ (рис. 6.8) так, что:

$$v' = \theta_0 + \Delta\theta_k - \frac{1}{EJ_x} \int_0^z \frac{M_x}{EJ_x} dz. \quad (6.24)$$

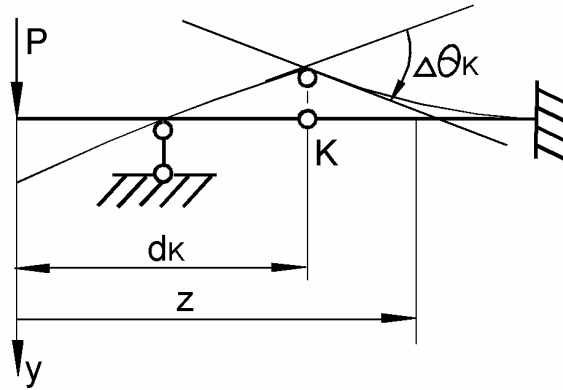


Рис. 6.8

Интегрируя, получаем:

$$v = v_0 + \theta_0 z + \Delta\theta_K (z - d_K) + \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{m(z-a)^2}{2!} + \frac{P(z-b)^3}{3!} + \frac{q(c)(z-c)^4}{4!} + \frac{q'(z-c)^5}{5!} + \dots + \frac{q^{(n)}(z-c)^{n+4}}{(n+4)!} \right] \quad (6.25)$$

Обобщенные силы m , P , q в (6.23), (6.25) повторяются столько раз, сколько они рассматриваются в рассматриваемой задаче. Если распределенная нагрузка не доходит до рассматриваемого сечения с координатой z , то ее следует продолжить до этого сечения и добавить точно такую же, но противоположного знака (см. рис. 6.7).

6.5. Примеры решения задач по определению перемещений методом начальных параметров

Пример 6.7. Однопролетная балка находится под действием сосредоточенной силы P (рис. 6.9, а).

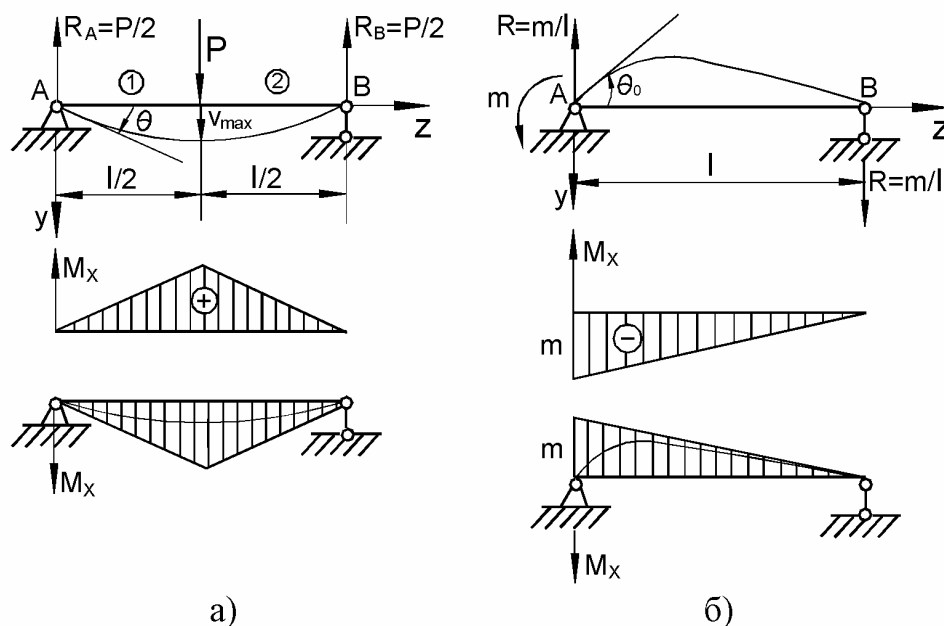


Рис. 6.9

Тогда опорные реакции $R_A = R_B = P/2$. Балка имеет два участка с различными выражениями для изгибающих моментов:

$$M_1 = R_A z_1 = \frac{P}{2} z_1, \quad M_2 = R_A z_2 - P \left(z_2 - \frac{l}{2} \right) = \frac{P}{2} z_2 - P \left(z_2 - \frac{l}{2} \right). \quad (1)$$

В этом случае дифференциальные уравнения изгиба на каждом из участков имеют различный вид:

$$EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{P}{2} z_1, \quad EJ_x = -\frac{P}{2} z_2 + P \left(z_2 - \frac{l}{2} \right). \quad (2)$$

Интегрирование этих уравнений приведет к выражениям для прогибов v_1, v_2 , которые будут содержать четыре постоянные интегрирования. Для их определения нужно составить четыре граничных условия. Это вызовет определенные трудности при решении данной задачи. Метод начальных параметров существенно упрощает решение задачи по определению прогибов балки.

Составим выражения прогибов для каждого из участков, пользуясь формулой (6.37):

$$v_1 = v_0 + \theta_0 z_1 + \frac{1}{EJ_x} \left(-\frac{R_A z_1^3}{6} \right), \quad (3)$$

$$v_2 = v_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{R_A z_2^3}{6} + \frac{P(z_2 - l/2)^3}{6} \right]. \quad (4)$$

Начальные параметры определяем из граничных условий:

$$v_1(0) = 0, \quad v_2(l) = 0. \quad (5)$$

Подставляя $z_1 = 0$ в (3) и $z_2 = l$ в (4), согласно (5), находим:

$$v_1 = v_0 = 0, \quad v_2 = v_0 + \theta_0 l + \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{Pl^3}{12} + \frac{P(l/2)^3}{6} \right] = 0, \quad (6)$$

откуда получаем:

$$v_0 = 0, \quad \theta = \frac{Pl^2}{16EJ_x} > 0. \quad (7)$$

Подставляя значения v_0, θ_0 в (3), (4), получим выражения прогибов на каждом из двух участков. Максимальный прогиб находим из (3) либо (4) при $z_1 = z_2 = l/2$. В результате вычислений находим:

$$v_{\max} = \frac{Pl^3}{16EJ_x} > 0. \quad (8)$$

Угол поворота на втором участке:

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{R_A z_2^2}{3} + \frac{P(z_2 - l/2)^2}{3} \right].$$

На правой опоре В при $z = l$ получаем:

$$\theta_B = \frac{Pl^2}{16EJ_x} - \frac{Pl^2}{8EJ_x} = -\frac{Pl^2}{16EJ_x} < 0.$$

Пример 6.8. Однопролетная балка находится под действием сосредоточенного момента в опоре (рис. 6.9, б). В данном примере опорные реакции $R = m/l$. Прогибы балки в произвольном сечении:

$$v = v_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{mz^2}{2} - \frac{Rz^3}{6} \right) \quad (1)$$

или, с учетом $R = m/l$,

$$v = v_0 + \theta_0 z + \frac{mz^2}{6EJ_x} \left(3 - \frac{z}{l} \right). \quad (2)$$

Угол поворота находим дифференцированием (2):

$$\frac{dv}{dz} \approx \theta = \theta_0 + \frac{mz}{2EJ_x} \left(2 - \frac{z}{l} \right). \quad (3)$$

При $z = 0$ на левой опоре А имеем $v = 0$, что позволяет найти $v_0 = 0$. На правой опоре В при $z = l$ прогиб $v = 0$, т.е.

$$v(l) = \theta_0 l + 2 \frac{ml^2}{6EJ_x} = 0,$$

откуда

$$\theta_0 = -\frac{ml}{3EJ_x} < 0. \quad (4)$$

На опоре В при $z = l$ угол поворота, согласно (3), равен:

$$\theta_B = -\frac{ml}{EJ_x} + \frac{ml}{2EJ_x} = \frac{ml}{6EJ_x} > 0. \quad (5)$$

Пример 6.9. Однопролётная балка с консолью находится под действием распределённой нагрузки q (рис. 6.10).

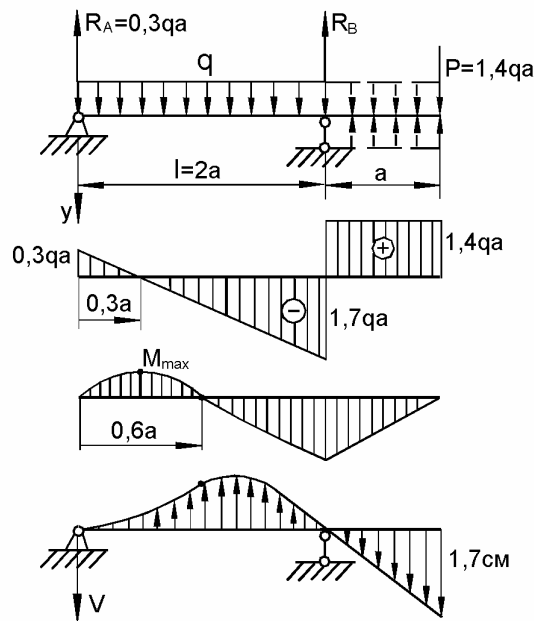


Рис. 6.10

Определим прогибы в середине пролета балки и на конце ее консольной части. Составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \Sigma m_A = R_B \cdot 2a - P \cdot 3a - q \cdot 2a \cdot a = 0, \\ \Sigma m_B = q \cdot 2a \cdot a - R_A \cdot 2a - Pa = 0, \end{cases}$$

откуда

$$R_A = 0,3qa, \quad R_B = 3,1qa.$$

Для статической проверки правильности найденных значений реакции составляем третье уравнение - сумму проекций на вертикальную ось у:

$$\sum Y = q \cdot 2a + P - R_A - R_B = 0,$$

или

$$q \cdot 2a + 1,4qa - 0,3qa - 3,1qa = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

На опорах балки при $z = 0$, $z = 2a$ имеем $v = 0$. Используя (6.21), находим:

$$v(0) = v_0 = 0, \quad v(2a) = v_0 + \theta_0 \cdot 2a + \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{R_A(2a)^3}{6} + \frac{q(2a)^4}{24} \right] = 0,$$

откуда следует:

$$v_0 = 0, \quad \theta_0 = -\frac{4qa^3}{30EJ_x} = -0,133 \frac{qa^3}{EJ_x}.$$

Искомые перемещения:

$$\begin{aligned} v(a) &= v_0 + \theta_0 a + \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{R_A a^3}{6} + \frac{qa^4}{24} \right] = -\frac{34qa^4}{240EJ_x} = -0,142 \frac{qa^4}{EJ_x} \\ v(3a) &= v_0 + \theta_0 \cdot 3a + \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{-R_A(3a)^3}{6} - \frac{R_B(a)^3}{6} + \frac{q(3a)^4}{24} - \frac{qa^4}{24} \right] = \\ &= \frac{256}{240} \frac{qa^4}{EJ_x} = 1,08 \frac{qa^4}{EJ_x}. \end{aligned}$$

Если принять $EJ_x = 10^9 \text{ МПа} \cdot \text{см}^4$, $q = 1 \text{ Н/м}$, $a = 2 \text{ м}$, то получим $v(a) = -0,227 \text{ МПа}$, $v(3a) = 1,7 \text{ см}$.

При вычислении прогиба $v(3a)$ на конце консольной части распределенная нагрузка не доходит до рассматриваемого сечения, что является обязательным при применении универсального уравнения. Чтобы выйти из положения, распределенную нагрузку продолжаем до рассматриваемого сечения и добавляем такую же, но противоположного направления (рис. 6.10). Добавление такой же нагрузки в результате дает нагрузку, статически эквивалентную нулю, что не вызовет изменений в деформированном состоянии балки.

Построим изогнутую ось балки. Для этого отложим на рис. 6.10 значения найденных прогибов с учетом их знаков. Кроме того, необходимо вспомнить, что выпуклость эпюры моментов от распределенной нагрузки совпадает с выпуклостью кривой изогнутой оси. В точке, где $M_x = 0$, имеет место смена кривизны изогнутой оси балки. Сечение, в котором $M_x = 0$, найдем из условия

$$M_x = R_A z_* - \frac{qz_*^2}{2} = 0,$$

откуда $z_* = 0,6a$. Эпюра прогибов изображена на рис. 6.1.

6.6. Простейшие статически неопределимые задачи при изгибе. Метод сравнения (наложения) перемещений

Рассмотрим простейшую один раз статически неопределимую балку (рис. 6.11).

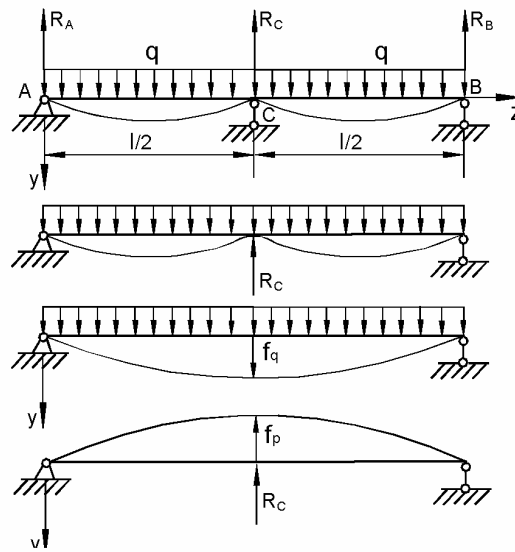


Рис. 6.11.

Прогиб балки над опорой С равен нулю и его можно, в силу принципа независимости действия сил, представить как сумму перемещений от распределенной нагрузки и сосредоточенной силы R_C :

$$v_C = f_q - f_p = 0.$$

Используя известные решения п. 6.5, имеем:

$$f_q = \frac{5ql^4}{384EJ_x}, \quad f_{R_C} = \frac{R_C l^3}{48EJ_x}.$$

Следовательно,

$$v_C = \frac{5ql^4}{384EJ_x} - \frac{R_C l^3}{48EJ_x} = 0,$$

откуда $R_C = 5ql/8$.

Из уравнений равновесия:

$$R_A + R_B + R_C - ql = 0, \quad R_A \frac{l}{2} - R_B \frac{l}{2} = 0$$

находим опорные реакции $R_A = R_B = 3ql/16$.

В поперечном сечении z

$$Q_y = R_A - qz, \quad M_x = R_A z - \frac{qz^2}{2}.$$

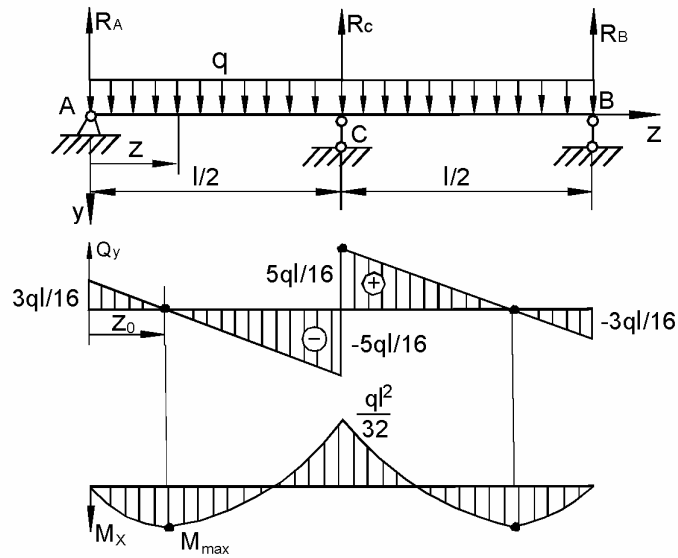


Рис. 6.12.

Экстремальный момент возникает в сечении с координатой z_0 , которая находится из условия:

$$\frac{dM_x}{dz} = R_A - qz_0 = 0,$$

откуда $z_0 = 3l/16$. Максимальный момент

$$M_{\max} = R_A z_0 - \frac{qz_0^2}{2} = \frac{9ql^2}{512}.$$

Он меньше, чем момент над средним сечением при $z = l/2$:

$$M_C = R_A \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = -\frac{ql^2}{32}.$$

На рис. 6.12 построены эпюры Q_y , M_x . Эпюра моментов была использована нами во вводной лекции.

6.7. Расчет на прочность простейших статически неопределимых балок методом допускаемых нагрузок

Рассмотрим простейшую статически неопределимую балку (рис. 6.13, а).

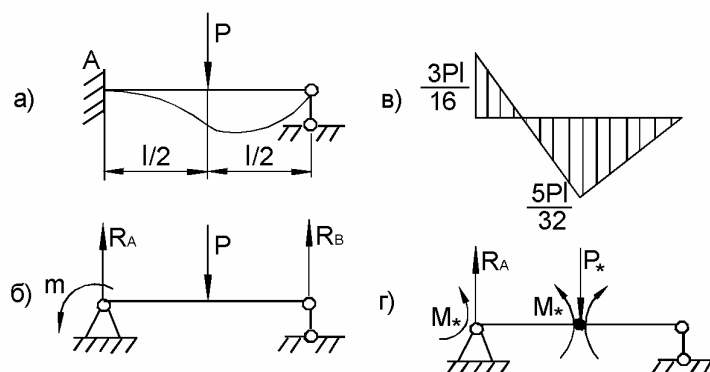


Рис. 6.13

Расчет на прочность по допускаемым напряжениям состоит в том, чтобы найти $\sigma_{\max}$ и потребовать $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$. Для этого сначала необходимо раскрыть статическую неопределимость задачи. На рис. 6.13, б изображена эквивалентная балка, в которой момент m должен быть подобран так, чтобы угол поворота в опоре А обращался в нуль как и в исходной схеме балки (рис. 6.13, а).

Вычислим угол поворота в опоре А, используя решения п. 6.5:

$$\theta_A = \frac{Pl^2}{16EJ_x} - \frac{ml}{3EJ_x} = 0,$$

откуда находим:

$$m = \frac{3PL}{16}$$

Максимальный момент возникает в защемлении (рис. 6.13, в):

$$M_{\max} = R_A \frac{l}{2} - m = \frac{3Pl}{16}.$$

Таким образом, условие прочности по допускаемым напряжениям (или расчетному сопротивлению) дает:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{3Pl}{16W_x} \leq [\sigma],$$

откуда

$$P_{\max} \leq [P_*] = \frac{16[\sigma]W_x}{3l}.$$

Предельная нагрузка P_t упругого состояния, при которой впервые в балке возникает пластическая деформация, равна:

$$P_t = \frac{16\sigma_t W_x}{3l}.$$

Первый пластический шарнир образуется в защемлении. В этом пластическом шарнире $M_{\max} = \sigma_t W_*$. Однако балка будет испытывать стесненную пластическую деформацию, пока в середине пролета под силой P момент также не будет равным M_* и балка превратится в механизм (рис. 6.13, г). Для предельного состояния имеем уравнения равновесия:

$$R_A l - P_* \frac{l}{2} - M_* = 0, \quad R_A \frac{l}{2} - M_* = M_*,$$

откуда следует $R_A = 4M_*/l$, $P_* = \frac{6M_*}{l} = \frac{6\sigma_t W_*}{l}$.

Допускаемое значение внешней нагрузки:

$$P \leq [P_*] = \frac{6[\sigma] W_*}{l}.$$

Сравнивая P_* и P_t либо $[P_*]$ и $[P_t]$ получим, что их отношение:

$$k = \frac{P_*}{P_t} = \frac{[P_*]}{[P_t]} = \frac{9W_*}{8W_x} = 1,125 \frac{W_*}{W_x}.$$

Статическая неопределимость задачи повышает допустимую нагрузку на 12,5%. Для балки прямоугольного сечения $W_*/W_x = 1,5$. В случае прямоугольника $k = 1,125 \cdot 1,5 \approx 1,69$. Для данной задачи обнаруживается резерв прочности в 69% по сравнению с расчетом по допускаемым напряжениям.

В рассматриваемом примере пластические шарниры образуются в защемлении и в сечении под сосредоточенной силой. В случае распределенной нагрузки указать сразу сечения, где возникнут пластические шарниры, не всегда удастся. Рассмотрим простейшую двухпролетную статически неопределимую балку (рис. 6.14). В п. 6.6 эта задача была решена для случая упругого поведения балки и построена эпюра моментов (рис. 6.12).

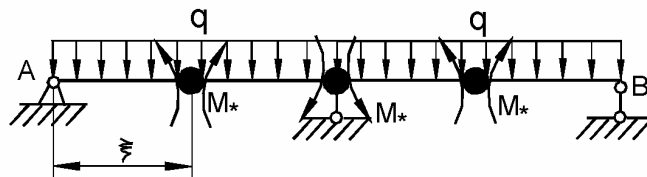


Рис. 6.14

Момент M_t в среднем сечении, при котором в крайних волокнах возникают пластические деформации:

$$M_t = \frac{Q_t l^2}{32} = \sigma_t W_x,$$

откуда соответствующая предельная нагрузка равна:

$$q_t = \frac{32 \sigma_t W_x}{l^2}.$$

Рассмотрим предельное состояние балки. Первый пластический шарнир образуется над средней опорой. Два других - в сечениях, строго говоря, не совпадающих с сечениями, где действуют максимальные моменты. Обозначим расстояние от левой опоры до первого шарнира в пролете через $\xi l/2$. Тогда уравнение равновесия балки левее первого и второго шарниров будет иметь вид:

$$R_A \left(\xi \frac{l}{2} \right) - \frac{q}{2} \left(\xi \frac{l}{2} \right)^2 = M_*, \quad R_A \frac{l}{2} - \frac{q}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = -M_*,$$

откуда после исключения R_A следует:

$$q_* = \frac{8M_*}{l^2} \frac{1 + \xi}{\xi(1 - \xi)}.$$

Разрушающая предельная нагрузка оказывается зависящей от величины ξ , т.е. местоположения пластического шарнира в пролете. Дифференцируя данное выражение для q по ξ и приравнявая производную нулю, получим:

$$\xi^2 = 2\xi - 1 = 0,$$

откуда

$$\xi = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Так как $\xi > 0$, то перед радикалом следует сохранить знак плюс. Тогда $\xi = -1 + \sqrt{2} \approx 0,41$. В результате получим:

$$q_* = 46,6 \frac{M_*}{l^2} = 46,63 \frac{\sigma_T W_*}{l^2}.$$

Сравнивая выражения для q_t и q_* , находим:

$$k = \frac{q_*}{q_T} = \frac{46,63 W_*}{32 W_x} = 1,457 \frac{W_*}{W_x}.$$

Следовательно, в данной задаче статическая неопределимость повышает допустимую нагрузку на 45,7%. Если балка имеет прямоугольное сечение,

то $W_*/W_x = 1,5$. Поэтому в данной задаче полное увеличение допускаемой нагрузки составляет $k = 1,457 \cdot 1,5 = 2,186$, т.е. 118,6%. Если заменить в каждом из пролетов распределенную нагрузку q их равнодействующими $ql/2$ приложенными в их середине, т.е. при $\xi = 0,5$, то получим:

$$q_* = \frac{48M_*}{l^2}.$$

Величина

$$k = \frac{q_*}{q_T} = 1,5 \frac{W_*}{W_x},$$

что отличается от точного решения всего на 2,94%. Для прямоугольного сечения получаем $k = 2,25$ вместо 2,186.

6.8. Изгиб балок переменного поперечного сечения

На практике часто приходится иметь дело со стержнями переменного поперечного сечения, у которых площадь $F(z)$ и момент инерции $J_x(z)$ являются функциями z . В этом случае общий интеграл дифференциального уравнения изогнутой оси балки имеет вид:

$$v = v_0 + \theta_0 z - \int_0^z \int_0^z \frac{M_x(z)}{EJ_x(z)} dz dz. \quad (6.26)$$

Обозначим символом J_x^0 момент инерции какого-либо сечения, например при $z = 0$. Введем обозначение:

$$k(z) = \frac{J_x^0}{J_x}.$$

Тогда (6.23) можно представить в виде

$$v = v_0 + \theta_0 z - \int_0^z \int_0^z \frac{M_x^0}{EJ_x^0} dz dz,$$

где

$$M_x^0 = M_x(z) \frac{EJ_x^0}{EJ_x(z)} = k(z)M_x(z) - \text{приведённый момент.}$$

Исходная балка переменной жесткости приводится к балке постоянной EJ_x^0 с некоторым моментом M_x^0 .

Рассмотрим в качестве примера балку ступенчато-переменного сечения с двумя участками разной жесткости EJ_1 и EJ_2 и (рис. 6.15).

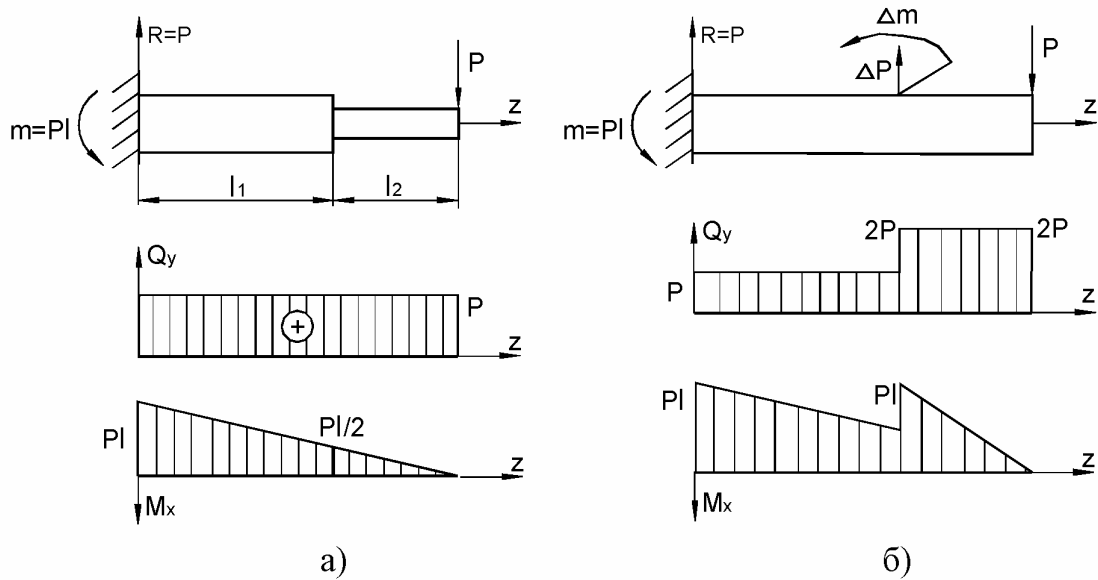


Рис. 6.15

Пусть длины участков $l_1 = l_2 = l/2$, $J_1 = J_0$, $J_2 = 2J_0$. Тогда $k_1 = J_0/J_1 = 1$, $k_2 = J_0/J_2 = 1/2$.

Для исходной балки $Q_y = P$, $M_x = -P(l - z)$. Для приведенной к единой жесткости EJ_x^0 балки имеем:

$$\begin{cases} Q_1^0 = k_1 P = P, & Q_2^0 = k_2 P = P/2, \\ M_1^0 = -k_1 P(l - z_1), & M_2^0 = -k_2 P(l - z_2), \end{cases}$$

где $0 \leq z_1 \leq l/2$, $l/2 \leq z_2 \leq l$.

Как видно, на границе участков при $z_1 = z_2 = l/2$ внутренние силовые факторы приведенной балки претерпевают скачки на величины:

$$\begin{cases} \Delta Q^0 = Q_2^0 - Q_1^0 = (k_2 - k_1)P = -P/2, \\ \Delta M^0 = M_2^0 - M_1^0 = -\frac{(k_2 - k_1)Pl}{2} = \frac{Pl}{4}. \end{cases}$$

Это возможно для приведенной балки только в том случае, если на стыке участков при $z_1 = z_2 = l/2$ будут приложены внешние сосредоточенные сила ΔP и момент Δm равные:

$$\Delta P = -P/2, \quad \Delta m = -\Delta M^0 = -\frac{Pl}{4}.$$

Дальнейшее решение задачи по определению прогибов в балке состоит в применении метода начальных параметров к балке с приведенной жест-

костью EJ_x . Прогиб балки на конце консоли второго участка будет равен:

$$v = v_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ_x^0} \left[ml^2 + \frac{\Delta m(l - l/2)^2}{2} - \frac{Rl^3}{6} - \frac{\Delta P(l - l/2)^3}{6} \right]$$

Так как при $z = 0$ $v = v_0 = 0$, $\theta = \theta_0 = 0$, то после замены $R = P$, $\Delta P = P$, $m = Pl$, $\Delta m = Pl/2$, получаем:

$$v_{\max} = v(l) = \frac{3Pl^3}{16EJ_0}.$$

6.9. Балка равного сопротивления

Пусть балка имеет прямоугольное переменное сечение, для которого высота сечения h - постоянная величина, а ширина изменяется по линейному закону:

$$b = b_0 \left(1 - \frac{z}{l} \right)$$

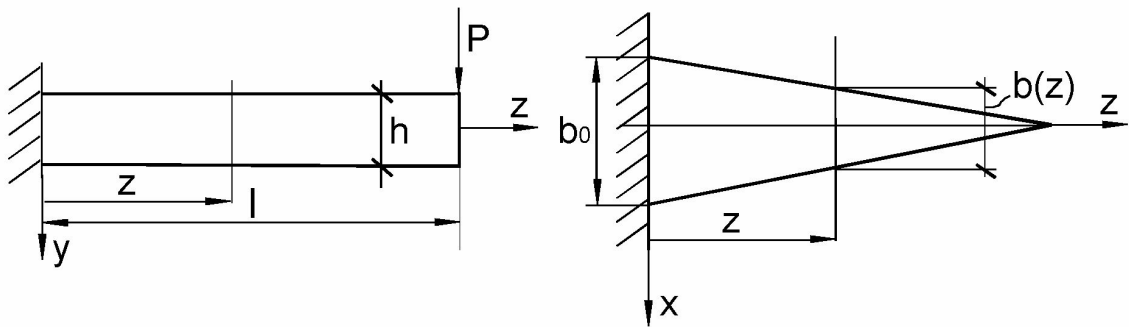


Рис. 6.16

Момент инерции поперечного сечения:

$$J_x = \frac{b(z)h^3}{12} = J_0 \left(1 - \frac{z}{l} \right), \quad J_0 = \frac{b_0 h^3}{12}.$$

Для рассматриваемой балки изгибающий момент в поперечном сечении z равен:

$$M_x = -P(l - z).$$

Согласно (6.23) прогиб балки:

$$v = v_0 + \theta_0 z + \int_0^z \int_0^z \frac{P(l - z)l}{EJ_0(l - z)} dz dz$$

или с учетом $v_0 = 0$, $\theta_0 = 0$:

$$v = \frac{Plz^2}{2EJ_0}, \quad v_{\max} = \frac{Pl^3}{2EJ_0}.$$

Определим теперь максимальные напряжения по формуле:

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_x y_{\max}}{J_x}.$$

Полагая $y_{\max} = h/2$ и используя выражения для M_x и J_x найдем:

$$\sigma_{z \max} = \frac{6Pl}{b_0 h^2} = \frac{M_{\max}}{W_0},$$

где $W_0 = b_0 h^2 / 6$ - момент сопротивления сечения в защемлении на левом конце балки при $z = 0$.

Таким образом, во всех сечениях балки рассматриваемого поперечного сечения максимальные поперечные сечения максимальные напряжения получились одинаковыми. Такая балка носит название балки равного сопротивления изгибу. Изогнутая ось балки представляет собой квадратичную параболу.

6.10. Балка на упругом основании

Если балка лежит на упругом основании, то последнее оказывает на балку реактивное давление $q_0 = -kv$ (гипотеза Винклера), где k - коэффициент упругости основания (коэффициент постели). Добавляя в правую часть уравнения нагрузку $q_0 = -kv$, получим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки на упругом основании:

$$EJ_x \frac{d^4 v}{dz^4} + kv = q(z). \quad (6.27)$$

Введем обозначение:

$$\alpha^4 = \frac{k}{4EJ_x}.$$

Тогда уравнение (6.27) принимает вид:

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + 4\alpha^4 v = \frac{q(z)}{EJ_x}. \quad (6.28)$$

Его общим решением будет:

$$v = e^{-\alpha z} (C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z) + e^{\alpha z} (C_3 \sin \alpha z + C_4 \cos \alpha z) + v_*, \quad (6.29)$$

где $v_*(z)$ - частное решение неоднородного уравнения (6.27).

Так как:

$$e^{\alpha z} = \operatorname{sh} \alpha z + \operatorname{ch} \alpha z, \quad e^{-\alpha z} = \operatorname{ch} \alpha z - \operatorname{sh} \alpha z,$$

то общее решение (6.27) можно записать в ином виде:

$$v = (C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z) \operatorname{sh} \alpha z + (C_3 \sin \alpha z + C_4 \cos \alpha z) \operatorname{ch} \alpha z.$$

Академик А. Н. Крылов ввел функции:

$$\begin{cases} Y_1 = \cos \alpha z \operatorname{ch} \alpha z, \\ Y_2 = \frac{1}{2\alpha} (\operatorname{ch} \alpha z \sin \alpha z + \operatorname{sh} \alpha z \cos \alpha z), \\ Y_3 = \frac{1}{2\alpha^2} (\operatorname{sh} \alpha z \sin \alpha z), \\ Y_4 = \frac{1}{4\alpha^3} (\operatorname{ch} \alpha z \sin \alpha z - \operatorname{sh} \alpha z \cos \alpha z), \end{cases}$$

обладающие свойством:

$$Y_1 = \frac{dY_2}{dz}, \quad Y_2 = \frac{dY_3}{dz}, \quad Y_3 = \frac{dY_4}{dz}, \quad \frac{dY_1}{dz} = -4\alpha^3 Y_4.$$

Они образуют систему частных решений уравнения (6.63) с единичной матрицей, представляемой в виде табл. 6.1.

Общее решение уравнения (6.27) можно записать через функции Крылова в виде

$$v = C_1 Y_1(z) + C_2 Y_2(z) + C_3 Y_3(z) + C_4 Y_4(z) + v_*,$$

где

$$v_* = \int_0^z Y_4(z-t) \frac{q(t)}{EJ_x} dt.$$

Таблица 6.1.

	$Y(0)$	$Y'(0)$	$Y''(0)$	$Y'''(0)$
Y_1	1	0	0	0
Y_2	0	1	0	0
Y_3	0	0	1	0
Y_4	0	0	0	1

Рассмотрим балку полубесконечной протяженности (рис. 6.17).

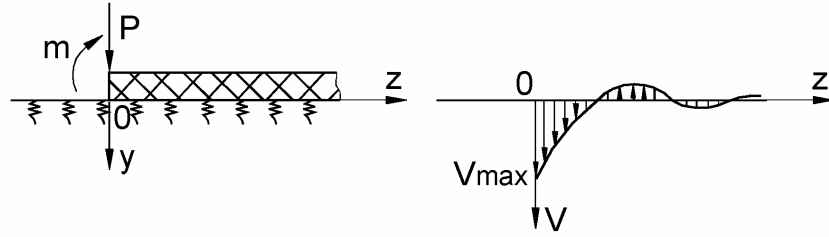


Рис. 6.17.

На краю балки при $z = 0$ действуют сосредоточенные сила P и момент m . Следовательно, на край балки при $z = 0$ имеем перерезывающую силу $Q_0 = -P$ и изгибающий момент $M_0 = m$. Если балка весьма длинная, то при больших z (теоретически $z \rightarrow \infty$) прогибы должны быть весьма малыми (теоретически $v \rightarrow 0$). Поэтому, согласно (6.29), $C_3 = C_4 = 0$. Так как распределенная нагрузка $q = 0$, то частное решение $v_* = 0$. Следовательно, общее решение рассматриваемой частной задачи имеет вид:

$$v = e^{-\alpha z} (C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z). \quad (6.30)$$

Вычислим производные:

$$\begin{cases} v' = \alpha e^{-\alpha z} [C_1 (\cos \alpha z - \sin \alpha z) - C_2 (\sin \alpha z + \cos \alpha z)], \\ v'' = 2\alpha^2 e^{-\alpha z} [-C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z], \\ v''' = 2\alpha^3 e^{-\alpha z} [C_1 (\sin \alpha z + \cos \alpha z) + C_2 (\cos \alpha z - \sin \alpha z)]. \end{cases}$$

Зная их, можно вычислить изгибающий момент и перерезывающую силу:

$$\begin{cases} M_x = -EJ_x v'' = 2\alpha^2 EJ_x e^{-\alpha z} [C_1 \cos \alpha z - C_2 \sin \alpha z], \\ Q_y = -EJ_x v''' = -2\alpha^3 EJ_x e^{-\alpha z} [C_1 (\sin \alpha z + \cos \alpha z) + C_2 (\cos \alpha z - \sin \alpha z)]. \end{cases} \quad (6.31)$$

Постоянные C_1, C_2 определяем из граничных условий при $z = 0$:

$$M_x = -EJ_x v''(0) = M_0, \quad Q_y = -EJ_x v'''(0) = Q_0,$$

откуда с учетом (6.30), (6.31) получаем:

$$C_1 = \frac{M_0}{2\alpha^2 EJ_x}, \quad C_2 = -\frac{Q_0 + \alpha M_0}{2\alpha^3 EJ_x}.$$

Для прогиба (6.30) получаем выражение:

$$V = \frac{e^{-\alpha z}}{2\alpha^3 EJ_x} [\alpha M_0 \sin \alpha z - (\alpha M_0 + Q_0) \cos \alpha z] \quad (6.32)$$

Максимальный прогиб находим из (6.31) при $z = 0$:

$$V_{\max} = -\frac{\alpha M_0 + Q_0}{2\alpha^3 EJ_x}.$$

Пусть на краю балки при $z = 0$ момент $M_0 = m = 0$, а перерезывающая сила $Q_0 = -P$, тогда:

$$\begin{aligned} V &= \frac{Pe^{-\alpha z} \cos \alpha z}{2\alpha^3 EJ_x}, \quad V_{\max} = \frac{P}{2\alpha^3 EJ_x}, \\ M_x &= \frac{Pe^{-\alpha z} \sin \alpha z}{\alpha}, \quad Q_y = -Pe^{-\alpha z} (\cos \alpha z - \sin \alpha z). \end{aligned}$$

Как видно, прогиб v , момент M_x , сила Q_y по мере удаления от края балки $z = 0$ периодически уменьшаются по экспоненциальному закону. Эта особенность быстрого затухания v, M_x, Q_y по мере удаления от края балки называется *краевым эффектом* (см. рис. 6.17).

Глава 7

Общие принципы и методы сопротивления материалов

7.1. Обобщённые силы и перемещения

В механике мы различаем два самостоятельных силовых фактора - сосредоточенные силы P , пару сил с моментом m (рис. 7.1,а). Иногда приходится иметь дело с группой сил и моментов. Назовём *обобщённой силой* P группу сил или моментов, характеризуемых одним параметром или числом. На рис. 7.1,б,в,г обобщёнными силами будут две силы P , два момента m , распределённая нагрузка q .

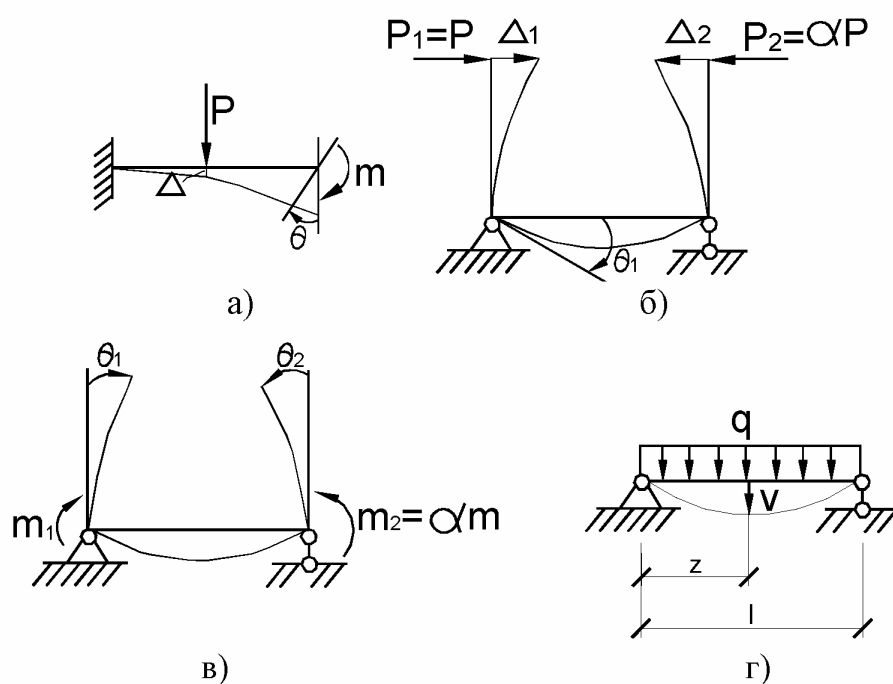


Рис. 7.1

Производимая ими работа соответственно равна:

$$\begin{cases} A = P\Delta, A = m\theta, A = P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 = P(\Delta_1 + \alpha\Delta_2) = P\Delta, \\ A = m_1\theta_1 + m_2\theta_2 = m(\theta_1 + \alpha\theta_2) = m\theta, \\ A = \int_0^l qVdz = q \int_0^l Vdz = q\omega, \end{cases}$$

где $\Delta = \Delta_1 + \alpha\Delta_2, \theta = \theta_1 + \alpha\theta_2, \omega = \int_0^l Vdz$, а величина ω представляет собой

площадь между исходной и изогнутой осями балки.

Обобщённым перемещением назовём множитель, стоящий в выражении работы при обобщённой силе. Обобщёнными силами могут быть не только внешние, но и внутренние: $N, Q, M_{изг}, M_{кр}$.

Рассмотрим например статически неопределимую балку (рис. 7.2).

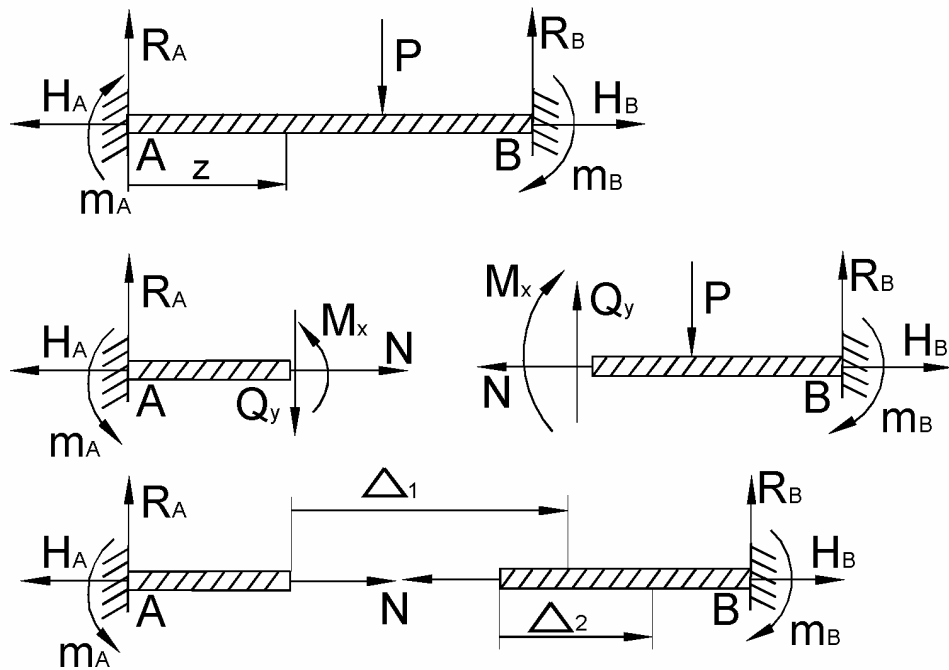


Рис. 7.2

Рассечём её на расстоянии z от левого конца и приложим к краям разреза по две нормальные силы N , две перерезывающие Q_y , два изгибающих момента M_x , каждая из которых образует группу сил, характеризуемых одним числом, т.е. обобщённую силу.

Возьмём две нормальные силы N . Они совершат работу:

$$U = N\Delta_1 + N\Delta_2 = N(\Delta_1 + \Delta_2) = N\Delta.$$

Обобщённое перемещение $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ представляет собой относительное расхождение краёв разреза. Аналогично можно рассмотреть две силы Q и два момента M_x .

7.2. Потенциальная энергия деформации стержня в общем случае его нагружения

Потенциальная энергия деформации при растяжении, кручении и изгибе была рассмотрена нами в главах 2, 3, 5. При изгибе мы не учитываем энергию, возникшую за счёт сдвига.

В общем случае сопротивления бруса деформированию при нагружении в его поперечных сечениях возникают шесть внутренних силовых факторов: $N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$.

Для бруса длиной l из линейно-упругого материала потенциальная энергия определяется формулой

$$U = \int_0^l \left[\frac{N^2}{2EF} + \frac{M_x^2}{2EJ_x} + \frac{M_y^2}{2EJ_y} + \frac{M_z^2}{2GJ_{кр}} + \frac{K_1 Q_x^2}{2GF} + \frac{K_2 Q_y^2}{2GF} \right] dz, \quad (7.1)$$

где коэффициенты K_1, K_2 зависят от формы поперечного сечения.

Например, для прямоугольного сечения $K_1 = K_2 = 6/5$, для круглого - $K_1 = K_2 = 10/9$, для тонкостенной трубки $K = 2$.

Если стержневая система состоит из нескольких элементов, то необходимо произвести суммирование энергий по числу этих элементов. Энергия растяжения и сдвига, как правило, меньше энергий изгиба и кручения. Вместе с тем возможны случаи (например, внецентренное сжатие), когда энергия растяжения и изгиба одного порядка. Энергия от сдвига в (7.1), сопровождаемая возникновением перерезывающих сил, может быть определена следующим образом: удельная потенциальная энергия чистого сдвига $U_0 = \tau^2 / 2G$. Следовательно,

$$U = \int_0^l \int_F U_0 dx dF = \int_0^l \left[\int_F \frac{\tau_{yz}^2}{2G} dF \right] dz.$$

Используя формулу (5.37) Журавского для касательного напряжения, найдём:

$$U = \int_0^l \frac{Q_y^2}{2GJ_x^2} \left[\int_F \frac{S_x^2 dF}{b^2(y)} \right] dz = \int_0^l \frac{K_2 Q_y^2}{2GF} dz,$$

где обозначено

$$K_2 = \frac{F}{J_x^2} \int_F \frac{S_x^2 dF}{b^2(y)}.$$

7.3. Принцип возможных перемещений и формула Лагранжа ¹⁾

Рассмотрим балку (рис. 7.3,а), находящуюся под действием силы P . Пусть некоторая точка A оси балки совершила конечное действительное перемещение V , которое зависит от значения силы P , т.е. $V = V(z, P)$. Изменим внешнюю силу P на бесконечно малую величину dP .

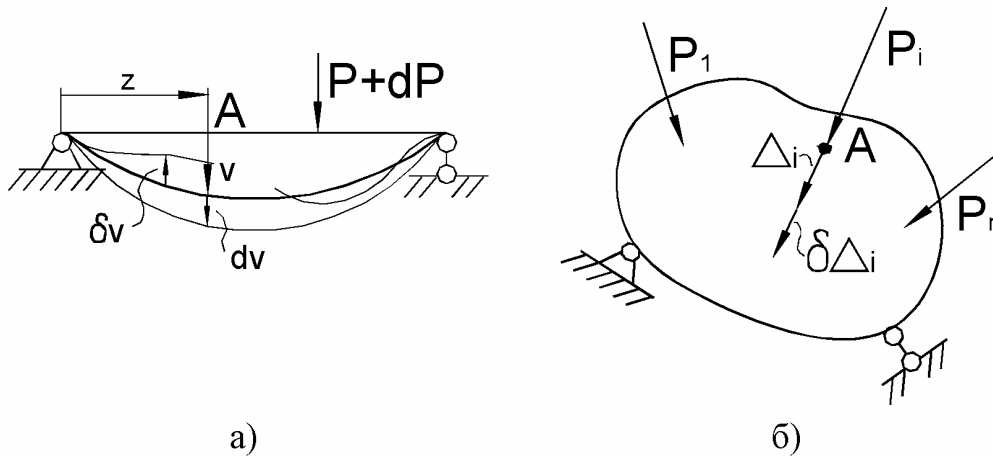


Рис. 7.3

Тогда действительное перемещение v получит бесконечно малое перемещение dv . Рассмотрим теперь множество перемещений точки A , которые могли бы быть сообщены точке A в соответствии с наложенными на балку внешними связями, но не совершаются фактически вследствие неизменности внешней силы P . Назовём *возможным перемещением* любое бесконечно малое воображаемое перемещение, которое может быть сообщено точке A тела в данный момент в соответствии с наложенными на него связями. В отличие от действительного бесконечно малого перемещения dv возможное будем обозначать δv , где символ δ носит название *вариации* и для него приняты те же правила, что и для дифференциала d . Отметим, что это правило в данном случае не относится к нагрузке P .

¹⁾ Ж.Лагранж (1736-1813)-великий французский математик и механик.

Пусть теперь мы имеем упругое тело произвольной геометрической формы (рис. 7.3,б). На него действует система обобщённых внешних сил $P_i, (i = 1, 2, 3, \dots)$. Тогда точка А приложения одной из сил P_i совершит действительное перемещение, проекцию которого на направление этой силы обозначим Δ_i . Потенциальная энергия U может быть выражена либо через силы P_i , либо через перемещения Δ_i :

$$U = U_{\Delta}(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) = U_p(P_1, P_2, \dots, P_n).$$

Сообщим точкам приложения сил P_i возможные перемещения $\delta\Delta_i$. Элементарная работа внешних сил $\delta A = \sum P_i \delta\Delta_i$. Считая, что U представлена через обобщённые перемещения, найдём элементарную работу внутренних сил:

$$\delta U = \sum_i \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \delta\Delta_i.$$

Приравнявая элементарную работу внешних и внутренних сил, получим условие:

$$\sum_i P_i \delta\Delta_i = \delta U, \quad (7.2)$$

выражающее принцип возможных перемещений Лагранжа. Вследствие произвольности вариаций δU_i в (7.2) находим формулу:

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i},$$

выражающую собой *теорему Лагранжа*: частная производная энергии деформации по перемещению равна силе.

Для линейно упругого тела зависимость между силами и перемещениями является линейной. Наиболее простым выражением для потенциальной энергии является квадратичная формула

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C_{ij} \Delta_i \Delta_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.4)$$

где C_{ij} - постоянные *коэффициенты упругой жёсткости тела*.

На основании (7.3) и (7.4) получаем систему уравнений обобщённого закона Гука:

$$P_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \Delta_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.5)$$

которые связывают силы с перемещениями.

[illegible]

На основании (7.5) выражение (7.4) для потенциальной энергии можно записать в виде

Коэффициенты C_{ij} в (7.5) симметричны. По теореме Лагранжа (7.3)

Из условия независимости смешанной второй производной от потенциальной энергии $\frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_j \partial \Delta_i}$ получаем $C_{ij} = C_{ji}$.

Потенциальная энергия двух растягиваемых стержней (рис. 7.4):

В силу закона Гука $N = EF\Delta l / l$.

Из рис. 7.4 следует перемещение $\Delta = l \operatorname{tg} \alpha \approx l \alpha$. Так как $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$, то

$$\Delta l = l \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \approx \frac{l \alpha^2}{2} = \frac{\Delta^2}{2l}.$$

Следовательно, потенциальная энергия:

$$U = \frac{EF \Delta^4}{4l^3},$$

может быть выражена через перемещение Δ . Поскольку условия для использования формулы Лагранжа соблюдены, получаем:

$$P = \frac{\partial U}{\partial \Delta} = \frac{EF \Delta^3}{l^3}, \Delta = l \sqrt[3]{\frac{P}{EF}},$$

что совпадает с формулой (2.87), полученной ранее иным путём (см. кн.1).

7.4. Принцип возможного изменения сил и формула Кастилиано¹⁾

Рассмотрим упругую консольную балку под действием силы P (рис. 7.5).

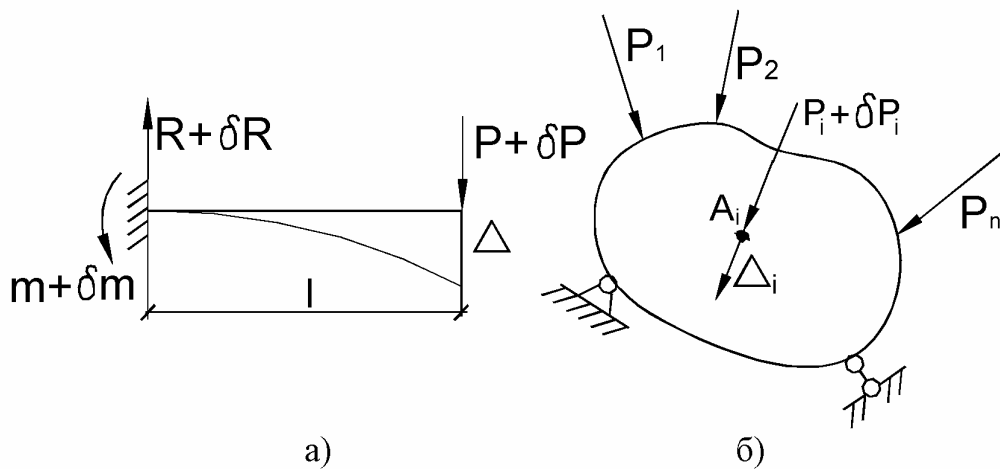


Рис. 7.5

Рассмотрим упругую консольную балку под действием силы P (рис. 7.5). Концевое сечение балки совершит действительное перемещение Δ . Опорные реакции будут: $R = P, m = Pl$.

¹⁾ К.А. Кастилиано (1847-1884)-итальянский механик и инженер.

Предположим, что сила P получила возможное (воображаемое) приращение δP называемое *вариацией* силы P . При этом все действительные перемещения балки, в т.ч. Δ , остались неизменными, а реактивные силы изменились на величины $\delta R = \delta P$, $\delta m = \delta P l$. При этом за счёт воображаемого изменения силы δP изменилась потенциальная энергия балки на величину

$$\delta U = \delta P \Delta. \quad (7.7)$$

Так как

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial P} \delta P, \quad (7.8)$$

то, приравнявая (7.7) и (7.8), получаем формулу Кастилиано:

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P}.$$

Пусть теперь мы имеем упругое тело произвольной формы под действием произвольной системы внешних сил P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) (рис. 7.5,б), которые на перемещениях Δ_i в их направлениях произведут действительную работу:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i.$$

Она полностью переходит в потенциальную энергию тела U , создаваемую внутренними силами, зависящими от внешних сил P_i . Поэтому в данном случае мы можем считать, что потенциальная энергия тела зависит от внешних сил:

$$U = U(P_1, P_2, \dots, P_n).$$

Предположим, что произошло возможное изменение внешних сил δP_i . Тогда изменится и внутренняя энергия тела:

$$\delta U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial P_i} \delta P_i. \quad (7.9)$$

При обратном приложении сил P_i их вариации δP_i на действительных перемещениях Δ_i совершают элементарную дополнительную работу:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \delta P_i \Delta_i \quad (7.10)$$

Она перейдёт в возможное изменение внутренней потенциальной энергии (7.10), т.е.

$$\sum_{i=1}^n \delta P_i \Delta_i = \delta U. \quad (7.11)$$

Заменяя в (7.11) δU его выражением (7.9), находим:

$$\sum_{i=1}^n \left(\Delta_i - \frac{\partial U}{\partial P_i} \right) \delta P_i = 0,$$

откуда в силу произвольности вариаций δP_i получаем формулу Кастилиано:

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}, \quad (7.12)$$

которая выражает собой теорему Кастилиано для линейных упругих систем: частная производная от потенциальной энергии деформации по обобщённой силе P_i равна обобщённому перемещению Δ_i в направлении действия силы.

Если принять для потенциальной энергии выражение в виде квадратичной формы:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_{ij} P_i P_j,$$

то, согласно (7.12), получим обобщённый закон Гука для перемещений и сил:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} P_j, \quad (7.13)$$

или в развёрнутой форме:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + \dots + \delta_{1n}P_n, \\ \Delta_2 = \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2 + \dots + \delta_{2n}P_n, \\ \dots\dots\dots \\ \Delta_n = \delta_{n1}P_1 + \delta_{n2}P_2 + \dots + \delta_{nn}P_n, \end{cases}$$

где коэффициенты δ_{ij} носят название *коэффициентов упругого влияния* или *податливости*. Они не являются упругими постоянными материала данного тела, т.к. зависят от размеров тела.

На основании (7.13) выражение потенциальной энергии может быть записано в виде (7.6). Покажем, что коэффициенты в (7.13) обладают симметрией, т.е. $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. По теореме Лагранжа (7.3)

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \sum \delta_{ij} P_j, \quad \Delta_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum \delta_{ji} P_i.$$

Из условия независимости второй смешанной производной от функции потенциальной энергии $\partial^2 U / \partial P_i \partial P_j = \partial^2 U / \partial P_j \partial P_i$ получаем $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Приведём пример применения теоремы Кастилиано. Потенциальная энергия упругой однопролётной балки длиной l с шарнирным закреплением краёв и сосредоточенной поперечной силой посередине пролёта равна:

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2 dz}{2EJ_x} = 2 \int_0^l \frac{P^2 z^2}{4 \cdot 2EJ_x} dz = \frac{Pl^3}{96EJ_x}.$$

По формуле (7.12) находим:

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{48EJ_x}.$$

Формула (7.12) Кастилиано пригодна только для упругих линейных систем. Рассмотрим теперь нелинейное упругое тело. Пусть потенциальная энергия деформации выражена через перемещения Δ_i . Образует функцию

$$\Phi = \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i - U(\Delta_i),$$

называемую *дополнительной работой* или *потенциальной энергией сил*. Проварьируем её:

$$\delta \Phi = \sum_{i=1}^n \left\{ P_i \delta \Delta_i + \delta P_i \Delta_i - \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \delta \Delta_i \right\}.$$

Так как по теореме Лагранжа (7.3) $\partial U / \partial \Delta_i = P_i$, то получаем:

$$\delta \Phi = \sum_{i=1}^n \Delta_i \delta P_i. \quad (7.14)$$

Предположим, что функция Φ выражена только через внешние силы:

$$\Phi = \Phi(P_1, P_2, \dots, P_n),$$

тогда

$$\delta \Phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \delta P_i.$$

Заменяя левую часть (7.14) полученным выражением, находим:

$$\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P_i} - \Delta_i \right) \delta P_i = 0,$$

откуда в силу произвольности δP_i получаем:

$$\Delta_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}. \quad (7.15)$$

Эта формула (7.15) выражает собой теорему Кастилиано для нелинейно упругого тела: *частная производная от дополнительной работы по силе равна перемещению в направлении этой силы.*

Термин «дополнительная работа» легко понять из рис. 7.6, на котором заштрихованная область изображает работу внутренних сил, т.е. потенциальную энергию деформации.

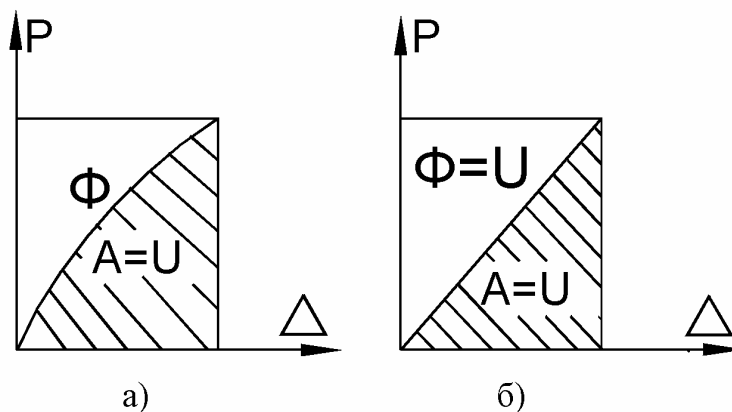


Рис. 7.6

Дополнительная работа Φ представляет собой площадь, дополняющую U до прямоугольника. Иногда её называют работой или энергией сил.

7.5. Формула Мора для перемещений в стержнях и стержневых системах¹⁾

Рассмотрим раму (рис. 7.7,а), нагруженную системой внешних сил P_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Пусть требуется определить перемещение Δ_A точки А в направлении АВ. Воспользуемся принципом Кастилиано. Внешняя сила в точке А в направлении АВ может быть, а может и не быть. Приложим в точке А в направлении АВ статически возможную силу δP_A (рис. 7.7,а).

¹⁾ О.Х. Мор (1835-1918)-немецкий механик и инженер

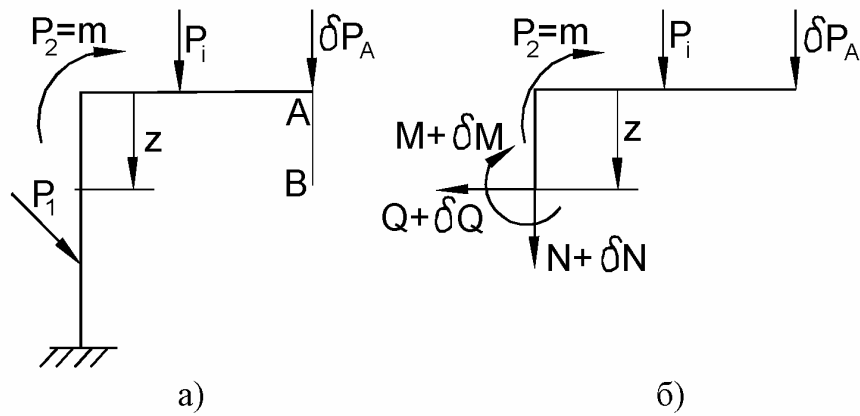


Рис. 7.7

Тогда, согласно (7.11), имеем:

$$\Delta_A \delta P_A = \delta U. \quad (7.16)$$

Рассечём раму в стойке на расстоянии z . В поперечном сечении возникают внутренние силовые факторы N, Q, M (рис.7.7,а). От изменения (вариации) силы в точке А в поперечном сечении рамы внутренние силовые факторы изменятся на бесконечно малые величины $\delta N, \delta Q, \delta M$. Эти изменения внутренних сил и моментов будут пропорциональны δP_A , т.е.

$$\delta N = \bar{N} \delta P_A, \delta M_x = \bar{M}_x \delta P_A, \delta M_y = \bar{M}_y \delta P_A, \delta M_z = \bar{M}_z \delta P_A, \dots \quad (7.17)$$

Из (7.17) следует, что при $\delta P_A = 1$ коэффициенты $\bar{N}, \bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_z$,

$\bar{Q}_x, \bar{Q}_y$ являются нормальной силой, изгибающим моментом, крутящим моментом, перерезывающими силами в сечении рамы с координатой z , которые вызваны действием единичной силы в точке А в направлении АВ искомого перемещения (рис. 7.8).

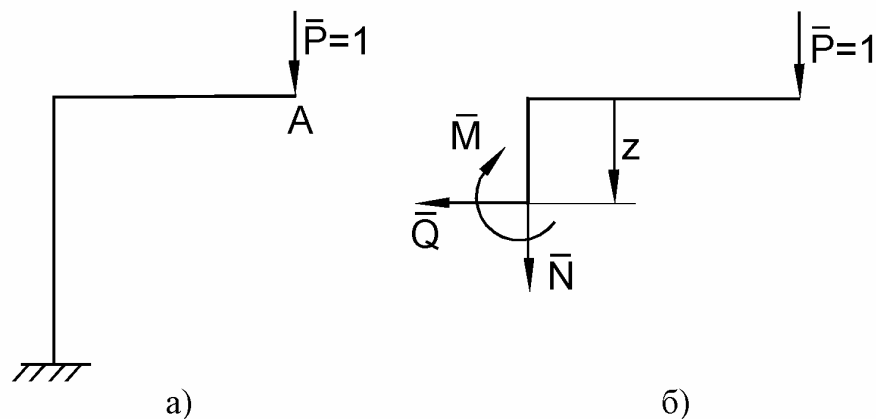


Рис. 7.8

Так как оператор вариации δ имеет смысл дифференциала, то варьируя (7.1), получим:

$$\delta U = \int_0^l \left[\frac{N \delta N}{EF} + \frac{M_x \delta M_x}{EJ_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EJ_y} + \frac{M_z \delta M_z}{GJ_{кр}} + \dots \right] dz.$$

Учитывая (7.7), подставляя в (7.5) и сокращая на P_A , находим формулу

$$\Delta_A = \int_0^l \left[\frac{N \bar{N}}{EF} + \frac{M_x \bar{M}_x}{EJ_x} + \frac{M_y \bar{M}_y}{EJ_y} + \frac{M_z \bar{M}_z}{GJ_{кр}} + \dots \right] dz, \quad (7.18)$$

называемую формулой Мора. Она служит для определения любых обобщённых перемещений в стержневых системах.

Формулу Мора можно получить, пользуясь принципом возможных перемещений. Рассмотрим схему нагружения (см. рис. 7.8,а), когда в точке А в направлении искомого перемещения Δ_A приложена единичная сила

$\bar{P} = 1$, вызывающая в поперечном сечении системы внутренние силовые факторы $\bar{N}, \bar{Q}, \bar{M}$ (рис. 7.8,б). Согласно принципу возможных перемещений работа этих внутренних силовых факторов на любых возможных перемещениях должна равняться работе единичной силы $\bar{P}$ на возможном перемещении $\delta \Delta_A$:

$$\bar{P} \delta \Delta_A = \int_0^l \left[\bar{N} \delta U + \bar{M}_x \delta \theta_1 + \bar{M}_y \delta \theta_2 + \bar{M}_z \delta \varphi + \dots \right]$$

Выберем возможные перемещения пропорциональными действительным:

$$\delta \Delta_A = \lambda \Delta_A, \delta U = \lambda dU, \delta \varphi = \lambda d\varphi, \delta \theta = \lambda d\theta, \dots$$

Тогда после подстановки получим:

$$\Delta_A = \int_0^l \left[\bar{N} dU + \bar{M}_x d\theta_1 + \bar{M}_y d\theta_2 + \bar{M}_z d\varphi \right] dz. \quad (7.19)$$

Если учесть, что

$$dU = \frac{N dz}{EF}, d\theta_1 = \frac{M_x dz}{EJ_x}, d\theta_2 = \frac{M_y dz}{EJ_y}, d\varphi = \frac{M_z dz}{GJ_{кр}},$$

то приходим к формуле (7.18).

7.6. Примеры определения перемещений с помощью формулы Мора

Пример 1. Пусть требуется в простейшей ферме (рис. 7.9) определить вертикальное и горизонтальное перемещение узла А.

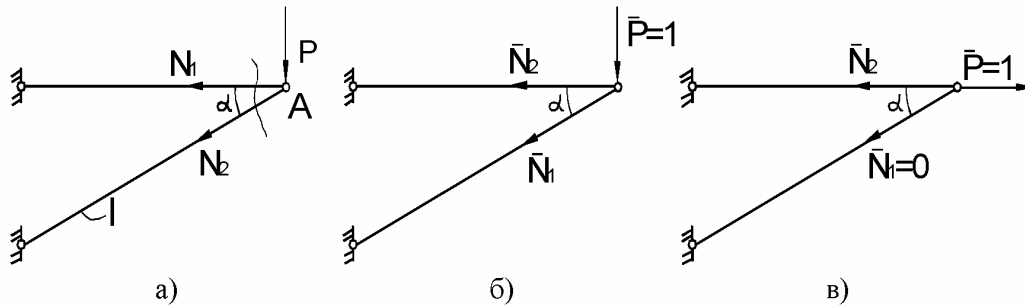


Рис. 7.9

Усилия в стержнях фермы $N_1 = -P/\sin \alpha$, $N_2 = P \operatorname{ctg} \alpha$. Формула Мора (7.18) имеет вид:

$$\Delta_A = \sum_{i=1}^2 \int_0^{l_i} \frac{N_i \bar{N}_i}{EF} dz. \quad (1)$$

Усилия $\bar{N}_i$ найдём из рис. 7.9,б,в. При определении вертикального перемещения единичную силу приложим к узлу А в вертикальном направлении (рис. 7.9,б). Усилия $\bar{N}_1 = -1/\sin \alpha$, $\bar{N}_2 = \operatorname{ctg} \alpha$. Согласно (1) получаем:

$$\Delta_{A, \text{верт}} = \frac{1}{EF} \left\{ \int_0^l \left(\frac{P}{\sin \alpha} \right) \frac{1}{\sin \alpha} dz + \int_0^{l \cos \alpha} (P \operatorname{ctg} \alpha) \operatorname{ctg} \alpha dz \right\} = \frac{Pl(1 + \cos^3 \alpha)}{EF \sin^2 \alpha}. \quad (2)$$

При определении горизонтального перемещения единичную силу прикладываем к узлу А в горизонтальном направлении (рис. 7.9,в). Усилия от единичной силы

$\bar{N}_1 = 0$, $\bar{N}_2 = \bar{P} = 1$. Следовательно,

$$\Delta_{A, \text{гор}} = \frac{1}{EF} \int_0^{l \cos \alpha} P \operatorname{ctg} \alpha \cdot 1 dz = \frac{Pl \cos^2 \alpha}{EF \sin \alpha} \geq 0. \quad (3)$$

Пример 2. Пусть требуется определить вертикальное перемещение и угловое перемещение в точке А балки (рис. 7.10).

Для определения перемещений воспользуемся формулой Мора для обобщённых перемещений:

$$\Delta_A = \int_0^l \frac{M_x \bar{M}_x}{EJ_x} dz. \quad (1)$$

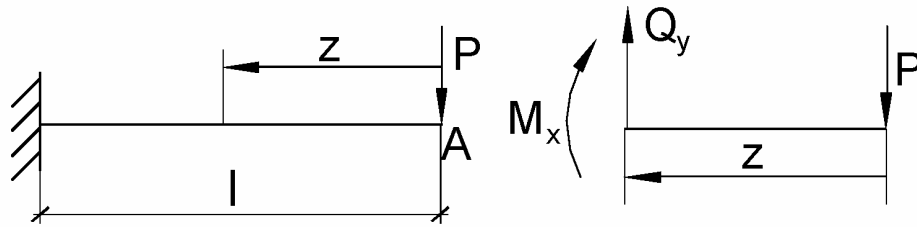


Рис. 7.10

Из рис. 7.10 находим $M_x = -Pz$. Найдём сначала вертикальное перемещение точки А. Приложим к балке в точке А в вертикальном направлении единичную силу $\bar{P} = 1$ (рис. 7.11,а). Находим момент $\bar{M}_x = -\bar{P}z = -z$. Подставляя значения моментов в формулу Мора (1), находим:

$$\Delta_{A, \text{верт}} = \int_0^l \frac{(-Pz)(-z)}{EJ_x} dz = \frac{Pl^3}{3EJ_x}. \quad (2)$$

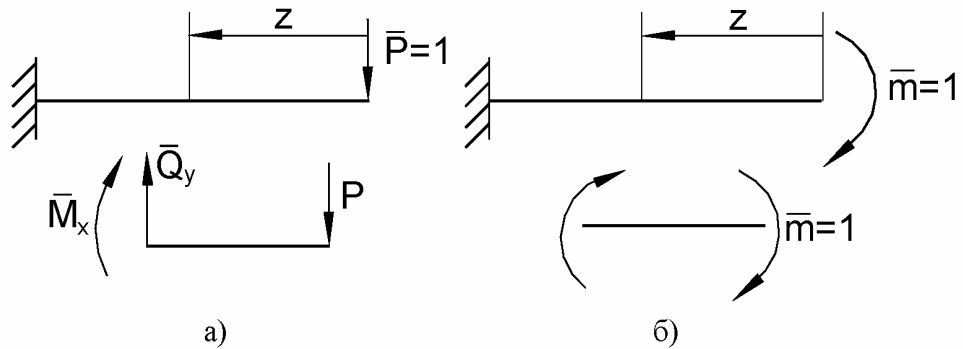


Рис. 7.11

Знак плюс указывает на то, что перемещение произошло в том направлении, в котором действует единичная сила.

Найдём теперь угловое перемещение поперечного сечения в точке А. Приложим в точке А единичный момент (рис. 7.11,б) и определим $\bar{M}_x = -\bar{m} = -1$. Подставляя значения моментов в (7.10), получим:

$$\Delta_A = \theta_A = \int_0^l \frac{(-Pz)(-1)}{EJ_x} dz = \frac{Pl^2}{2EJ_x}. \quad (3)$$

Поворот сечения произошёл в том же направлении, в каком производит вращение единичный момент.

Пример 3. Пусть требуется определить вертикальное и горизонтальное перемещение точки А в кривом стержне (рис. 7.12,а) постоянного радиуса кривизны R .

Для определения перемещений воспользуемся формулой Мора в виде (7.10), пренебрегая влиянием нормальной N и перерезывающей Q сил. Изгибающий момент в произвольном сечении, определяемом углом φ (рис. 7.12,б), равен $M_x = PR \sin \varphi$.

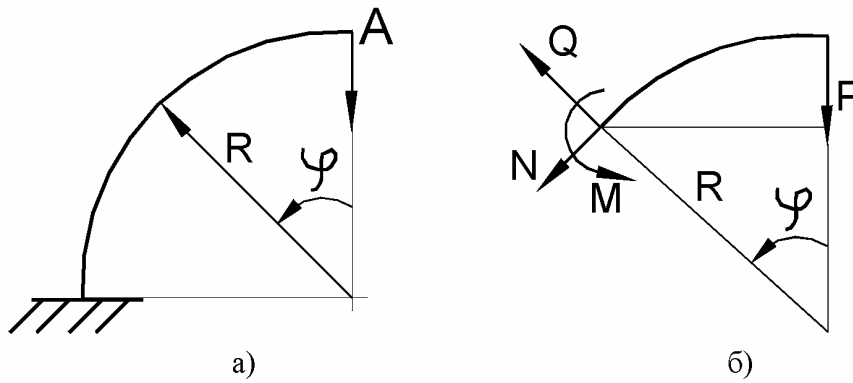


Рис. 7.12

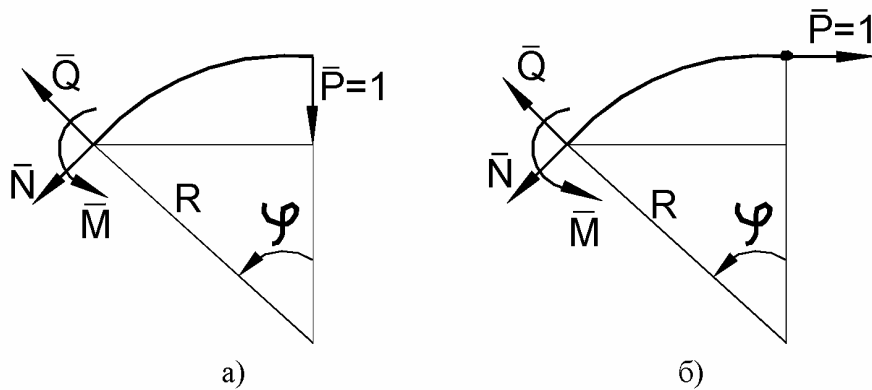


Рис. 7.13

Для определения вертикального и горизонтального перемещений соответственно имеем (рис. 7.13). $\bar{M}_x = R \sin \varphi$, $\bar{M}_y = R(1 - \cos \varphi)$. Подставляя выражения моментов в формулу Мора в форме (7.10), получим:

$$\Delta_{A, \text{верт}} = \int_0^{\pi/2} \frac{(PR \sin \varphi) R \sin \varphi}{EJ_x} R d\varphi = \frac{PR^3}{EJ_x} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi PR^3}{4EJ_x};$$

$$\Delta_{A, \text{гор}} = \int_0^{\pi/2} \frac{(PR \sin \varphi) R(1 - \cos \varphi)}{EJ_x} R d\varphi = \frac{PR^3}{EJ_x} \left[-\cos \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right] = \frac{PR^3}{2EJ_x}.$$

В рассмотренном примере считается, что размеры поперечного сечения малы по сравнению с радиусом R . Это предположение позволяет использовать формулу Мора, полученную для прямого бруса, применительно к кривому брусу.

7.7. Графоаналитический способ Верещагина вычисления интегралов в формуле Мора

Студент МИИЖТ Верещагин в 1924 году предложил способ, значительно упрощающий вычисление интегралов в формуле Мора (7.18).

Интегралы Мора с точностью до постоянного множителя представляют собой интегралы от произведения двух функций вида:

$$J = \int_0^l f(z) \bar{f}(z) dz,$$

где, по крайней мере, одна из функций (рис. 7.14)

$$\bar{f}(z) = kz + b$$

является линейной (k, l – постоянные величины).

Возьмём к примеру, интеграл

$$\int_0^l \frac{M_x \bar{M}_x}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \int_0^l M(z) \bar{M}_x(z) dz,$$

где $\bar{M}_x(z)$ - момент от единичной обобщённой силы – линейная функция, $M_x(z)$ - в общем случае – криволинейная функция.

Подставляя выражение для $\bar{f}(z)$ в выражение для J и производя почленное интегрирование, найдём:

$$J = \int_0^l f(kz + b) dz = k \int_0^l z(f dz) + b \int_0^l f dz.$$

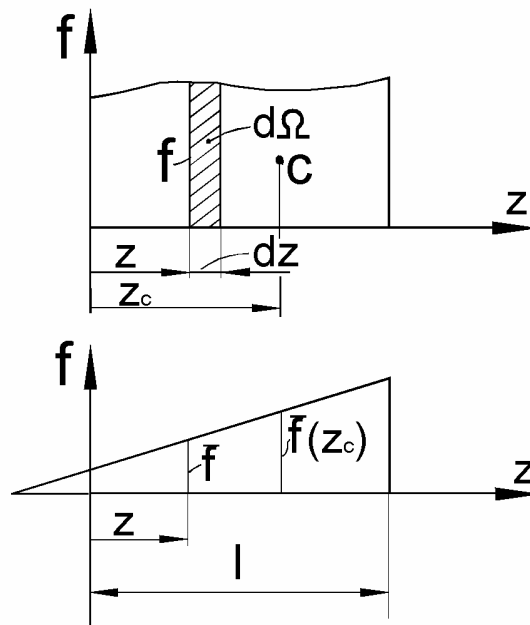


Рис. 7.14

Из рис. 7.14 следует, что $fdz = d\Omega$ есть элементарная площадь криволинейной эпюры, $z(fdz) = zd\Omega$ - статический момент этой элементарной площади относительно оси f . Поэтому:

$$J = k\Omega z_c + b\Omega = \Omega(kz_c + b) = \Omega f(z_c). \quad (7.20)$$

Из полученной формулы (7.20) следует простое правило вычисления интегралов Мора: интеграл с точностью до постоянного множителя равен произведению площади Ω криволинейной эпюры f на ординату $\bar{f}(z_c)$, взятую из прямолинейной эпюры под центром тяжести криволинейной эпюры.

На первый взгляд, описанный графоаналитический способ вычисления интегралов Мора не даёт упрощений, т.к. всё равно приходится вычислять площадь Ω криволинейных эпюр. Однако встречающиеся на практике эпюры могут быть разбиты на ряд простейших – прямоугольник, треугольник, симметричную квадратичную параболу и др. Эти эпюры приведены на рис. 7.15.

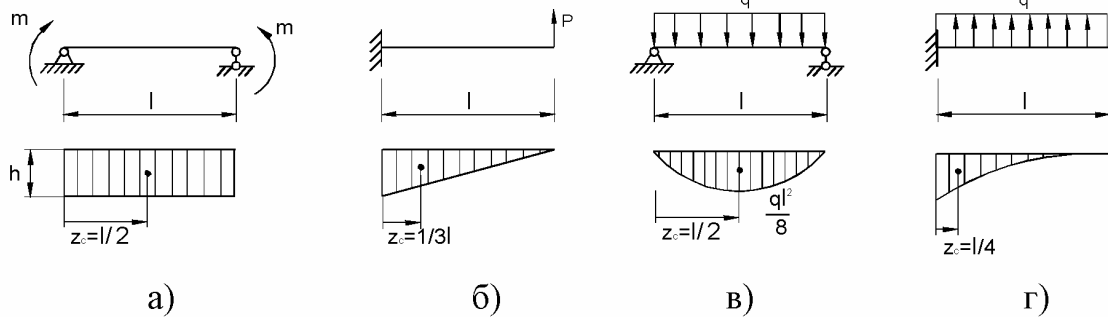


Рис. 7.15

В первом случае $\Omega = hl, z_c = \frac{1}{2}l$, во втором $\Omega = \frac{1}{2}hl, z_c = \frac{1}{3}l$, в третьем $\Omega = \frac{2}{3}hl, z_c = \frac{l}{2}$, в четвёртом $\Omega = \frac{1}{3}hl, z_c = \frac{1}{4}l$.

Рассмотрим несколько сложных эпюр (рис. 7.16): а) эпюра разбивается на симметричную параболу, треугольник и прямоугольник; б) эпюра пересекает ось стержня, её можно дополнить сверху и снизу равными площадями и разложить на два треугольника, доказательство добавляемых площадей элементарно: из подобия заштрихованных треугольников

следует $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, откуда $\frac{1}{2}ad = \frac{1}{2}cb$, что и доказывает утверждение;

в) эпюра разбивается на симметричную параболу и два треугольника, соответствующих случаю (б).

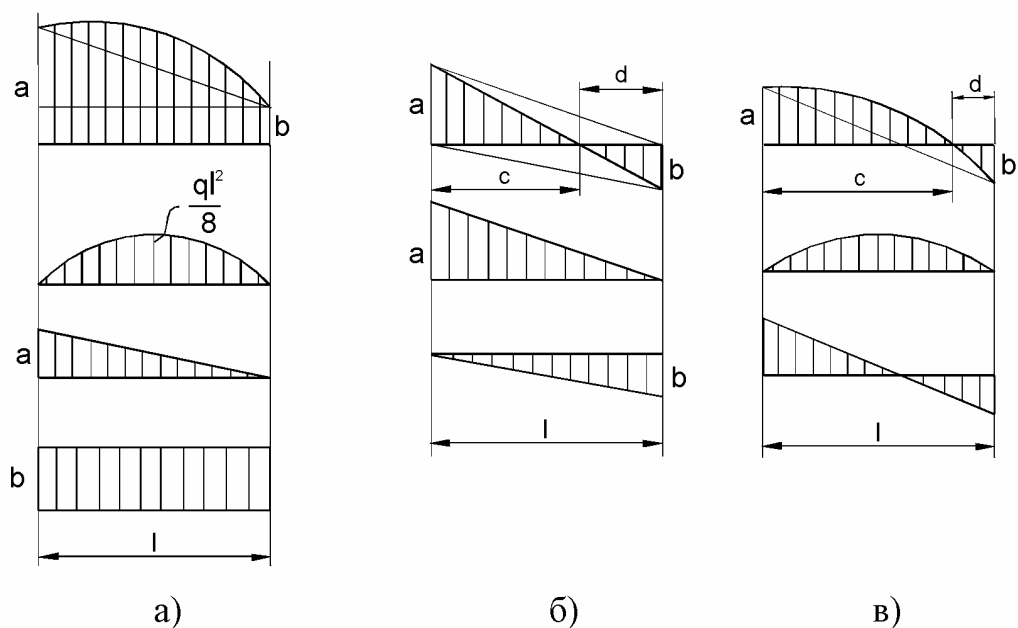


Рис. 7.16

7.8. Примеры вычисления перемещений способом Верещагина

Пример 1. Определим вертикальное перемещение точки А консольной балки (рис. 7.17,а) по формуле Мора (7.10) с использованием способа Верещагина.

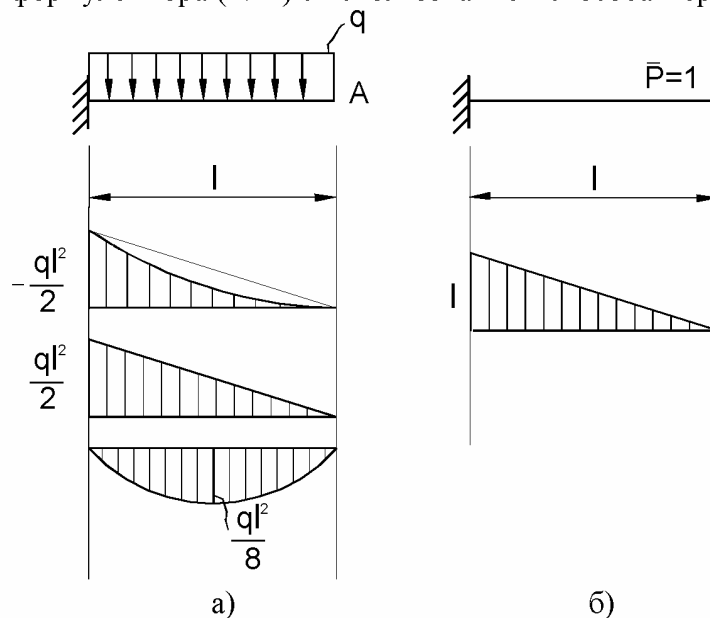


Рис. 7.17

С этой целью строим эпюру моментов от заданной нагрузки $\bar{P}=1$ (рис. 7.17,б). Эпюру от заданной нагрузки разбиваем на две простейшие – треугольник и симметричную параболу. В результате имеем:

$$\Delta_A = \frac{1}{EJ_x} \Omega \bar{M}_x(z_C) = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{ql^2}{2} l \right) \frac{2}{3} l - \left(\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l \right) \frac{l}{2} \right]$$

или

$$\Delta_A = \frac{ql^4}{8EJ_x}.$$

При перемножении площади Ω эпюры от внешней нагрузки на ординату $\bar{M}_x(z_C)$ эпюры от единичной нагрузки следует руководствоваться правилом: если эпюры лежат по одну сторону от оси балки, то они одного знака и потому дают знак плюс. В противном случае – знак минус.

Пример 2. Найдём взаимное сближение точек А и В рамы (рис. 7.18,а), т.е. $\Delta_{A-B} = \Delta_A + \Delta_B$, используя формулу Мора и способ Верещагина.

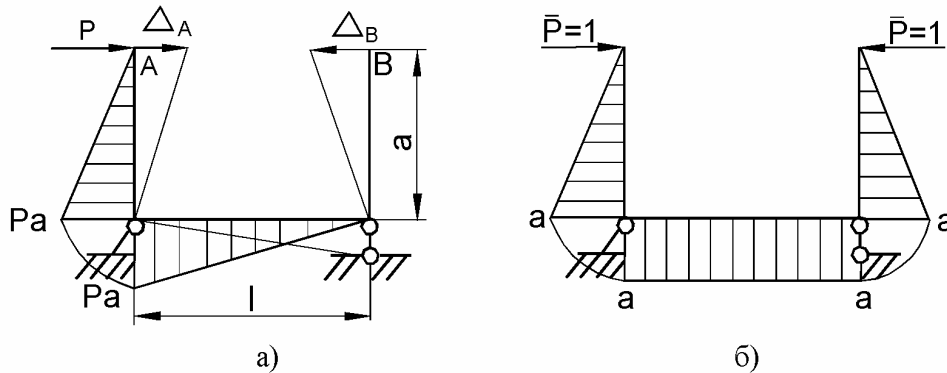


Рис. 7.18

На рис. 7.18, а и б построены эпюры моментов от внешней силы Р и обобщённой единичной силы $\left(\bar{P}, \bar{P} \right)$, где $\bar{P}=1$. Искомое взаимное перемещение

$$\Delta_{A-B} = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} Pa \cdot a \right) \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} Pa \cdot l \cdot a \right] = \frac{Pa^3}{3EJ_x} + \frac{Pa^2 l}{2EJ_x}.$$

Пример 3. Найдём вертикальное перемещение точки пространственной рамы (рис. 7.19,а) по формуле Мора (7.18):

$$\Delta_A = \int_0^l \frac{M_{кр} \bar{M}_{кр}}{GJ_{кр}} dz + \int_0^l \frac{M \bar{M}_x}{EJ_x} dz, \quad (1)$$

которая учитывает кручение и изгиб стержней рамы. На рис. 7.19 приведены эпюры изгибающих моментов от заданной и единичной нагрузок.

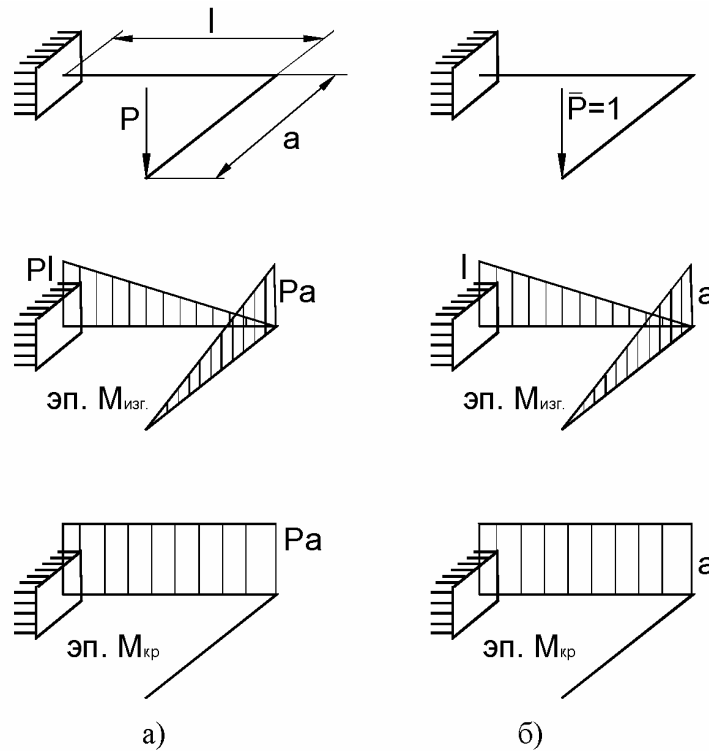


Рис. 7.19

Вычисление даёт:

$$\Delta_A = \frac{1}{GJ_{кр}} [(Pa \cdot l)a] + \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} Pa \cdot a \right) \frac{2}{3} a + \left(\frac{1}{2} Pl \cdot l \right) \frac{2}{3} l \right] = \frac{Pa^2 l}{GJ_{кр}} + \frac{P}{3EJ_x} (a^3 + l^3). \quad (2)$$

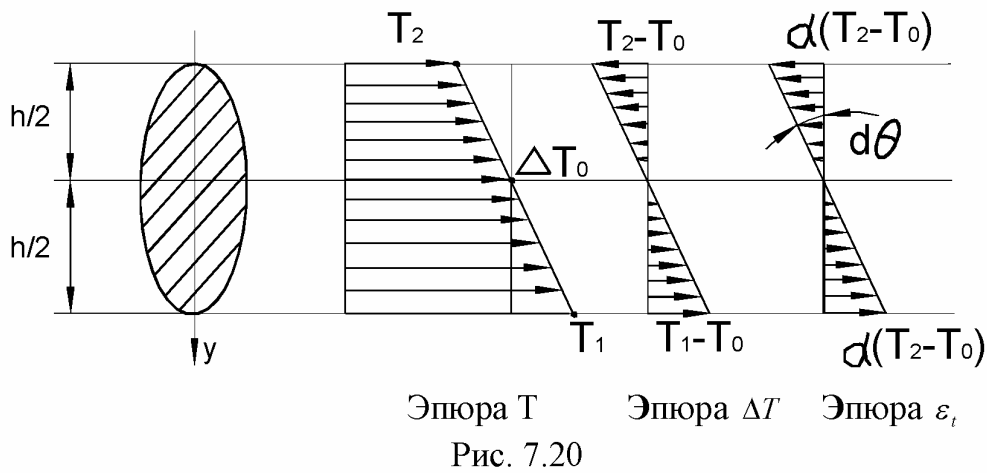
7.9. Определение температурных перемещений в балках и рамах

Перемещение в балках могут вызываться не только силами, но и изменениями температуры. Если по высоте сечения температура изменилась на ΔT градусов равномерно, то брус испытает удлинение на каждом участке dz , равное:

$$du = \alpha dz \cdot \Delta T,$$

где α - коэффициент линейного температурного расширения, и тогда, согласно формуле (7.19):

$$N = \int \bar{N} du = \int \bar{N} \alpha \cdot \Delta T dz.$$



Если температура изменяется по высоте балки по линейному закону (рис. 7.20), то удлинение крайних волокон:

$$\frac{h}{2} d\theta = \alpha dz (T_1 - T_0); \quad -\frac{h}{2} d\theta = \alpha dz (T_2 - T_0),$$

откуда угол поворота сечения:

$$d\theta = \frac{h}{2} dz (T_1 - T_2).$$

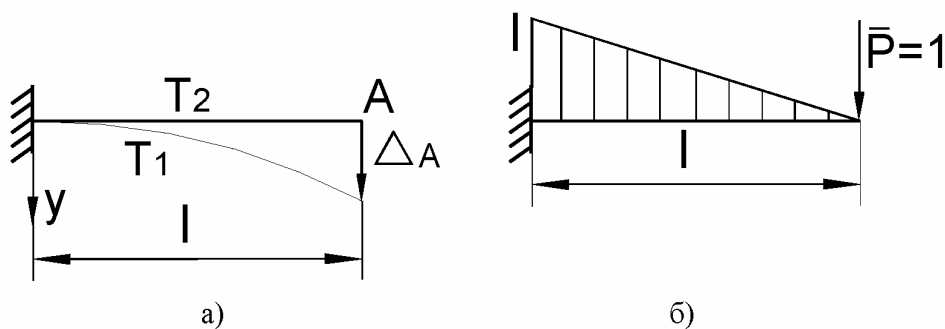
Тогда, согласно (7.19):

$$\Delta = \int \bar{M}_x d\theta = \int \bar{M}_x \frac{\alpha}{h} (T_1 - T_2) dz.$$

При одновременном эффекте имеем:

$$\Delta = \int_0^l \bar{N} du + \int_0^l \bar{M}_x d\theta = \int_0^l \bar{N} \alpha \cdot \Delta T dz + \int_0^l \bar{M}_x \frac{\alpha}{h} (T_1 - T_2) dz. \quad (7.21)$$

Пример. Определим вертикальное перемещение точки А консольной балки, у которой нижняя сторона имеет температуру T_1 , а верхняя - $T_2 < T_1$ (рис. 7.21,а).



В данной задаче $\bar{N} = 0, \bar{M}_x$ — определяется линейной эпюрой, изображённой на рис. 7.21,б.

Поэтому на основании (7.21) получаем:

$$\Delta_{A, \text{верт}} \frac{\alpha}{h} (T_1 - T_2) \int_0^l \bar{M}_x dz = \frac{\alpha (T_1 - T_2)}{2h}.$$

7.10. Определение напряжений и перемещений в витых пружинах

Одним из простых примеров применения теоремы Кастилиано (7.12), (7.15) к определению перемещений является расчёт винтовой пружины.

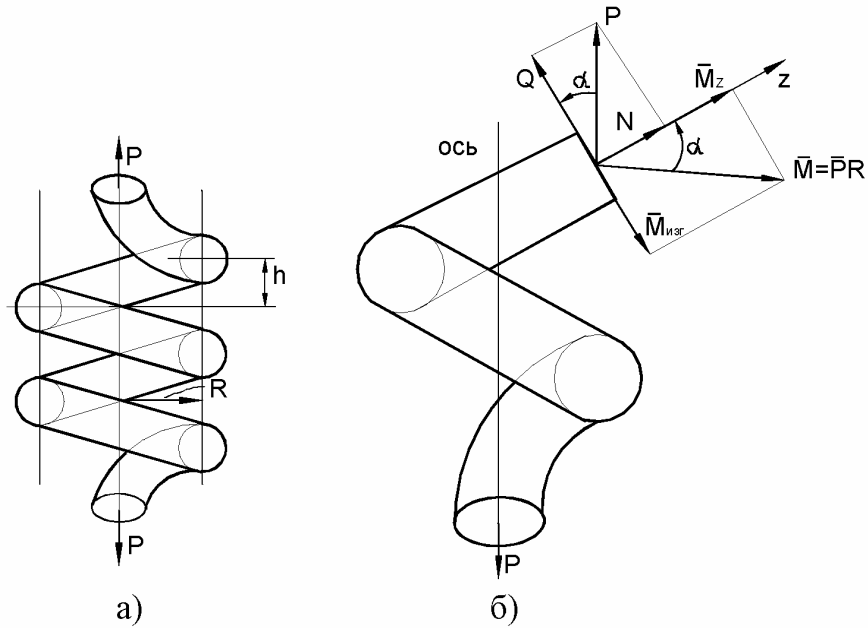


Рис. 7.22

Винтовая, или витая, пружина – это пространственно изогнутый стержень (рис. 7.22,а). На рис. 7.22,б показана отсечённая часть пружины с углом подъёма витка α . Приведём, направленную по оси пружины силу P к

центру тяжести сечения. В результате получим вектор-момент $\bar{M} = \bar{P} R$. Разлагая его на направление касательной к винтовой линии Z и перпендикулярное направление, найдём крутящий и изгибающие моменты:

$$M_z = PR \cos \alpha, \quad M_{изг} = PR \sin \alpha.$$

Нормальной силой N, перерезывающей силой Q пренебрежём.

Так как моменты всюду постоянны, то на основании (7.1):

$$U = \int_0^l \left[\frac{M_{изг}^2}{2EJ} + \frac{M_z^2}{2GJ_{кр}} \right] dz = \frac{P^2 R^2 l}{2} \left[\frac{\sin^2 \alpha}{EJ} + \frac{\cos^2 \alpha}{GJ_{кр}} \right].$$

Перемещение точки приложения силы Р к пружине:

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = PR^2 l \left[\frac{\sin^2 \alpha}{EJ} + \frac{\cos^2 \alpha}{GJ_{кр}} \right].$$

Наибольшее напряжение изгиба:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{изг}}{W_X} = \frac{PR \sin \alpha}{W_X}.$$

Наибольшее напряжение кручения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_P} = \frac{PR \cos \alpha}{W_P}.$$

На практике обычно применяются пружины с малым углом подъёма α . Для таких пружин можно принять $\sigma_{\max} \approx 0, \cos \alpha \approx 1$. Тогда

$$\tau_{\max} = \frac{PR}{W_P}, \quad \Delta_A = \frac{PR^2 l}{GJ_{кр}}.$$

Условие прочности: $\tau_{\max} \leq [\tau]$

7.11. Теорема о взаимности работ и перемещений

Теорема о взаимности вместе с теоремами Лагранжа и Кастилиано относятся к общим теоремам сопротивления материалов. Она вытекает из принципа независимости действия сил для линейных упругих систем.

Рассмотрим упругое тело, к которому в точках А и В приложены соответственно силы P_A и P_B (рис. 7.23).

Используя принцип независимости действия сил, вычислим работу, которую совершают силы при прямом и обратном порядке их приложения.

Приложим сначала силу P_A . Она совершит работу $\frac{1}{2} P_A \Delta_A$. Затем приложим силу P_B . Она совершит работу $\frac{1}{2} P_B \Delta_B$. Одновременно с этим совер-

шит работу уже действующая сила P_A на некотором перемещении Δ_{AB} , которое совершит точка А от действия силы P_B . Эта работа равна $P_A \Delta_{AB}$.

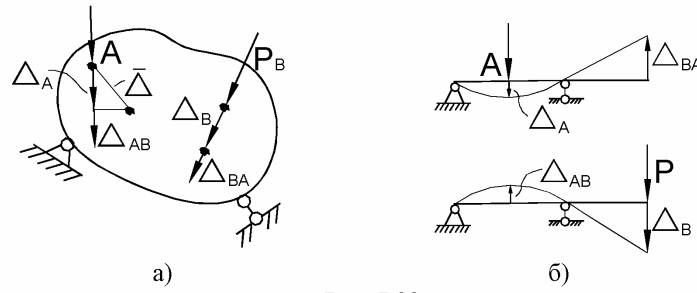


Рис. 7.23

Таким образом, в теле будет накоплена потенциальная энергия:

$$U = \frac{1}{2} P_A \Delta_A + \frac{1}{2} P_B \Delta_B + P_A \Delta_{AB}.$$

Аналогично при обратном приложении сил будет накоплена энергия:

$$U = \frac{1}{2} P_B \Delta_B + \frac{1}{2} P_A \Delta_A + P_B \Delta_{BA}.$$

Сравнивая выражения работ, получим:

$$P_A \Delta_{AB} = P_B \Delta_{BA}. \quad (7.22)$$

Соотношение (7.22) выражает собой теорему о взаимности работ:

работа силы P_A на перемещении Δ_{AB} точки её приложения от действия силы P_B равна работе силы P_B на перемещении Δ_{BA} точки её приложения от действия силы P_A .

Под силами P_A, P_B и перемещениями Δ_{AB}, Δ_{BA} можно понимать обобщённые силы и перемещения. Если $P_A = P_B$, то $\Delta_{AB} = \Delta_{BA}$ и мы приходим к теореме о взаимности перемещений: *перемещение Δ_{AB} точки А под действием силы P , приложенной в точке В, равно перемещению Δ_{BA} точки В под действием той же силы, приложенной в точке А.* Рис. 7.23,б иллюстрирует теорему о взаимности перемещений. Если силы $P_A = P_B = 1$, то имеем $\delta_{AB} = \delta_{BA}$.

Пример. Пусть требуется найти прогиб точки В посередине пролёта балки от действия момента m в опоре А (рис. 7.24).

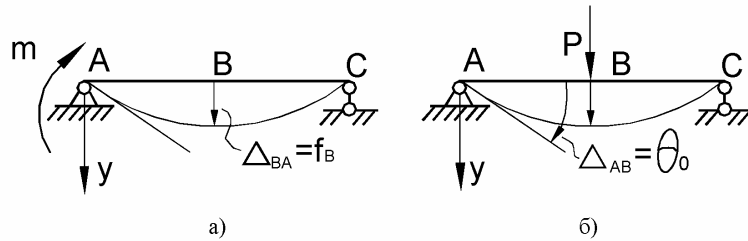


Рис. 7.24

Для определения перемещения $\Delta_{BA} = f_B$ (рис. 7.24,а) воспользуемся теоремой о взаимности работ. Рассмотрим такую же балку, нагруженную в точке В силой P (рис. 7.24,б). Решение этой задачи нам известно:

$$\Delta_{AB} = \theta_0 = \frac{Pl^2}{16EJ}.$$

На основании теоремы о взаимности работ

$$m\theta_0 = Pf_B,$$

откуда прогиб

$$f_B = \frac{m\theta_0}{P} = \frac{ml^2}{16EJ}.$$

Глава 8

Применение общих принципов и методов сопротивления материалов к расчёту стержневых систем.

8.1. Стержневые системы и их классификация

В сопротивлении материалов и в строительной механике при расчёте конструкций вместо них самих рассматриваются расчётные схемы или механические модели. В таких расчётных схемах стержни соединяются друг с другом связями в виде шарниров или жёстких узлов. Примерами простейших стержневых систем являются фермы (рис.8.1). В таких стержневых системах элементы испытывают только растяжение либо сжатие. Усилия определяются методом сечений (вырезания узлов).

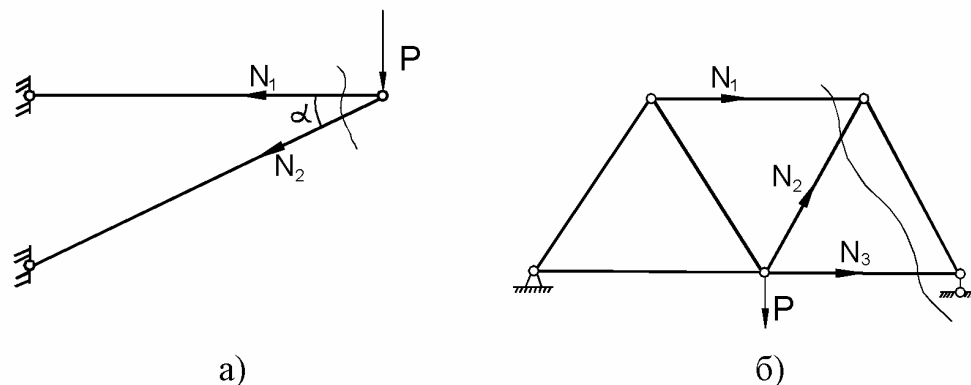


Рис.8.1

Если элементы-стержни соединяются с помощью жёстких узлов и испытывают в основном изгиб, то они называются *рамами* (рис 8.2).

Если балка лежит на нескольких опорах, то её называют *неразрезной многопролётной балкой* в отличие от многопролётных разрезных, в которых над опорами врезаны шарниры (рис.8.3), и она составляет ряд однопролётных статически неопределимых балок.

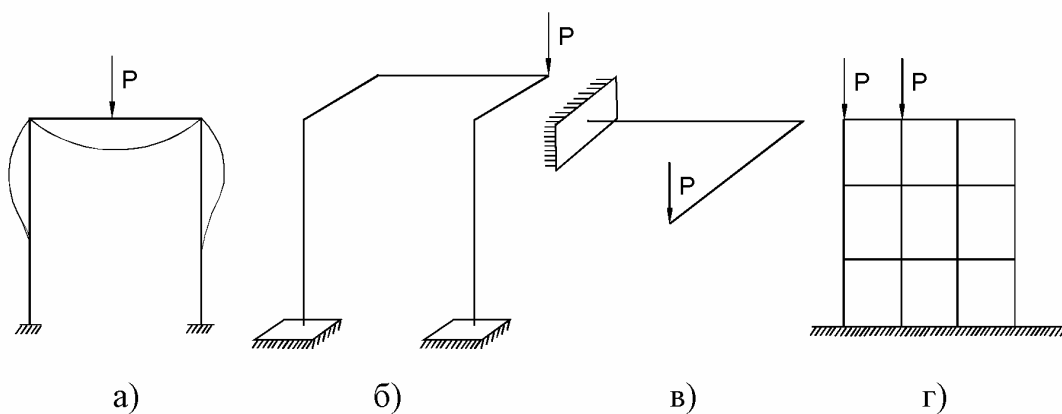


Рис. 8.2

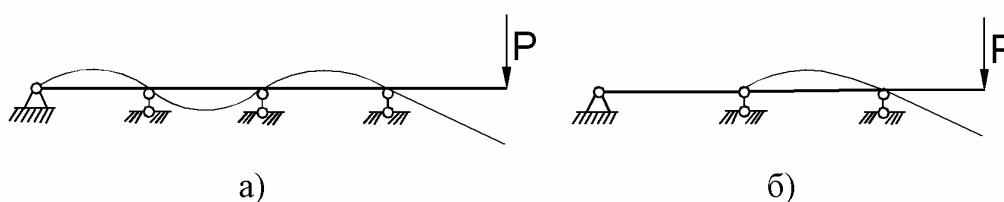


Рис.8.3

Кривые стержни образуют *арки* (рис.8.4.), которые в основном работают на сжатие и способны перекрывать большие пролёты.

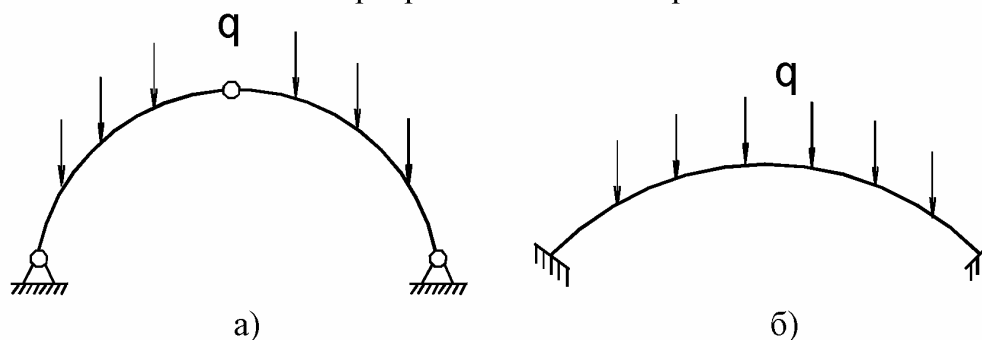


Рис.8.4

8.2. Кинематический анализ стержневых систем

Свойство систем изменять свою форму при отсутствии деформации называется их *кинематической изменяемостью*. При определении изменяемости или неизменяемости стержневой системы следует представить

себе все её элементы абсолютно жёсткими. Каждую абсолютно жёсткую часть системы называют обычно диском.

Простейшей *геометрически неизменяемой стержневой системой* является система из трёх стержней соединённых шарниром (рис.8.5,а). Она имеет три узла $У = 3$, три жёстких диска-стержня $Д = 3$ и три опорных стерженька $С_0 = 3$ (неподвижный шарнир А и подвижный шарнир-каток В). Простейшей *изменяемой стержневой системой* является конструкция из четырёх стержней $Д = 4$, соединённых четырьмя шарнирными узлами $У = 4$ (рис.8.5,б). Она имеет три опорных стерженька $С_0 = 3$. Эта изменяемая система представляет собой простейший *механизм*. Можно выделить особый класс стержневых систем, которые допускают малые перемещения, приводящие к возникновению больших усилий (рис.7.4). Такие системы образуют класс так называемых *геометрически мгновенно-изменяемых систем*.

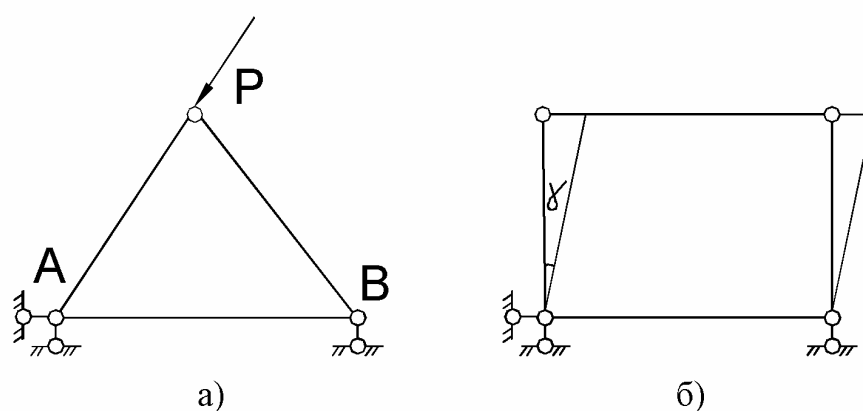


Рис. 8.5

Для выяснения вопроса о геометрической изменяемости или неизменяемости стержневых систем проводится их *кинематический анализ*. *Степенью свободы* твёрдого тела, в т.ч. стержня, называется число независимых перемещений или координат N , определяющих его положение в пространстве или на плоскости. Например, стержень в плоскости обладает тремя степенями свободы ($N = 3$). Его положение можно определить с помощью трёх перемещений $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 = \theta$ (рис.8.6,а).

Связь, которая лишает тело одной степени свободы, называется *простой*. Один опорный стержёнок (например каток) представляет собой такую одну простую связь (рис.8.6,б). Он лишает стержень одного вертикального независимого перемещения Δ_2 . Закреплённый стержень имеет в плоскости две степени свободы $N = 2$.

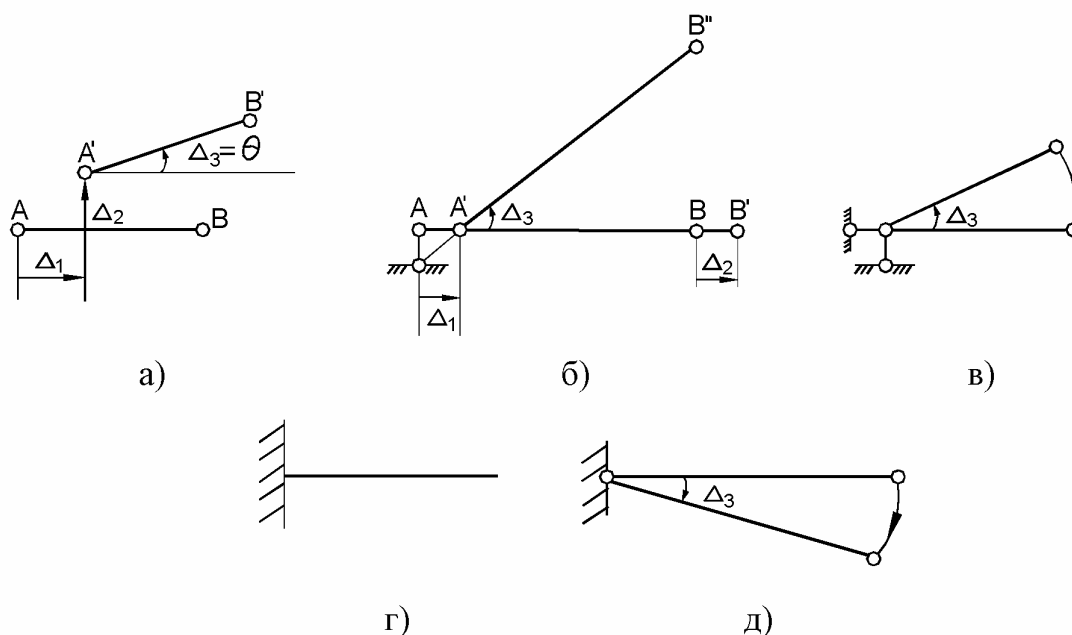


Рис.8.6

На рис.8.6, в левый конец стержня закреплён с помощью двух опорных стерженьков (неподвижный шарнир), т.е. двух простых связей, он лишает тело двух независимых перемещений Δ_1 и Δ_2 и разрешает только поворот Δ_3 . Степень свободы так закреплённого стержня $N = 1$.

Если левый конец стержня защемить (рис.8.6,г), то он теряет возможность к перемещениям в плоскости. Его степень свободы $N = 0$. В этом случае будем говорить, что на стержень наложены три простые связи.

Освободим теперь стержень от одной простой связи, врезав в защемление на левом его конце шарнир (рис.8.6,д). Стержень получает возможность к вращению, и его положение определяется угловым перемещением Δ_3 . Его степень свободы стала снова $N = 1$.

Пусть мы имеем простейшие рамы (рис.8.7.) Заменим жёсткий узел В в первой из них (рис.8.7,а) шарниром. Мы можем отметить, что внутренний шарнир В снимает одну простую связь при соединении двух стержней. Если в узле В сходятся три стержня и мы врезаем в их соединение шарнир, то он снимает две простые связи, т.е. на единицу меньше числа сходящихся в раме стержней. Если соединяется m стержней ($m > 3$), то при врезании шарнира освободится $(m-1)$ простая связь.

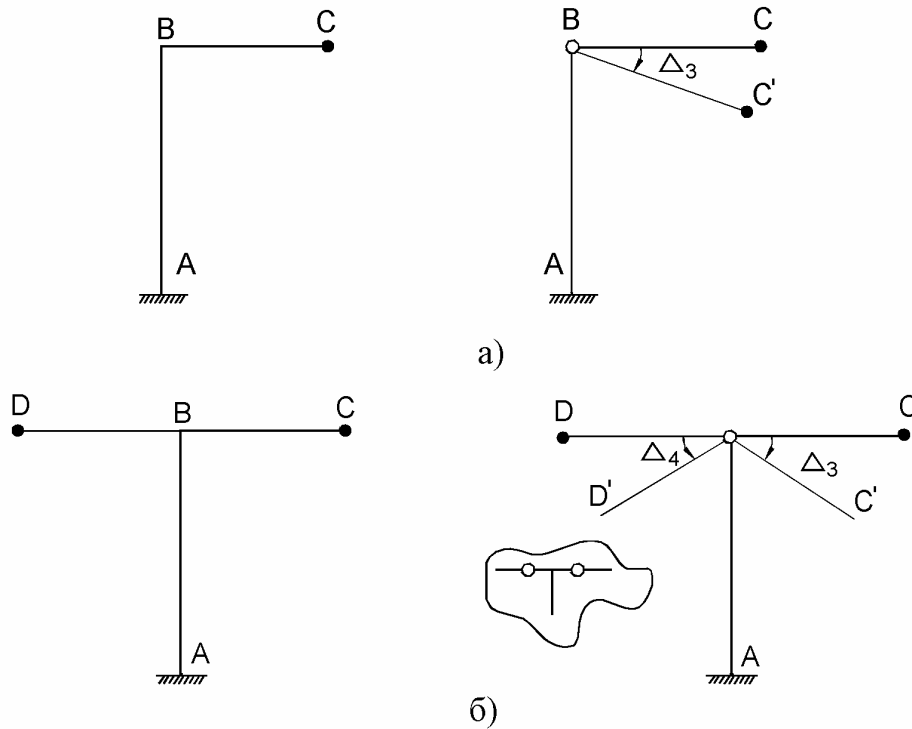


Рис.8.7

Учитывая изложенное выше, мы можем степень свободы стержневой системы вычислить по формуле П.Л.Чебышева:

$$N = 3D - 2\Pi_0 - C_0,$$

где D – число неизменных жёстких частей стержневой конструкции, обладающих тремя степенями свободы; Π_0 – число простых шарниров; C_0 – число опорных стержней (простых связей).

Для определения числа D следует предварительно отбросить все внутренние шарниры и опорные связи, а для определения Π_0 – все опоры.

Для шарнирно-стержневых систем (ферм) степень свободы может быть определена по более простой формуле:

$$N = 2U - C - C_0,$$

где U – число узлов фермы, $C = D$ – число внутренних стержней фермы, C_0 – число опорных стержней (простых внешних связей).

На рис 8.8,а изображена стержневая система у которой $D=5$, $\Pi_0 = 2 + (3-1) \cdot 2 = 6$, $C_0 = 3$, $N = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3 = 0$. Система кинематически неизменяемая.

Врежем в данную стержневую систему два шарнира в узлах Е, Н (рис.8.8,б,в). Тогда у системы будет $D=7$, $\Pi_0 = 4 + (3-2) \cdot 2 = 8$, $C_0=3$, $N = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 8 - 3 = 2$. Следовательно система имеет две степени свободы.

Два независимых перемещения системы γ и Δ показаны на рис.8.8,б,в.

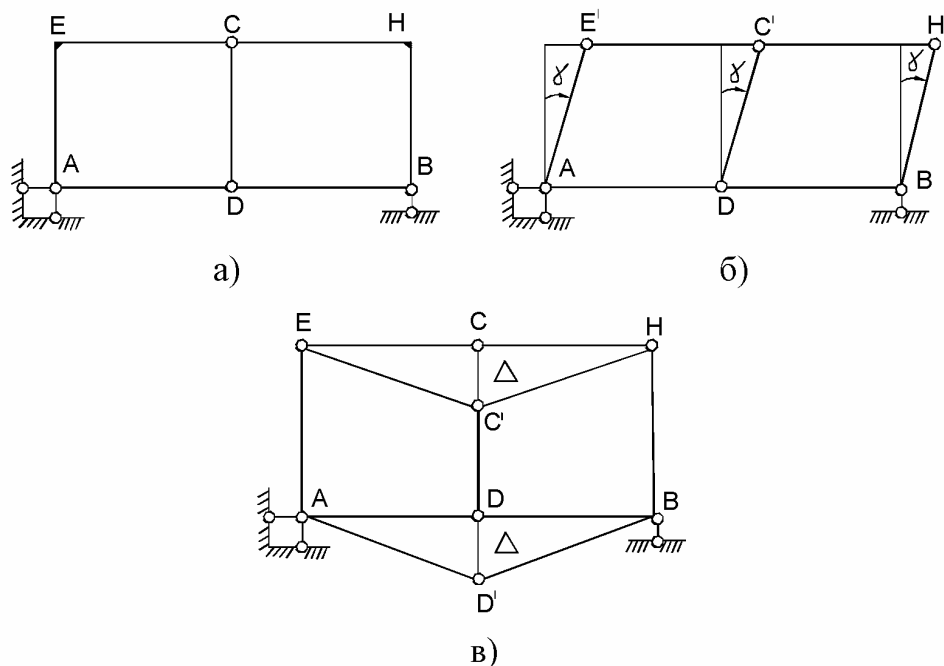


Рис.8.8

В заключение отметим, что число простых связей, превращающих стержневую систему в неизменяемую, называется *необходимым числом связей* для образования стержневой конструкции.

8.3. Статически определимые и неопределимые стержневые неизменяемые системы

Кинематически неизменяемая стержневая система называется *статически определимой* если все внутренние силовые факторы можно найти из независимых уравнений статики. В противном случае система называется *статически неопределимой*. Степень статической неопределённости называется разность n между числом неизвестных внутренних силовых факторов, опорных реакций и числом независимых уравнений статики.

На рис.8.9. приведён статически неопределимая рама, у которой число внешних неизвестных реакций в опорах равно шести, а независимых уравнений равновесия можно составить только три. Следовательно, степень статической неопределимости $n = 6 - 3 = 3$. Эту систему назовём *основной системой*. В данном примере мы имеем три простые лишние связи в опоре В.

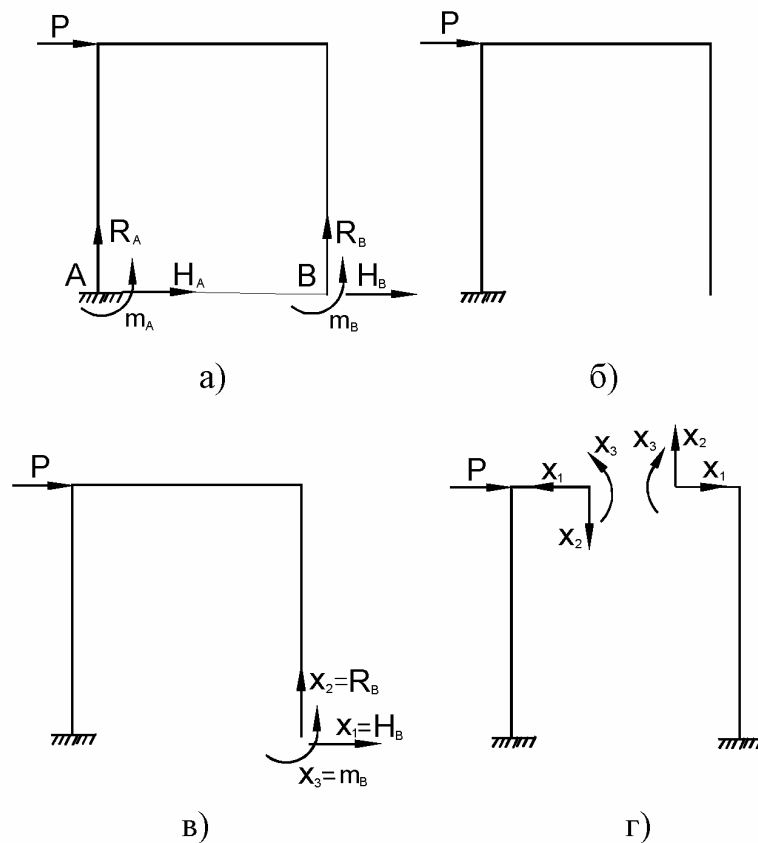


Рис.8.9

Соответствующие им опорные реакции $X_1 = H_B$, $X_2 = R_B$, $X_3 = m_B$ назовём *лишними неизвестными*. Число лишних неизвестных и соответствующих им лишних простых связей определяет степень статической неопределимости $n=3$. Основную систему с приложенными к ней лишними неизвестными X_1 , X_2 , X_3 и внешней нагрузкой P называют *эквивалентной системой* при условии, что её действительные перемещения согласуются с наложенными на исходную систему связями. Основных и эквивалентных систем может быть несколько. На рис.8.9,г изображена эквивалентная система, в которой в качестве лишних связей и неизвестных выбраны внутренние силовые факторы $X_1=N$, $X_2=Q$, $X_3=M$. Рассмотрим раму с замкнутым стержневым контуром (рис.8.10,а). Внешние реакции этой системы можно найти из уравнений равновесия рамы: $H_A = -P$, $R_B = -R_A = P \cdot a / L$.

Это означает, что по отношению к внешним связям и внешним реакциям рама статически определима. Рассекая раму, мы тут же убеждаемся, что определить внутренние силовые факторы $X_1=N$, $X_2=Q$, $X_3=M$ не представляется возможным, т.к. они не могут быть определены из уравнений равновесия. Следовательно, замкнутый стержневой контур рамы трижды статически неопределим.

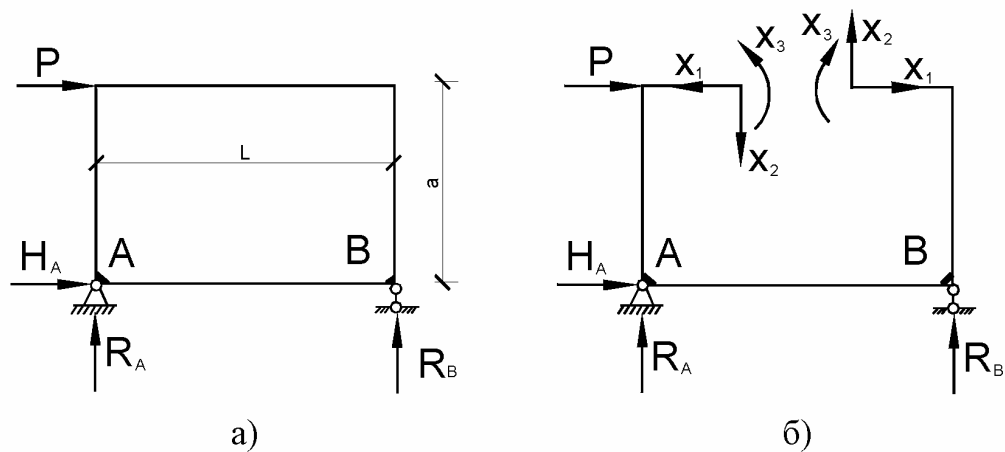


Рис.8.10

Таким образом, в рассмотренных двух примерах число лишних неизвестных либо связей определяет степень статической неопределимости системы.

Рассмотрим теперь три другие рамы, которые содержат замкнутые контуры (рис.8.11).

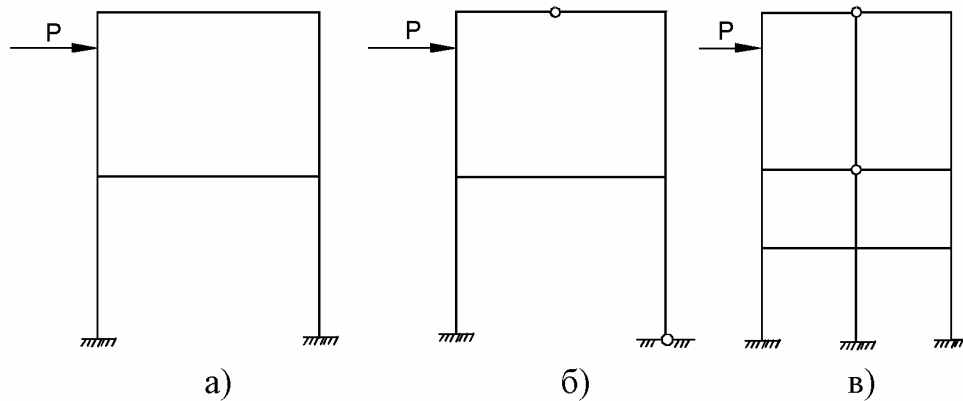


Рис.8.11

Первая рама (рис.8.11,а) имеет шесть простых внешних связей при трёх необходимых для плоской системы. Следовательно, система имеет $L = 6 - 3 = 3$ лишние внешние связи. Система имеет один замкнутый контур $K = 1$, который имеет три лишние внутренние простые связи, т.е. трижды статически неопределим. Следовательно, степень статической неопределимости системы $n = L + 3K = (6 - 3) + 3 \cdot 1 = 6$. Вторая рама (рис.8.11,б) имеет пять внешних простых связей при трёх необходимых. Следовательно, $L = 5 - 3 = 2$ и система внешним образом дважды статически неопределима. Система имеет два замкнутых контура $K = 2$, каждый из которых трижды статически неопределим, следовательно, внутренним образом система $3K = 3 \cdot 2 = 6$ шесть раз была бы статически неопределима, если

бы не было внутреннего шарнира. Последний соединяет три стержня ($m = 3$) и поэтому даёт системе $(m - 1) = 3 - 1 = 2$ степени свободы. Таким образом, степень свободы статической неопределимости второй рамы можно вычислить по общей формуле:

$$n = L + 3K - \Pi_0,$$

где Π_0 – число простых врезанных шарниров, K – число замкнутых контуров, L – число лишних внешних связей.

В результате получаем: $n = (5 - 3) + 3 \cdot 2 - 2 = 6$.

Третья рама (рис.8.11,в) имеет $L = 9 - 3 = 6$, $K = 4$, $\Pi_0 = 2 + 3 = 5$, следовательно, $n = 6 + 3 \cdot 4 - 5 = 13$.

Отметим, что степень статической неопределимости стержневой системы и её степень свободы связаны равенством $n = -N$.

8.4. Расчёт статически неопределимых систем методом сил

Наиболее распространённым методом раскрытия статически неопределимых систем является метод сил. Он заключается в том, что система освобождается от лишних связей и их действие заменяется лишними неизвестными, которые принимаются за основные неизвестные задачи (рис.8.12, 8.13). Стержневая система, получаемая из заданной путём отбрасывания лишних связей и внешней нагрузки называется *основной* (рис.8.9,б, 8.10,б).

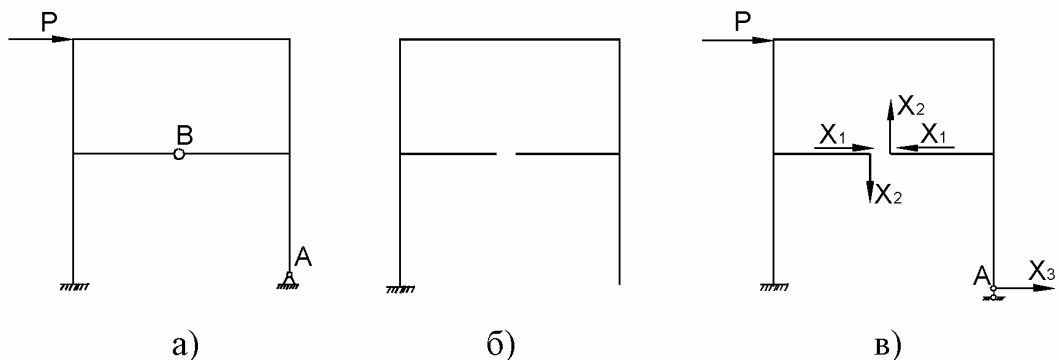


Рис.8.12

Основных систем может быть несколько. Основная система с приложенными лишними неизвестными X_i и внешней нагрузкой P носит название *эквивалентной системы*. Условие эквивалентности этой заданной системы состоит в том, что величины лишних неизвестных должны быть подобраны так, чтобы перемещения системы в точности соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на неё отброшенными связями.

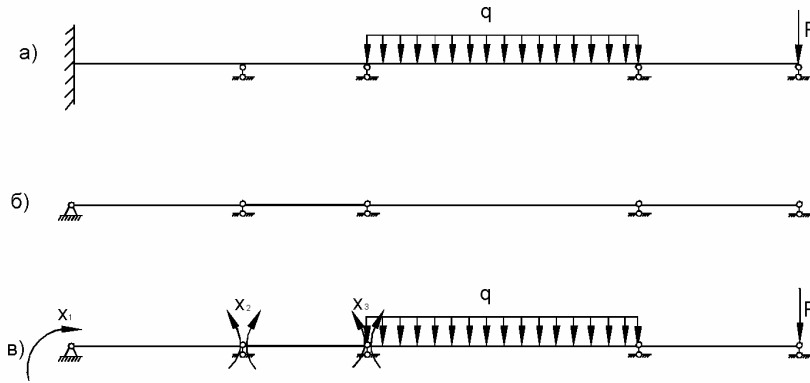


Рис.8.13

Для рамы на рис.8.12. горизонтальное и вертикальное линейные перемещения точки А равны нулю. Взаимные линейные и угловые обобщённые перемещения краёв разреза В-В также равны нулю. Аналогично для балки на рис.8.13. Таким образом, обобщённые перемещения:

$$\Delta_i(X_1, X_2, \dots, X_5, P) = 0, \quad (8.1)$$

где $i = 1, 2, \dots, 5$.

Пользуясь принципом независимости действия сил, (8.1) запишем в виде:

$$\Delta_i = \Delta_i(X_1) + \Delta_i(X_2) + \dots + \Delta_i(X_5) + \Delta_i(P) = 0. \quad (8.2)$$

Пользуясь законом Гука, каждое из перемещений $\Delta_i(X_j)$ от силы X_j представим в виде:

$$\Delta_i(X_j) = \delta_{ij} X_j, \quad (8.3)$$

где δ_{ij} - коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом влияния. Его геометрический смысл легко выяснить, полагая $X_j = 1$. В этом случае $\Delta_i(X_j) = \delta_{ij}$. Следовательно, δ_{ij} - это перемещение в направлении i -ой единичной силы от действия единичной силы, приложенной в направлении j .

Учитывая (8.3), выражение (8.2) запишем в виде:

$$\Delta_i = \sum_j \delta_{ij} X_j + \Delta_i(P) = 0 \quad (8.4)$$

или в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_1(P) = 0, \\ \Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_2(P) = 0, \\ \Delta_3 = \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_3(P) = 0. \end{cases}$$

Полученные уравнения (8.4) носят название *канонических уравнений метода сил*. Их количество зависит от степени статической неопределимости стержневой системы.

Коэффициенты влияния δ_{ij} находятся с помощью формулы Мора (7.18), где внутренние силовые факторы от внешней нагрузки следует заменить таковыми от единичной силы $X_j = 1$:

$$\delta_{ij} = \int_0^l \left[\frac{N_j N_i}{EF} + \frac{M_{zj} M_{zi}}{GJ_{\partial\partial}} + \frac{M_{xj} M_{xi}}{EJ_x} + \frac{M_{yj} M_{yi}}{EJ_y} \right] dz \quad (8.5)$$

Из (8.5) следует, что $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Перемещения $\Delta_i(P)$ определяются обычным путем с помощью формулы Мора (7.18).

Если возникает необходимость определения перемещения некоторой точки С статически неопределимой системы, то в этой точке в направлении искомого перемещения следует приложить единичную силу $\bar{P} = 1$ (рис.8.14,а).

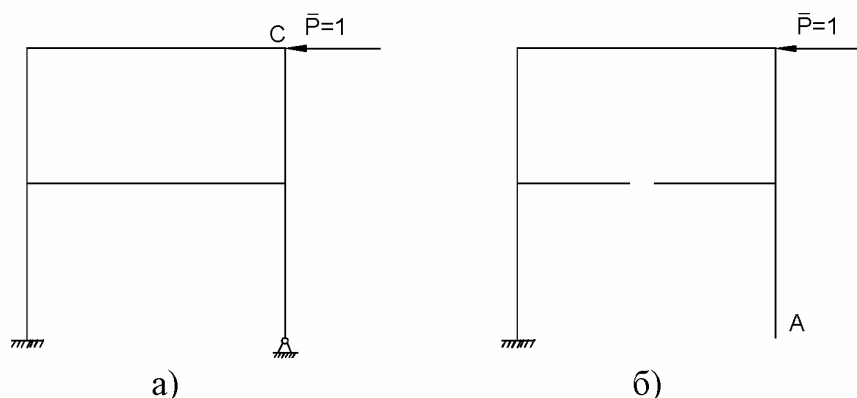


Рис.8.14

Если силу $\bar{P} = 1$ приложить к заданной системе (рис.8.12,а), то в таком случае вновь возникает задача о раскрытии статической неопределённости. Эта трудность устраняется, если работать с эквивалентной системой. В этом случае единичная сила прикладывается к основной системе (рис.8.14,б). Указанный способ часто используется для, так называемой, деформационной проверки правильности построенных эпюр. В эквивалентной системе определяются заведомо известные перемещения некоторых точек. Обычно это перемещения тех точек, где были отброшены лишние связи. Если полученный результат совпадает с ожидаемым, то это подтверждает правильность построенных эпюр.

8.5. Примеры расчёта статически неопределимых стержневых систем по методу сил

Пример 1. Раскрыть статическую неопределимость балки методом сил и определить точки С приложения силы Р (рис.8.15,а).

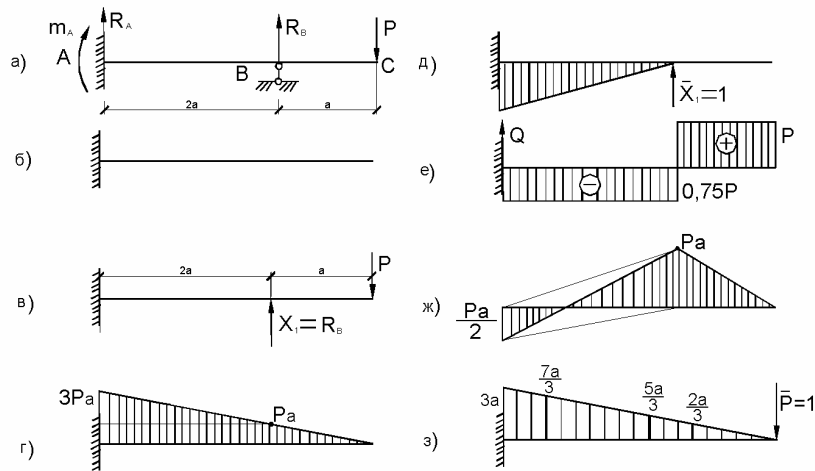


Рис. 8.15.

Решение. Балка один раз статически неопределима, ибо в задаче возникает три неизвестные опорные реакции R_A , R_B , m_A , а уравнений равновесия можно составить только два. В качестве лишней связи выбираем опору В. На рис. 8.15,б,в изображены основная и эквивалентная системы. Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_1(P) = 0. \quad (1)$$

Для определения коэффициентов δ_{11} , Δ_1 для основной системы строим эпюры от действия внешней нагрузки (рис. 8.15,г) и от единичной силы $X_1 = 1$ (рис. 8.15,д).

На основании формулы Мора и способа Верещагина находим

$$\begin{cases} EJ\delta_{11} = \left(\frac{1}{2} 2a 2a \right) \frac{2}{3} 2a = \frac{8a^3}{3}, \\ EJ\Delta_1(P) = - \left(\frac{1}{2} 2Pa 2a \right) \frac{2}{3} 2a - (Pa 2a)a = -\frac{14}{3} Pa^3. \end{cases}$$

Подстановка полученных выражений в каноническое уравнение (1) приводит к выражению:

$$\frac{8a^3}{3} X_1 - \frac{14}{3} Pa^3 = 0,$$

откуда находим:

$$X_1 = 1,75P. \quad (2)$$

Теперь, используя (2), из уравнений равновесия для эквивалентной системы

$$R_A + X_1 - P = 0, \quad m_A - X_1 2a + P 3a = 0$$

находим опорные реакции:

$$R_A = P - X_1 = -0,75P, \quad m_A = 2X_1 a - 3Pa = 0,5a.$$

На рис. 8.15,е,ж изображены окончательные эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов.

Для определения прогиба в точке С прикладываем в этой точке основной системы единичную силу $P = 1$ (рис. 8.15,з). Перемножая эпюру от этой силы на результирующую (рис.8.15,ж), находим:

$$EJ\Delta_C = -\left(\frac{1}{2}Pa2a\right)\frac{5a}{3} - \left(\frac{1}{2}\frac{Pa}{2}2a\right)\frac{7a}{3} + \left(\frac{1}{2}Pa \cdot a\right)\frac{2}{3}a = \frac{5P^2}{6}.$$

Деформационная проверка правильности построенных эпюр состоит в определении перемещения точки В, которое заведомо равно нулю. Используя формулу Мора и способ Верещагина, перемножаем эпюру моментов на эпюру от единичной силы $\bar{X}_1 = 1$. В результате находим:

$$EJ\Delta_B = -\left(\frac{1}{2}Pa2a\right)\left(\frac{1}{3}2a\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{Pa}{2}2a\right)\left(\frac{2}{3}2a\right) = 0.$$

Следовательно, эпюра моментов в данной задаче построена правильно.

Пример 2. Решим предыдущую задачу (рис. 8.16,а) несколько проще. Выберем основную систему так, как показано на рис. 8.13,б, т.е. разрежем балку в защемлении и вставим шарнир. Этим самым мы освободим одну простую лишнюю связь. Эквивалентная система приведена на рис. 8.16,в, а эпюры от единичного момента и внешней нагрузки – на рис. 8.16,г,д. Коэффициенты канонического уравнения:

$$\begin{cases} EJ\delta_{11} = \left(\frac{1}{2}2a \cdot 1\right)\frac{2}{3} = \frac{2a}{3}, \\ EJ\Delta_1(P) = -\left(\frac{1}{2}Pa2a\right)\frac{1}{3} = -\frac{Pa^2}{3}. \end{cases}$$

Подставляя полученные значения коэффициентов в каноническое уравнение, найдём $X_1 = \frac{Pa}{2}$, т.е. то же значение опорного момента m_A , что и в предыдущей задаче.

Далее для эквивалентной системы строим эпюры Q, М. Эпюра моментов может быть получена весьма просто сложением эпюр моментов, изображённых на рис. 8.16,г,д, при условии, что ординаты единичной эпюры увеличены $X_1 = Pa/2$ раза. После определения опорных реакций R_A , R_B из уравнений равновесия

$$R_A + R_B - P = 0, \quad X_1 = R_B 2a - P3a$$

обычным способом строится эпюра Q. Перемножая эпюры на рис. 8.16,е,ж, находим:

$$EJ\Delta_C = \left(\frac{1}{2}Pa2a\right)\frac{2}{3}a - \left(\frac{1}{2}\frac{Pa}{2}2a\right)\frac{a}{3} + \left(\frac{1}{2}Pa \cdot a\right)\frac{2a}{3} = \frac{5Pa^3}{6}.$$

Деформационная проверка даёт

$$EJ\Delta_A = -\left(\frac{1}{2}Pa2a\right)\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\frac{Pa}{2}2a\right)\frac{2}{3} = 0,$$

что подтверждает правильность решения.

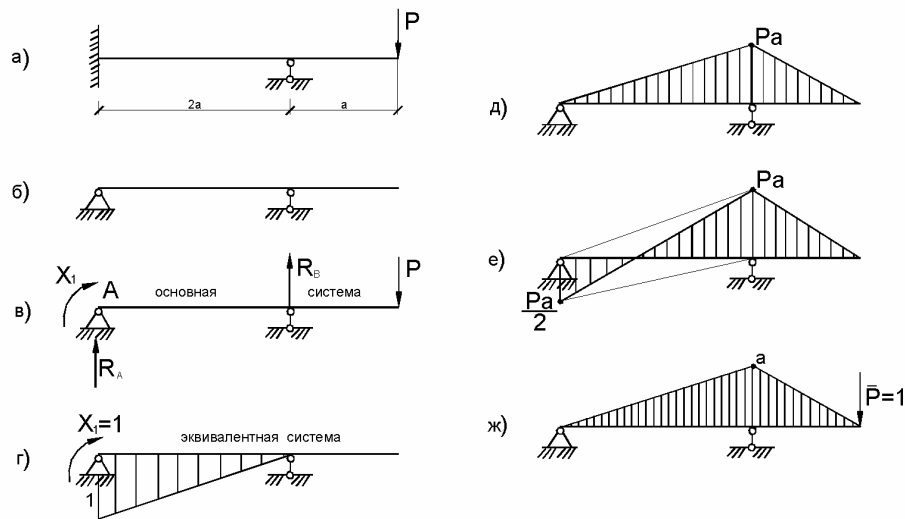


Рис. 8.16.

Пример 3. Рассмотрим дважды статически неопределимую балку (рис. 8.17,а). Раскроем её статическую неопределённость методом сил.

Возможны, как и в примерах 1 и 2, два варианта выбора эквивалентной системы (рис. 8.17,б,в). Более рациональной является эквивалентная система на рис. 8.14,в, где в опорах врезаны внутренние шарниры.

Канонические уравнения метода сил имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_1(P) = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_2(P) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для определения коэффициентов $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{12}, \Delta_1, \Delta_2$ строим для основной системы эпюры от внешней нагрузки (рис. 8.17,г) и единичных моментов (рис. 8.17,д).

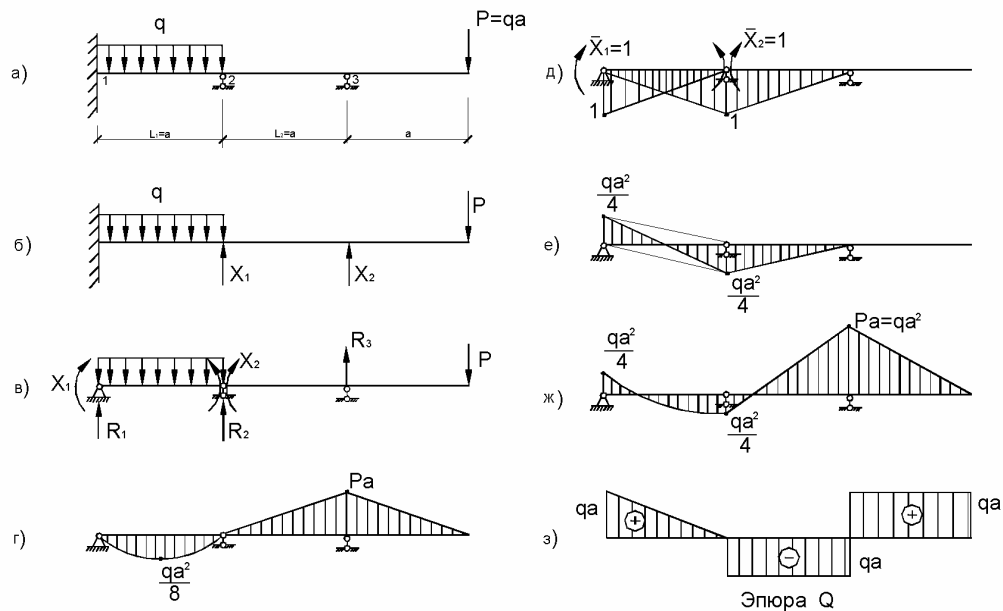


Рис. 8.17

В результате их перемножения по способу Верещагина, находим:

$$\left\{ \begin{array}{l} EJ\delta_{11} = \left(\frac{1}{2}a \cdot 1\right) \frac{2}{3} = \frac{a}{3}, \\ EJ\delta_{22} = \left(\frac{1}{2}a \cdot 1\right) \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2}a \cdot 1\right) \frac{2}{3} = \frac{2a}{3}, \\ EJ\delta_{12} = \left(\frac{1}{2}a \cdot 1\right) \frac{1}{3} = \frac{a}{6}, \\ EJ\Delta_1 = \left(\frac{2}{3} \frac{qa^2}{8} a\right) \frac{1}{2} = \frac{qa^3}{24}, \\ EJ\Delta_2 = \left(\frac{2}{3} \frac{qa^2}{8} a\right) \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} Pa \cdot a\right) \frac{1}{3} = -\frac{qa^3}{8}. \end{array} \right.$$

Подставляя полученные значения коэффициентов в канонические уравнения (1), находим:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2X_1 + X_2 + \frac{qa^2}{4} = 0, \\ X_1 + 4X_2 - \frac{3qa^2}{4} = 0, \end{array} \right.$$

откуда следует:

$$X_1 = -\frac{qa^2}{4}, X_2 = \frac{qa^2}{4}.$$

Эпюра моментов от X_1 и X_2 построена на рис. 8.17,е. Складывая её с эпюрой моментов от внешних сил (рис. 8.17,г), находим суммарную эпюру моментов (рис. 8.17,ж).

Найдём далее из уравнений равновесия частей эквивалентной системы опорные реакции. Из рис. 8.14,в следует:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_2 = R_3 a - P 2a; X_2 = X_2 - \frac{qa^2}{2} + R_1 a, \\ R_1 + R_2 + R_3 - P - qa = 0, \end{array} \right.$$

откуда находим:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{X_2 - X_1}{a} + \frac{qa}{2} = qa, \\ R_3 = \frac{X_2}{a} + 2P = \frac{9}{4} qa = 2,25qa, \\ R_2 = P + qa - R_1 - R_3 = -\frac{5}{4} qa = -1,25qa. \end{array} \right.$$

Эпюра перерезывающих сил строится по известным правилам (см. рис. 8.17,з). Далее производится деформационная проверка. Угол поворота сечения в опоре 1 (затемление) и взаимный угол поворота сечений над опорой 2 равны нулю.

Сделаем проверку второго из этих условий:

$$EJ\Delta_2 = \left(\frac{2}{3} \frac{qa^2}{8} a\right) \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \frac{qa^2}{4} a\right) \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} \frac{qa^2}{4} a\right) \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} Pa \cdot a\right) \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} \frac{qa^2}{4} a\right) \frac{2}{3} = 0$$

Деформационная проверка подтверждает правильность полученного решения.

Пример 4. Раскрыть статическую неопределимость рамы и построить эпюры N, Q, M (рис. 8.18).

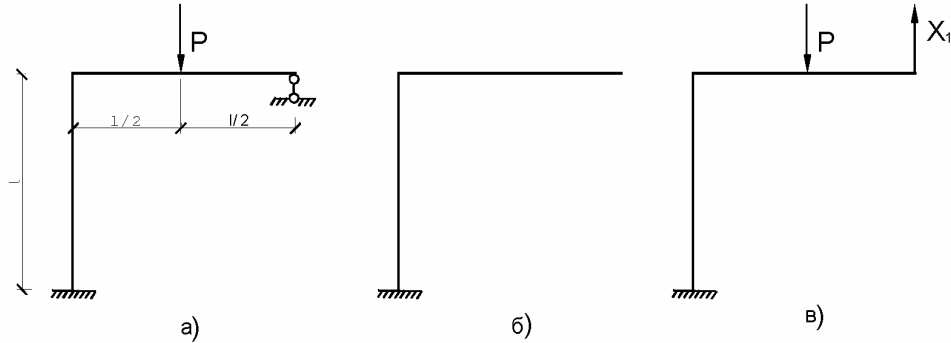


Рис. 8.18

Заданная стержневая система (рис. 8.12,а) один раз статически неопределима. На рис. 8.18,б изображена основная система, на рис. 8.18,в – эквивалентная. Каноническое уравнение метода сил имеет вид:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_1(P) = 0. \quad (1)$$

Для определения коэффициентов δ_{11} , $\Delta_1(P)$ строим эпюры моментов от единичной

силы $\bar{X}_1 = 1$ и внешней силы P (рис. 8.19). При определении δ_{11} используем эпюру от единичной силы (рис. 8.19,а). Она является одновременно эпюрой моментов от заданной и единичной нагрузки. Применяя формулу Мора (7.18) при сохранении члена с изгибающим моментом и способ Верещагина, получаем:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_j M_i}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} l \cdot l \right) \frac{2}{3} l + (l \cdot l) l \right] = \frac{4l^3}{3EJ_x}.$$

Для вычисления $\Delta_1(P)$ воспользуемся формулой Мора (7.18) в виде

$$\Delta_1(P) = \int \frac{M M_i}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \left[- \left(\frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \frac{l}{2} \right) \frac{5l}{6} - \left(\frac{Pl}{2} l \right) l \right] = - \frac{29}{48} \frac{Pl^3}{EJ_x},$$

где использованы эпюры на рис. 8.19. Подставляя найденные значения δ_{11} , $\Delta_1(P)$ в каноническое уравнение, получим:

$$\frac{4l^3}{3EJ_x} X_1 - \frac{29Pl^3}{48EJ_x} = 0,$$

откуда находим лишнюю неизвестную:

$$X_1 = \frac{29P}{64}.$$

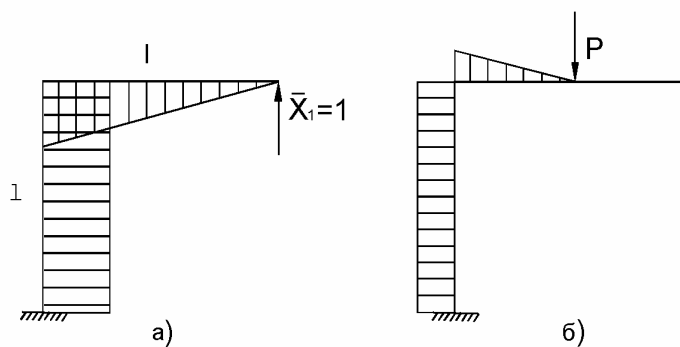


Рис. 8.19

При построении эпюр используем эквивалентную систему, в которой X_1 уже известно, и метод сечений. Построение эпюры моментов можно упростить, если применить способ разложения: эпюру моментов строить отдельно от внешней нагрузки и силы X_1 , а затем их сложить. Эпюра от внешней нагрузки изображена на рис. 8.19,б. Эпюру моментов от X_1 получим от единичной силы $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 8.19,а), если все ординаты этой эпюры умножим на X_1 (рис. 8.20,а). Складывая эту эпюру с эпюрой на рис. 8.19,б получим окончательную эпюру моментов (рис. 8.20,б). Эпюры нормальных и перерезывающих сил строим с использованием метода сечений (см. рис. 8.18).

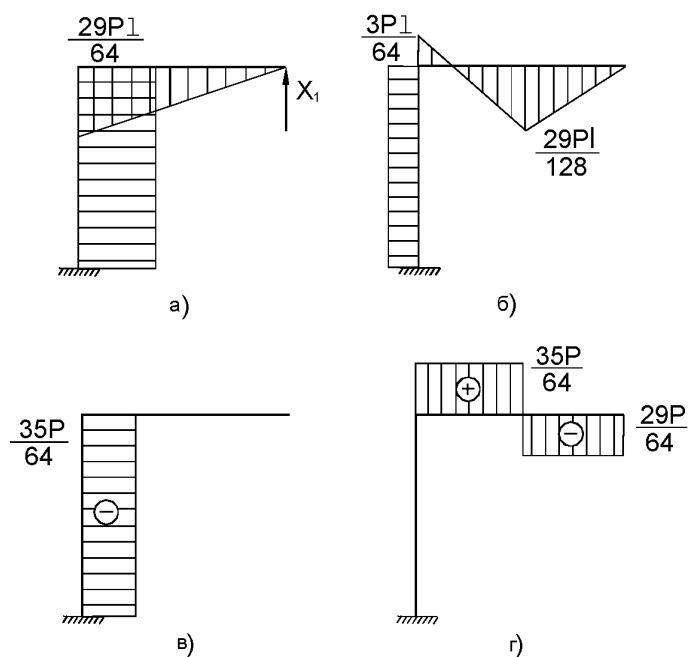


Рис 8.20

Для деформационной проверки определим перемещение в направлении силы X_1 эквивалентной системы (рис. 8.18). Для этого по правилу Верещагина перемножим окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 8.20,б) на единичную (рис. 8.19,а) -

либо, что всё равно, эпюры моментов X_1 и P (рис. 8.20,а; 8.19,б) - на единичную от $\bar{X}_1$.

В результате получим:

$$\Delta_1 = \frac{1}{EJ_x} \left\{ - \left(\frac{Pl}{2} \right) l + \left(\frac{29Pl}{64} \right) l - \left(\frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \frac{l}{2} \right) \frac{5l}{6} + \left(\frac{1}{2} \frac{29Pl}{64} \right) \frac{2l}{3} \right\} = 0,$$

что подтверждает правильность полученного решения.

Пример 5. Рассмотрим два раза статически неопределимую раму (рис. 8.21,а). На рис. 8.21,б изображена её эквивалентная система. Для определения коэффициентов δ_{ij} , Δ_1 , Δ_2 системы канонических уравнений (8.4) построим эпюры от единичных сил и внешней нагрузки (рис. 8.21). Используя формулы (7.18), (8.5) и способ Верещагина найдём:

$$\left\{ \begin{array}{l} EJ\delta_{11} = \left(\frac{1}{2} l \cdot l \right) \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3}, \\ EJ\delta_{22} = \left(\frac{1}{2} l \cdot l \right) \frac{2}{3} l + (l \cdot l) l = \frac{4l^3}{3}, \\ EJ\delta_{12} = EJ\delta_{21} = - \left(\frac{1}{2} l \cdot l \right) l = - \frac{l^3}{2}, \\ EJ\Delta_1 = \left(\frac{1}{2} Pl \cdot l \right) \frac{l}{2} = \frac{Pl^3}{4}, \\ EJ\Delta_2 = - \left(\frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \frac{l}{2} \right) \frac{5l}{6} - \left(\frac{Pl}{2} l \right) = - \frac{29Pl^3}{48}. \end{array} \right.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в канонические уравнения (8.4) для $i = 2$, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} X_1 - \frac{1}{2} X_2 + \frac{1}{4} P = 0, \\ -\frac{1}{2} X_1 + \frac{4}{3} X_2 - \frac{29}{48} P = 0, \end{array} \right.$$

откуда:

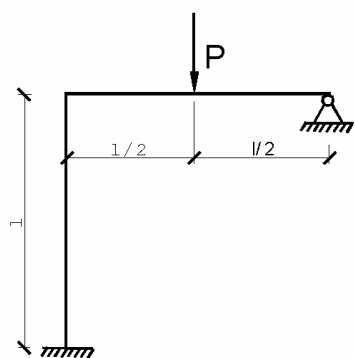
$$X_1 = -\frac{9P}{56}, X_2 = \frac{11P}{28}.$$

Умножая единичные эпюры на рис. 8.21. соответственно на X_1 , X_2 , получим эпюры моментов от этих сил (рис. 8.22,а,б). Складывая эти эпюры с эпюрой моментов от внешней нагрузки (рис. 8.20,в), получим суммарную эпюру моментов (рис. 8.23,а). Эпюры N и Q изображены на рис. 8.23,б,в соответственно.

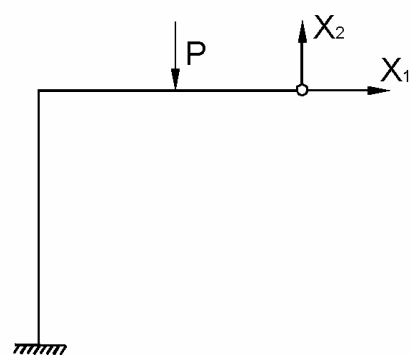
Произведём деформационную проверку. Для этого найдём перемещения:

$$E \cdot J \cdot \Delta_1 = - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{6P \cdot l}{56} \cdot l \right) \cdot \frac{l}{3} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3P \cdot l}{56} \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} l = 0,$$

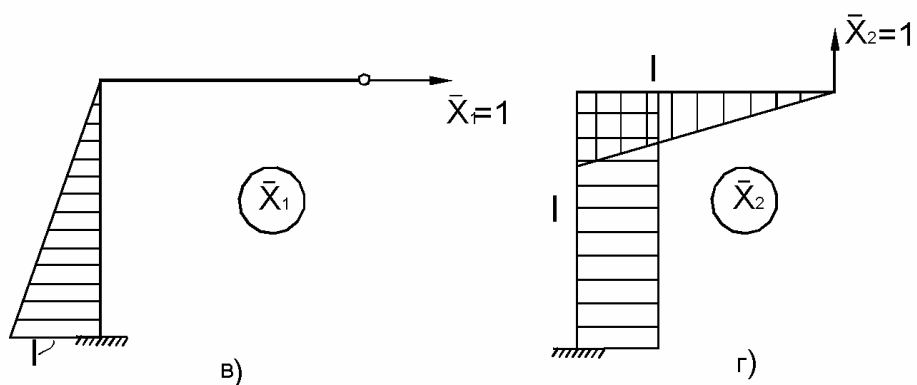
что подтверждает правильность полученного решения.



a)

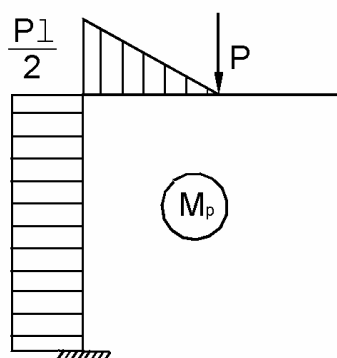


б)



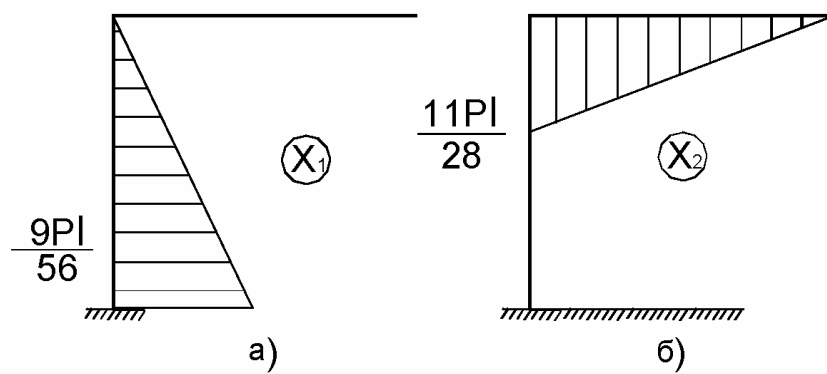
в)

г)



д)

Рис. 8.21



а)

б)

Рис. 8.22

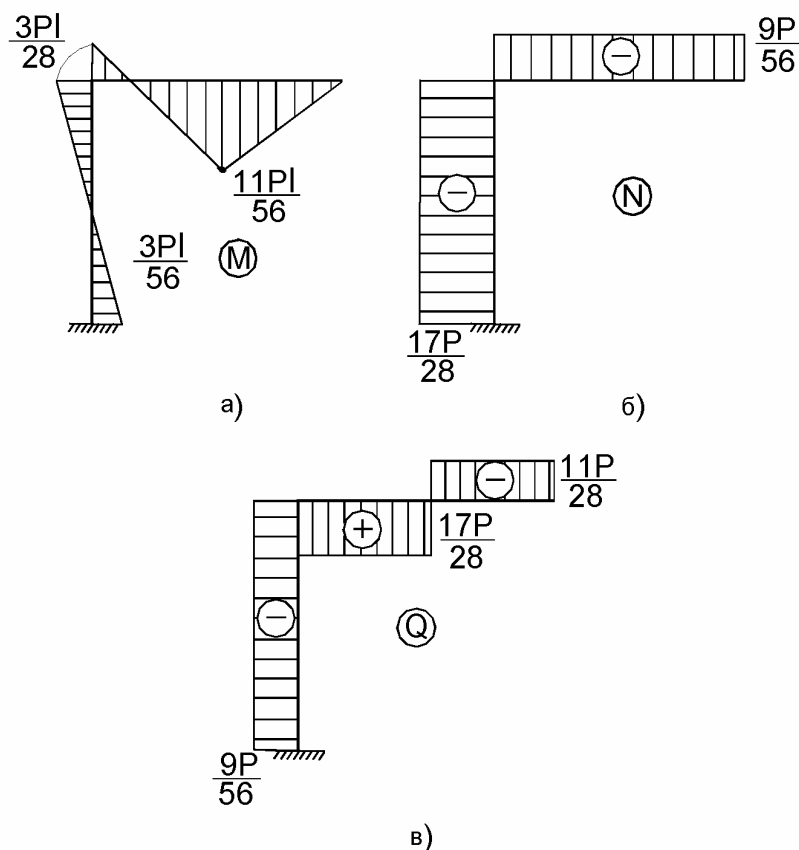


Рис. 8.23

8.6. Использование свойств симметрии при раскрытии статической неопределимости

Рассмотрим раму, имеющую ось геометрической симметрии (рис. 8.24,а). Заменим внешнюю нагрузку ей статически эквивалентной, такой, что она представляет сумму симметричной (рис.8.24,б) и кососимметричной (рис.8.24,в) нагрузок относительно оси геометрической симметрии.

Аналогично можно классифицировать внутренние силовые факторы в произвольном сечении стержневой системы (рис.8.25).

Изгибающие моменты M_x , M_y , нормальная сила N являются зеркальным отражением друг друга относительно плоскости поперечного сечения. Эти внутренние силовые факторы назовём симметричными. Остальные (перерезывающие силы Q_x , Q_y и крутящий момент M_z) назовём антисимметричными или кососимметричными силовыми факторами.

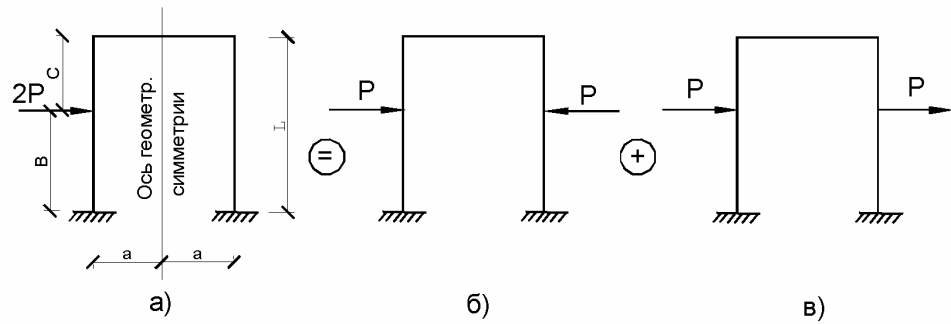


Рис. 8.24.

Докажем теперь положение:
у геометрически симметричной рамы в плоскости симметрии при симметричной внешней нагрузке обращаются в нуль кососимметричные внутренние силовые факторы, а при кососимметричной внешней нагрузке – симметричные силовые факторы (рис.8.26).

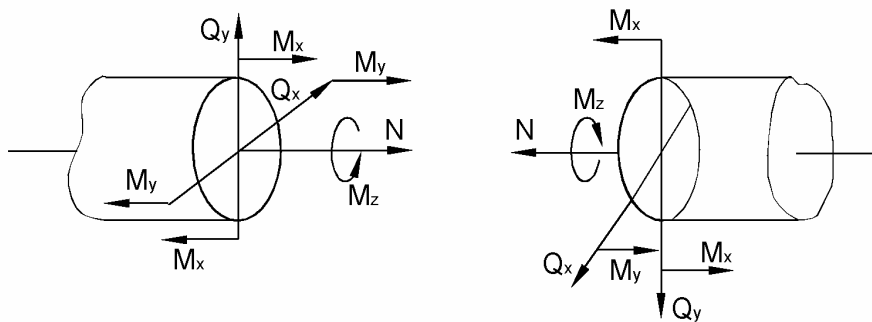


Рис. 8.25

Канонические уравнения метода сил для изображённой на рис.8.24 трижды статически неопределимой рамы имеют вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_1(P) = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_2(P) = 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_3(P) = 0. \end{cases} \quad (8.6)$$

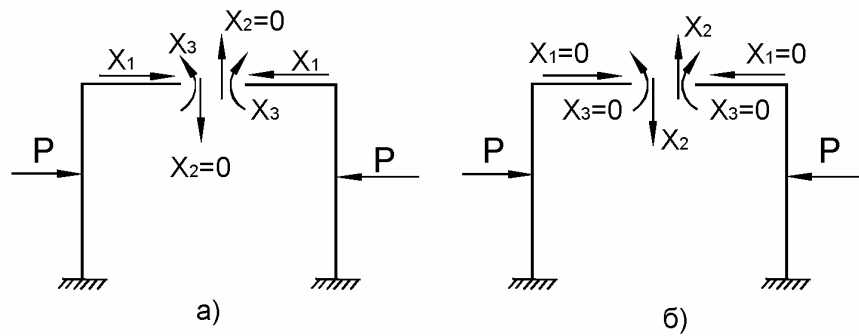


Рис. 8.26

На рис. 8.27.приведены эпюры изгибающих моментов от единичных сил.

На основании этих эпюр находим:

$$\begin{cases} EJ\delta_{12} = \left(\frac{1}{2}l \cdot l\right)a - \left(\frac{1}{2}l \cdot l\right)a \equiv 0, \\ EJ\delta_{23} = -(l \cdot a)l + (l \cdot a)l - \left(\frac{1}{2}a \cdot a\right)1 + \left(\frac{1}{2}a \cdot a\right)1 \equiv 0. \end{cases}$$

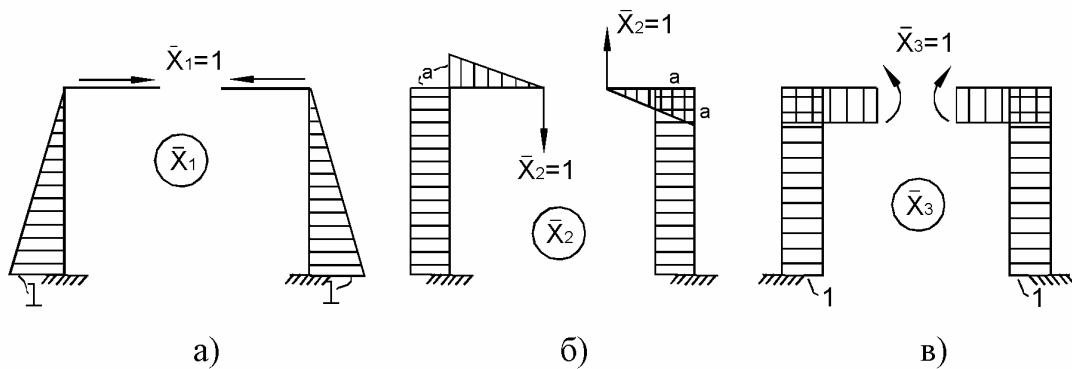


Рис. 8.27

Следовательно, канонические уравнения (8.6) принимают вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_1(P) = 0, \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_2(P) = 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_3(P) = 0. \end{cases} \quad (8.7)$$

На рис. 8.28 приведены эпюры моментов от внешних симметричной (рис.8.28,а) и кососимметричной (рис.8.28,б) нагрузок.

В первом случае симметричной внешней нагрузки имеем:

$$EJ\Delta_2(P) = \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)a - \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)a = 0.$$

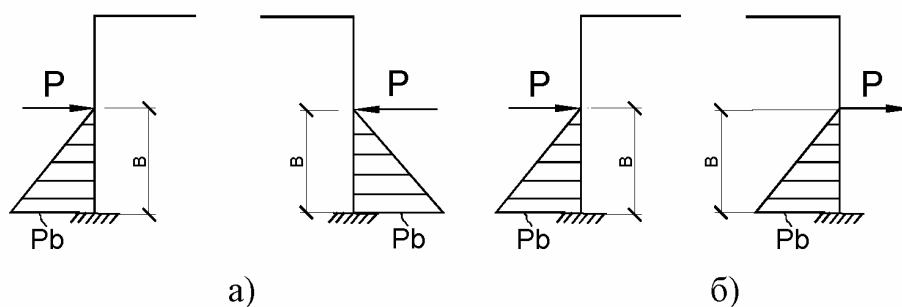


Рис. 8.28

Из (8.7) следует $X_2 = 0$, т.е. при симметричной внешней нагрузке обращается в нуль кососимметричный силовой фактор (перерезывающая сила), что и требовалось доказать.

Во втором случае кососимметричной внешней нагрузки имеем:

$$\begin{cases} EJ\Delta_1(P) = \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)\left(l - \frac{1}{3}b\right) - \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)\left(l - \frac{1}{3}b\right) \equiv 0, \\ EJ\Delta_3(P) = -\left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)l + \left(\frac{1}{2}Pb \cdot b\right)l \equiv 0. \end{cases}$$

Канонические уравнения (8.7) принимают вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 = 0, \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 = 0, \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_2(P) = 0. \end{cases} \quad (8.8)$$

Т.к. определитель системы двух первых уравнений (8.8)

$$|\delta| = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{13} \\ \delta_{31} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2 \neq 0,$$

то $x_1 = x_3 = 0$, что и требовалось доказать.

Полученные результаты могут быть распространены на пространственные стержневые системы.

8.7. Метод перемещений

При расчёте статически неопределимых систем методом сил сначала находятся лишние неизвестные, затем внутренние силовые факторы и перемещения.

Можно решить задачу раскрытия статической неопределимости иначе: сначала найти перемещения характерных точек упругой системы, а затем внутренние силовые факторы. Метод перемещений отличается от метода сил тем, что за основные неизвестные принимаются перемещения узлов стержневой системы (углы поворота и линейные перемещения). Поэтому

особенно просто раскрывается статическая неопределимость системы с малым числом узлов

Стержневые деформируемые системы обладают конечным числом степеней свободы, которое совпадает с числом независимых перемещений узлов. Для плоской системы в общем случае каждый жесткий узел имеет три степени свободы (одно угловое перемещение и два линейных).

Если известны перемещения узлов, то можно найти перемещения любой точки стержневой системы. Общее число неизвестных перемещений n метода перемещений, называемое степенью кинематической неопределимости, определяем как сумму неизвестных углов поворота n_y и неизвестных линейных перемещений $n_{\text{л}}$:

$$n = n_y + n_{\text{л}}.$$

Число неизвестных углов поворота равно числу жестких узлов. При определении линейных смещений предполагается, что при изгибе сближением концов стержней можно пренебречь. В силу этого предположения число независимых линейных перемещений узлов равно степени свободы шарнирной схемы системы, получаемой путём введения шарниров во все узлы, включая опорные.

В качестве примера рассмотрим порталную раму на рис.8.29.

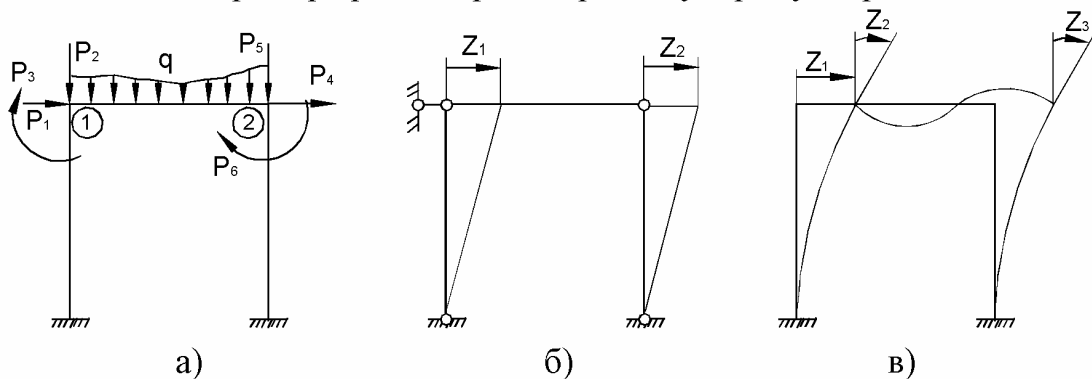


Рис. 8.29

Внешние моменты в узлах считаем положительными при их вращении по часовой стрелке. Это же правило принимаем для углов поворота узлов. Рама три раза статически неопределима. Число жёстких узлов $n_{y3}=2$. Чтобы найти $n_{\text{л}}$, заменим все жёсткие узлы и жёсткие защемления шарнирами и превратим систему в геометрически изменяемую, т.е. механизм (рис.8.29,б). Число независимых линейных перемещений определится как число простых связей, которые необходимо наложить на шарнирную схему конструкции, чтобы сделать её геометрически неизменяемой. В данном примере $n_{\text{л}} = 1$ (рис.8.29,б). Таким образом, число неизвестных перемещений $n = 2+1 = 3$, т.е. столько же, сколько и по методу сил.



Выясним статический смысл коэффициентов r_{ij} , называемых *коэффициентами жёсткости*. Дадим, например узлам системы (рис. 8.31,а) перемещения $z_1 = 1, z_2 = z_3 = 0$. Тогда из (8.11) следует:

$$P_1 = r_{11}, P_2 = r_{22}, P_3 = r_{31}.$$

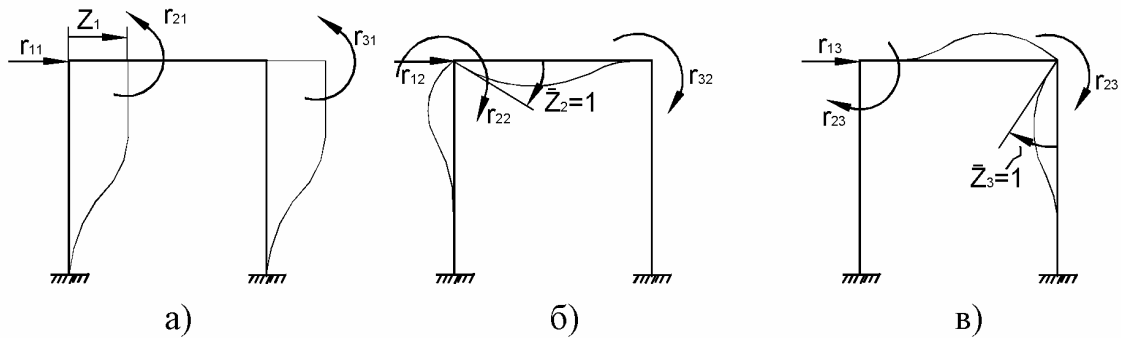


Рис. 8.31

Таким образом, r_{11}, r_{12}, r_{13} – это обобщённые силы, которые нужно приложить в узлах в направлении неизвестных перемещений, чтобы получить единичное перемещение узла $z_1 = 1$.

Аналогично выясняется смысл остальных коэффициентов жёсткости r_{ij} . Итак, r_{ij} – это обобщённые силы, приложенные в узлах номер i ($i = 1, 2, \dots, n$) при единичном перемещении $z_j = 1$, т.е. узла j . Такая трактовка справедлива только для упругих систем.

На основании теоремы о взаимности работ имеем $A_{ij} = A_{ji}$, где A_{ij} – работа сил i -го состояния на перемещение точек их положения, вызванных силами j -го состояния, A_{ji} – наоборот. Согласно этой теореме

$$A_{ij} = r_{ij} \cdot 1, A_{ji} = r_{ji} \cdot 1 \text{ и потому } r_{ij} = r_{ji}, \text{ причём}$$

$$A_{ij} = r_{ji} = \sum \int M_j d\theta_i = \sum \int \frac{M_j M_i}{EJ} dz,$$

где M_i – моменты от единичных смещений.

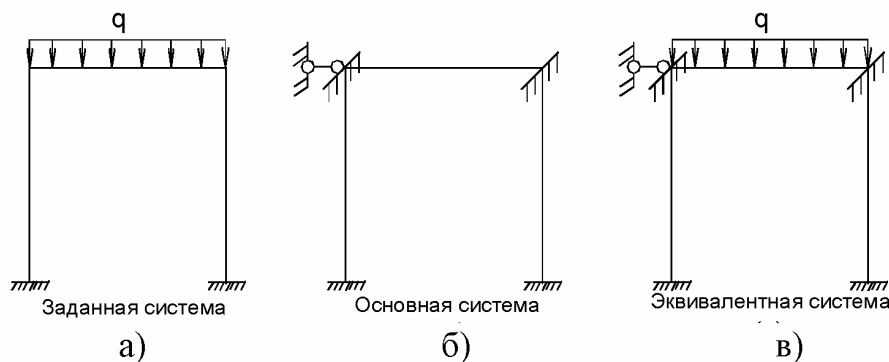


Рис. 8.32

Представим теперь, что мы наложили дополнительные связи в узлах от их поворота или линейных смещений. Тогда рама превращается в совокупность однопролётных балок с жёстко защемлёнными или шарнирно опёртыми концами (рис. 8.32). Такая система носит название *основной системы метода перемещений*. Если к основной системе приложить внешние силы (рис. 8.32,в), то получим систему *эквивалентную* заданной на основании принципа независимости действия сил.

Пусть теперь внешняя нагрузка отсутствует. Будем придавать узлам основной системы единичные смещения $z_i = 1$. Тогда на основании рис. 8.31 r_{ij} можно трактовать как реактивные обобщённые силы в упругих защемлениях узлов. Легко усмотреть, что при таком подходе стержневую систему действительно можно рассматривать как систему однопролётных статически определимых балок, концы которых упруго защемлены в узлах, лишённых линейных перемещений благодаря простым внешним связям (рис. 8.32).

Приложим теперь к основной системе внешнюю внутрипролётную нагрузку (рис. 8.32,в). Так как при этом все $z_j = 0$, то из (8.11) следует, что $P_i = R_i \neq 0$, т.е. R_i будут представлять собой опорные реакции от внешней нагрузки внутри пролётов. Система будет эквивалентна заданной, если дополнительные связи будут упругими и допускать действительные перемещения, имеющие место в данной системе. Этого можно добиться, если приравнять к нулю реакции всех введённых дополнительных связей, которые препятствуют поворотам и линейным смещениям ($P_i = 0$). Эту мысль и выражают собой канонические уравнения (8.11).

Методика определения коэффициентов r_{ij} подробно излагается в курсах строительной механики. Реакции R_i в балках определяются обычно по методу Мора. На рис.8.33 эти реакции и эпюры моментов указаны для некоторых видов изгиба. Значения коэффициентов (реакций) r_{ij} при единичных смещениях можно найти следующим образом. Общее решение дифференциального уравнения изгиба балки

$$\frac{dw^4}{dz^4} = 0,$$

после интегрирования имеет вид

$$w = C_1 z^3 + C_2 z^2 + C_3 z + C_4, \quad \theta = \frac{dw}{dz} = 3C_1 z^2 + 2C_2 z + C_3.$$

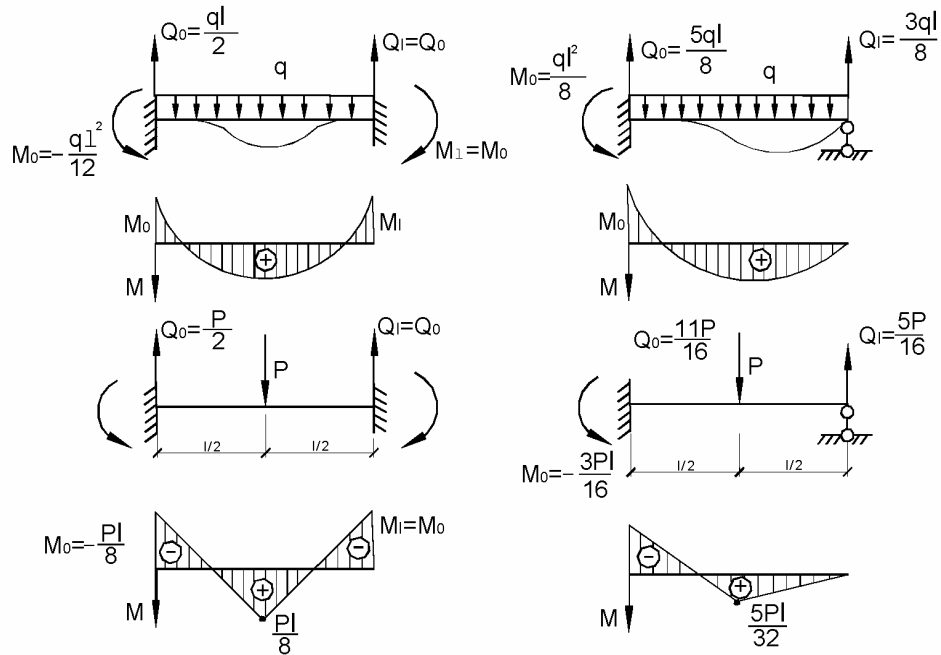


Рис. 8.33

При $z = 0$ прогиб $w = w_0, \theta = \theta_0$, а при $z = l$ прогиб $w_l = w_0 + \Delta, \theta = \theta_l$, поэтому

$$\begin{cases} C_4 = w_0, C_3 = \theta_0, \\ w_l = C_1 l^3 + C_2 l^2 + \theta_0 l + w_0, \\ \theta_l = 3C_1 l^2 + 2C_2 l + \theta_0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим постоянные:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\theta_0}{l^2} + \frac{\theta_l}{l^2} - \frac{2(w_l - w_0)}{l^3}, \\ C_2 = -\frac{2\theta_0}{l} - \frac{\theta_l}{l} + \frac{3(w_l - w_0)}{l^2}. \end{cases}$$

Внутренние силовые факторы:

$$\begin{cases} M = -EJw'' = -EJ(GC_1 z + 2C_2), \\ Q = \frac{dM}{dz} = -6EJC_1 = const, \\ M_0 = -2EJC_2, M_l = -EJ(6C_1 l + 2C_2). \end{cases}$$

Подставляя значение постоянных, находим:

$$\begin{cases} M_0 = \frac{4EJ}{l} \theta_0 + \frac{2EJ}{l} \theta_l - \frac{6EJ}{l^2} \Delta, \\ M_l = -\frac{2EJ}{l} \theta_0 - \frac{4EJ}{l} \theta_l + \frac{6EJ}{l^2} \Delta, \\ Q = -\frac{6EJ}{l^2} \theta_0 - \frac{6EJ}{l^2} \theta_l + \frac{12EJ}{l^3} \Delta, \end{cases} \quad (8.12)$$

где $\Delta = w_l - w_0$.

Если правая опора шарнирная, то $M_l = 0$, что, согласно (8.12), позволяет найти:

$$\theta_l = -\frac{\theta_0}{2} + \frac{3}{2}(w_l - w_0), \quad (8.13)$$

а затем

$$M_0 = \frac{3EJ}{l} \theta_0 - \frac{3EJ}{l^2} (w_l - w_0),$$

$$Q = -\frac{3EJ}{l^2} \theta_0 + \frac{3EJ}{l^3} (w_l - w_0).$$

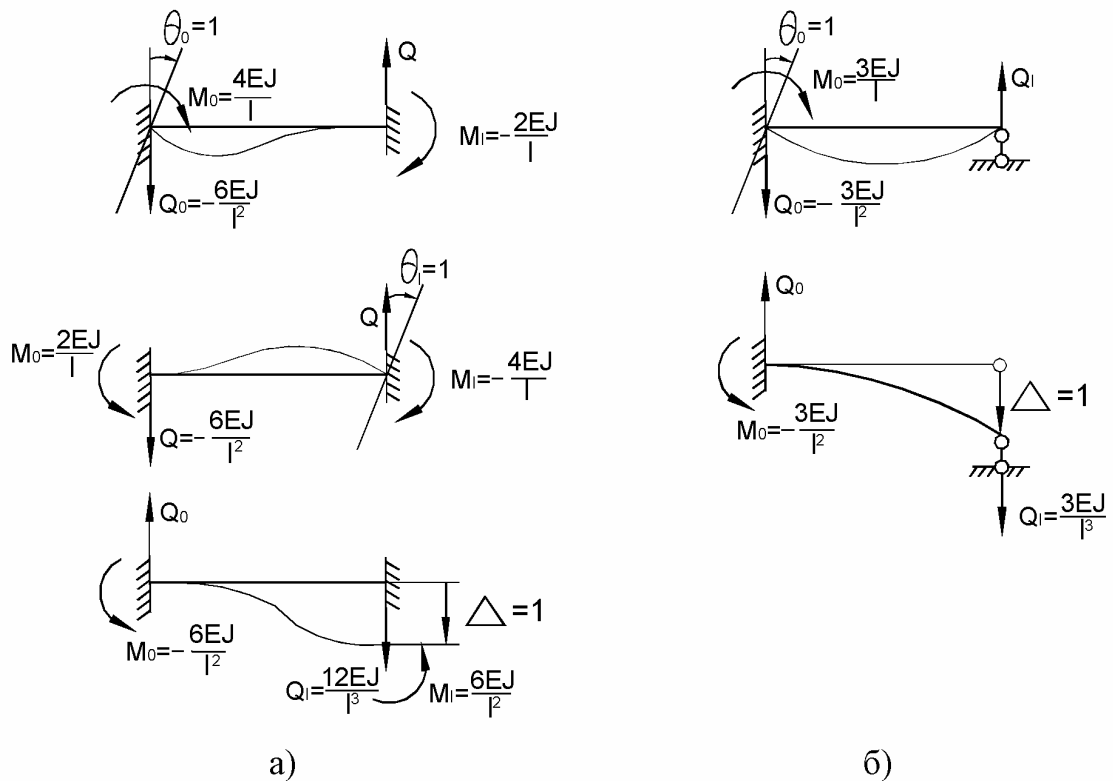


Рис. 8.34

На рис. 8.34 показаны реакции r_{ij} от единичных перемещений $\theta_0 = 1, \theta_l = 1, \Delta = w_l - w_0 = 1$, согласно (8.12), (8.13). Зная реакции в опорах от единичных перемещений, можно найти коэффициенты r_{ij} из условий равновесия узлов или частей рамы.

Решая далее систему канонических уравнений (8.11), находим неизвестные перемещения Z_i . Зная последние по формулам

$$M_0 = M_{0p} - \frac{EJ}{l} \left[4\theta_0 + 2\theta_l - 6\frac{\Delta}{l} \right],$$

$$M_l = M_{lp} - \frac{EJ}{l} \left[2\theta_0 + 4\theta_l - 6\frac{\Delta}{l} \right]$$

либо

$$M = M_p + \sum z_i M_i, \quad (8.14)$$

находим изгибающие моменты в узлах рамы и строим эпюру моментов.

8.8. Примеры расчёта стержневых систем методом перемещений

Пример 1. Рассмотрим трижды статически неопределимую систему (рис. 8.35,а).

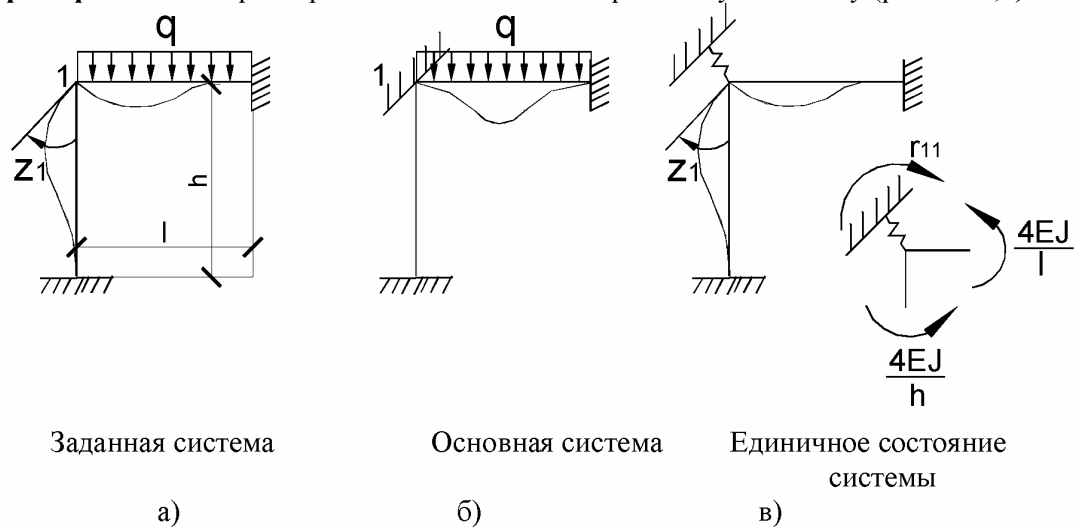


Рис. 8.35

Степень кинематической неопределимости задачи $n = 1$. Неизвестных перемещений – одно. Это поворот узла z_1 . Каноническое уравнение метода перемещений:

$$r_{11}z_1 + R_{1p} = 0. \quad (1)$$

Введём защемление узла. В результате получаем основную систему метода. Реактивный момент в левом защемлении, согласно рис. 8.35,а, равен:

$$R_{1p} = \frac{ql^2}{12}.$$

Превратим теперь защемление в узловое и повернём узел 1 на единичный угол $z = 1$ (рис. 8.35,в).

Согласно рис. 8.34,а в примыкающих к узлу стержнях на их концах возникают моменты $\frac{4EJ}{h}$ и $\frac{4EJ}{l}$ (рис. 8.36,б). Из равновесия узла находим:

$$r_{11} = \frac{4EJ}{h} + \frac{4EJ}{l}.$$

Подставляя значения найденных коэффициентов в каноническое уравнение (1), получим:

$$z = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = \frac{ql^2}{48\left(\frac{EJ}{h} + \frac{EJ}{l}\right)}.$$

Эпюры от внешней нагрузки в основной системе и от единичного смещения показаны на рис. 8.36,а,б.

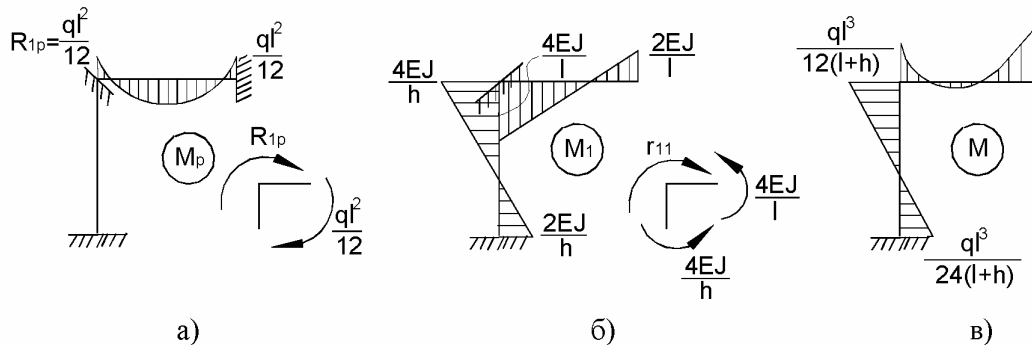


Рис. 8.36

Используя формулу (8.14) находим узловые моменты и строим суммарную эпюру моментов (рис. 8.36,в).

Пример 2. Рассмотрим два раза статически неопределимую раму (рис. 8.37,а). Степень статической неопределимости рамы $n = 2$, ибо она имеет два независимых перемещения узлов: угол поворота узла 1 и линейное перемещение узла 2 (рис. 8.37,а,б). Соответствующие канонические уравнения метода перемещений имеют вид:

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + R_{1p} = 0, \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + R_{2p} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Заданная и эквивалентная системы задачи и единичные состояния изображены на рис. 8.37. Эпюры моментов от внешней нагрузки в основной системе изображены на рис. 8.38,а. Эпюры моментов от единичных смещений представлены на рис. 8.38.

Из условий равновесия узла 1 в каждом из состояний находим:

$$R_{1p} = \frac{Ph}{8} - \frac{ql^2}{8}, r_{11} = \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{h}, r_{12} = r_{21} = -\frac{6EJ}{h^2}.$$

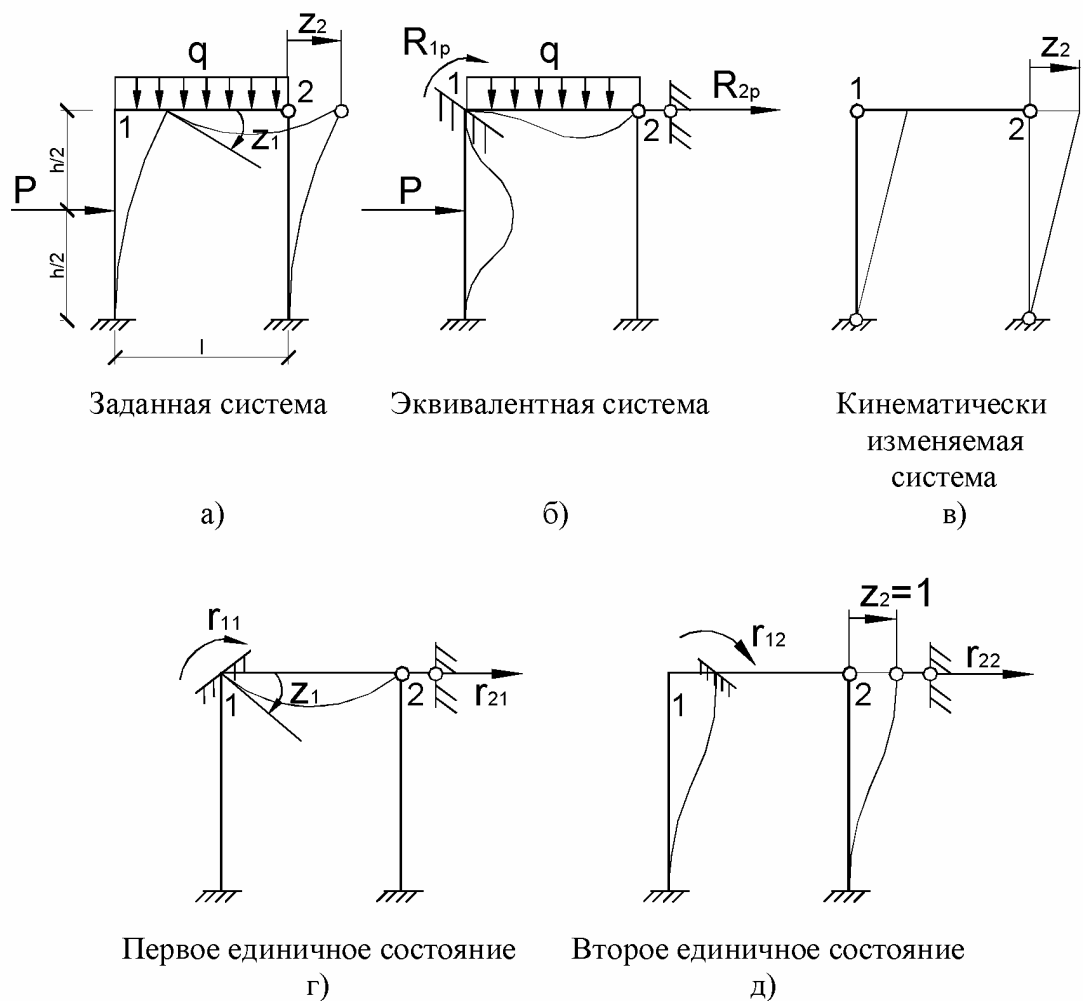


Рис. 8.37

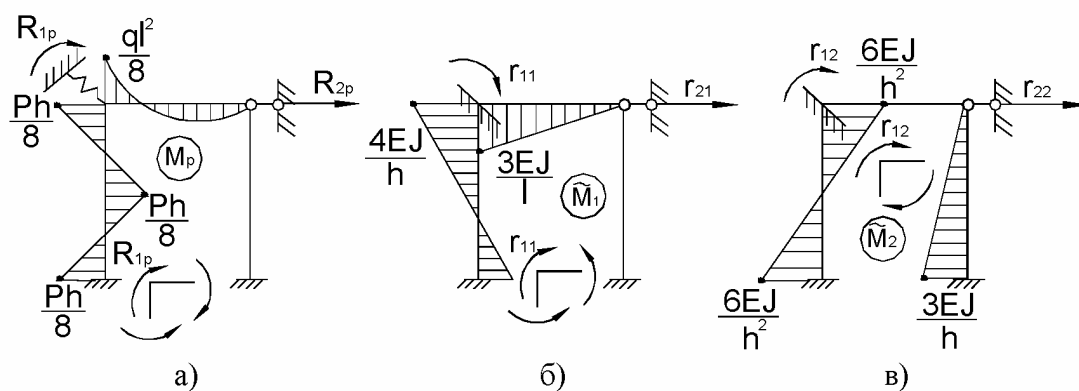


Рис. 8.38

Для определения коэффициентов R_{2p}, r_{22} рассмотрим равновесие отсечённых частей рамы (рис. 8.39). Из уравнений равновесий находим:

$$R_{2p} = -\frac{P}{2}, r_{21} = \frac{12EJ}{h^2}, r_{22} = \frac{12EJ}{h^3} + \frac{3EJ}{h^3} = \frac{15EJ}{h^3}.$$

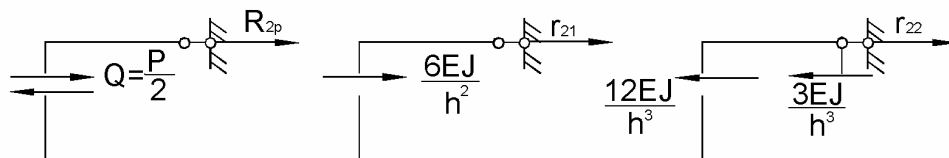


Рис. 8.39

Канонические уравнения задачи принимают вид

$$\begin{cases} \left(\frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{h} \right) z_1 - \frac{6EJ}{h^2} z_2 + \left(\frac{Ph}{8} - \frac{ql^2}{8} \right) = 0, \\ -\frac{6EJ}{h^2} z_1 + \frac{15EJ}{h^3} z_2 - \frac{P}{2} = 0. \end{cases}$$

Примем для простоты расчёта $l = h$ и $P = \frac{ql}{2}$. Тогда получим:

$$7lz_1 - 6z_2 - \frac{ql^4}{16EJ} = 0,$$

$$-6lz_1 + 15z_2 - \frac{ql^4}{4EJ} = 0,$$

откуда

$$z_1 = \frac{13ql^3}{15 \cdot 2EJ}, E_2 = \frac{17ql^4}{1128EJ}.$$

Далее по формуле $M = M_1 z_1 + M_2 z_2 + M_p$ строим эпюру изгибающих моментов (рис. 8.40).

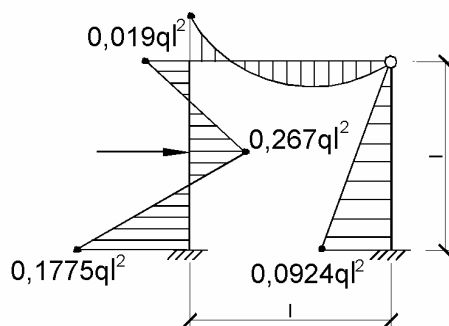


Рис. 8.40

Глава 9

Устойчивость упругих систем

9.1. Концепция устойчивости

Под устойчивостью понимают способность систем сохранять их состояние равновесия или движения во времени под действием малых возмущений. Под неустойчивостью понимают способность систем при действии весьма малых возмущений получать большие перемещения.

Наглядной иллюстрацией устойчивого состояния равновесия служит поведение тяжёлого шарика на гладкой поверхности (рис. 9.1).

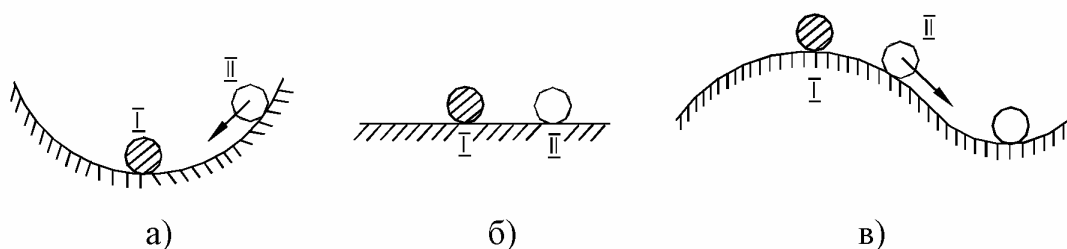


Рис. 9.1

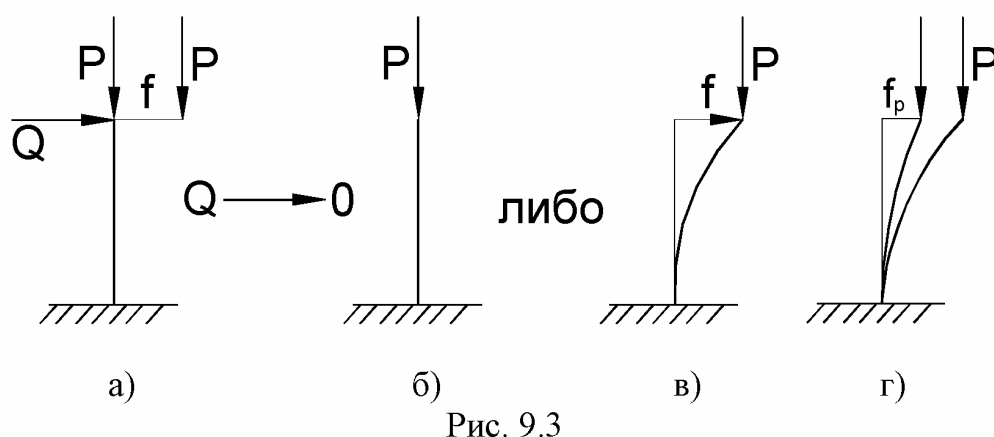
Если слегка отклонить шарик от состояния равновесия 1, как показано пунктиром, и предоставить его самому себе, то в случае а) шарик начнёт колебаться около нижнего положения 1 и вернётся к нему; в б) он остаётся безразличным, а в случае в) он начнёт сразу же удаляться от положения 1.

Приведённый пример отождествляет понятие устойчивого состояния шарика со свойством возмущённого (отклонённого) состояния II возвращаться к исходному 1.

История науки знает различные определения понятия устойчивости. Одним из первых было определение, данное Л.Эйлером в 1749г. в связи с практически важным вопросом того времени – вопросом устойчивости кораблей Российского флота: «тела равновесное положение будет устойчиво, ежели оное тело, будучи несколько наклонено, опять справится» (рис. 9.2).

Термин устойчивость был введён в науку впервые Л.Эйлером. Применительно к упругим системам определение Эйлера можно сформулировать следующим образом: *равновесие упругой системы при заданных внешних силах считается устойчивым в смысле Эйлера, если после статического*

приложения и последующего снятия малой возмущающей силы система возвращается к своему исходному состоянию (рис. 9.3). В противном случае исходное состояние равновесия системы считается неустойчивым.



Минимальное значение силы P , при котором система впервые не возвращается к исходному состоянию, называется *бифуркационным*. При этом значении нагрузки происходит нарушение единственности решения задачи, т.к. наряду с исходной прямолинейной формой равновесия стержня существует отклонённая форма.

Другим, более общим, определением устойчивости состояния равновесия является определение Лагранжа: *исходное состояние равновесия упругой системы устойчиво, если после отклонения её от этого состояния она, предоставленная самой себе, стремится вернуться к нему, совершая малые колебания, затухающие со временем при наличии сил внешнего и внутреннего сопротивления* (рис. 9.4,а).

С увеличением сжимающей силы частота ω собственных колебаний системы стремится к нулю, а затем движение становится аperiodически неустойчивым (рис. 9.4,б).

Для консервативных внешних сил критическая нагрузка находится из условия равенства нулю частоты собственных колебаний и совпадает с эйлеровой нагрузкой.

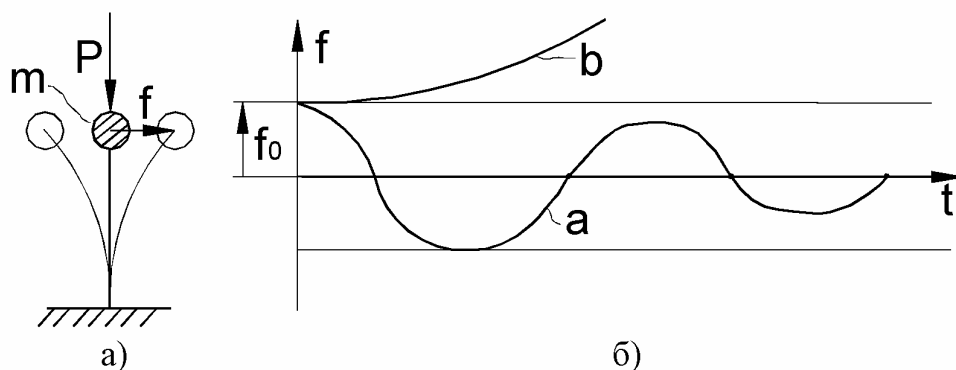


Рис. 9.4

Если система (сжатый стержень) испытывает пластические деформации, то при любом малом возмущении он изгибается и затем при снятии возмущения не возвращается в своё исходное состояние (рис. 9.2,г). Получается, что по Эйлеру всякое равновесное состояние сжатой системы за пределом упругости – неустойчивое. Такое допущение с практической точки зрения является абсурдным. В.Г.Зубчаниновым предложено частное определение устойчивости сжатой системы за пределом упругости: *состояние равновесия упругопластической системы является устойчивым, если она после статического приложения и последующего снятия малой возмущающей силы стремится вернуться в своё исходное состояние, пребывая в его малой окрестности.*

Из приведённых выше трёх определений по существу вытекает одинаковый метод исследования элементов конструкций на устойчивость – *метод проб на устойчивость* путём возмущения исходного состояния равновесия при достигнутом уровне нагружения. Этот метод обладает тем недостатком, что не рассматривает процесс нагружения, с помощью которого был достигнут данный уровень внешних сил, а также тем, что ограничивает область анализа устойчивости лишь малой окрестностью точки бифуркации (рис. 9.5).

Что произойдёт за точкой бифуркации при дальнейшем нагружении системы? На этот вопрос метод проб ответа не даёт. Судить об устойчивости или неустойчивости конструкции без исследования послебифуркационного поведения невозможно.

Так, для стержней (см. рис. 9.5, кривая 1) после бифуркации перемещения растут настолько быстро, что предельное значение нагрузки P_m практически не отличается от бифуркационного.

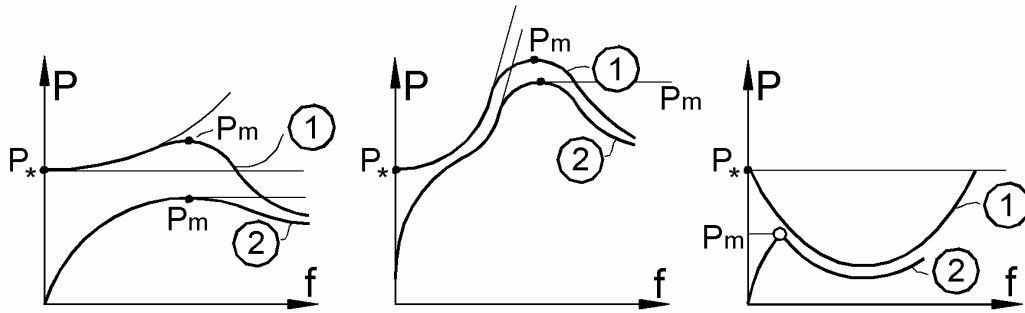


Рис. 9.5

При достижении предельного значения прогибы катастрофически нарастают и для их развития не требуется увеличивать сжимающую нагрузку. Такое поведение стержней предопределило успех бифуркационной теории Эйлера при расчёте стержней и стержневых систем на устойчивость. Для пластин после бифуркации вначале также наблюдается быстрый рост прогибов в некоторой окрестности исходного состояния (рис. 9.5, кривая 1).

Тонкие пластины и панели образуют выпучины, которые становятся явно заметными. В послебифуркационной стадии прогибы продолжают увеличиваться по мере увеличения нагрузки, но пластина остаётся в малой окрестности своего исходного плоского состояния, пока не достигнуто предельное значение нагрузки P_m .

У оболочек после бифуркации наблюдается резкое падение сжимающей нагрузки и потому они весьма чувствительны к начальным несовершенствам (рис. 9.5, кривая 1).

В основе современной концепции устойчивости, её методологии лежит исследование процессов нагружения конструкций и их элементов. *Процесс нагружения упругой или упругопластической системы считается неустойчивым, если сколь угодно малому продолжению этого процесса отвечают катастрофическое развитие перемещений и деформаций* (определение автора). Катастрофа наступает в предельных точках, называемых точками бифуркации Пуанкаре. Соответствующие нагрузки называют *пределами устойчивости* или критическими нагрузками. В предельных точках

$$\frac{df}{dP} \rightarrow \infty. \quad (9.1)$$

Условие (9.1) принимается за *критерий неустойчивости* при квазистатическом нагружении упругопластических систем.

На практике все реальные элементы имеют начальные несовершенства (технологические прогибы, эксцентриситет приложения нагрузки и др.).

Такие элементы начинают выпучиваться (изгибаться) с самого начала нагружения (рис. 9.6,а).

Неустойчивость реальных элементов наступает в предельных точках точно так же, как и у идеальных систем с устойчивым докритическим выпучиванием (рис. 9.5, кривые 2).

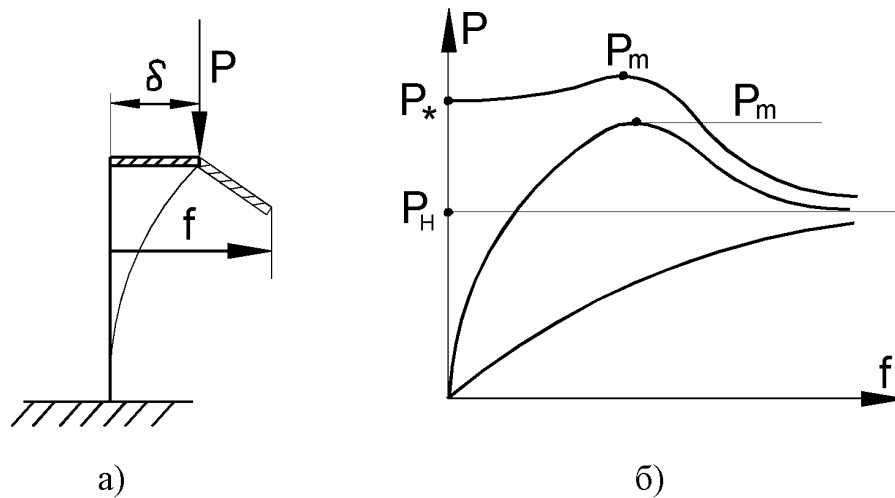


Рис. 9.6

В связи с этим все малые начальные несовершенства отнесём к возмущениям. Это естественно, ибо когда смотрим на инженерную конструкцию (например мостовую ферму со сжатыми элементами), мы представляем её геометрически и статически совершенной (идеальной).

На процесс выпучивания системы с начальными несовершенствами мы будем смотреть как на возмущённый процесс по отношению к послебифуркационному процессу идеальной системы. Однако если возмущающие факторы чрезмерно велики, то задачи устойчивости может и не быть (см.рис.9.6,б).

Здесь изображено поведение сжатого стержня при выпучивании за пределом упругости. Если возмущающий эксцентриситет δ меньше некоторого числа η , то при некоторой предельной нагрузке P_m (предел устойчивости) произойдёт потеря устойчивости. Если δ достаточно велико ($\delta > \eta$), то задачи устойчивости не возникает, в этом случае имеет место продольный изгиб. В обоих случаях кривые стремятся по мере роста прогиба к некоторой нагрузке P_H , разделяющей указанные задачи и называемой *нагрузкой надёжности* устойчивых состояний.

Для стержней и пластин пределы устойчивости в возмущённом и невозмущённом состояниях близки друг к другу. Поэтому предел устойчивости для идеальных элементов следует принять за *расчётные критические*

нагрузки. Для стержней, как мы уже отмечали, предел устойчивости близок к нагрузке бифуркации, что существенно облегчает задачу их расчёта на устойчивость.

У пластин в пределах упругости бифуркационные нагрузки значительно меньше предела устойчивости и потому задача расчёта на устойчивость сводится, в конечном счёте, к решению нелинейной задачи выпучивания.

У оболочек предел устойчивости весьма чувствителен к начальным несовершенствам (рис. 9.7). Поэтому здесь существенное значение приобретает знание среднестатистического значения начальных несовершенств f_0 .

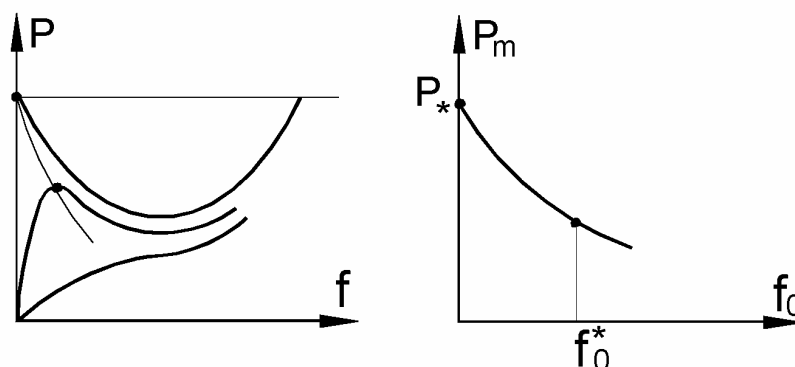


Рис. 9.7.

Ещё одним важным обстоятельством при формировании концепции устойчивости является учёт *ползучести* материалов. В связи с этим процесс нагружения разделяется на два этапа: мгновенный процесс нагружения и этап процесса ползучести во времени при постоянной внешней нагрузке. На втором этапе процесс протекает во времени, значительно большем, чем требуется для процесса нагружения до заданного уровня.

Здесь возможны два варианта постановки задачи устойчивости. Первый относится к случаю ограниченной ползучести материала, второй – неограниченной.

Рассмотрим первый случай. На рис. 9.8,а кривая 1 относится к первому этапу нагружения, кривая 2 – ко второму после полной выборки ограниченной ползучести. Через P_m обозначен предел устойчивости при мгновенном нагружении, через P_m^* – предел устойчивости при длительном нагружении после выборки ползучести. Он называется *пределом длительной устойчивости*.

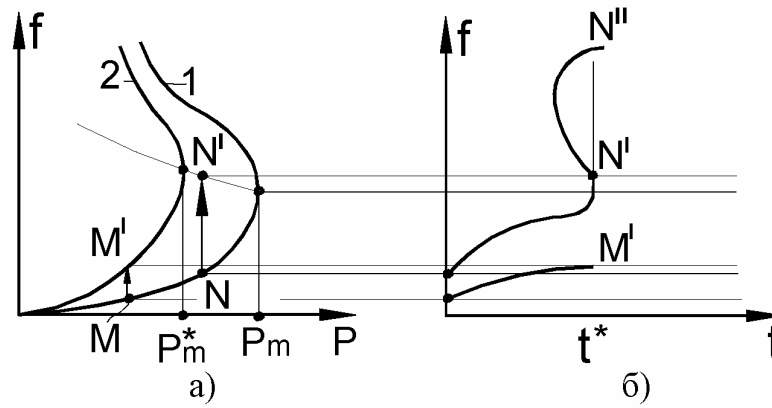


Рис. 9.8

Рассмотрим точку M на кривой 1, для которой $P = P_0$. В результате ограниченной ползучести (см. рис. 9.8,б) она переходит в точку M' . Такой процесс выпучивания на втором этапе – устойчив, поскольку он ограничен по перемещениям. Пусть теперь $P_m^* < P_0 < P_m$ (точка N на кривой 1 (рис. 9.8,а)). Несмотря на ограниченную ползучесть материала, выпучивание элемента будет происходить до достижения мерой перемещения f некоторого значения (точка N' на штрихпунктирной кривой пределов устойчивости), после чего происходит выщёлкивание элемента конструкции (рис. 9.8,б, отрезок $N'N''$), которое называют иногда *локальной катастрофой*, представляющую собой во времени *разрывную динамическую бифуркацию*.

В случае ограниченной ползучести оказывается возможным найти длительный предел устойчивости P_m^* – такой, что при $P < P_m^0$ можно быть уверенным в том, что система останется устойчивой и будет пребывать в малой окрестности исходного состояния равновесия.

Рассмотрим теперь процесс выпучивания элемента материала, обладающего неограниченной ползучестью (рис. 9.9).

В этом случае кривая 1 (рис. 9.9) по-прежнему относится к мгновенному нагружению и на её основании можно найти предел устойчивости P_m . Однако на втором этапе для любого $P_0 > P_H$ процесс является неустойчивым (рис. 9.9,б). При достижении точки N' происходит локальная катастрофа по истечении некоторого промежутка времени, называемого *критическим временем* $t_{кр}$.

В этот момент имеет место условие:

$$\frac{df}{dt} \rightarrow \infty, \quad (9.2)$$

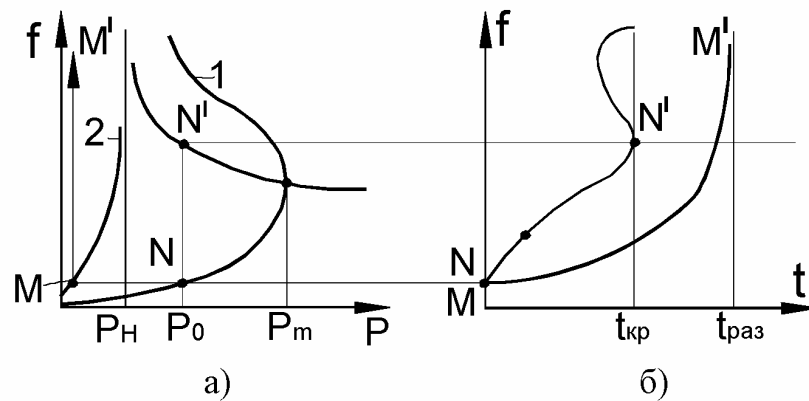


Рис. 9.9

а перемещение f достигает некоторого предельного конечного значения f_* . При $t \rightarrow t_{кр}$ и заданном постоянном P_0 происходит динамический хлопок, называемый иногда *локальной динамической катастрофой* или *бифуркацией*. Если $P < P_H$ то потери устойчивости не происходит. Элемент испытывает продольный изгиб (рис. 9.9,а, линия 2). Процесс выпучивания MM' приводит при $t \rightarrow t_{раз}$ к разрушению элемента конструкции. Время $t_{раз}$ назовём временем разрушения или жизни элемента при продольном нагружении в условиях ползучести.

Таким образом, при учёте ползучести материалов, следует руководствоваться двумя критериями неустойчивости (9.1), (9.2). Может случиться так, что конструкция, устойчивая на первом этапе, т.е. без учёта свойств материалов во времени, окажется неустойчивой на втором длительном этапе функционирования.

9.2. Модельные задачи и методы исследования устойчивости упругих систем

1. Метод Эйлера. Рассмотрим простую модельную задачу, которая поможет выяснить все особенности потери устойчивости. Пусть абсолютно жёсткий стержень (стойка) шарнирно опёрт на нижнем конце и закреплён с помощью упругой горизонтальной пружины на верхнем (рис. 9.10,а). Эта пружина отражает упругие свойства системы при поперечном отклонении. Реакцию пружины R представим соотношением :

$$R = k_1 f_0 + k_2 f^2 + k_3 f^3 + \dots \quad (9.3)$$

где f - горизонтальное перемещение верхнего конца стойки. Если переме-

щение f мало, то нелинейными членами можно пренебречь и принять $R = k_1 f$. В противном случае задача принимает *геометрически нелинейный* характер.

Нагрузим стойку вертикальной силой P . Если подействовать на жёсткий стержень поперечной малой возмущающей силой Q , то он отклонится на некоторый малый угол φ . Теперь снимем эту силу статически. Если стойка вернётся при заданном значении силы P в исходное состояние, то она устойчива в смысле Эйлера, если не вернётся, то неустойчива. Пусть имеет место второй случай. Составим уравнение равновесия стойки:

$$\sum m_0 m_0 = Pf - Rl = 0, \quad (9.4)$$

где $f = \varphi l$, $R = k_1 l$ - реакция упругой пружины.

Из (9.4) следует уравнение

$$(P - k_1 l) f = 0,$$

откуда либо $f = 0$ (устойчивость), либо $f \neq 0$ (неустойчивость). Пусть $f \neq 0$. Тогда в нуль обратится круглая скобка, что позволяет найти критическую силу

$$P_* = P_3 = k_1 l. \quad (9.5)$$

Полученное значение силы P_* , при котором система впервые не возвратилась к исходному состоянию, называется *бифуркационной нагрузкой Эйлера*. При этом значении силы P_* происходит нарушение единственности решения задачи ($f = 0$), т.е. *бифуркация или ветвление решения*. Вопрос о том, как будет вести себя стойка при $P > P_* = P_3$ остаётся открытым.

2. Метод Лагранжа. В основу этого метода положено динамическое определение устойчивости состояния равновесия Лагранжа. Для отклонённого состояния стойки, пользуясь принципом Даламбера, имеем (рис. 9.10,б):

$$\sum m_0 m_0 = (R + J)l - Pf = 0, \quad (9.6)$$

где $R = kf$ - упругая реактивная сила, $J = m \ddot{f}$ - сила инерции, $f = l\varphi$ - прогиб, $\ddot{f} = \frac{d^2 f}{dt^2}$ - ускорение, m - масса груза на конце стойки.

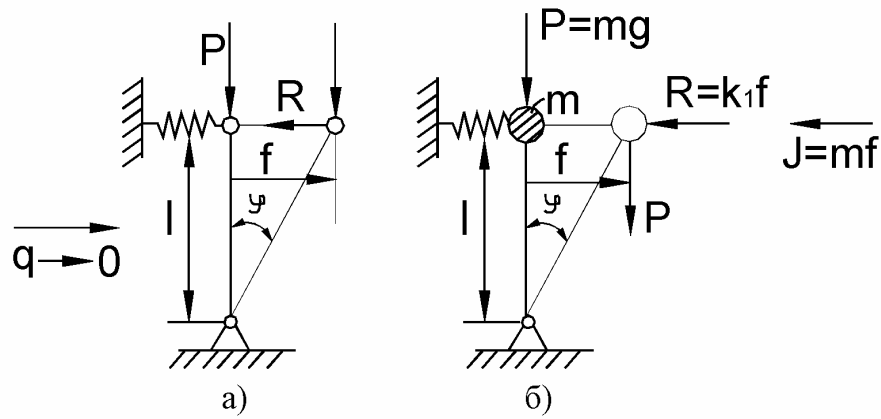


Рис. 9.10

Из (9.6) находим уравнение колебаний системы с сосредоточенной массой m :

$$ml \ddot{f} + (k_1 l - P)f = 0. \quad (9.7)$$

Полагая $\ddot{f} = ce^{-kt}$, получим характеристическое уравнение:

$$k^2 + \omega^2 = 0, \quad (9.8)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 l - P}{ml}}. \quad (9.9)$$

Если $P < k_1 l$, то $\omega > 0$, $k = \pm i\omega$, ($i = \sqrt{-1}$),

$$f = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (9.10)$$

где ω - круговая частота колебаний, φ - начальная фаза, A - амплитуда колебаний. Движение носит периодический характер и потому устойчиво. Если учесть внешнее и внутреннее сопротивление системы, то решение будет иметь вид

$$f = Ae^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi),$$

где λ - параметр, определяющий сопротивление движений. Колебания с ростом времени t затухнут, и система вернётся в своё исходное состояние. Следовательно, исходное состояние равновесия устойчиво.

Если $P > k_1 l$, то k - действительное число. Решение принимает вид:

$$f = C_1 l^{kt} + C_2 l^{-kt} \quad (9.11)$$

и носит аperiодический, т.е. неустойчивый характер. При $t \rightarrow \infty$ имеем $f \rightarrow \infty$. При $\omega = 0$ происходит переход от устойчивого периодического движения стойки к неустойчивому аperiодическому. Это происходит при критической силе $P_* = k_1 l$.

Таким образом, динамический метод Лагранжа приводит к тому же результату, что и метод Эйлера.

3. *Метод Кармана (начальных несовершенств).* Т. Карман первым рассмотрел процесс продольного изгиба стойки с начальными несовершенствами как задачу устойчивости и трактовал предельную нагрузку не как исчерпания несущей способности системы, а как предел устойчивости. Однако такая точка зрения долгое время (вплоть до наших дней) не находила поддержки. Применим метод Кармана к стойке на рис. 9.11а.

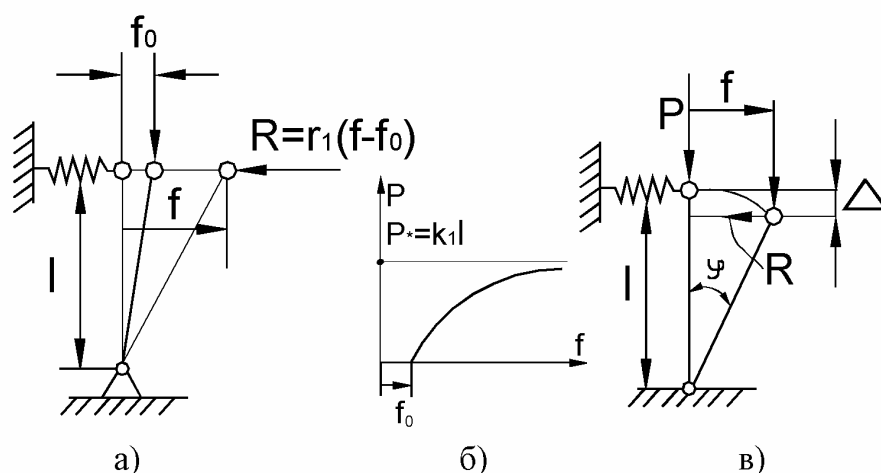


Рис. 9.11

Стойка имеет отклонение от вертикали на некоторый угол φ_0 и сжимается силой P . При $P > 0$ стойка отклонится от вертикали на угол $\varphi > \varphi_0$. Уравнение равновесия в некоторый момент процесса продольного нагружения стойки имеет вид

$$Pf - Rl = 0, \quad (9.12)$$

где $R = k_1(f - f_0)$. Из (9.12) следует:

$$P = P_* \left(1 - \frac{f_0}{f} \right), \quad f = \frac{f_0 P_*}{P_* - P}. \quad (9.13)$$

Дифференцируя по f или по P соответственно, находим:

$$\frac{df}{dP} = \frac{d}{dP} \left(\frac{f_0 P_*}{P_* - P} \right) = \frac{f_0 P_*}{(P_* - P)^2} \quad (9.14)$$

откуда при $P \rightarrow P_* = k_1 l$ следует $\frac{df}{dP} \rightarrow \infty$. Согласно изложенной в 9.1

концепции значение силы $P_* = k_1 l$ является пределом устойчивости и совпадает с эйлеровой силой.

4. *Энергетический метод С.П. Тимошенко.* При отклонении системы на угол φ от положения равновесия (рис. 9.11в), верхний конец стержня опускается на величину Δ . Сила P совершает работу $A = P\Delta$.
Перемещение

$$\Delta = l - l \cos \varphi \approx \frac{1}{2} l \varphi^2 = \frac{1}{2} l f^2,$$

где прогиб $f = l\varphi$, $\cos \varphi = 1 - \varphi^2 / 2 + \dots$

Работа силы P на перемещение Δ принимает вид $A = P f^2 / 2l$.

Упругая внутренняя реактивная сила $R = kf$ совершает работу, называемую потенциальной энергией деформации:

$$U = \frac{1}{2} R f = \frac{1}{2} k f^2.$$

Величина

$$\Pi = U - A = \frac{1}{2l} f^2 (kl - P)$$

носит название *полной потенциальной энергии* системы, связанной с потерей устойчивости. Если $\Pi > 0$ ($P < kl$), то энергии Π достаточно для возвращения стержня в исходное состояние, т.е. его состояние равновесия устойчиво. Если $\Pi < 0$ ($P > kl$), то энергии деформации недостаточно для возвращения стержня в исходное состояние равновесия, т.е. он находится в неустойчивом состоянии равновесия. Граничное значение энергии $\Pi = 0$ является критерием для определения критической силы $P = kl$. Таким образом, энергетический метод приводит к критической нагрузке, равной нагрузке Эйлера для данной модели.

5. Метод Койтера исследования нелинейного послебифуркационного процесса выпучивания (нагружения). Пусть реакция в упругой пружине (рис. 9.13):

$$R = k_1 f + k_3 f^3 \quad (k_2 = 0), \quad (9.15)$$

т.е. зависимость носит нелинейный характер.

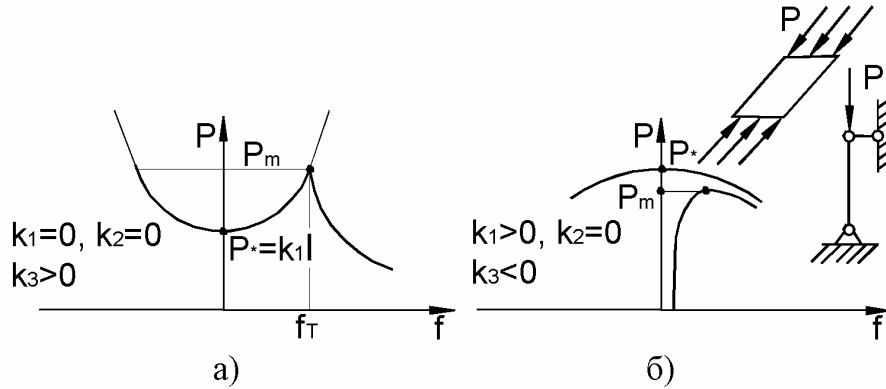


Рис. 9.13

Тогда уравнение равновесия (9.3) примет вид

$$f \left[P - (k_1 l + k_3 l f^2) \right] = 0, \quad (9.16)$$

откуда либо $f = 0$, либо $f \neq 0$, и тогда равно нулю выражение в квадратной скобке. Второе условие приводит к соотношению, которое позволяет установить зависимость между силой P и перемещением f в процессе нагружения элемента:

$$P = k_1 l + (k_3 l) f^2 \quad (9.17)$$

Если $k_3 > 0$, то имеем кривые зависимости с симметричной бифуркацией (рис. 9.13,а). Предположим, что с развитием выпучивания и увеличением перемещения f в пружине при $R = R_T > 0$ возникают пластические деформации. Тогда вместо (9.3) при $R_T = const$ имеем:

$$Pf - R_T l = 0 \quad (f \geq f_T),$$

откуда

$$f = \frac{R_T l}{P} \quad (9.18)$$

и с ростом f нагрузка P будет падать (рис. 9.13,а).

В реальных системах переход к пластической стадии деформирования осуществляется на графике P от f плавно с экстремальной предельной точкой.

Если $k_3 < 0$ ($k_2 = 0$), то согласно (9.17) имеем симметричную неустойчивую бифуркацию, характерную для сжатых неупругих стержней и пластины (рис. 9.13,б).

Пусть теперь

$$R = k_1 f + k_2 f^2 + k_3 f^3 \quad (k_1 > 0).$$

Тогда, согласно (9.12), имеем:

$$f[P - (k_1 l + k_2 l f + k_3 l f^3)] = 0,$$

откуда при $f \neq 0$ получаем:

$$P = (k_1 l) + (k_2 l) f + (k_3 l) f^2. \quad (9.19)$$

При $k_1 > 0$, $k_2 < 0$, $k_3 < 0$ зависимость (9.19) имеет несимметричный вид (рис. 9.14,а). Прогибы f после бифуркации растут при падающей нагрузке. Такая точка бифуркации называется неустойчивой. Она характерна для упругих оболочек.

Если $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 < 0$, то бифуркация будет также несимметричной (рис. 9.14,б).

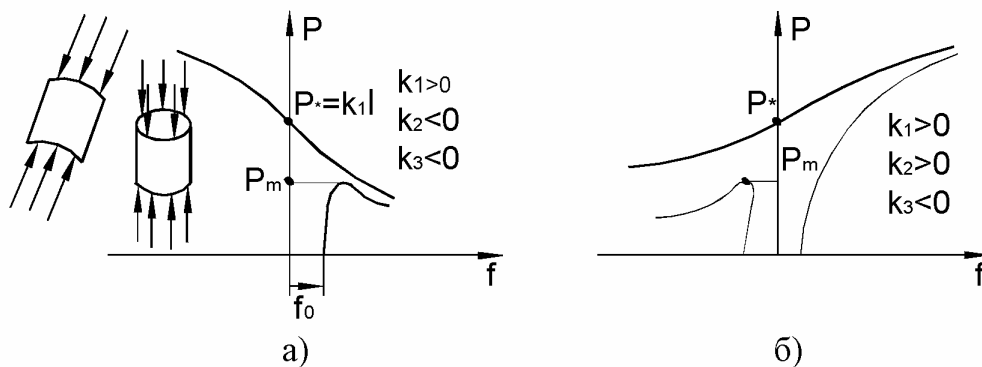


Рис. 9.14

9.3. Задача Эйлера об устойчивости сжатого стержня

Познакомившись с концепцией устойчивости и модельными задачами, мы можем теперь перейти к рассмотрению задач устойчивости упруго сжатого стержня (рис. 9.15).

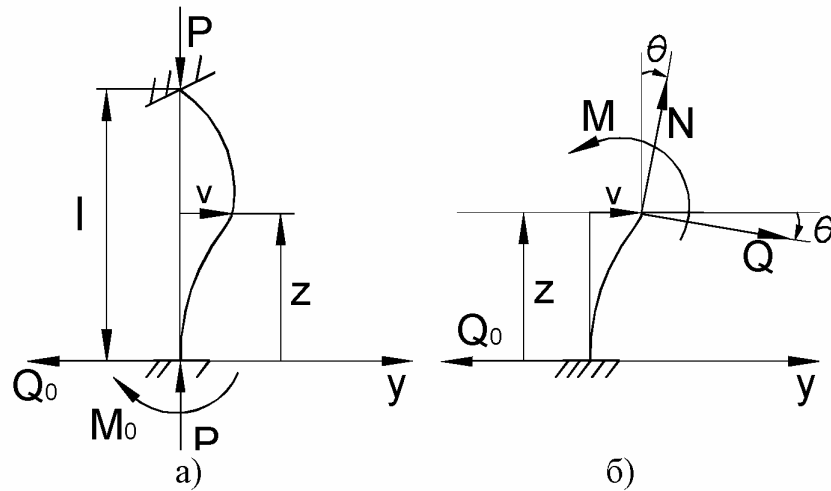


Рис. 9.15

Считаем стержень идеально прямым и сжатым центрально приложенными силами P (рис. 9.15,а). Следуя методу Эйлера, будем считать исходное состояние равновесия упругого стержня устойчивым, если после статического приложения и снятия возмущающей силы при постоянных внешних сжимающих силах P стержень возвращается к своей исходной прямолинейной форме равновесия. В противном случае состояние равновесия считаем неустойчивым.

Допустим, что стержень остался в изогнутом состоянии (рис. 9.15,б). Отсечём часть стержня на расстоянии z от начала координат, считая угол поворота сечения $dV \approx \frac{dV}{dz}$ малой величиной, и составим уравнения равновесия:

$$N = -P, \quad Q = Q_0, \quad M = M_0 + Q_0 z + PV. \quad (9.20)$$

Изгибающий момент в поперечном сечении, согласно (6.9), равен:

$$M = -EJ \frac{d^2 V}{dz^2}. \quad (9.21)$$

Приравнявая выражения моментов (9.20), (9.21), находим:

$$EJ \frac{d^2 V}{dz^2} + PV = -M_0 - Q_0 z. \quad (9.22)$$

Дифференцируя (9.22) по z , получим:

$$EJ \frac{d^3 V}{dz^3} + P \frac{dV}{dz} = -Q_0 = -Q; \quad (9.23)$$

дифференцируя (9.23) по z , приходим к уравнению изогнутой оси потерявшего устойчивость стержня четвёртого порядка:

$$EJ \frac{d^4 V}{dz^4} + P \frac{d^2 V}{dz^2} = 0. \quad (9.24)$$

Введём обозначение:

$$k^2 = \frac{P}{EJ}. \quad (9.25)$$

Тогда уравнения (9.22), (9.24) можно записать в виде

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + k^2 V = -\frac{1}{EJ} (M_0 + Q_0 z), \quad (9.26)$$

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dz^2} = 0. \quad (9.27)$$

Общее решение уравнения (9.26) имеет вид:

$$V = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz - \frac{1}{P} (M_0 + Q_0 z). \quad (9.28)$$

В него входят четыре произвольные постоянные C_1, C_2, M_0, Q_0 .

Общее решение уравнения (9.27):

$$v = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 z + C_4 \quad (9.29)$$

В него входят четыре произвольные постоянные $C_i, (i=1,2,3,4)$.

Производные:

$$\begin{cases} V' = k (C_1 \cos kz - C_2 \sin kz) + C_3, \\ V'' = -k^2 (C_1 \sin kz + C_2 \cos kz), \\ V''' = -k^3 (C_1 \cos kz - C_2 \sin kz). \end{cases} \quad (9.30)$$

Используя (9.30), из (9.21), (9.23) находим:

$$\begin{cases} M = -EJV'' = P (C_1 \sin kz + C_2 \cos kz), \\ Q = -[EJV''' + PV'] = -PC_3. \end{cases} \quad (9.31)$$

Постоянные C_i находятся из граничных условий. Для шарнирно закреплённого по концам стержня при $z=0$ и $z=l$ имеем условия:

$$V = 0, M = 0, (V'' = 0)$$

Для стержня, закреплённого при $z = 0$ и свободного от закрепления при $z = l$, должны выполняться условия:

$$V = 0, V' = 0 \text{ при } z = 0, \\ M = 0, (V'' = 0), Q = 0, (C_3 = 0) \text{ при } z = l.$$

Если на незакреплённом конце при $z = l$ действуют внешние момент m и поперечная сила R , то

$$M = m, Q = R.$$

При любом закреплении концов стержня мы имеем четыре граничных условия (по два на каждом краю), которые при подстановке в них выражений (9.28), (9.29) приводят к системе четырёх однородных алгебраических уравнений вида:

$$\sum_{j=1}^4 C_i \alpha_{ij}(kl) = 0, (i = 1, 2, 3, 4)$$

или

$$\begin{cases} C_1 a_{11} + C_2 a_{12} + C_3 a_{13} + C_4 a_{14} = 0, \\ C_1 a_{21} + C_2 a_{22} + C_3 a_{23} + C_4 a_{24} = 0, \\ C_1 a_{31} + C_2 a_{32} + C_3 a_{33} + C_4 a_{34} = 0, \\ C_1 a_{41} + C_2 a_{42} + C_3 a_{43} + C_4 a_{44} = 0. \end{cases} \quad (9.32)$$

Система уравнений (9.32) имеет отличные от нуля решения ($C_i \neq 0$) только при условии, что её определитель:

$$|\alpha_{ij}| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, после его раскрытия, находим некоторое числовое значение kl :

$$kl = \frac{\pi}{\mu},$$

где μ - некоторое число. Возводя обе части полученного равенства в квадрат и используя обозначение (9.25), получаем формулу для критического значения силы (нагрузки бифуркации) Эйлера:

$$P_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EJ_X}{(\mu l)^2}, \quad (9.33)$$

где μl - приведённая длина Ясинского, μ - коэффициент приведения длины стержня к длине шарнирно опёртого по концам стержня.

Соответствующее критическое напряжение Эйлера:

$$\sigma_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda}, \quad (9.34)$$

где

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} - \quad (9.35)$$

гибкость стержня,

$i = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}$ - радиус инерции площади поперечного сечения.

Формула (9.33) для критической силы сжатой колонны ($\mu = 2$) была получена Эйлером в 1744г. а для сжатого шарнирно опёртого стержня ($\mu = 1$)- в 1757г. Во времена Эйлера (1707 – 1783) главными конструктивными материалами были камень и древесина. Их слабое сопротивление нагрузкам заставляло инженеров создавать массивные конструкции и сооружения, для которых вопросы устойчивости не имели первостепенного значения. Поэтому теория устойчивости Эйлера долгое время не находила практического применения. Только с введением стали в проектирование инженерных конструкций с гибкими элементами, вопросы устойчивости получили большое практическое значение.

9.4. Устойчивость сжатого стержня с шарнирно закреплёнными краями

Л.Эйлер рассмотрел задачу с шарнирно опёртыми краями, т.е. с граничными условиями:

$$V = 0, M = -EJV'' = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, l. \quad (9.36)$$

Удовлетворяя решение (9.29) четырём условиям (9.36), получим систему четырёх уравнений относительно неизвестных постоянных

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0, C_2 = 0, \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 l + C_4 = 0, \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0. \end{cases}$$

откуда получаем $C_2 = C_4 = C_3 = 0, C_1 \sin kl = 0$.

Если $C_1 = 0$, то $V = 0$. Если $C_1 \neq 0$, то $V \neq 0$ и $\sin kl = 0$, откуда следует $kl = n\pi$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Следовательно

$$k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = \frac{P}{EJ},$$

откуда эйлера бифуркационная нагрузка:

$$P_{\text{Э}} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}. \quad (9.37)$$

Минимальная бифуркационная сила имеет место при $n = 1$, т.е. при изгибе стержня по одной полуволне:

$$P_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (9.38)$$

При $n > 1$ выпучивание возможно, если в точках смены знаков кривизны и прогибов установить дополнительные опоры (рис. 9.16). В этом случае $\mu = 1/n$.

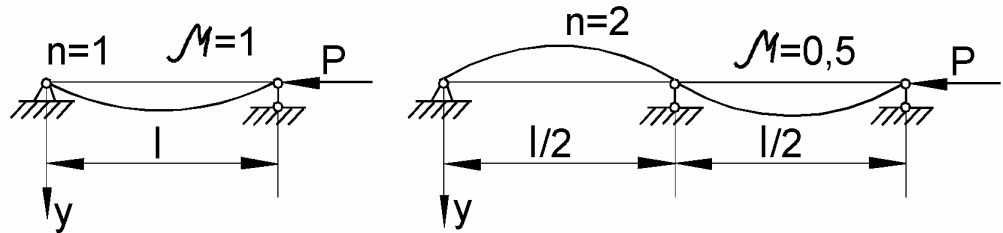


Рис. 9.16

9.5. Устойчивость стержней с иными видами закрепления

Рассмотрим задачи о продольном изгибе сжатых стержней с иными видами закрепления их краёв. На рис. 9.17 представлены различные случаи закрепления краёв стержня. Случаи а) и б) уже рассмотрены нами в 9.4. Обратимся к другим случаям на рис. 9.17:

а) *Колонна с защемлённым нижним и свободным верхним краями* (рис. 9.17, в). Пусть при $z = 0$ стержень жёстко защемлён, а при $z = l$ - свободен от закрепления.

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} V(0) = 0, V'(0) = 0 \quad \text{при } z = 0, \\ M = -EJV''(l) = 0, Q = -PC_3 = 0 \quad \text{при } z = l. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Удовлетворяя решение (9.29) граничным условиям (9.39) получим:

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0, C_1 kl + C_3 = 0, \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0, C_3 = 0, \end{cases}$$

откуда находим $C_1 = C_3 = 0, C_2 \cos kl = 0$.

Это условие может быть выполнено если $C_2 = 0$. Мы получим $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0, V = 0$.

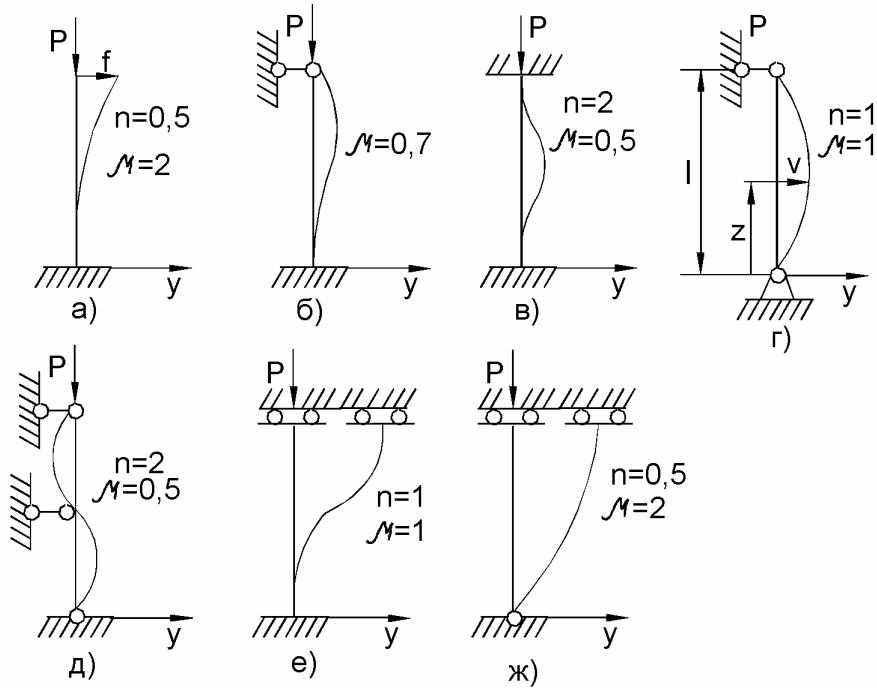


Рис. 9.17

В этом случае стержень остаётся в исходном прямолинейном состоянии равновесия, т.е. устойчив. Если $\cos kl = 0$, то это приводит к значениям $kl = (2n+1)\frac{\pi}{2}, (n = 0, 1, 2, \dots)$. Критическая сила с учётом $k^2 = \frac{P}{EJ}$ равна:

$$P_{кр} = \frac{(2n+1)\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

Её наименьшее значение отвечает $n = 0$, т.е.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}. \quad (9.40)$$

Уравнение изогнутой оси стержня при найденных значениях постоянных $C_i, (i = 1, 2, 3, 4)$:

$$\omega = C_2 \left(1 - \cos \frac{\pi z}{2l} \right).$$

Сравнивая (9.40) с (9.33) находим $\mu = 2$.

Эту задачу можно решить несколько иначе, воспользовавшись решением (9.28) уравнения (9.26) второго порядка. Для рассматриваемой задачи $Q_0 = 0, M_0 = -Pf$, где f - прогиб незакреплённого края при $z = l$. Тогда, согласно (9.28), имеем:

$$V = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + f.$$

Удовлетворяя это решение граничным условиям:

$$V(0) = 0, V'(0) = 0, V(l) = f,$$

получаем

$$C_2 + f = 0, C_1 = 0, C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + f = f,$$

откуда следует: $\cos kl = 0$. Это условие удовлетворяется, если положить $kl = \pi / 2$.

Тогда

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}.$$

Следовательно, оба решения приводят к одной критической силе Эйлера (9.40).

б) *Стержень с шарнирно опёртым и жёстко защемлённым краями.* В этом случае граничные условия имеют вид

$$V(0) = 0, V'(0) = 0, V(l) = 0, M = -EJV''(l) = 0. \quad (9.41)$$

Подстановка общего решения (9.29) в (9.41) приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0, C_1 k + C_3 = 0, C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0 \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 l + C_4 = 0, \end{cases}$$

откуда находим $C_4 = -C_2, C_3 = -C_1 k$, а также систему двух уравнений:

$$\begin{cases} C_1 (\sin kl - kl) + C_2 (\cos kl - 1) = 0, \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0. \end{cases}$$

Приравнивая к нулю определитель этой системы, находим уравнение

$$tgkl = kl,$$

откуда получаем его наименьший корень: $kl = 4,493$ (рис. 9.18).

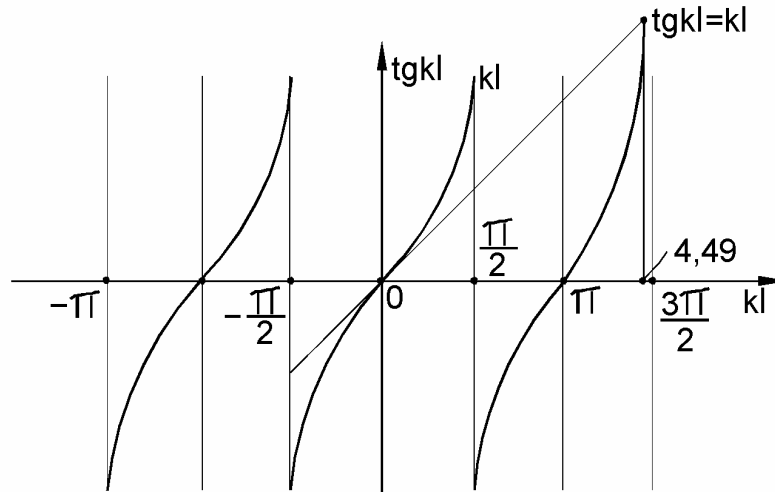


Рис. 9.18

С учётом $k^2 = P / EJ$ находим критическое значение силы Эйлера:

$$P_{кр} = 20,19 \frac{EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2}. \quad (9.42)$$

Сравнивая (9.42) с (9.33), получаем $\mu = 0,7$. Уравнение изогнутой оси имеет вид:

$$V = C_1 [\sin kl - kl \cos kz + k(l - z)]$$

в) Сжатый стержень с двумя жёстко закреплёнными краями
Граничные условия имеют вид:

$$V(0) = 0, V'(0) = 0, V(l) = 0, V'(l) = 0. \quad (9.43)$$

Удовлетворяя решение (9.29) граничным условиям (9.43), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0, C_1 k + C_3 = 0, \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 l + C_4 = 0, \\ k(C_1 \cos kl - C_2 \sin kl) + C_3 = 0, \end{cases}$$

откуда находим: $C_4 = -C_2, C_3 = -kC_1$ и систему двух уравнений:

$$\begin{cases} C_1 (\sin kl - kl) + C_2 (\cos kl - 1) = 0, \\ C_1 (\cos kl - 1) - C_2 \sin kl = 0. \end{cases}$$

Приравнивая к нулю определитель этой системы двух уравнений, получим соотношение:

$$\sin \frac{kl}{2} \left(\sin \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} \right) = 0, \text{ которое будет выполнено, если}$$

$$\sin \frac{kl}{2} = 0 \text{ либо } \sin \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} = 0.$$

Первое приводит к $kl/2 = n\pi, (n=1, 2, \dots)$ и критической силе Эйлера при $n=1$:

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}. \quad (9.44)$$

Второе условие приводит к наименьшему значению $kl/2 = 4,493$ и критической силе Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{80,75 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,35l)^2},$$

большей, чем значение, которое даёт формула (9.44). Таким образом, наименьшей критической силой для жёстко защемлённого по обоим концам стержня является (9.44), для которой $\mu = 2$. Уравнение изогнутой оси в этом случае описывается уравнением:

$$V = C_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l} \right).$$

г) *Влияние упругого защемления на устойчивость сжатой колонны.* Рассмотрим сжатую стойку (колонну), нижний конец которой при $z=0$ упруго защемлён (рис. 9.19). Мысленно рассечём узел и заменим упругую связь пружиной. Граничные условиями задачи будут:

$$\begin{cases} V(0) = 0, M = -EJV''(0) = -m, \\ M = -EJV''(l) = 0, Q = -PC_3 = 0. \end{cases}$$

Поскольку момент m заранее неизвестен, то следует дополнить условие совместности деформирования стержня и балки в узле при $z=0$. Это дополнительное граничное условие имеет вид

$$V'(l) = \theta_0 = \frac{ma}{3(EJ)_{балки}},$$

где угол θ_0 найден из решения задачи об изгибе балки с помощью формулы Мора.

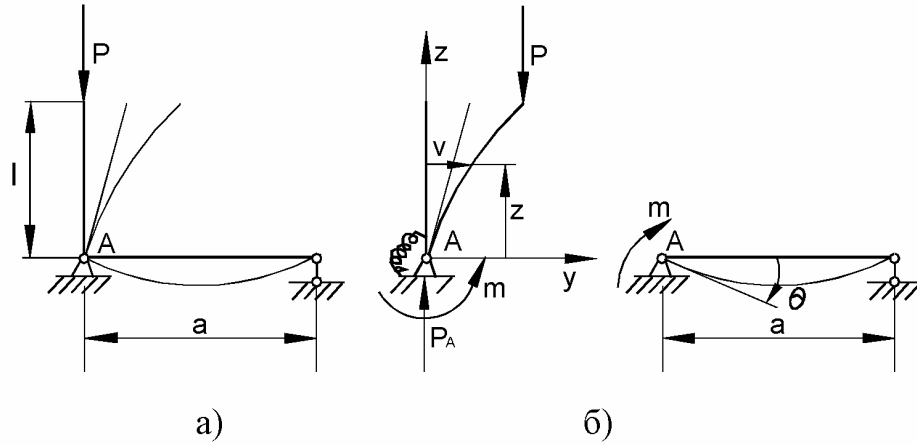


Рис. 9.19

Удовлетворяя теперь решение (9.24) граничным условиям, находим:

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0, EJk^2 C_2 = -m, \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0, C_3 = 0, \\ kC_1 + C_3 = \theta_0 = \frac{ma}{3(EJ)_{балки}}. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$C_1 = \frac{m}{P} \operatorname{ctg} kl, C_2 = -\frac{m}{P}, C_3 = 0, C_4 = \frac{m}{P}, C_1 = \frac{ma}{3kEJ_{балки}},$$

откуда следует:

$$kl \operatorname{tg} kl = 3 \frac{l}{a} \frac{(EJ)_{балки}}{EJ}.$$

Если стержень жёстко зашкремлён при $z = 0$, то

$$(EJ)_{балки} \rightarrow \infty, \operatorname{tg} kl \rightarrow \infty, kl = \pi / 2, \text{ что с учётом } k^2 = P / EJ$$

приводит к выражению критической силы Эйлера:

$$P_{KP} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2} = 2,47 \frac{EJ}{l^2}.$$

Пусть $(EJ)_{балки} = EJ, l = a$. Тогда $kl \operatorname{tg} kl = 3$ и наименьшее значение корня этого трансцендентного уравнения $kl = 1,192$. С учётом $k^2 = P / EJ$ получаем выражение критической силы для упругозашкремлённого стержня при частных соотношениях геометрических параметров:

$$P_* = 1,42 \frac{EJ}{l^2},$$

что в 1,74 раза меньше критической нагрузки при жёстком защемлении. Таким образом, упругое защемление концов стержня снижает критическое значение сжимающей силы.

9.6. Пределы применимости формулы Эйлера

Формулы Эйлера (9.33), (9.34) получены в предположении упругого поведения материала, т.е. при условии:

$$\sigma = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{мц}}, \quad (9.45)$$

где $\sigma_{\text{мц}}$ - предел пропорциональности.

При $\sigma = \sigma_{\text{мц}}$ из (9.45) получаем предельное значение гибкости:

$$\lambda_* = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{мц}}}}, \quad (9.46)$$

разделяющей области упругой ($\lambda \geq \lambda_*$) и неупругой ($\lambda \leq \lambda_*$) потерь устойчивости стержня. Для малоуглеродистой стали

$\sigma_{\text{мц}} = 200 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{т}} = 240 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5$, получаем:

$$\lambda_* = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Для алюминиевого сплава Д16Т (дюраль)

$\sigma_{\text{мц}} = 200 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{т}} = 240 \text{ МПа}$; $E = 0,75 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, находим: $\lambda_* = 62$.

На практике часто элементы конструкций оказываются недостаточно гибкими и $\lambda < \lambda_*$. В этих случаях формула Эйлера даёт неверные, завышенные, результаты. Впервые это обнаружил Ходкинсон (Англия) в своих опытах по продольному изгибу сжатых колонн в 1840г. Формула Эйлера подтверждалась для гибких стержней и обнаруживала значительные отклонения для коротких стержней.

Е. Ламарль (Бельгия) в 1845г. первым установил границу применимости формулы Эйлера. Он предложил для стержней малой гибкости λ принять критическое напряжение $\sigma_{\text{кр}}$, равным пределу текучести $\sigma_{\text{т}}$. В дальнейшем теория устойчивости Эйлера подверглась проверке в опытах И. Боушингера (1887г.), Л. Тетмайера и М. Консидера (1890-1896гг.)

В 1889г. Ф. Энгессер (Германия) предложил вычислить критическое напряжение по формуле Эйлера с заменой модуля упругости E на касательный

$$\text{модуль } E_K, \quad \sigma_t = \frac{\pi^2 E_K}{\lambda^2} \quad (9.47)$$

Напряжение, вычисляемое по формуле (9.47), называют критическим касательно-модульным напряжением Ф. Энгессера. Соответствующая формула для касательно-модульной нагрузки имеет вид:

$$P_t = \frac{\pi^2 E_K J}{(\mu l)^2} \quad (9.48)$$

Для построения диаграммы критических напряжений формулу (9.48) следует записать в виде:

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E_K(\sigma_t)}{\sigma_t}} \quad (9.49)$$

Обрабатывая диаграмму сжатия $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, можно найти зависимость $E_k = E_k(\sigma)$. Тогда для каждого σ правая часть в (9.49) вычисляется и поэтому становится известной гибкость λ .

На рис. 9.20 представлены диаграммы сжатия и критических напряжений.

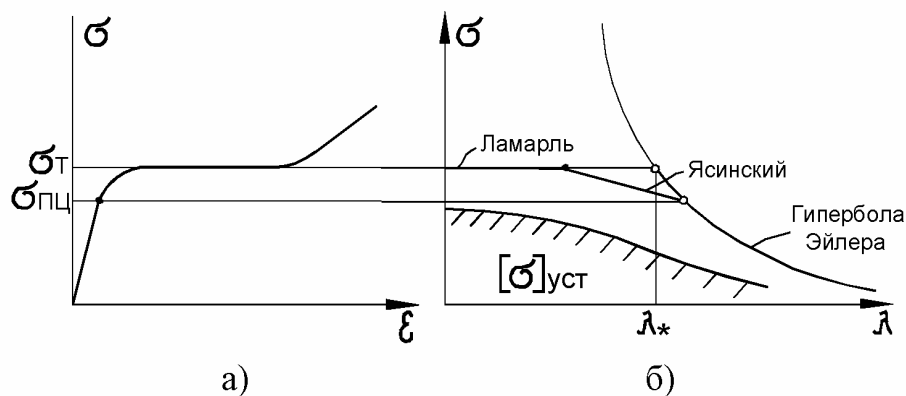


Рис. 9.20

В 1895г. Л. Тетмайер и Ф. Ясинский на основе анализа экспериментальных данных предложили для вычисления критических напряжений эмпирическую линейную формулу

$$\sigma_{кр} = \begin{cases} \sigma_T, & (\lambda \leq \lambda_T), \\ a - b\lambda, & (\lambda_T \leq \lambda \leq \lambda_*), \end{cases} \quad (9.50)$$

где λ_T - наибольшее значение гибкости для которой ещё можно считать $\sigma_{кр} = \sigma_T$.

Полагая в (9.50) $\sigma_{кр} = \sigma_T, \lambda = \lambda_T$ и $\sigma_{кр} = \sigma_{пл}, \lambda = \lambda_*$ получаем:

$$\sigma_T = a - b\lambda_T, \sigma_{пл} = a - b\lambda_*,$$

откуда находим формулу для выражения коэффициентов:

$$a' = \frac{\sigma_T \lambda_* - \sigma_{пл} \lambda_T}{\lambda_* - \lambda_T}, b = \frac{\sigma_T - \sigma_{пл}}{\lambda_* - \lambda_T}. \quad (9.51)$$

На основании (9.51) ниже составлена таблица значений коэффициентов a, b для некоторых материалов.

Таблица 9.1. Таблица значений коэффициентов a, b для некоторых материалов

Материал	$E \cdot 10^5$ мПа	$\sigma_{пл}$ мПа	σ_T мПа	$\sigma_{всж}$ мПа	λ_*	λ_T, λ_B	a мПа	b мПа
Сталь мало- углеродистая	2	200	240	-	100	40	266,7	2/3
Сплав Д16Т (дюраль)	0,75	200	-	400	62	0	400	3,33
Сталь 30ХГСА (хромансил)	2,1	750	-	1100	52,6	0	1100	6,65
Сталь 45	2	260	300	-	87	30	321	0,7
Дерево (сосна)	0,1	10	-	20	70	0	30	0,2

Джонсон для материалов с площадкой текучести предложил для критического напряжения параболическую формулу:

$$\sigma_{кр} = A - B\lambda^2. \quad (9.52)$$

Постоянные A, B определяются из условий $\sigma_{кр} = \sigma_T$ при $\lambda = 0$, $\sigma_{кр} = \sigma_{пл}$ при $\lambda = \lambda_*$. Используя эти условия, находим:

$$A = \sigma_T, \quad B = \frac{\sigma_T - \sigma_{пл}}{\lambda_*^2}.$$

После подстановки этих значений A, B в (9.52) получаем:

$$\sigma_{кр} = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{пл}) \left(\frac{\lambda}{\lambda_*} \right)^2 \quad (9.53)$$

Как видно, для построения диаграммы критических напряжений $\sigma_{кр} - \lambda$ достаточно знать всего две механические характеристики материала $\sigma_{кр}, \sigma_T$.

Формулу (9.53) можно записать в виде

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E_{дж}}{\lambda^2}, \quad (9.54)$$

где

$$E_{дж} = E \frac{\sigma(\sigma_T - \sigma)}{\sigma_{пл}(\sigma_T - \sigma_{пл})} \quad (9.55)$$

эмпирический модуль Джонсона. Для его вычисления необходимо знать лишь $\sigma_{пл}$ и σ_T . Формула (9.54) записана в форме (9.47). Поэтому на модуль (9.55) можно смотреть как на приближённую аппроксимацию касательного модуля $E_K \approx E_{дж}$.

9.7. Практический инженерный метод расчёта на устойчивость Ф. Ясинского

Рассмотрим две простейшие стержневые системы (рис. 9.21).

Узел A в обоих примерах испытывает одинаковое по модулю воздействие реактивных сил. Однако условия работы среднего стержня 2 будут различны. В схеме на рис. 9.21,а все стержни работают на растяжение, и мы должны потребовать выполнения условия прочности для растягивающих напряжений:

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = \frac{N_2}{F} \leq [\sigma]_P.$$

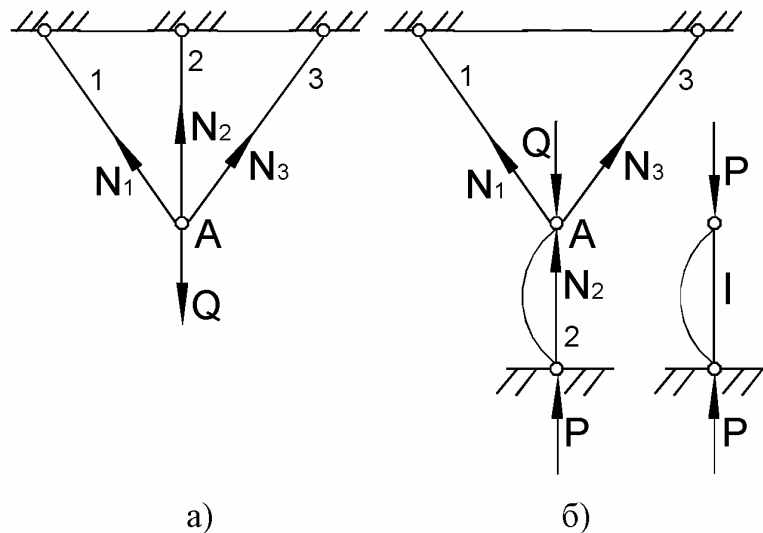


Рис. 9.21

Во втором случае на рис. 9.21,б средний стержень 2 работает на сжатие, а два других - на растяжение, и мы кроме условия прочности на растяжение должны обеспечить условие прочности на сжатие:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_2|}{F} \leq [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Однако этого недостаточно, т.к. сжатый стержень может потерять устойчивость. Поэтому мы должны потребовать выполнения условия устойчивости:

$$\sigma_{\max} = |\sigma_2| = \frac{|N_2|}{F} \leq [\sigma]_{\text{уст}}$$

Ф. Ясинский ввёл понятие коэффициента продольного изгиба (снижения основного допускаемого напряжения):

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{\text{кр}}}{[\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{уст}}} \frac{n_t}{\sigma_t} \quad (9.56)$$

и записал условие устойчивости в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_{\text{сж}}. \quad (9.57)$$

или

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\varphi F} \leq [\sigma]_{\text{сж}}.$$

где $\sigma_{\text{расч}}$ называют расчётным напряжением.

Поначалу Ф. Ясинский считал $n_{уст} = n_T$. Тогда: $\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T}$.

Для $\lambda \geq \lambda_*$ имеет место формула Эйлера и условие для предельной гибкости:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad \lambda_*^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{мц}}.$$

откуда следует

$$\sigma_{кр} = \sigma_{мц} \left(\frac{\lambda_*}{\lambda} \right)^2.$$

Тогда для коэффициента продольного изгиба получаем:

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T} = \frac{\sigma_{мц}}{\sigma_T} \left(\frac{\lambda_*}{\lambda} \right)^2, (\lambda \geq \lambda_*).$$

Следовательно, коэффициент φ изменяется в зависимости от λ по закону гиперболы.

Для $\lambda \leq \lambda_*$ воспользуемся формулой касательного модуля либо её аппроксимацией в форме Джонсона:

$$\sigma_{кр} = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{мц}) \left(\frac{\lambda}{\lambda_*} \right)^2,$$

для коэффициента φ получаем формулу

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T} = 1 - \left(1 - \frac{\sigma_{мц}}{\sigma_T} \right) \left(\frac{\lambda}{\lambda_*} \right)^2, (0 \leq \lambda \leq \lambda_*),$$

из которой видно, что λ изменяется по закону параболы.

На рис. 9.22 представлен график φ от λ для стали 3

($\sigma_{мц} = 200 \text{ МПа}$, $\sigma_0 = 240 \text{ МПа}$). В этом случае $\frac{\sigma_{мц}}{\sigma_T} = \frac{5}{6} = 0,833$. В

последствии в СНиПе было уточнено отношение коэффициентов запаса $n_T / n_{уст}$, и расчёт стал производиться по формуле (9.56):

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T} \left(\frac{n_T}{n_{уст}} \right).$$

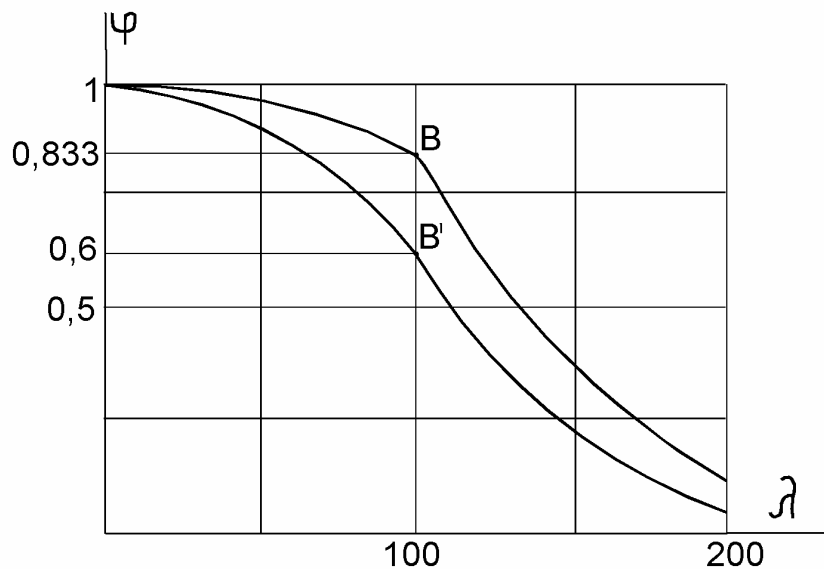


Рис. 9.22

Для стали обычно $n_T = 1,5$. Коэффициент запаса на устойчивость для $\lambda > \lambda_*$ принимается постоянным: $n_{уст} = 2 \div 2,08$. При $\lambda = 0$ $n_{уст} = n_T = 1,5$. Точка В, в которой $\varphi = 0,833$, снижается до значения

$$\varphi = \frac{5}{6} \left(\frac{3}{2 \cdot 2,08} \right) = 0,6,$$

что отмечено на рис. 9.22 в точке В'.

Для стержней из дерева в СНиПе рекомендуется формула

$$\varphi = 1 - 0,8 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2, (\lambda \leq 70),$$

$$\varphi = \frac{3000}{\lambda^2}, (\lambda \geq 70).$$

Для сосны $\sigma_{пл} = 20 \text{ МПа}$, $\sigma_{тсж} = 30 \text{ МПа}$, $E = 0,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

$$\lambda_* = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пл}}} = \pi \sqrt{\frac{0,1 \cdot 10^5}{20}} \approx 70.$$

Для коэффициента продольного изгиба составлены таблицы. Ниже приведена такая таблица для ряда материалов (табл. 9.2).

Различают три типа расчёта на устойчивость: проверочный, определение допускаемой силы и проектный расчёт. При проверочном расчёте известны действующая сила P , размеры стержня l, F , допускаемое напря-

жение на сжатие $[\sigma]_{сж}$, способ закрепления стержня, т.е. коэффициент μ . Вычисляется гибкость стержня $\lambda = \mu l / i_{\min}$ и по таблице коэффициентов φ для данного материала находится сам коэффициент $\varphi(\lambda)$. При этом допускается линейная интерполяция λ , если она не кратна десяти. Затем производится проверка выполнения расчётной формулы (9.57) на устойчивость:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\varphi F} \leq [\sigma]_{сж}.$$

При проектном расчёте заданы сила P , длина стержня l , коэффициент приведения длины μ , $[\sigma]_{сж}$. Неизвестными остаются площадь сечения F и коэффициент продольного изгиба $\varphi(\lambda)$. Поэтому расчёт может быть выполнен только методом последовательных приближений в таком порядке: задаются каким либо значением коэффициента φ , например $\varphi_1 = 0,5$; рассчитывают по нему требуемую площадь $F_1 = P / \varphi [\sigma]_{сж}$. Затем рассчитывается момент инерции $J_{\min}$, радиус инерции $i_{\min}$, уточняется площадь F_1 , вычисляется гибкость $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ и по таблице находится соответствующий коэффициент φ'_1 . После этого рассчитывается расчётное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\varphi'_1 F} \leq [\sigma]_{сж}.$$

Если разница между расчётным и допускаемым напряжением $[\sigma]_{сж}$ более 5%, то рассматривается второе приближение с новым значением коэффициента:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi'_1)$$

и расчёт повторяется в указанном выше порядке до тех пор пока разница между $\sigma_{\max}$ и $[\sigma]_{сж}$ станет не более $\pm 5\%$.

Таблица 9.2. Коэффициенты продольного изгиба

λ	Сталь 3,4	Сталь 5	Сталь 15ХСНД	Сплав Д16Т	Чугун	Железо-бетон	Дерево (сосна)
0	1	1	1	1	1	1	1
10	0,99	0,98	0,98	1	0,96	1	0,99
20	0,97	0,95	0,95	1	0,91	1	0,99
30	0,95	0,92	0,93	0,84	0,81	1	0,93
40	0,92	0,89	0,90	0,70	0,69	1	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,57	1	0,80
60	0,86	0,82	0,78	0,46	0,44	0,83	0,71
70	0,81	0,76	0,71	0,35	0,34	0,73	0,61
80	0,75	0,70	0,63	0,27	0,26	0,64	0,49
90	0,69	0,62	0,54	0,21	0,20	0,57	0,38
100	0,60	0,51	0,45	0,17	0,16	0,52	0,31
110	0,52	0,43	0,39	0,14	-	-	0,25
120	0,45	0,38	0,33	0,12	-	-	0,22
130	0,40	0,32	0,29	0,10	-	-	0,18
140	0,36	0,28	0,26	0,087	-	-	0,16
150	0,32	0,26	0,23	0,076	-	-	0,14
160	0,29	0,24	0,21	-	-	-	0,12
170	0,26	0,21	0,19	-	-	-	0,11
180	0,23	0,19	0,17	-	-	-	0,10
190	0,21	0,17	0,15	-	-	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	-	-	0,08

Пример 1. Стальной стержень длиной $l = 4\text{ м}$ двутаврового сечения №18, шарнирно закреплённый на одном и жёстко на другом краях, сжимается силами P . Требуется определить допускаемое и критическое значения силы P , если $[\sigma]_{сж} = 160\text{ МПа}$, $\sigma_{нч} = 200\text{ МПа}$, $\sigma_T = 240\text{ МПа}$.

Решение. Из сортамента стального проката для двутавра №18 находим $F = 23,4\text{ см}^2$, $i_{\min} = i_y = 1,88\text{ см}$, $J_{\min} = J_y = 82,6\text{ см}^4$. Коэффициент приведения длины Ясинского для данного типа закрепления $\mu = 0,7$, гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = 149$.

Так как $\lambda > \lambda_* = 100$, то критическая сила может быть определена по формуле Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 82,6 \cdot 10^{-6}}{(0,7 \cdot 4)^2} = 208 \text{ кН}.$$

По таблице коэффициентов φ после интерполяции находим $\varphi_1 = 0,333$. Вычисляем допускаемое значение внешней силы:

$$P_{доп} = \varphi[\sigma]_{сж} F = 0,333 \cdot 160 \cdot 10^3 \cdot 0,00234 = 124,7 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса на устойчивость $n_{уст} = \frac{P_{кр}}{P_{доп}} = 1,67$.

Если принять длину $l = 2 \text{ м}$, то $\lambda = 74,5 < \lambda_* = 100$. В этом случае для определения критической силы использовать формулу Эйлера нельзя. Воспользуемся формулой Джонсона:

$$P_{кр} = \left[\sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{мц}) \left(\frac{\lambda}{\lambda_*} \right)^2 \right] F = [240 - 40 \cdot 0,745^2] \cdot 10^3 \cdot 23,4 \cdot 10^{-4} = 509,6 \text{ кН}.$$

Допустимая нагрузка:

$$P_{доп} = \varphi[\sigma]_{сж} F = 0,76 \cdot 160 \cdot 10^3 \cdot 0,00234 = 284,5 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса $n_{уст} = \frac{P_{кр}}{P_{доп}} = 1,67$.

Если воспользоваться формулой Ясинского, то

$$P_{кр} = (a - b\lambda)F = [266,7 - 0,667 \cdot 74,5] \cdot 10^3 \cdot 23,4 \cdot 10^{-4} = 507,8 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса: $n_{уст} = \frac{P_{кр}}{P_{доп}} = 1,785$.

Пример 2. Подобрать размеры круглого поперечного сечения стержня длиной $l = 3 \text{ м}$ из дерева (сосна), нагруженного силой $P = 100 \text{ кН}$, если $[\sigma]_{сж} = 15 \text{ МПа}$. Один конец стержня жёстко закреплён, а другой свободен от закрепления ($\mu = 2$).

Решение. Условия устойчивости записываем в виде

$$F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]_{сж}}.$$

Подбор диаметра D сечения производим методом последовательных приближений.

Первое приближение. Принимаем $\varphi = \varphi_1 = 0,5$. Тогда:

$$F_1 = \frac{100 \text{ кН}}{0,5 \cdot 15 \cdot 10^3 \text{ кН} / \text{см}^2} = 0,0133 \text{ м}^2 = 1,33 \text{ см}^2.$$

Так как $F = \frac{\pi D^2}{4}$, то $D_1 = 2\sqrt{\frac{F_1}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{0,0133}{\pi}} = 0,1301 \text{ м} \approx 13 \text{ см}.$

Подбор диаметра ведём с точностью до целого см. Для найденного диаметра $D = 13\text{см}$ находим:

$$F = \frac{\pi D^4}{4} = 1,327 \text{ см}^2, \quad J = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi \cdot 13^4}{64} = 1402 \text{ см}^4, \quad i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{1402}{1,327}} = 32,5 \text{ см}.$$

$$\text{Находим гибкость } \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 3}{0,0325} = 184,8. \text{ По таблице коэффициентов } \varphi \text{ с учё-}$$

том интерполирования находим $\varphi_1' = 0,095$.

Вычисляем:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\varphi_1' F_1} = \frac{100}{0,095 \cdot 0,01327} = 79324 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \approx 79,3 \text{ МПа}.$$

Сравнивая $\sigma_{\max}$ с $[\sigma]_{\text{сж}} = 15 \text{ МПа}$, видим, что в стержне будет перенапряжение в $\sigma_{\max} / [\sigma]_{\text{сж}} = 5,29 \text{ раз}$ или на 429%. Поэтому следует рассмотреть второе приближение.

Второе приближение. Задаёмся новым значением:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,095}{2} = 0,297.$$

Находим

$$F_2 = \frac{P}{\varphi_2 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{100}{0,297 \cdot 15 \cdot 10^3} = 0,0224 \text{ м}^2 = 2,24 \text{ см}^2.$$

Диаметр $D = 2\sqrt{F/\pi} = 2\sqrt{0,0224/\pi} = 0,1689 \text{ м} \approx 17 \text{ см}$. Далее после округления размера диаметра до целых значений см вычисляем:

$$F_2 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,17^2}{4} = 0,0227 \text{ м}^2 = 7854 \text{ см}^4, \quad J = \frac{\pi D^4}{64} = 0,000041 \text{ м}^4,$$

$$i = \sqrt{J/F} = 4,28 \text{ см}, \quad \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \cdot 3}{0,0428} = 140.$$

По таблице находим $\varphi_2' = 0,6$ и рассчитываем:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\varphi_2' F_2} = \frac{100}{0,6 \cdot 0,0227} = 27533 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \approx 27,5 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение составляет $\sigma_{\max} / [\sigma]_{\text{сж}} = 1,83$, т.е. 83%. Поэтому необходимо рассмотреть третье приближение.

Третье приближение. Принимаем

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,297 + 0,6}{2} = 0,4485.$$

Вычисляем:

$$F_3 = \frac{P}{\varphi_3 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{100}{0,4485 \cdot 15 \cdot 10^3} = 0,02924 \text{ м}^2 = 2,924 \text{ см}^2.$$

Находим диаметр

$$D_3 = 2\sqrt{\frac{F_3}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{0,02924}{\pi}} = 0,1929 \text{ м} \approx 19,3 \text{ см}.$$

Округляем диаметр до целых значений см и получаем $D_3 = 20$ см. Корректируем новую площадь:

$$F_3 = \frac{\pi D^4}{4} = \frac{\pi \cdot 0,2^4}{4} = 0,0342 \text{ м}^2.$$

Вычисляем:

$$J = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi \cdot 0,2^4}{64} = 0,00007854 \text{ м}^4 = 7854 \text{ см}^4, i = \sqrt{\frac{J}{F}} = 0,0518 \text{ см},$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \cdot 3}{0,0518} = 115,8.$$

По таблице 9.2 для φ находим с учётом интерполяции $\varphi'_3 = 0,23$. Расчётное сопротивление:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\varphi'_3 F_3} = \frac{100}{0,23 \cdot 0,0342} = 13838 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \approx 13,84 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение $\sigma_{\max} / \sigma_{сж} = 0,923$, т.е. 7,7%.

На этом расчёт можно прекратить и принять размер диаметра $D = 20$ см.

9.8. Задача Энгессера об устойчивости сжатого стержня из нелинейно - упругого материала

В 1889 г. Ф. Энгессер (Германия) предложил расширить область применения формулы Эйлера путём введения вместо упругого модуля E переменного касательного модуля E_K :

$$P_t = \frac{\pi^2 E_K J}{(\mu l)^2}. \quad (9.58)$$

Формула (9.58) носит название формулы Энгессера для касательно-модульной нагрузки. Ошибка Энгессера состояла в том, что он не учёл за пределом упругости различие законов нагрузки и разгрузки, потому получил формулу бифуркационной нагрузки для нелинейно - упругого тела. Свою ошибку он понял в 1895 году после критического замечания Ф. Ясинского. При изгибе стержня под действием продольной силы P возникает дополнительная деформация продольного волокна AB на расстоянии y (рис. 9.24,б), равная:

$$d\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}.$$

Так как $\frac{1}{\rho} = \frac{-d^2 V}{dz^2}$, то имеем:

$$d\varepsilon = -y \frac{d^2 V}{dz^2}.$$

Согласно рис. 9.23, в произвольной точке М диаграммы нелинейно-упругого тела догрузка и разгрузка происходят по одному и тому же закону:

$$d\sigma = E_K d\varepsilon = -E_K y \frac{d^2 V}{dz^2}. \quad (9.59)$$

Изгибающий момент М, возникающий в результате выпучивания стержня:

$$M = \int_F (\sigma + d\sigma) y dF = \sigma \int_F y dF + \int_F d\sigma_y dF.$$

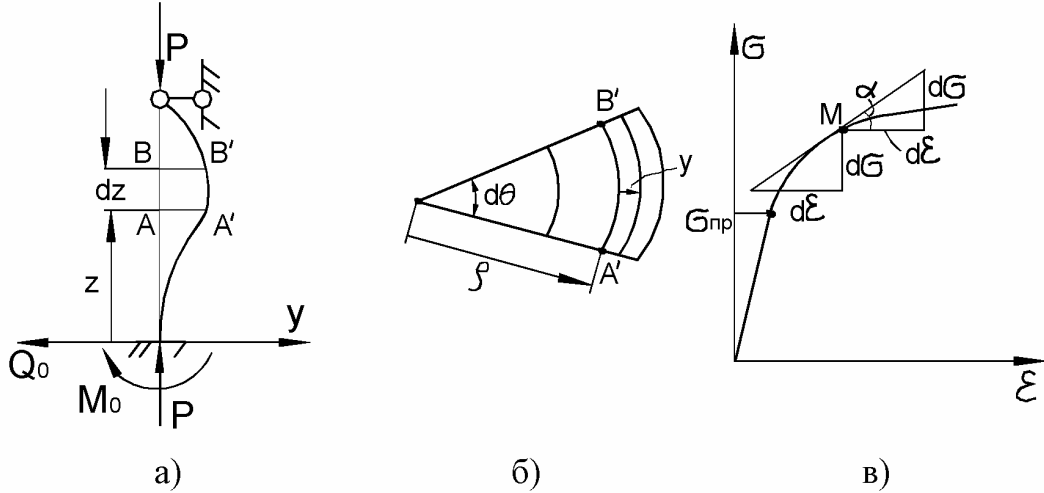


Рис. 9.23

Подставляя вместо $d\sigma$ его выражение (9.59), находим:

$$M = -E_K J_X \frac{d^2 V}{dz^2}.$$

С другой стороны, из условия равновесия отсечённой части стержня имеем:

$$M = M_0 + Q_0 z + P V.$$

Приравняв моменты, получаем:

$$E_K J_X \frac{d^2 V}{dz^2} + P V = -M_0 - Q_0 z.$$

Дифференцируя дважды, получаем:

$$E_K J \frac{d^3 V}{dz^3} + P \frac{dV}{dz} = -Q_0 = -Q,$$

$$E_K J \frac{d^4 V}{dz^4} + P \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

или

$$\frac{d^4 V}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 V}{dz^2} = 0, \quad (9.60)$$

где

$$k^2 = \frac{P}{E_K J_x}. \quad (9.61)$$

Уравнение (9.60) в точности совпадает с (9.27) для упругого стержня. Отличие задачи состоит лишь в том, что выражение (9.61) для k^2 иное, чем (9.26) в линейно-упругом случае.

Общее решение уравнения (9.60) имеет вид

$$V = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 z + C_4. \quad (9.62)$$

Дальнейший ход решения конкретных задач ничем не отличается от задачи Эйлера. Из (9.55) находим формулу (9.58) Энгессера:

$$P_t = k^2 E_K J_x = \frac{\pi^2 E_K J_x}{(\mu l)^2}.$$

Для бифуркационного значения напряжения по Энгессеру имеем:

$$\sigma_t = \frac{\pi^2 E_K}{\lambda^2}, \quad (9.63)$$

откуда

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E_K(\sigma_t)}{\sigma_t}}. \quad (9.64)$$

Задавая значение σ_t из (9.64), вычисляем гибкость λ и строим диаграмму критических, а точнее бифуркационных значений напряжений (рис. 9.24).

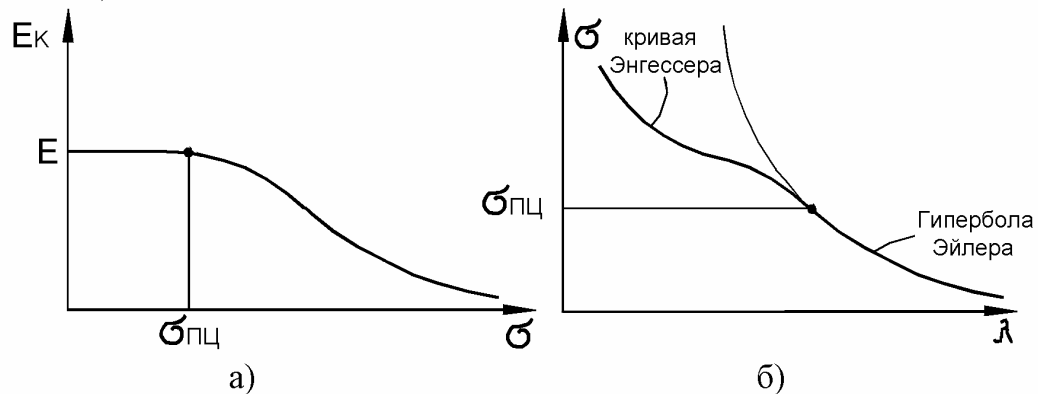


Рис. 9.24

9.9. Устойчивость сжатого стержня за пределом упругости.

Формула Кармана

Теория устойчивости сжатого стержня за пределом упругости окончательно была построена Т. Карманом (Германия) в 1910 году. Он учёл, что нагрузка на вогнутой стороне стержня и разгрузка на выпуклой стороне при выпучивании происходят по различным законам (рис. 9.25):

- при догрузке $d\sigma = E_K d\varepsilon, (d\varepsilon > 0)$;
- при разгрузке $d\sigma = E d\varepsilon, (d\varepsilon < 0)$.

Нейтральная ось дополнительных деформаций не совпадает с центральной осью, как при упругом изгибе, и определяется координатой y_p . Поэтому представим их в виде:

$$d\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{y}{\rho} = \varepsilon_0 - y \frac{d^2 V}{dz^2}. \quad (9.65)$$

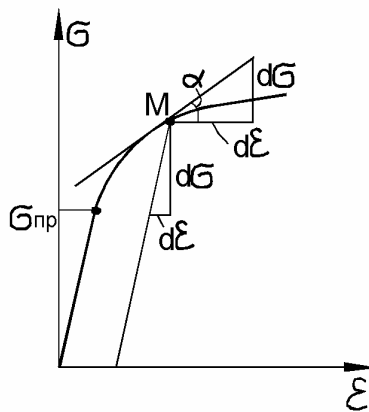
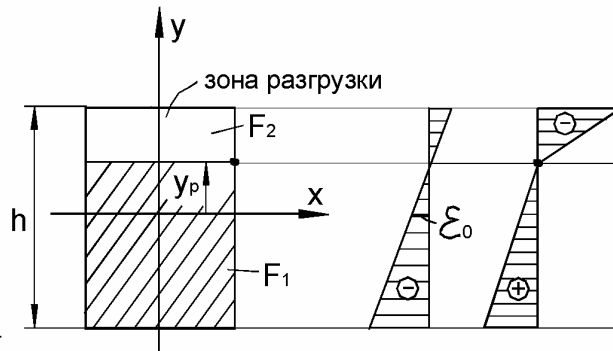


Рис. 9.25



Эп. $d\varepsilon$ Эп. $d\sigma$
Рис. 9.26

Величина y_p даёт границу зон пластической догрузки и упругой разгрузки с площадями F_1 и F_2 соответственно. На границе раздела зон y_p имеем:

$$d\varepsilon = \varepsilon_0 - y_p \frac{d^2 V}{dz^2} = 0,$$

откуда следует:

$$\varepsilon_0 = y_p \frac{d^2 V}{dz^2}.$$

Следовательно, выражение (9.65) можно записать в виде

$$d\varepsilon = \frac{d^2V}{dz^2}(y_P - y). \quad (9.66)$$

Вычислим с учётом (9.65) дополнительные нормальную силу dN и момент M , возникающие при выпучивании стержня по методу проб Эйлера – Кармана – Зубчанинова:

$$\begin{cases} dN = \int_F d\sigma dF = \int_F E_K \frac{d^2V}{dz^2}(y_P - y)dF + \int_F E \frac{d^2V}{dz^2}(y_P - y)dF, \\ M = \int_F d\sigma \cdot y dF = \int_{F_1} E_K \frac{d^2V}{dz^2}(y_P - y)y dF + \int_{F_2} E \frac{d^2V}{dz^2}(y_P - y)y dF, \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} dN = \frac{d^2V}{dz^2} [E_K(y_P F_1 - S_1) + E(y_P F_2 - S_2)], \\ M = \frac{d^2V}{dz^2} [E_K(y_P S_1 - J_1) + E(y_P S_2 - J_2)], \end{cases} \quad (9.67)$$

где

$$S_1 = \int_{F_1} y dF, S_2 = \int_{F_2} y dF, J_1 = \int_{F_1} y^2 dF, J_2 = \int_{F_2} y^2 dF.$$

Так как

$$S = S_1 + S_2 = 0, F = F_1 + F_2, J = J_1 + J_2,$$

то, исключая F_1, S_1, J_1 , соотношения (9.67) приведём к виду:

$$\begin{cases} dN = -A \frac{d^2V}{dz^2}, \\ M = -D \frac{d^2V}{dz^2}, \end{cases} \quad (9.68)$$

где

$$\begin{cases} A = (E - E_K)(S_2 - y_P F_2) - E_K F \cdot y_P, \\ D = KJ, \\ K = \frac{E_K J + (E - E_K)(J_2 - y_P S_2)}{J}. \end{cases} \quad (9.69)$$

Величина K называется приведённым модулем Кармана – Ильюшина. С другой стороны, из уравнений равновесия отсечённой части стержня (рис. 9.16,б) имеем:

$$\begin{cases} N = -P, Q = Q_0, dN = -dP, \\ M = M_0 + Q_0 z + PV. \end{cases} \quad (9.70)$$

Сравнивая (6.66), (9.70), получим:

$$A = \frac{dP}{d^2 V / dz^2}, \quad (9.71)$$

$$D \frac{d^2 V}{dz^2} + PV = -M_0 - Q_0 z. \quad (9.72)$$

Дифференцируя дважды уравнение (9.72), находим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(D \frac{d^2 V}{dz^2} \right) + P \frac{dV}{dz} &= -Q_0 = -Q, \\ \frac{d^2}{dz^2} \left(D \frac{d^2 V}{dz^2} \right) + P \frac{d^2 V}{dz^2} &= 0. \end{aligned} \quad (9.73)$$

Применяя к исследованию устойчивости стержня метод проб, будем считать $dP = 0$ при сколь угодно малом выпучивании стержня. Тогда из (9.68), (9.71) следует уравнение

$$A = (E - E_K) (S_2 - y_P F_2) - E_K F y_P = 0, \quad (9.74)$$

из которого можно найти границу раздела зон $y_P = -C = \text{const}$. При этом изгибная жёсткость $D = kJ$ также будет постоянной величиной. Дифференциальное уравнение (9.73) может быть записано в виде:

$$\frac{d^4 V}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 V}{dz^2} = 0, \quad (9.75)$$

где

$$k^2 = \frac{P}{KJ}. \quad (9.76)$$

Таким образом, задача о потере устойчивости за пределом упругости свелась к решению уравнения (9.75), которое совпадает с уравнением (9.27) для упругой задачи Эйлера. Отличие задач заключается в различии выражений (9.27) и (9.76) для величины K^2 . Поэтому формула для нагрузки бифуркации за пределом упругости может быть получена из формулы Эйлера (9.33) простой заменой модуля E на приведённый модуль K :

$$P_K = \frac{\pi^2 KJ}{(\mu l)^2}. \quad (9.77)$$

Формула (9.77) определяет бифуркационную нагрузку Кармана. Её также называют приведенно-модульной нагрузкой. Формула для бифуркационного значения напряжения имеет вид:-

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 K}{\lambda^2}. \quad (9.78)$$

Так как K зависит от σ , то построение диаграммы бифуркационных значений напряжений σ_K производится так же, как и для задачи Энгессера. Формула (9.75) представляется в виде:

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{K(\sigma_k)}{\sigma_k}}. \quad (9.79)$$

Задавая σ_k , вычисляют $K(\sigma_k)$, а затем гибкость λ и строят диаграмму $\sigma_K \sim \lambda$. Вычислим приведённый модуль K для некоторых частных случаев поперечного сечения.

а) Рассмотрим случай идеализированного двутавра (рис. 9.27,а). Геометрические характеристики сечения:

$$F_1 = F_2 = \frac{F}{2}, S_2 = \frac{F}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{Fh}{4}, J_2 = \frac{F}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{Fh^2}{8}, J = \frac{Fh^2}{4}.$$

Уравнение (9.74) принимает вид

$$A = (E - E_K) \left(-\frac{Eh}{4} - y_P \frac{F}{2} \right) - E_K F \cdot y_P = 0,$$

откуда находим границу раздела зон:

$$y_P = -\frac{h}{2} \cdot \frac{E - E_K}{E + E_K}.$$

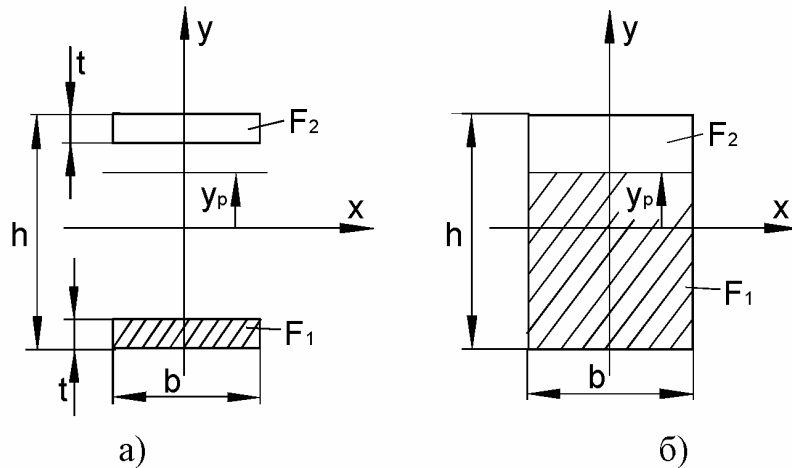


Рис. 9.27

Согласно соотношению (9.69) получим:

$$K = \frac{2EE_K}{E + E_K}. \quad (9.80)$$

б) В случае прямоугольного сечения (рис. 9.27,б)

$$\left\{ \begin{array}{l} F = bh, J = \frac{bh^3}{12}, F_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{y_p} b \cdot dy = b \left(y_p + \frac{h}{2} \right), \\ S_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{y_p} y \cdot b \cdot dy = \frac{b}{2} \left(y_p^2 - \frac{h^2}{4} \right), J_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b \cdot dy = \frac{b}{3} \left[y_p^3 + \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right]. \end{array} \right.$$

Уравнение (9.74) принимает вид

$$y_p^{*2} + 2 \frac{E + E_K}{E - E_K} y_p^* + 1 = 0,$$

откуда находим границу раздела зон:

$$y_p = - \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E_K}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_K}} \frac{h}{2}.$$

Приведённый модуль K , согласно (9.69), равен:

$$K = \frac{4EE_K}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_K})^2}. \quad (9.81)$$

Из (9.74), (9.80) видно, что приведённый модуль явно зависит от E , $E_K(\sigma)$. Поэтому при построении диаграммы критических (бифуркационных) напряжений сначала строятся зависимости F_K и K от σ . На основании диаграммы сжатия (рис. 9.28,а) находится касательный модуль E_K как функция напряжения σ , а затем по формулам (9.69), либо (9.80), (9.81) вычисляется приведённый модуль K . После этого по формуле (9.79) строится диаграмма критических напряжений σ_K .

Приведём более простой вывод формулы Кармана для приведенно-модульной критической силы. Обозначим радиус кривизны нейтрального слоя буквой γ в отличие от радиуса ρ оси стержня. Расстояние от нейтрального слоя до текущего волокна $\Delta y = y - y_p$, а перемещение точек этого слоя $\Delta V = V$.

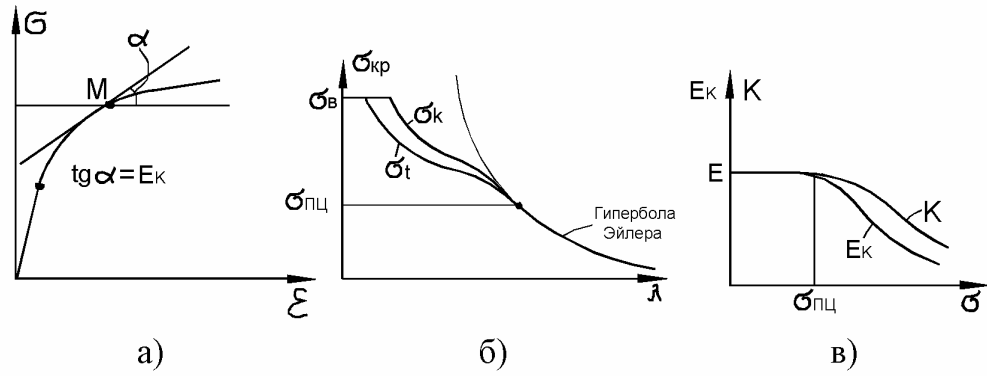


Рис. 9.28

Тогда дополнительные напряжения:

$$d\sigma = \begin{cases} E_K d\varepsilon = -E_K \Delta y V'', \\ E d\varepsilon = -E \Delta y V'', \end{cases}$$

где принято

$$d\varepsilon = -\Delta y \frac{d^2 V}{dz^2}.$$

Дополнительные нормальная сила и изгибающий момент:

$$\begin{cases} dN = \int_F d\sigma dF = -V'' \{E_K S_1 + E S_2\}, \\ dM = \int_F d\sigma \Delta y dF = -V'' \{E_K J_1 + E J_2\} = -K J V'', \end{cases} \quad (9.82)$$

где

$$S_1 = \int_{F_1} \Delta y dF, \quad S_2 = \int_{F_2} \Delta y dF, \quad J_1 = \int_{F_1} (\Delta y)^2 dF, \quad J_2 = \int_{F_2} (\Delta y)^2 dF -$$

статические моменты и моменты инерции площадей F_1, F_2 для зон пластической догрузки и упругой разгрузки; $J = J_1 + J_2$ – момент инерции всей фигуры относительно нейтральной оси,

$$K = \frac{E_K J_1 + E J_2}{J} - \quad (9.83)$$

приведённый модуль Кармана. Из уравнения равновесия отсечённой части потерявшего устойчивость стержня имеем:

$$dM = M_0 + Q_0 z + P V, \quad dN = -dP = 0.$$

Сравнивая с (9.82), получаем дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} KJ \frac{d^2 V}{dz^2} + PV = -M_0 - Q_0 z, \\ E_K S_1 + ES_2 = 0. \end{cases}$$

После двукратного дифференцирования первого уравнения получаем:

$$\frac{d^4 V}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 V}{dz^2} = 0, \quad E_K S_1 + ES_2 = 0, \quad (9.84)$$

где

$$k^2 = \frac{P}{KJ}. \quad (9.85)$$

Для случая идеализированного двутавра (рис. 9.27,а) второе уравнение (9.84) с учётом:

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = \frac{F}{2}, S_1 = -(1-\xi)h\frac{F}{2}, S_2 = \frac{\xi h F}{2}, J = \frac{Fh^4}{4}, \\ J_1 = (1-\xi)^2 h^2 F / 2, J_2 = \frac{\xi^2 h^2 F}{2}, \end{cases}$$

принимает вид

$$-E_K(1-\xi) + E\xi = 0,$$

откуда

$$\xi = \frac{E_K}{E + E_K}, \quad 1 - \xi = \frac{E}{E + E_K}.$$

Следовательно,

$$K = \frac{E_K J_1 + EJ_2}{J} = \frac{2EE_K}{E + E_K}.$$

Аналогично можно получить выражение приведённого модуля для стержней прямоугольного сечения.

Т. Карман не только создал теорию приведённого модуля, но и проверил её тщательно поставленными экспериментами. Опытные значения пределов устойчивости легли между кривыми, рассчитанными по теории приведённого модуля и теории продольного выпучивания сжатых стержней для эксцентриситета прикладываемых сжимающих сил, равно $0,005h$ где h – толщина прямоугольного поперечного сечения стержня.

Исследования Энгессера, Кармана, Ясинского по созданию теории устойчивости сжатых стержней за пределом упругости оставили глубокий след в истории её развития.

9.10. Устойчивость стержня в процессе нагружения за пределом упругости. Концепция Шенли

В 1946 году американский учёный Ф. Шенли пришёл к мысли о том, что теория приведённого модуля Кармана отвечает лишь частной теории стержня. Он показал на модельной задаче, что в процессе нагружения стержень начнёт изгибаться при касательно-модульной нагрузке Энгессера с разгрузкой на выпуклой стороне (рис. 9.29). При приближении сжимающей силы к приведённо-модульному значению прогиб f устремляется к бесконечности. Если учесть при этом возможность появления вторичных пластических деформаций на выпуклой стороне от растяжения, то приведенно-модульная нагрузка не будет достигнута и неустойчивость наступит в предельной точке при нагрузке P_m ($P_t < P_m < P_K$), называемой *пределом устойчивости*.

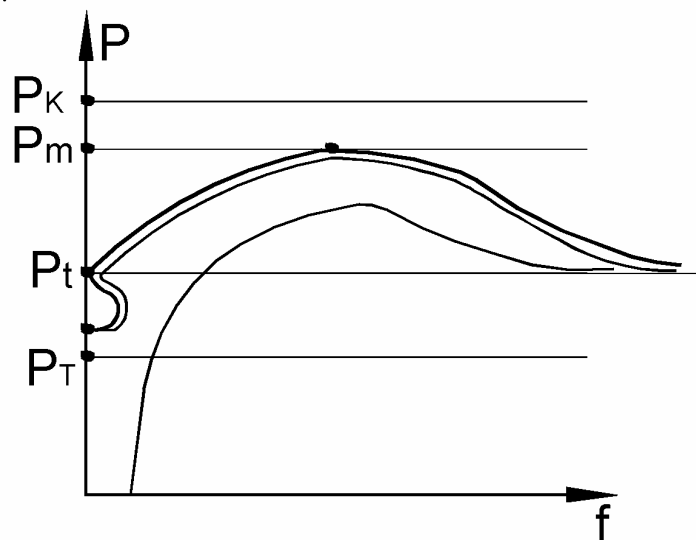


Рис. 9.29

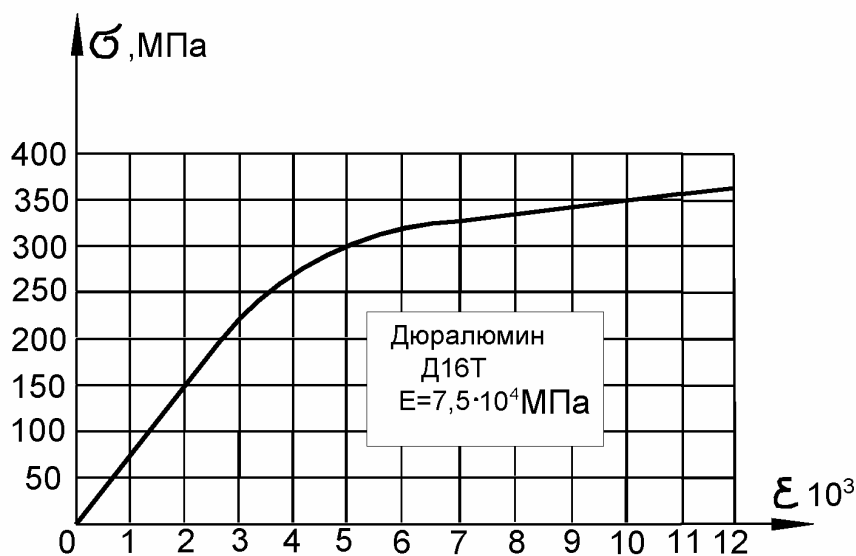
В.Г. Зубчаниновым в 1969 г. было показано, что если при некотором значении силы P_0 , меньшем касательно-модульного значения P_t , но большем значения $P_T = \sigma_T F$, соответствующего переходу стержня в пластическое состояние, стержень начнёт изгибаться под действием малой поперечной нагрузки q , действие которой прекращается раньше, чем сжимающая сила P достигает значения P_t , то изгиб стержня ликвидируется, если q достаточно мало, либо изгиб не ликвидируется, но стремится уменьшиться, если q недостаточно мало. В дальнейшем кривая процесса близка к процессу продолжающегося нагружения в смысле Шенли. Этим было доказано, что касательно-модульная нагрузка Энгессера – Шенли не является опасной для потери устойчивости, т.е. не является критической нагрузкой.

Ф. Шенли показал, что в процессе нагружения идеально прямого стержня он начинает изгибаться при достижении сжимающей силой касатель-но-модульной нагрузки. В этот момент происходит нарушение единствен-ности процесса деформирования, исключающее понятие неустойчивости , т.к. за этой бифуркацией решения не следует катастрофического развития перемещений, деформаций и напряжений. Неустойчивость наступает в предельной точке, называемой точкой бифуркации Пуанкаре. Соответствующую нагрузку, P_m мы называем пределом устойчивости. Нельзя путать эту нагрузку с нагрузкой истощения несущей способности конструкции вследствие образования пластических шарниров. Процесс выпучивания после достижения силой P значения предела устойчивости P_m называем послекри-тическим. Нагрузка P при увеличивающихся перемещениях падает до наг-рузки, которую мы назвали нагрузкой надёжности устойчивых состоя-ний P_n :

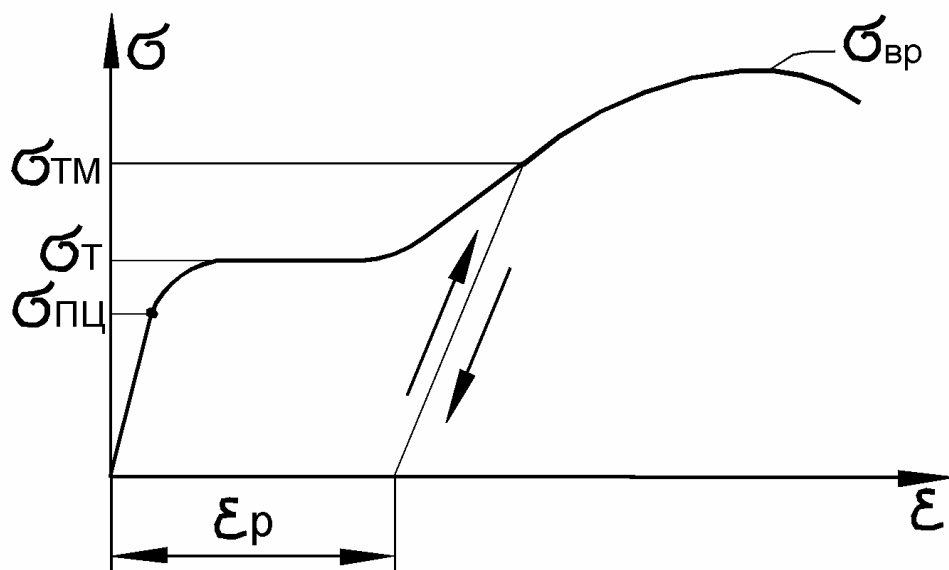
$$P_i = \frac{\pi^2 E_* J}{(\mu l)^2} = P_i^* . \quad (9.86)$$

где E_* - предельное значение касательного модуля на диаграмме сжатия.

На рисунках 9.30 – 9.31 приведены диаграммы сжатия для сплава дюр-алюминия Д16Т и стали 3 и диаграмма их критических напряжений. В таблицах даны результаты обработки этих диаграмм.

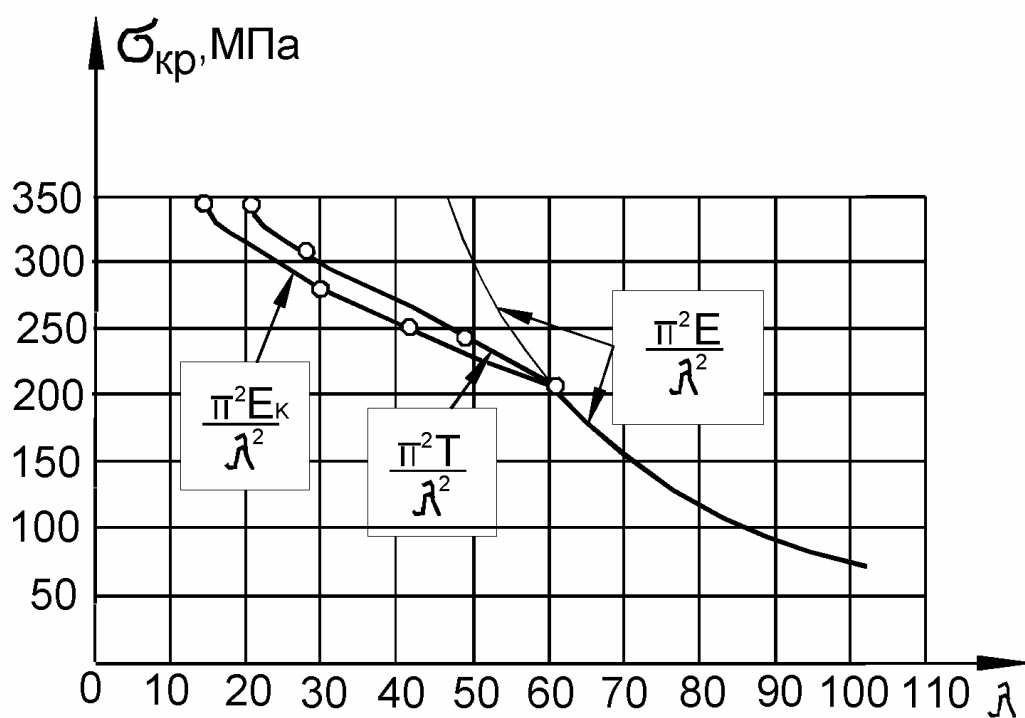


а) диаграмма сжатия для дюралюмина Д16Т.

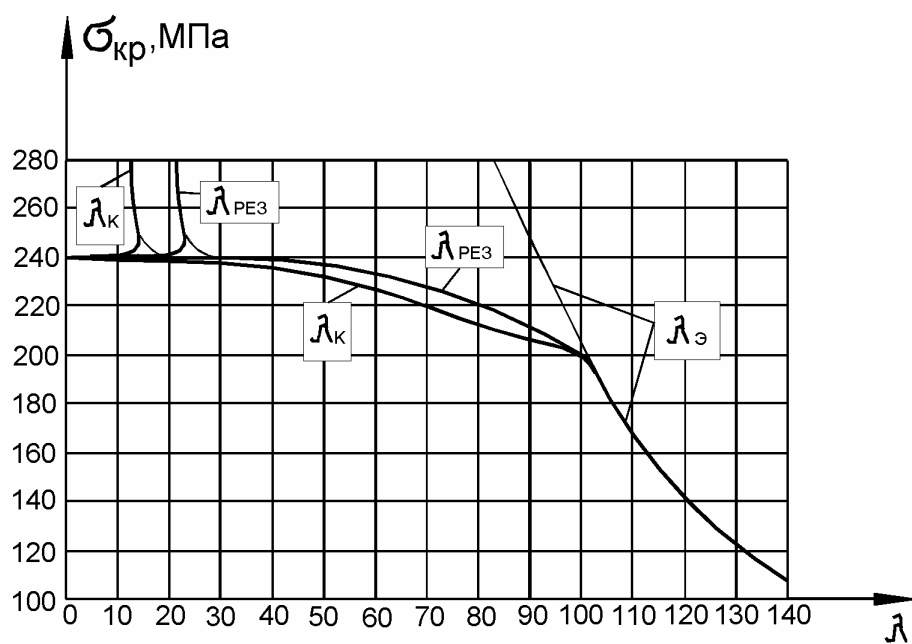


б) диаграмма сжатия стали Ст.3.

Рис. 9.30



а) диаграмма «критическое напряжение – гибкость»
для дюралюмина Д16Т.



б) диаграмма «критическое напряжение – гибкость»
для стали Ст. 3.

Рис. 9.31

Таблица 9.3. Расчётные параметры для дюралюмина Д16Т

$\varepsilon \cdot 10^3$	σ МПа	$E_K \cdot 10^{-5}$ МПа	$T \cdot 10^{-5}$, МПа	$\lambda_{рез}$	λ_K
1	2	3	4	5	6
2,67	200	7,50	7,50	60,5	60,5
3,0	220	5,96	6,65	54,7	51,6
3,5	246	4,34	5,50	47,0	42
4,0	264	3,72	4,97	43,0	37,5
4,5	278	2,55	3,81	36,8	30,2
5	290	2,05	3,22	33,0	26,5
6	308	1,50	2,50	28,3	22
7	320	1,17	2,03	25,0	18,9
8	332	0,97	1,72	22,6	17

Таблица 9.3 (продолжение)

1	2	3	4	5	6
9	340	0,82	1,48	20,8	15,4
10	345	0,82	1,48	20,6	15,3
11	356	0,82	1,48	20,2	15,1
12	364	0,82	1,48	20,0	14,9

Таблица 9.4. Расчётные параметры для стали Ст. 3

$\varepsilon \cdot 10^3$	σ , кг/см ²	$E_K \cdot 10^{-6}$, кг/см ²	$T \cdot 10^{-6}$, кг/см ²	$\lambda_{рез}$	λ_K
0,95	2000	2,10	2,10	102	102
1,0	2100	1,42	1,72	90	81,8
1,1	2200	0,99	1,39	79	66,6
1,2	2280	0,67	1,05	67,6	54
1,3	2340	0,46	0,85	59	44
1,4	2380	0,26	0,54	47,5	32,7
1,5	2390	0,13	0,33	37	23,1
1,6	2400	0,06	0,19	28	15,7
1,8 – 4,0	2400	0	0	0	0
4,5	2410	0,02	0,07	17	9,1
5	2420	0,04	0,13	23	12,7
6	2470	0,05	0,15	24,5	14,2
8	2575	0,05	0,15	24	13,8
10	2685	0,05	0,15	23,6	13,6
12	2800	0,05	0,15	23	13,5

9.11. Устойчивость стержней как элементов конструкций.

Концепция Ильюшина – Зубчанинова

Стержни являются, как правило, элементами различных стержневых конструкций. На рис. 9.32 изображена простейшая статически неопределимая система, в которую входит сжатый силой P стержень. В докритическом состоянии (рис. 9.32,б) имеем известную зависимость:

$$\frac{(R - P)L^3}{3EJ_B} = f = \Delta, \quad (9.87)$$

где Δ - сближение концов стержня, f - прогиб балки.

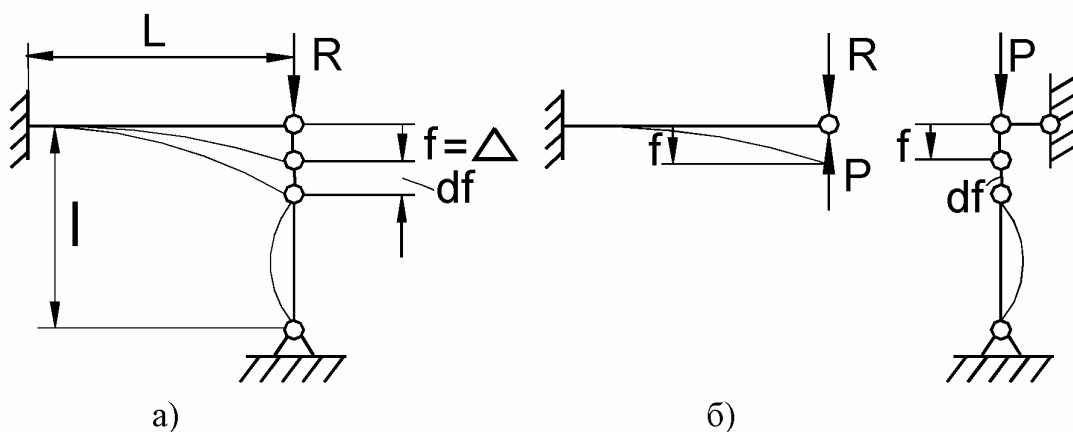


Рис. 9.32

В результате потери устойчивости при $R = \text{const}$ произойдёт дополнительное сближение концов стержня $df = d\Delta$, которое можно выразить через изменение сил путём дифференцирования (9.83):

$$dP = -kd\Delta, \quad (9.88)$$

где

$$k = \frac{3EJ_a}{L^3} -$$

разгружающая жёсткость конструкции.

Из (9.83) следует, что при потере устойчивости стержня $dP < 0$, т.е. передаваемая на стержень нагрузка P уменьшится. Такая конструкция для рассматриваемого стержня называется *разгружающей конструкцией*.

Изменим конструкцию (рис. 9.33).

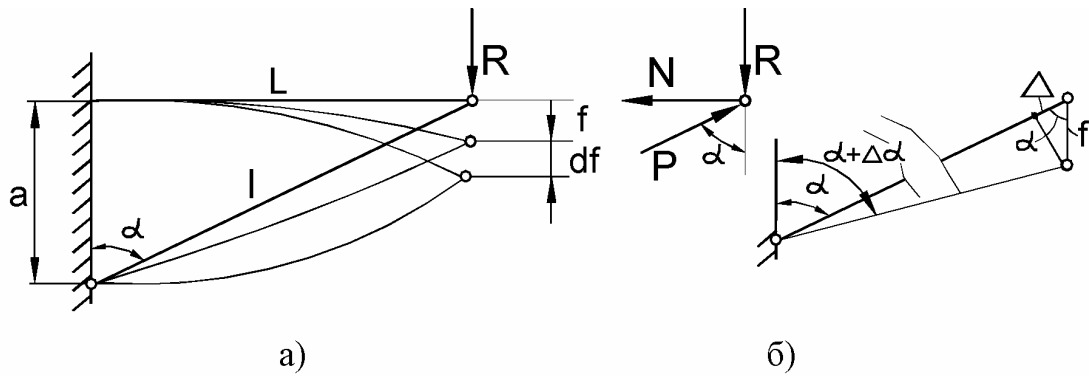


Рис. 9.33

В докритическом состоянии имеем (рис. 9.33,а):

$$\frac{(R - P \cos \alpha) L^3}{3EJ_a} = f, \quad (9.89)$$

где прогиб балки f связан со сближением концов стержня зависимостью (рис. 9.33,б):

$$f \cos \alpha = \Delta. \quad (9.90)$$

Кроме того имеем очевидное соотношение:

$$a = l \cos \alpha. \quad (9.91)$$

Допустим, что произошла потеря устойчивости стержня при $R = \text{const}$, и он получил дополнительное сближение $d\Delta$ своих концов, а балка получила дополнительный прогиб Δf (рис. 9.33,а). Дифференцируя (9.89) – (9.91), получим:

$$\begin{cases} dP = P \operatorname{tg} \alpha \cdot d\alpha - \frac{3EJ_a}{L^3 \cos \alpha} df, \\ df \cos \alpha = d\Delta + f \sin \alpha \cdot d\alpha, \\ d\Delta \cos \alpha - l \sin \alpha \cdot d\alpha = 0, \end{cases}$$

откуда следует:

$$\begin{cases} d\alpha = \operatorname{ctg} \alpha \frac{d\Delta}{l}, \\ df = \frac{d\Delta}{\cos \alpha} + \frac{\Delta \operatorname{tg} \alpha \cdot d\alpha}{\cos \alpha} = \frac{d\Delta}{\cos \alpha} \left[1 + \frac{\Delta}{l} \right] \approx \frac{d\Delta}{\cos \alpha}, \end{cases}$$

$$dP = -kd\Delta,$$

где

$$k = \frac{3EJ_a}{L^3 \cos \alpha} - \frac{P}{l}.$$

Если $k < 0$, то $dP > 0$. Такая конструкция для данного стержня называется *догружающей*. Если $k > 0$, то вновь $dP < 0$, и мы имеем разгружающую систему.

На рис. 9.34,а приведена статически неопределимая стержневая конструкция, нагруженная в узле А силой Q.

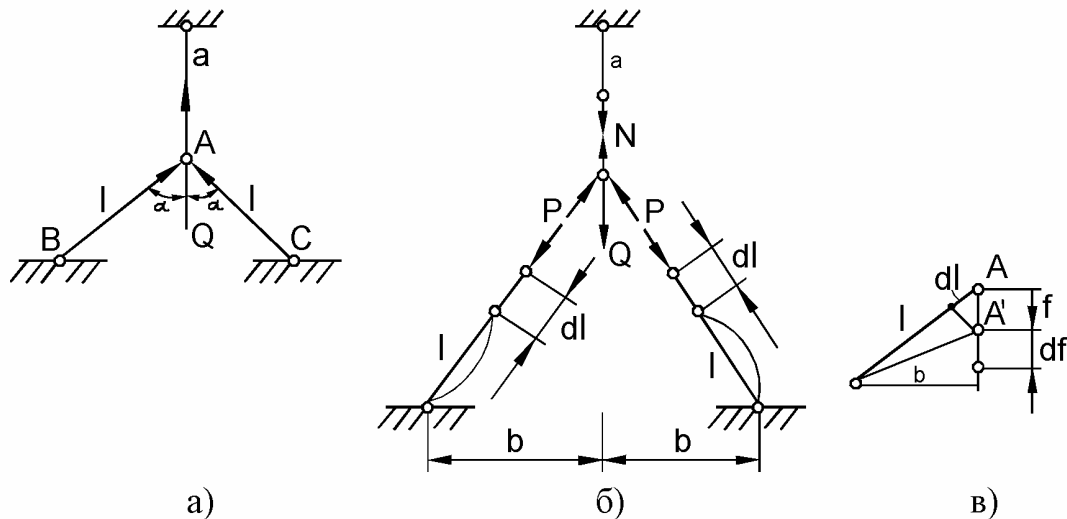


Рис. 9.34

Наклонные стержни конструкции с длинами l сжаты силами P за пределом упругости, а вертикальный стержень длины a растянут усилием N в пределах упругости. Уравнение равновесия узла А (рис. 9.34,б) имеет вид

$$N = R - 2P \cos \alpha. \quad (9.92)$$

В результате деформации конструкции узел А перемещается вниз на величину Δ , равную удлинению вертикального стержня:

$$f = \Delta a = \frac{Na}{EF}. \quad (9.93)$$

Из рис. 9.34,в следует соотношение между удлинением Δl стержня и перемещением узла А конструкции:

$$\Delta l = f \cos \alpha = \Delta a \cos \alpha. \quad (9.94)$$

Полученное соотношение представляет собой уравнение совместности деформаций Δl и Δa стержневой системы. Из рис. 9.34,в находим другое геометрическое соотношение:

$$b = l \sin \alpha. \quad (9.95)$$

Допустим, что при некотором критическом значении силы $Q_{кр}$ произошли потери устойчивости сжатых наклонных стержней в смысле Эйлера ($\delta Q = 0$). В результате узел A' получил перемещение df , а у стержней АВ и АС концы сблизятся на расстояние dl . С учётом (9.92) – (9.95), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} EFdf = dNa, \\ dl = d\Delta \cos \alpha - \Delta \sin \alpha \cdot d\alpha, \\ 0 = dl \sin \alpha + l \cos \alpha \cdot d\alpha, \end{cases}$$

откуда после исключения $d\alpha, d\Delta$ находим:

$$\begin{cases} dP = -kdl, \\ k = \frac{Q}{2l \cos^2 \alpha} \left(\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha - \frac{EF l}{aQ} \right). \end{cases} \quad (9.96)$$

Из (9.91) следует, что при малых α при заданных $Q, EF, l/a$ жёсткость k может быть меньше нуля, а $dP > 0$. В этом случае стержни при потере устойчивости догружаются. При достаточно больших α можно получить $k > 0, dP < 0$. В этом случае стержни при потере устойчивости будут разгружаться. Если $k = 0$,

$$\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{EF l}{aQ},$$

то стержни потеряют устойчивость в соответствии с теорией приведённого модуля Кармана.

Таким образом, рассмотренная конструкция может быть как догружающей, так и разгружающей. Допружающее либо разгружающее действие конструкции на стержень оказывает существенное влияние на величину нагрузки бифуркации. Запишем первое уравнение (9.67) для границы раздела зон y_p в развёрнутом виде:

$$A = \left[(E - E_K) (S_2 - y_p F_2) - E_K F \cdot y_p \right] \frac{d^2 V}{dz^2} = dP. \quad (9.97)$$

Граница раздела зон y_p заключена в пределах:

$$-\frac{h}{2} \leq y_p \leq \frac{h}{2}.$$

Пусть $y_p = -\frac{h}{2}$ (см. рис. 9.27, 9.28). В этом случае все сечения полностью перейдут в упругое состояние.

Геометрические характеристики поперечного сечения стержня:

$$F_1 = S_1 = J_1 = 0, F_2 = F, S_2 = S = 0, J_2 = J.$$

Из (9.97) получаем:

$$dP = + \left(EF \frac{h}{2} \right) \frac{d^2 V}{dz^2} < 0, (V'' < 0). \quad (9.98)$$

Следовательно, этот случай реализуется в разгружающей системе. Жёсткость D, согласно (9.66), (9.67), (9.94), равна $D = EJ$. Решение уравнения (9.71) приводит к эйлеровой нагрузке $P_\exists$ (9.33).

Пусть теперь $y_p = +\frac{h}{2}$. В этом случае все сечения находятся в пластическом состоянии, так что

$$F_1 = F, S_1 = S = 0, J_1 = J, F_2 = S_2 = J_2 = 0.$$

Из (9.97) следует:

$$dP = -E_K F \frac{h}{2} \left(\frac{d^2 V}{dz^2} \right) > 0, (V'' < 0) \quad (9.99)$$

Следовательно, этот случай реализуется в догружающих системах. Жёсткость D, согласно (9.68), (9.69), равна $D = E_K J$. Решение уравнения (9.73) приводит к *касательно-модульной нагрузке Энгессера – Шенли* (9.48).

При $dP = 0$ имеем задачу Кармана, когда $y_p = -C$, $D = KJ$. Бифуркационная нагрузка определяется приведенно-модульным значением (9.75). На рис. 9.35 приведены границы распределения пластических и упругих зон деформирования в продольном разрезе стержня. Таким образом, нагрузка бифуркации P^* при работе стержня за пределом упругости в догружающих системах лежит в интервале

$$P_i \leq P^* \leq P_K, (\delta P > 0), \quad (9.100)$$

а при работе в разгружающих системах – в интервале:

$$P_K \leq P^* < \bar{P}^* < P_\exists, (\delta P < 0), \quad (9.101)$$

где $\bar{P}^*$ - нагрузка бифуркации для предельно жёсткой разгружающей системы (рис. 9.36).

После бифуркации примерная зависимость между сжимающей силой P и прогибом f изображена на рис. 9.36,а. Для интервала бифуркационных нагрузок (9.100) увеличение прогибов требует увеличения нагрузки P в догружающих системах. Поэтому соответствующие этим нагрузкам точки бифуркации называются устойчивыми или докритическими. При нагрузках бифуркации из интервала (9.96) увеличение прогибов происходит при

падающей нагрузке P . Соответствующие точки бифуркации для изолированного стержня называются неустойчивыми (послекритическими).

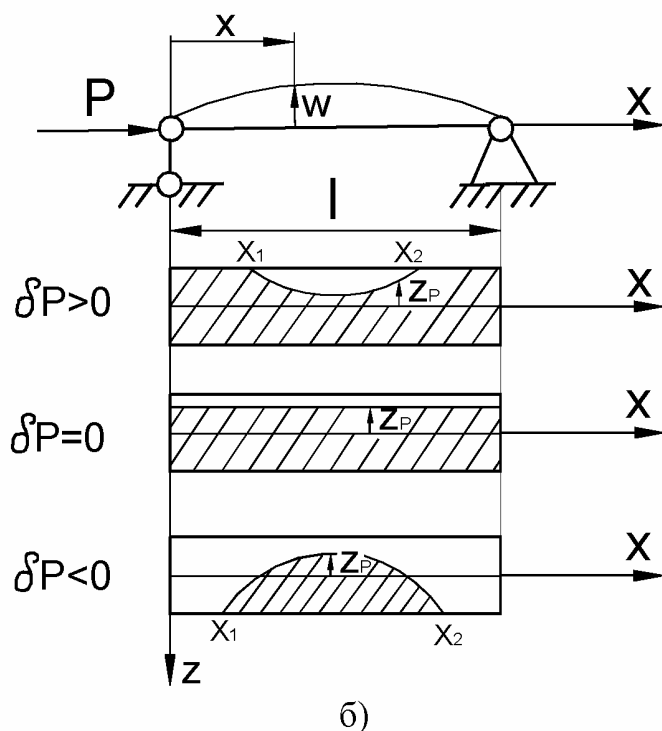
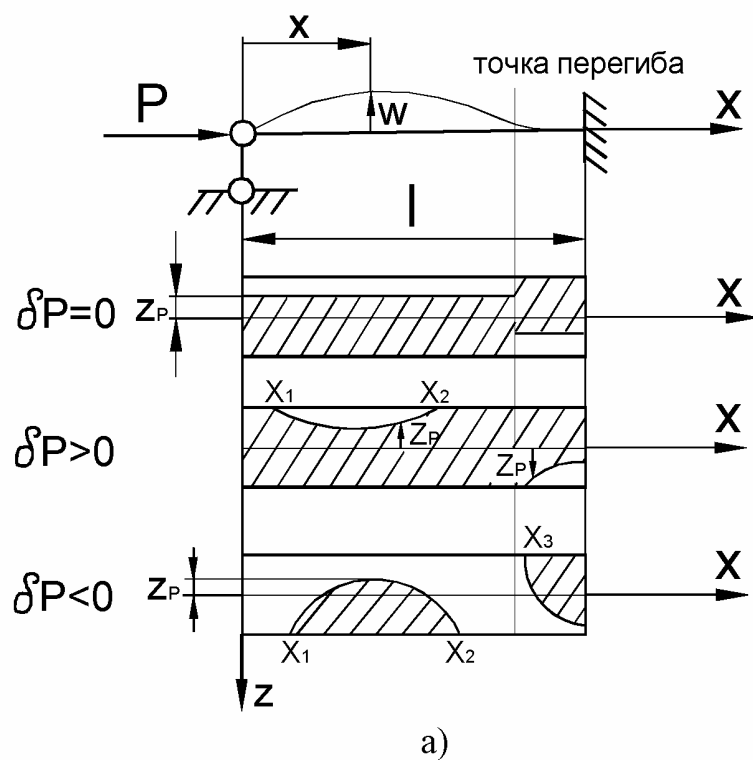


Рис. 9.35

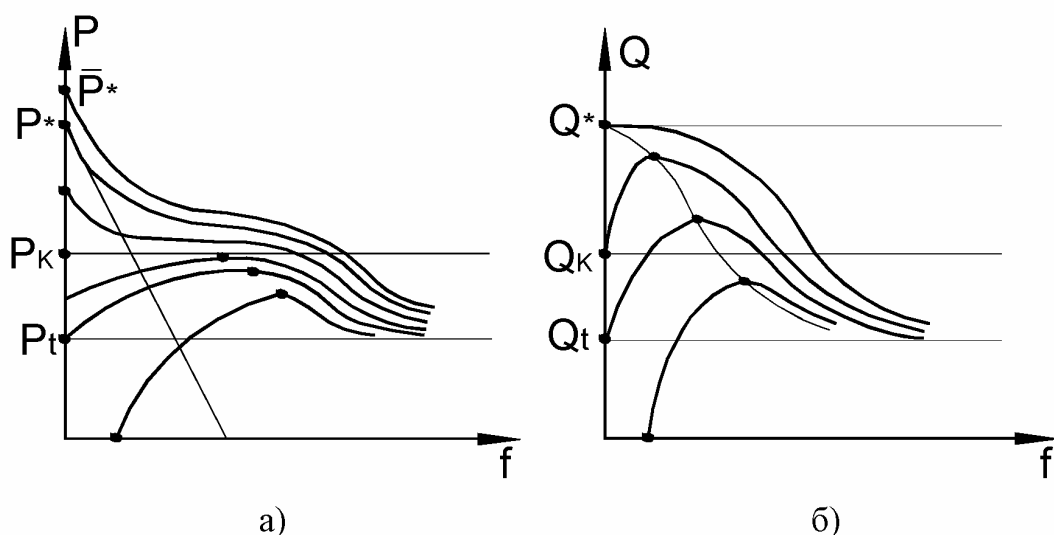


Рис. 9.36

Однако при работе этого же стержня в разгружающей системе увеличение прогибов требует увеличения внешней нагрузки Q (рис. 9.36,б). Благодаря поддерживающему влиянию конструкции, стержню не грозит опасность катастрофического выпучивания. Поэтому все нагрузки бифуркации из интервала $P_t \leq P_0 < P^*$ оказываются устойчивыми, т.к. для них $dQ/df > 0$. Это означает, что если удержать стержень от выпучивания при касательно-модульной нагрузке с помощью какой-либо временной поддерживающей связи (рис. 9.37,а) и нагрузить силой из интервала $P_t < P < P^*$, а затем снять временную связь, то стержень сохранит свое устойчивое состояние.-

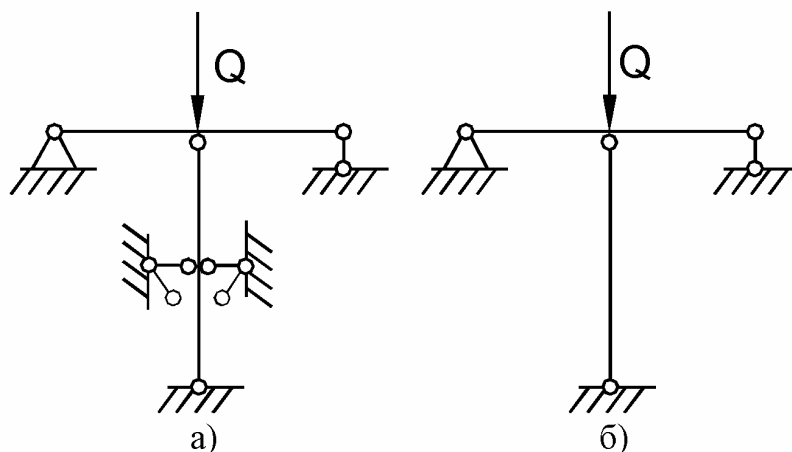


Рис. 9.37

Отмеченное исключительное свойство пластически сжатого стержня, работающего в разгружающей системе, может быть использовано для повышения его устойчивости. Для этого следует применить систему време-

нных поддерживающих связей, от которых впоследствии можно освободиться. Вместо дополнительных поддерживающих связей можно применить иной метод – метод упругопластической тренировки, предложенной В.Г. Зубчаниновым. Согласно ему стержень подвергается сжатию до заданной нагрузки $P > P_K$ в заводских условиях на специальном стенде с поддерживающими связями, а затем разгружается (рис. 9.37).

Элемент поступает на сборку конструкции. После тренировки зависимость между критическим напряжением и гибкостью становится иной, что отражает эффект использования временных поддерживающих систем и наличие целого спектра нагрузок бифуркации, которые естественно зависят от достигнутого пластического состояния и жёсткости стержня в момент выпучивания (рис. 9.38).

Эффект увеличения критических нагрузок в разгружающих системах должен учитываться при расчёте составных элементов конструкций (слоистые стержни, плиты, подкреплённые рёбрами жёсткости и др.).

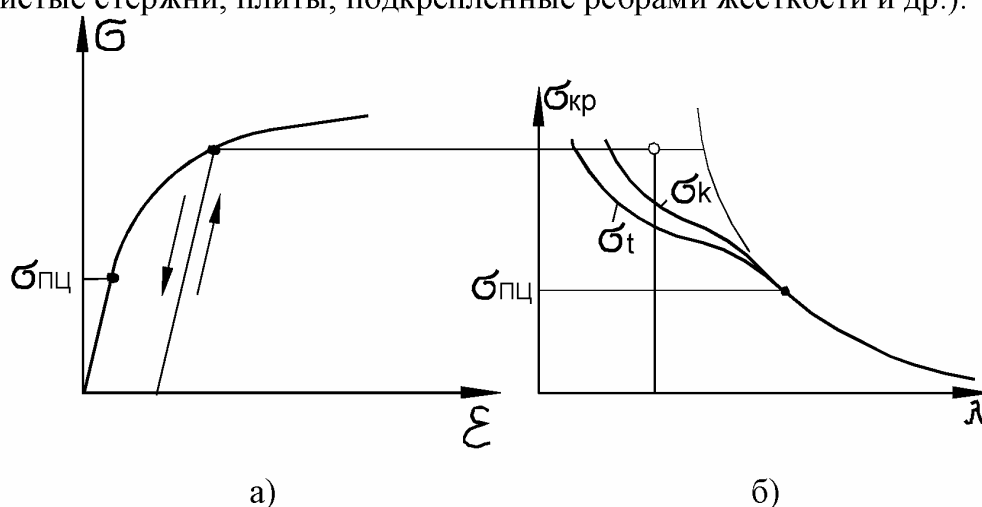


Рис. 9.38

На рис. 9.39 приведены результаты расчёта, выполненные для случая, когда стержень изготовлен из дюрала. Кривые 1, 2, 3 на рис. 9.39 соответствуют теории касательного модуля, приведенно-модульной теории и теории Эйлера для упругого стержня. Кривая 4 соответствует разработанной нами теории устойчивости разгружающих конструкций.

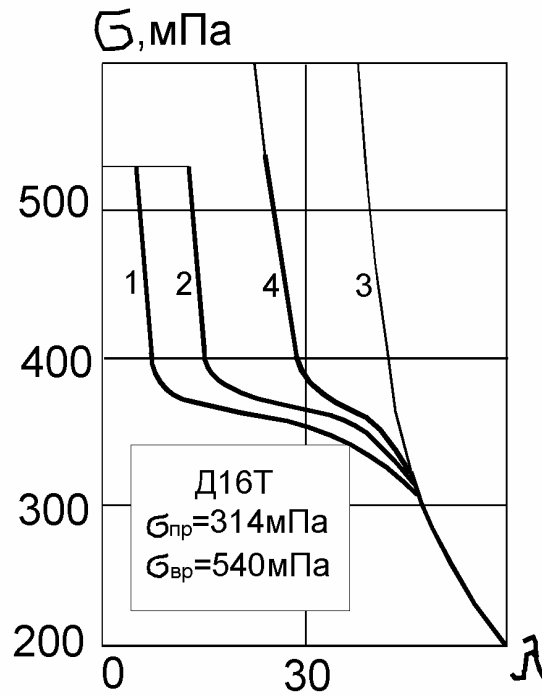


Рис. 9.39

9.12. Продольно-поперечный изгиб упругого стержня

Рассмотрим упругий стержень постоянного поперечного сечения, сжатый силами P (рис. 9.40,а). Отсечём от стержня часть его длиной z (рис. 9.40,б). Уравнения его равновесия имеют вид

$$\begin{cases} N = -P, Q = Q_0 - \int_0^z q(t)dt + PV', \\ M = M_0 + Q_0 z + PV - \int_0^z q \cdot dt(z-t). \end{cases} \quad (9.102)$$

С другой стороны, изгибающий момент в поперечном сечении выражается через кривизну по формуле (9.21):

$$M = -EJ_x \frac{d^2 V}{dz^2}. \quad (9.103)$$

Приравнявая отмеченные выше выражения моментов (9.102), (9.103) получим:

$$EJ_x \frac{d^2 V}{dz^2} + PV = -M_0 - Q_0 z + \int_0^z q(t)dt(z-t).$$

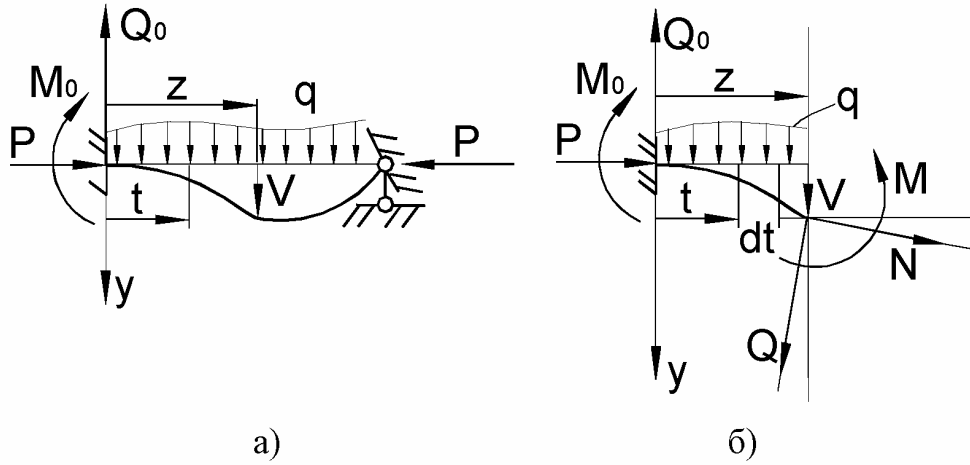


Рис. 9.40

Дифференцируя полученное уравнение два раза по z , последовательно находим:

$$\begin{aligned}
 EJ_x \frac{d^3 V}{dz^3} + P \frac{dV}{dz} &= -Q_0 + \int_0^z q \cdot dt = -Q; \\
 EJ_x \frac{d^4 V}{dz^4} + P \frac{d^2 V}{dz^2} &= q(z).
 \end{aligned}
 \tag{9.104}$$

Введём обозначение

$$k^2 = \frac{P}{EJ_x}.$$

Тогда уравнение (9.104) примет вид

$$\frac{d^4 V}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{q(z)}{EJ_x}. \tag{9.105}$$

Общее решение (9.100) имеет вид

$$V = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 z + C_4 + V_*, \tag{9.106}$$

где для $q = \text{const}$ частное решение имеет вид $V_* = \frac{qz^2}{2P}$.

Удовлетворяя решение (9.106) граничным условиям шарнирного опирания балки:

$$V(0) = 0, V'(0) = 0, V(l) = 0, V''(l) = 0,$$

приходим к системе уравнений

$$\begin{cases}
 C_2 + C_4 = 0, C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 l + C_4 + \frac{ql^2}{2P} = 0, \\
 -C_2 k^2 + \frac{q}{P} = 0, -k^2 (C_1 \sin kl + C_2 \cos kl) + \frac{q}{P} = 0,
 \end{cases}$$

откуда находим постоянные интегрирования:

$$C_1 = \frac{q}{k^2 P} \frac{1 - \cos kl}{\sin kl}; C_2 = \frac{q}{k^2 P}; C_3 = -\frac{ql}{2P}; C_4 = -\frac{q}{k^2 P}.$$

В результате общее решение задачи (9.101) принимает вид

$$V = \frac{q}{k^2 P} \left\{ (1 - \cos kl) \sin kz / \sin kl - (1 - \cos kz) - \frac{k^2 z}{2} (l - z) \right\}.$$

При $z = l/2$ получаем максимальное значение прогиба:

$$V_{\max} = \frac{q}{k^2 P} \left[\frac{1 - \cos(kl/2)}{\cos(kl/2)} - \frac{k^2 l^2}{8} \right], \quad (9.107)$$

где $k^2 = PEJ_x$, или $P = (kl)^2 \frac{EJ}{l^2}$.

При $kl \rightarrow \frac{\pi}{2}$ из (9.107) следует, что $V_{\max} \rightarrow \infty$, а $P \rightarrow P_{\text{г}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$.

Если на балку действует только поперечная нагрузка $q(z)$, то $P = 0$ ($k^2 = 0$). Обозначим прогиб от поперечной нагрузки через V_0 . Тогда из (9.105) следует:

$$\frac{d^4 V}{dz^4} = \frac{q(z)}{EJ_x}. \quad (9.108)$$

Уравнение (9.105) на основании (9.108) принимает вид:

$$\frac{d^4 V}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{d^4 V_0}{dz^4}. \quad (9.109)$$

В уравнении (9.104) прогиб V_0 можно трактовать так же, как начальный технологический прогиб. Для изгибающего момента имеем выражение:

$$M = -EJ_x \left(\frac{d^2 V}{dz^2} - \frac{d^2 V_0}{dz^2} \right).$$

Рассмотрим снова случай шарнирного опирания стержня по краям.

Тогда при $z = 0, l$ имеем:

$$V = 0, M = -EJ [V'' - V_0''] = 0.$$

Представим общее решение уравнения (9.107) и начальный прогиб V_0 (либо прогиб от поперечной нагрузки) в виде рядов Фурье:

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin \frac{m\pi z}{l}, V_0 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^0 \sin \frac{m\pi z}{l}.$$

Подставляя в (9.107) вместо V , V_0 эти выражения, находим уравнение:

$$\sum_{m=1}^{\infty} = \left\{ f_m \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 - k^2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right] - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 f_m^0 \right\} \sin \frac{m\pi z}{l} = 0,$$

которое удовлетворится, если все фигурные скобки обращаются в нуль. Это приводит к формуле:

$$f_m = \frac{f_m^0}{1 - P/P_m}, \quad (9.110)$$

где

$$P_m = \frac{m^2 \pi^2 EJ}{l^2} = P_{\dot{Y}}, \quad (m = 1, 2, \dots)$$

эйлеровы нагрузки бифуркации.

Прогиб в середине стержня при $z = l/2$ равен:

$$V_{\max} = V(l/2) = f = f_1 - f_3 + f_5 - \dots$$

При $P_0 \rightarrow P_1$, согласно (9.110), имеем $f_1 \rightarrow \infty$, $f_2 \rightarrow 4/3 f_2^0$, $f_3 \rightarrow 9/8 f_3^0, \dots$, т.е. неограниченно увеличиваются перемещения от изгиба по одной полуволне. Все же другие формы остаются ограниченными. Следовательно, выпучивание шарнирно опёртого стержня по одной полуволне есть главная форма изгиба. Среди множества искривлений оси стержня можно учитывать лишь начальный прогиб по одной полуволне синусоиды. Это весьма важный для практических расчётов качественный результат, который следует учитывать при расчётах на устойчивость элементов конструкций.

Максимальный прогиб может быть приближённо принят равным:

$$V_{\max} = f \approx f_1 = \frac{f_1^0}{1 - P/P_1}, \quad \frac{df}{dP} = \frac{f_1^0}{(1 - P/P_1)^2}.$$

Согласно принятому критерию устойчивости сила

$$P_1 = P_{\text{э}} = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}$$

должна быть принята за предел устойчивости или критическую, так как при $P \rightarrow P_1$, $df/dP \rightarrow \infty$.

Аналогичный результат можно получить для иных видов закрепления концов стержня.

9.13. Выпучивание сжатой колонны при внецентренном сжатии

Пусть стержень-колонна сжимается внецентренно силой P , жёстко закреплена внизу при $z = 0$ и свободна от закрепления вверху при $z = l$ (рис. 9.41,а). Для решения задачи используем уравнение (9.22):

$$EJV'' + PV = -(M_0 + Q_0 z). \quad (9.111)$$

Из рис. 9.41, а получаем:

$$Q_0 = 0, M_0 = -P(f + e).$$

Подставляя эти значения в (9.110), находим:

$$EJV'' + PV = P(f + e),$$

или, после деления на EJ_x ,

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + k^2 V = k^2 (f + e) \quad (9.112)$$

общее решение уравнения (9.107) имеет вид

$$V = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + f + e \quad (9.113)$$

Граничные условия задачи:

$$\begin{aligned} V = 0, V' = 0 & \text{ при } z = 0, \\ V = f & \text{ при } z = l. \end{aligned} \quad (9.114)$$

Удовлетворяя решение (9.113) условиям (9.114), получаем:

$$\begin{cases} C_2 + f + e = 0, kC_1 = 0, \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + f + e = f, \end{cases}$$

откуда находим:

$$C_1 = 0, C_2 = -(f + e) = -\frac{e}{\cos kl}.$$

Решение (9.113), с учётом найденных коэффициентов, принимает вид:

$$V = (f + e)(1 - \cos kz) = e \frac{1 - \cos kz}{\cos kl}. \quad (9.115)$$

Из (9.115) при $z = l$ получаем значение максимального прогиба:

$$V_{\max} = f = e \frac{1 - \cos kl}{\cos kl}. \quad (9.116)$$

При $kl \rightarrow \frac{\pi}{2}$ из (9.116) получаем $f \rightarrow \infty$.

График зависимости P от f приведён на рис. 9.41,б.

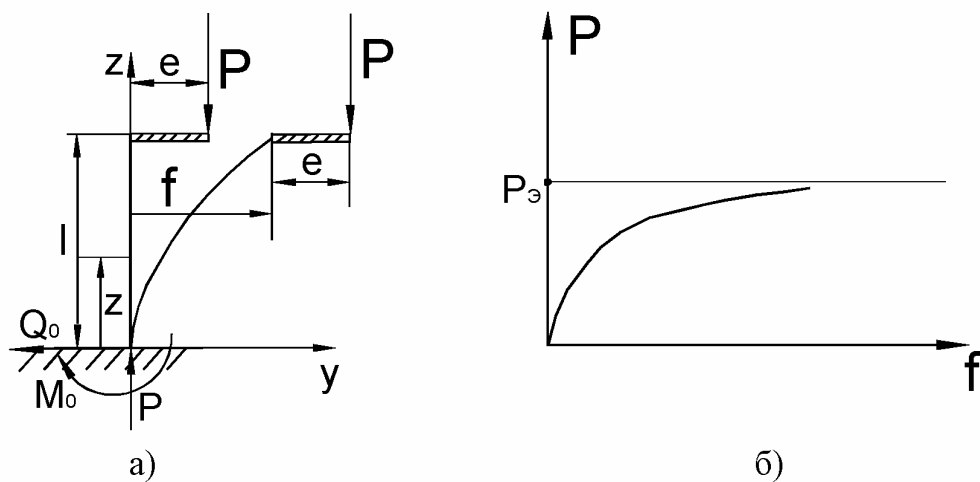


Рис. 9.41

Значение $kl = \pi/2$ соответствует критической нагрузке Эйлера:

$$P_{\text{э}} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}, (\mu = 2).$$

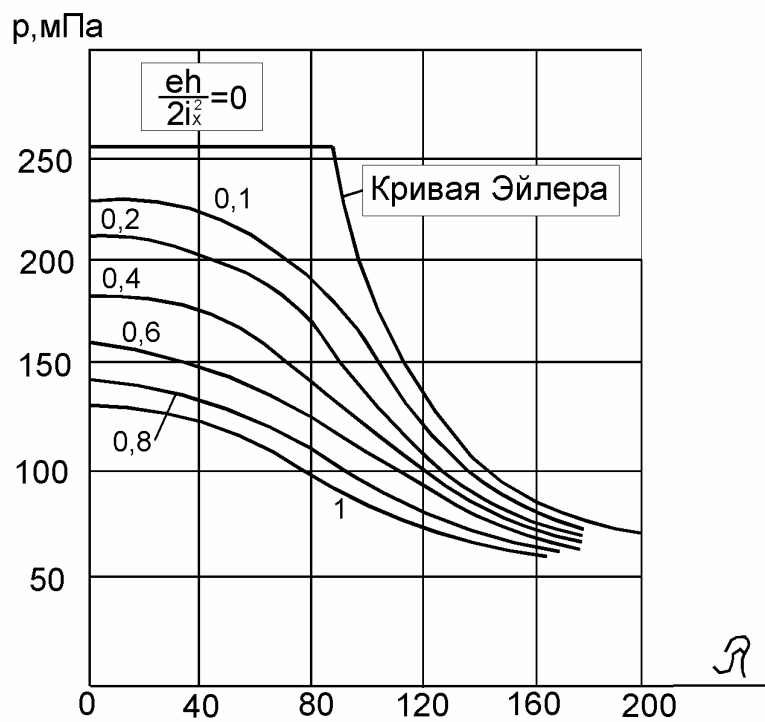


Рис. 9.42

Максимальное нормальное напряжение в изгибаемой колонне находим по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{P}{F} + \frac{Pe}{W_x} \sec kl, \quad (9.117)$$

которую называют формулой секанса для $\sigma_{\max}$.

$$\text{Так как } J_x = i_x^2 F, W_x = \frac{2J}{h} = \frac{2i_x^2 F}{h}, k^2 = \frac{P}{EJ_x}, kl = \sqrt{\frac{P}{EF}} \left(\frac{l}{i_x} \right), \lambda = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{2l}{i_x},$$

то формулу (9.117) запишем в виде:

$$\sigma_{\max} = p \left[1 + \frac{eh}{2i_x^2} \sec \left(\sqrt{\frac{P}{E}} \frac{\lambda}{\mu} \right) \right], \quad (9.118)$$

где $p = P/F$ - параметр внешней нагрузки, имеющий размерность напряжения.

Назовём *предельным упругим состоянием* такое, при котором в стержне в опасной точке впервые достигается предел текучести, т.е. $\sigma_{\max} = \sigma_T$. Тогда, согласно (9.113), соответствующий параметр внешней нагрузки

$$p_T = \frac{P_T}{F} = \frac{\sigma_T}{1 + \left(\frac{eh}{2i_x^2} \right) \sec \left(\sqrt{\frac{P}{E}} \frac{\lambda}{\mu} \right)} \quad (9.119)$$

Если форма и размеры сечения известны, то известны F, h, i_x . Методом проб и ошибок можно построить зависимости p_T от гибкости λ для различных значений $\frac{eh}{2i_x^2}$ (рис. 9.42).

9.14. Устойчивость стержня, сжатого следящей силой

Рассмотрим задачу о сжатии следящей силой, т.е. силой, которая при выпучивании стержня поворачивается так, что остаётся касательной к изогнутой оси на конце стойки (рис. 9.43). Такая сила может быть создана реактивной струёй ракеты.

Ввиду малости прогибов считаем, что горизонтальная и вертикальная составляющие следящей силы:

$$P_z = P \cos \alpha \approx P, P_y = p \sin \alpha \approx P \alpha.$$

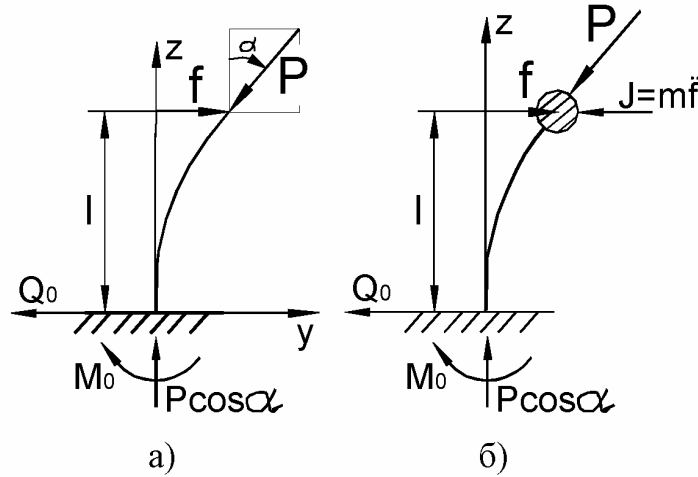


Рис. 9.43

Ввиду малости прогибов считаем, что горизонтальная и вертикальная составляющие следящей силы:

$$P_z = P \cos \alpha \approx P, \quad P_y = p \sin \alpha \approx P \alpha.$$

Общее решение задачи представлено выражением (9.29). Граничные условия задачи имеют вид

$$V = 0, \quad V' = 0 \quad \text{при } z = 0;$$

$$M = -EJV'' = 0, \quad Q = -C_3P = -P\alpha \quad \text{при } z = l, \quad (9.120)$$

где

$$\alpha \approx V''(l) = C_1 k \cos kl - C_2 k \sin kl + C_3.$$

Удовлетворяя решение (9.29) граничным условиям (9.120), получим:

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0, C_1 k + C_3 = 0, \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0, \\ -C_3 P = -P[C_1 \cos kl - C_2 k \sin kl + C_3]. \end{cases}$$

Исключая постоянные $C_4 = -C_2, C_3 = -C_1 k$, находим:

$$\begin{cases} C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0, \\ C_1 \cos kl - C_2 \sin kl = 0. \end{cases} \quad (9.121)$$

Определитель этой системы:

$$D = \begin{vmatrix} \sin kl & \cos kl \\ \cos kl & -\sin kl \end{vmatrix} = -(\sin^2 kl + \cos^2 kl) = -1 \neq 0.$$

Следовательно, система уравнений (9.116) не имеет отличных от нуля решений и потому $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0, V = 0$.

Таким образом, по методу Эйлера сжатый следящей силой стержень не имеет искривлённых форм равновесия. Эту задачу впервые рассмотрел

А.Пфлюгер (Германия) в 1950 г. и пришёл к выводу, что сжатый следящей силой стержень всегда устойчив.

Такой вывод оказался неверным, т.к. метод Эйлера и его понятие устойчивости не являются общими и относятся только к задачам с консервативными внешними силами.

В данной задаче потеря устойчивости проявляется не в переходе системы в смежное равновесное состояние в смысле Эйлера, а в переходе её в режим движения. Поэтому для исследования устойчивости со следящей неконсервативной силой следует применить динамический метод Лагранжа. Предположим, что на конце стержня сосредоточена масса m (рис. 9.43,б). Тогда при её движении вместе со стержнем возникает сила

инерции $J = m \ddot{f}$, где точки над f означают дифференцирование по времени. Для решения задачи воспользуемся принципом Даламбера и уравнением (9.105), которое в силу $q = 0$ принимает вид:

$$\frac{d^4 V}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 V}{dz^2} = 0, \quad (9.122)$$

где прогиб есть функция z и времени t , т.е. $V = V(z, t)$. Для решения задачи воспользуемся методом разделения переменных Фурье, полагая:

$$V(z, t) = V(z)T(t). \quad (9.123)$$

Подставляя (9.123) в (9.122), получим:

$$V^{(IV)} + k^2 V = 0. \quad (9.124)$$

Общее решение (9.124) имеет вид:

$$V = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 z + C_4. \quad (9.125)$$

Граничные условия задачи:

$$V = 0, V' = 0 \text{ при } z = 0,$$

$$M = -EJV'' = 0, Q = -[EJV''' + PV'] = -PV'(l) - m\ddot{V} \text{ при } z = l \quad (9.121)$$

Удовлетворяя решение (9.120) граничным условиям (9.121), получим граничные условия для:

$$V = 0, V' = 0 \text{ при } z = 0,$$

$$V'' = 0, V''' = \frac{m}{EJ} \Omega^2 V \text{ при } z = l. \quad (9.127)$$

Первые три условия очевидны. Последнее поясним подробнее. После подстановки (9.123) в четвёртое условие (9.126) имеем:

$$mTV - EJ \cdot TV'' = 0,$$

откуда, разделяя переменные, получим:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{EJ}{m} \frac{V'''}{V} = -\Omega^2,$$

где Ω^2 - постоянная величина.

Следовательно,

$$\begin{cases} T + \Omega^2 T = 0, \\ V = -\frac{m}{EJ} \Omega^2 V. \end{cases} \quad (9.128)$$

Полагая в (9.128) $T = Ce^{\lambda t}$, находим $\lambda = \pm i\Omega$,

$$T = A_1 \sin \Omega t + B_1 \cos \Omega t \quad (9.129)$$

для действительных значений Ω и

$$T = A_1 e^{\lambda t} + B_1 e^{-\lambda t} \quad (9.130)$$

для Ω мнимых (λ - действительных) значений Ω .

Подставляя (9.125) в граничные условия (9.127), находим:

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0, C_1 k + C_3 = 0, C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0, \\ -C_1 k^3 \cos kl + C_2 k^3 \sin kl = \frac{-m\Omega^2}{EJ} [C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 l + C_4] \end{cases} \quad (9.131)$$

Исключая из (9.131) $C_4 = -C_2$, $C_3 = -C_1 k$, найдём

$$\begin{aligned} C_1 \sin kl + C_2 \cos kl &= 0, \\ C_1 \left(k^3 \cos kl + \frac{m\Omega^2}{EJ} kl \right) + C_2 \left(-k^3 \sin kl + \frac{m\Omega^2}{EJ} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (9.132)$$

Приравняв определитель системы (9.132) к нулю, получим:

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{P}{ml} \cdot \frac{1}{\frac{\sin kl}{kl} - \cos kl}}. \quad (9.133)$$

Пока выражение под радикалом в (9.128) положительно ($tgkl > kl$), оба значения Ω действительны и имеет место устойчивый периодический процесс движения (9.130).

Случай

$$tgkl = kl \quad (9.134)$$

отвечает $\Omega \rightarrow \infty$ и переходу от устойчивого движения к неустойчивому.

Корень уравнения (9.133) нами уже вычислялся: он равен $kl = 4,493$,

откуда получаем критическое значение следящей силы:

$$P_* = \frac{20,19EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2},$$

при которой сжатый стержень получит динамическую бифуркацию. При этой силе колебательный процесс становится неустойчивым. Примером такого беспорядочного процесса могут служить катастрофы при запуске баллистических ракет.

9.15. Задача А.Р. Ржаницына об устойчивости сжатого стержня в условиях ограниченной ползучести

Все материалы обладают тремя основными свойствами – упругости, пластичности и вязкости. При длительной эксплуатации конструкции, которая содержит сжатый силами P стержень, может проявиться свойство вязкости материала в виде его ползучести либо релаксации напряжений.. Эти явления при ограниченной ползучести (для таких материалов, как бетон, полимеры, композиты) описываются законом Кельвина:

$$\sigma + t_* \dot{\sigma} = H\varepsilon + t_* E \dot{\varepsilon}, \quad (9.135)$$

где t_* – время релаксации, E – модуль продольной упругости, H – длительный модуль упругости, $\dot{\sigma}$ и $\dot{\varepsilon}$ – скорости напряжений и деформаций.

Рассмотрим шарнирно опертый стержень, сжатый силами P (рис. 9.45).

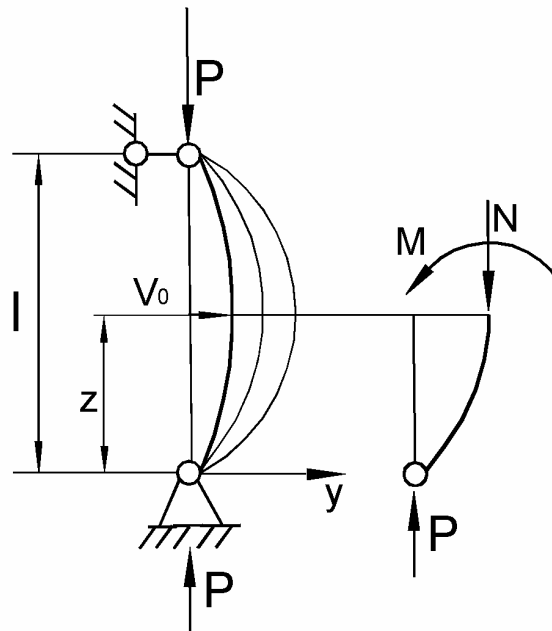


Рис. 9.45

Из условий равновесия отсечённой части стержня имеем $N = -P$, $Q = 0$, $M = PV$. Деформация и её скорость при изгибе стержня:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} = -y \frac{d^2 V}{dz^2}, \dot{\varepsilon} = -y \frac{d^2 \dot{V}}{dz^2}. \quad (9.136)$$

Умножая (9.135) на $y dF$, интегрируя по площади стержня и используя (9.136), получаем:

$$M + t_* \dot{M} = -HJV'' - t_* EJ V'' = 0, \quad (9.137)$$

где $M = \int_F \sigma y dF, \dot{M} = \int_F \dot{\sigma} y dF.$

Подставляя в (9.132) выражения $M = PV, \dot{M} = P\dot{V}$, находим:

$$t_* \left(EJ \dot{V}'' + P \dot{V} \right) + HJV'' + PV = 0. \quad (9.138)$$

Примем для прогиба V и его скорости выражения

$$V = f \sin \frac{\pi z}{l}, \dot{V} = \dot{f} \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Тогда из (9.138) получаем:

$$t_* \dot{f} (P - P_*) + f (P - P_*) = 0, \quad (9.139)$$

где $P_\ominus = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, P_* = \frac{\pi^2 HJ}{l^2}$ - (9.140)

бифуркационные нагрузки Л. Эйлера и А.Р. Ржаницына.

Обозначим: $\alpha = \frac{P_* - P}{P_\ominus - P}.$ (9.141)

Тогда уравнение (9.139) преобразуется к виду

$$\dot{f} + \frac{\alpha}{t_*} f = 0. \quad (9.142)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\ln f = \ln C - \frac{\alpha}{t_*} t,$$

или, после потенцирования,

$$f = C e^{-\alpha t / t_*}.$$

Постоянную C находим из начального условия $f = f_0$ при $t = t_0 = 0$.

В результате получаем:

$$f = f_0 e^{-\alpha t / t_*}. \quad (9.143)$$

Если f_0 – прогиб по методу проб Эйлера на устойчивость, то выражение (9.142) даёт закон поведения прогиба после снятия возмущающей поперечной силы. Возможны три состояния процесса изгиба стержня во времени t . При $P < P_* < P_{\text{г}}$ коэффициент $\alpha > 0$, и из (9.143) следует, что при $t \rightarrow \infty$ прогиб $f \rightarrow 0$, т.е. стержень устойчив, т.к. возвращается со временем к своей начальной прямолинейной форме (рис. 9.45).

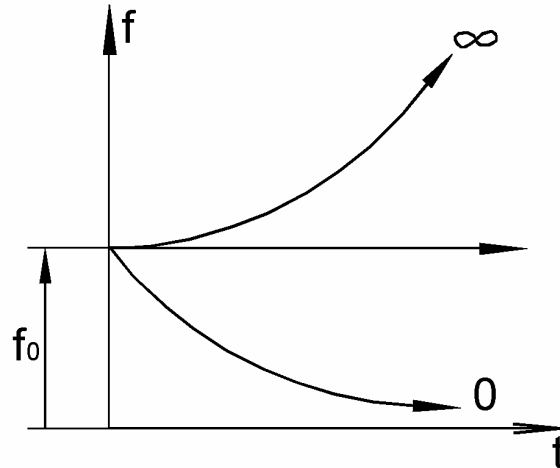


Рис. 9.46

При $P_* < P < P_{\text{г}}$ имеем $\alpha < 0$, и при $t \rightarrow \infty$ прогиб $f \rightarrow \infty$, т.е. стержень неустойчив. При $P = P_*$ имеем $\alpha = 0$ и решение уравнения (9.137) $f = f_0 = \text{const}$. Стержень остаётся в безразличном состоянии на границе между устойчивым и неустойчивым состояниями процесса выпучивания.

Таким образом, мы обнаруживаем что при $P < P_*$ сжатый стержень обладает свойством длительной устойчивости, т.к. после снятия возмущения остаётся пребывать в малой окрестности исходного невозмущенного состояния при $t \rightarrow \infty$.

Реальные стержни обладают начальными несовершенствами своей прямолинейной геометрической формы. Пусть V_0 – начальный технологический прогиб оси стержня. Будем смотреть на него как на малый возмущающий фактор. Тогда кривизна изогнутой оси стержня в процессе его деформирования:

$$\frac{1}{\rho} = - \left(\frac{d^2 V}{dz^2} - \frac{d^2 V_0}{dz^2} \right),$$

а относительные деформации и напряжения:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} = -y \left(\frac{d^2 V}{dz^2} - \frac{d^2 V_0}{dz^2} \right), \quad \sigma = E\varepsilon.$$

Умножим вновь (9.122) на $y dF$ и, интегрируя, получим уравнение

$$t_* \left(EJ \dot{V}'' + P \dot{V} \right) + HJ (V'' - V_0'') + PV = 0. \quad (9.144)$$

Полагая в (9.144):

$$V = f \sin \frac{\pi z}{l}; \quad V_0 = f_0 \sin \frac{\pi z}{l}; \quad \dot{V} = \dot{f} \sin \frac{\pi z}{l}$$

и учитывая обозначение (9.141), приходим к уравнению

$$\dot{f} + \frac{\alpha}{t_*} f = \frac{P_*}{t_* (P_{\text{э}} - P)}. \quad (9.145)$$

Решение уравнения (9.140) имеет вид

$$f = C e^{-\alpha t / t_*} + \frac{P_* f_0}{P_* - P}. \quad (9.146)$$

Начальным условием при $t = 0$ для решения (9.146) является статическое решение (9.106) задачи о выпучивании упругого стержня с начальным прогибом:

$$f^0 = \frac{P_{\text{э}} f_0}{P_{\text{э}} - P}.$$

Удовлетворяя решение (9.141) этому условию, получим:

$$C = f_0 \left(\frac{P_{\text{э}}}{P_{\text{э}} - P} - \frac{P_*}{P_* - P} \right)$$

и общее решение:

$$f = \frac{P_{\text{э}} f_0}{P_{\text{э}} - P} e^{-\alpha t / t_*} + \frac{P_* f_0}{P_* - P} (1 - e^{-\alpha t / t_*}). \quad (9.147)$$

При $P < P_* < P_{\text{э}}$ имеем $\alpha > 0$ и поэтому из (9.147) при $t \rightarrow \infty$ получаем, что прогиб f ограничен и стремится к значению (рис. 9.46):

$$f^* = \frac{P_* f_0}{P_* - P}.$$

При $P_* < P < P_{\text{э}}$ имеем $\alpha < 0$ и поэтому из (9.141) при $t \rightarrow \infty$ получаем $f \rightarrow \infty$.

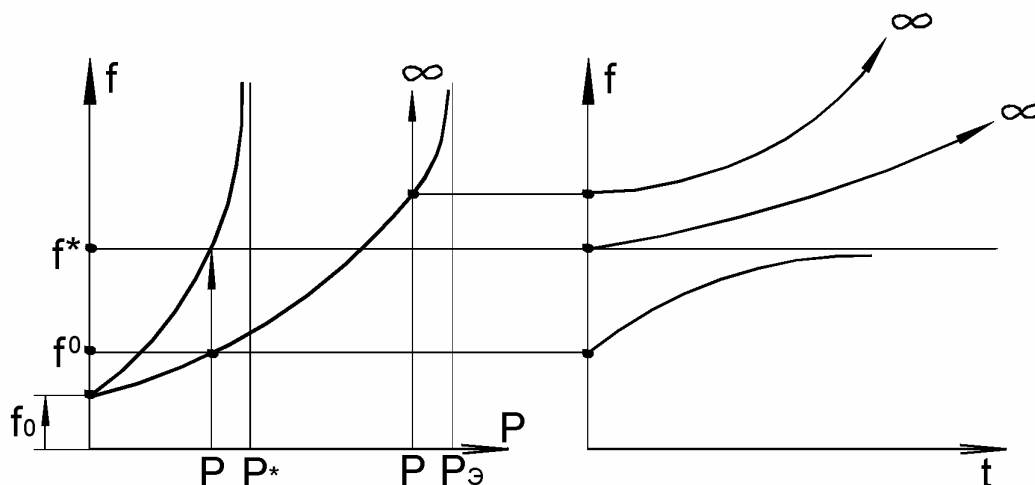


Рис. 9.46

Процесс выпучивания во времени неограничен и, следовательно, неустойчив (рис. 9.47).

При $P = P_*$ коэффициент $\alpha = 0$, и из уравнения (9.140) получаем:

$$f = \frac{P_* t}{t_*(P_* - P)} + f^0.$$

При нагрузке $P = P_*$ впервые процесс выпучивания стержня из материала с ограниченной ползучестью становится неустойчивым. Поэтому P_* названа *длительной критической нагрузкой* А.Р. Ржаницына.

9.16. Устойчивость упругого стержня в условиях неограниченной ползучести

Ползучесть некоторых полимерных материалов в установившейся стадии является нелинейной и описывается при вязкоупругих деформациях законом:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + B\sigma^n, (n = 3, 5, \dots). \quad (9.148)$$

Тогда постановка задачи об устойчивости на бесконечном интервале времени не имеет смысла. При ограниченной ползучести задача об устойчивости сжатого стержня имеет смысл, в соответствии с концепцией устойчивости, если сжимающая нагрузка P больше нагрузки надёжности устойчивых состояний. В противном случае стержень может разрушиться от

чрезмерного продольного изгиба вследствие развивающихся деформаций ползучести. Инженерной задачей является определение критического времени, в течение которого стержень способен воспринимать внешнюю нагрузку.

Рассмотрим стержень идеализированного двутаврового поперечного сечения (рис. 9.48), шарнирно опёртый по краям и сжатый силами P .

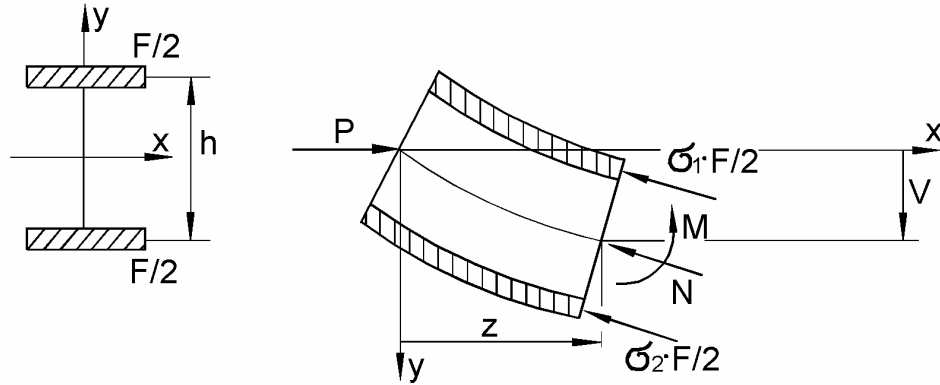


Рис. 9.47

Пусть l — длина стержня, площадь каждой полки составляет $F/2$, и их размеры малы по сравнению с высотой сечения h , так что можно считать напряжения в каждой полке распределены равномерно. Площадь тонкой стенки пренебрегаем. Определяем момент инерции поперечного сечения:

$$J_y = 2 \frac{F}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{Fh^2}{4}.$$

Уравнение равновесия части стержня, отсечённого на расстоянии z от края (рис. 9.47), записываем в виде:

$$(\sigma_1 + \sigma_2)F/2 = P; (\sigma_1 - \sigma_2)Fh/2 = PV, \quad (9.149)$$

где σ_1 и σ_2 — напряжения в полках соответственно на вогнутой и выпуклой сторонах; P — сжимающая сила; V — прогиб в сечении.

Деформация в стержне:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} = -y \left(\frac{d^2 V}{dz^2} - \frac{d^2 V_0}{dz^2} \right).$$

В частности, для полок двутавра получаем:

$$\varepsilon_1 = -\frac{h}{2}(V'' - V_0''), \quad \varepsilon_2 = \frac{h}{2}(V'' - V_0''). \quad (9.150)$$

Вычитая деформации друг из друга, находим дифференциальное урав-

нение изогнутой оси стержня:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h}. \quad (9.151)$$

Введём безразмерные прогиб и осевую координату:

$$V_* = 2V / h; \xi = z / h.$$

Тогда уравнения равновесия (9.149), (9.151) примут вид

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma; \sigma_1 - \sigma_2 = 2\sigma V_*; \quad (9.152)$$

$$\left(\frac{d^2 V_*}{d\xi^2} \right) = 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \quad (9.153)$$

где $\sigma = P / F$ – среднее напряжение в поперечном сечении стержня.

Из уравнений (9.152) найдём:

$$\sigma_1 = \sigma(1 + V_*); \sigma_2 = \sigma(1 - V_*). \quad (9.154)$$

Дифференцируя (9.152), (9.153) по t , получим:

$$\dot{\sigma}_1 = \sigma \dot{V}_*, \dot{\sigma}_2 = -\sigma \dot{V}_*, \quad (9.155)$$

$$\frac{\partial^3 V_*}{\partial \xi^2 \partial t} = 2 \left(\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 \right). \quad (9.156)$$

Подставив (9.154), (9.155) в (9.148), найдём для каждой из полок:

$$\dot{\varepsilon}_1 = (\sigma / E) \dot{V}_* + B(\sigma)^n (1 + V_*)^n; \quad (9.157)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = -(\sigma / E) \dot{V}_* + B(\sigma)^n (1 - V_*)^n.$$

Подставив (9.157) в (9.156) и приняв $n = 3$, найдём:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \dot{V}_*}{\partial \xi^2} = -2 \frac{\sigma}{E} \dot{V}_* + B \sigma^3 [-2(3V_* + V_*^3)] \quad (9.158)$$

Примем для определения прогиба выражение:

$$V_* = f_* \sin(\pi h \xi / l); f_* = 2f / h. \quad (9.159)$$

Разложив нелинейный член в (9.158) в ряд Фурье по синусам и приравняв нулю коэффициент при $\sin(\pi h \xi / l)$, получим:

$$\dot{f}_* = \frac{B \sigma^3 E}{\sigma_{\partial \partial} - \sigma} [3f_* + (3/4) f_*^3]. \quad (9.160)$$

Здесь

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \Lambda^2, (\Lambda = 2l / h).$$

Разделив переменные и проинтегрировав (9.160) от f_0 до f_* получим:

$$t = [(\sigma_{кр} - \sigma) / 6EB\sigma^3] \ln \left(\frac{4 + f_*^0}{4 + f_*^2} \frac{f_*^2}{f_*^0} \right). \quad (9.161)$$

Здесь f_*^0 – безразмерный мгновенный прогиб, определяемый из решения упругой задачи:

$$f_*^0 = f_{*0} / (1 - \rho).$$

Выражение (9.161) характеризует время, необходимое для достижения заданного прогиба f_* при данном мгновенном прогибе f_*^0 . Критическая ситуация, характеризующаяся исчерпанием несущей способности стержня и быстрым нарастанием прогибов, наступает при некотором критическом времени $t_{кр}$, когда $f_* \rightarrow \infty$. В этом случае из (9.156) следует:

$$t = [(\sigma_{кр} - \sigma) / 6EB\sigma^3] \ln((4 + f_*^2) / f_{0*}^2).$$

Если $\sigma = \sigma_{кр}$, то $t_{кр} = 0$, т.е. наступает мгновенная потеря устойчивости. При $\sigma < \sigma_{кр}$ критическое время увеличивается. На рис. 9.48 а,б приведены зависимости безразмерного прогиба f_* / f_{*0} от времени t для $\sigma = 0,6\sigma_{кр}$ и критического времени $t_{кр}$ от безразмерного параметра нагрузки $p = \sigma / \sigma_{кр}$. В расчётах было принято $\Lambda = 60$; $E = 1 \tilde{A} \tilde{I} \tilde{\alpha}$; $B = 10^{-6} \frac{1}{(\tilde{l} \tilde{I} \tilde{\alpha}^3 \cdot \tilde{n})}$;

$\sigma_{кр} = 2,74 \text{ МПа}$. При $t \rightarrow t_{кр}$ прогибы стержня неограниченно увеличиваются.

При линейной неограниченной ползучести ($n = 1$) вместо уравнения (9.158) получаем:

$$\left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{\partial^2 \dot{V}_x}{\partial \xi^2} \right) + \left(\frac{\sigma}{E} \right) \dot{V}_* + B\sigma V_* = 0.$$

Приняв прогиб V_* в той же форме (9.159), имеем:

$$(\sigma_{кр} - \sigma) f_* = EB\sigma f_*,$$

а после интегрирования:

$$t = [(\sigma_{кр} - \sigma) / EB\sigma] \ln(f_* / f_{0*}).$$

Следовательно, $t \rightarrow \infty$ при $f_* \rightarrow \infty$, т.е. бесконечно большой прогиб реализуется в течение бесконечно большого времени, иными словами, в

условиях неограниченной ползучести конечного, отличного от нуля предела длительной устойчивости не существует.

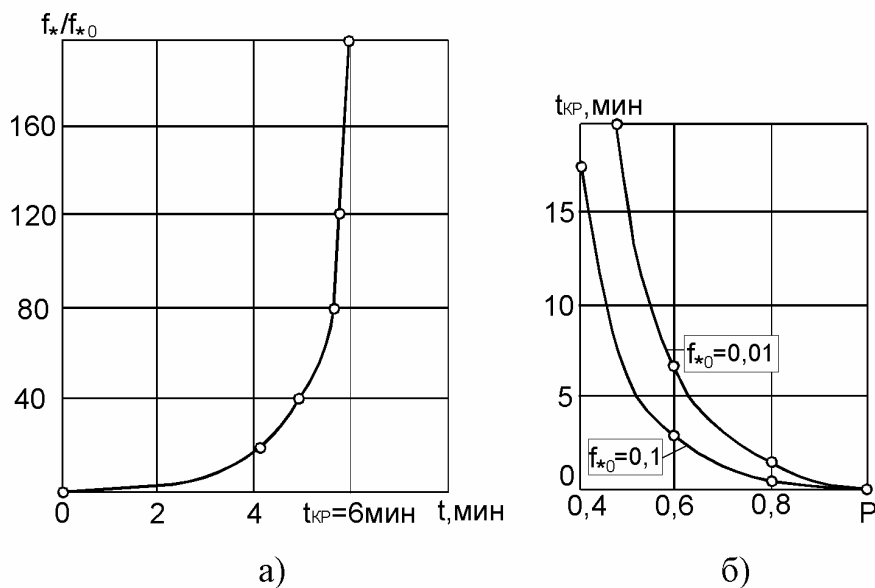


Рис. 9.48

9.17. Устойчивость плоской формы изгиба балок

Балка, изогнутая в своей плоскости, может потерять устойчивость своей плоской формы изгиба при некотором критическом значении внешней нагрузки и выпучиться в сторону (рис. 9.51). При этом поперечное сечение балки повернётся, т.е. балка будет испытывать изгиб с кручением.

Рассмотрим свободно опёртую балку длиной l , изгибаемую по концам моментом m (рис. 9.51, а). В докритическом состоянии дифференциальное уравнение изогнутой оси имеет вид:

$$EJ_{\delta} \frac{d^2 V}{dz^2} = -m = M_{\delta}, M_y = M_z = 0. \quad (9.162)$$

Интегрируя дважды, получим:

$$\frac{dV}{dz} \approx \theta = -\frac{m}{EJ_x} z + C_1;$$

$$V = -\frac{mz^2}{2EJ_x} + C_1 z + C_2.$$

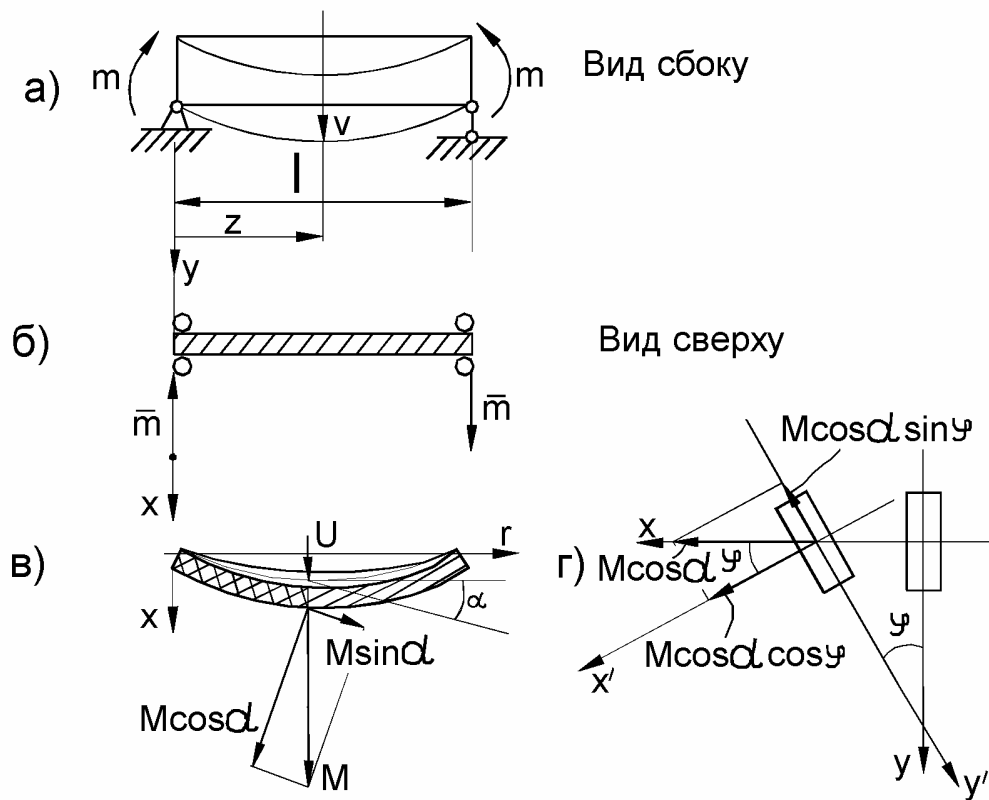


Рис. 9.49

Так как при $z = 0, l$ прогиб $V = 0$, то $C_1 = \frac{ml}{2EJ_\delta}, C_2 = 0$ и потому

$$V = \frac{mz}{2EJ_\delta} (l - z).$$

Максимальное значение прогиба:

$$V_{\max} = V\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ml^2}{8EJ_x}.$$

На рис. 9.50 показан график зависимости $V_{\max} = f$ от значений момента m .

Кружочек отвечает моменту появления пластических деформаций (пределу пропорциональности $m_{\text{пл}}$), сплошной кружочек – предельному моменту $m_{\text{пред}}$, при котором происходит образование пластического шарнира и исчерпание несущей способности балки, тонкая линия соответствует упругопластическому поведению балки.

Если сечение балки узкое (высокое), как у полосы или двутавра (рис. 9.47), то при некотором критическом значении изгибающего момента $m_{\text{кр}}$ произойдет бифуркация решения, и балка получит боковое выпучивание с закручиванием.

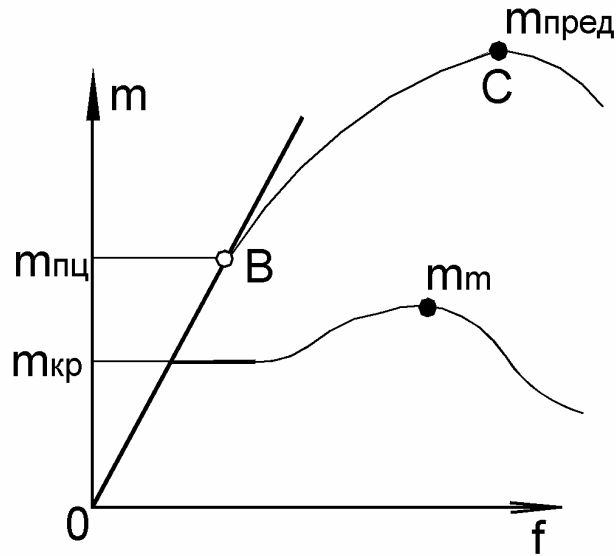


Рис. 9.50

Пусть угол $\alpha \approx dU / dz$ характеризует наклон изогнутой оси балки в плоскости $x - z$ при боковом отклонении, а φ - угол закручивания в некотором произвольном сечении z . Представим момент $M = m$ в сечении в виде вектора $\vec{M}$ по правилу правого винта (буравчика). Тогда, проецируя на оси x', y', z' , отнесённые к сечению (рис. 9.51,г), получим:

$$M_x = m \cos \alpha \cos \varphi, M_y = m \cos \alpha \sin \varphi, M_z = m \sin \alpha.$$

Следовательно, дифференциальные уравнения изгиба и кручения принимают вид

$$\begin{cases} EJ_x \frac{d^2 V}{dz^2} = -M_x = -m \cos \alpha \cos \varphi \approx -m, \\ EJ_y \frac{d^2 U}{dz^2} = -M_y = -m \cos \alpha \sin \varphi \approx -m \varphi, \\ GJ_{\varphi} \frac{d\varphi}{dz} = m \sin \alpha \approx m \frac{dU}{dz}. \end{cases}$$

где учтена малость величин U, V, α, φ .

Для прямоугольника:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}, J_y = \frac{hb^3}{12}, J_{\varphi} = \beta \left(\frac{h}{b} \right) hb^3.$$

Первое уравнение совпадает с (9.162) и описывает докритический изгиб после точки бифуркации А.

Дифференцируя третье уравнение по z и исключая с помощью второго уравнения производную d^2U/dz^2 , получаем:

$$GJ_{кр} \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{m^2}{EJ_y} \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + k^2\varphi = 0, \quad (9.163)$$

где

$$k^2 = \frac{m^2}{GJ_{кр} EJ_y}. \quad (9.164)$$

Общее решение уравнения (9.163) имеет вид

$$\varphi = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz. \quad (9.165)$$

Удовлетворяя (9.165) граничным условиям:

$$\varphi = 0 \text{ при } z = 0, z = l,$$

получим

$$C_2 = 0, C_1 \sin kl = 0. \quad (9.166)$$

Если положим в (9.166) $C_1 = 0$, то получим тривиальное решение, при котором балка не получает бокового выпучивания. Если $C_1 \neq 0$, то $\sin kl = 0$, откуда $kl = \pi$ и, согласно (9.159), находим:

$$m_{кр} = \frac{\pi \sqrt{GJ_{кр} EJ_y}}{l}.$$

Более трудным оказывается решение задач о плоской форме изгиба при поперечном изгибе. Так, для консольной балки, нагруженной поперечной силой, имеем:

$$P_{кр} = \frac{4,013 \sqrt{GJ_{кр} EJ_y}}{l^2}.$$

При изгибе шарнирно опёртой балки длиной l силой P , приложенной посередине пролёта, имеем:

$$P_{кр} = \frac{16,94 \sqrt{GJ_{кр} EJ_y}}{l^2},$$

а при действии распределённой нагрузки q :

$$q_{кр} = \frac{28,5 \sqrt{GJ_{кр} EJ_y}}{l^2}.$$

9.18. Энергетический метод определения критических нагрузок

Энергетический метод представляет собой один из способов определения критических нагрузок. Пусть согласно методу проб Эйлера сжатый силами P стержень не вернулся в исходное состояние равновесия (рис. 9.51).

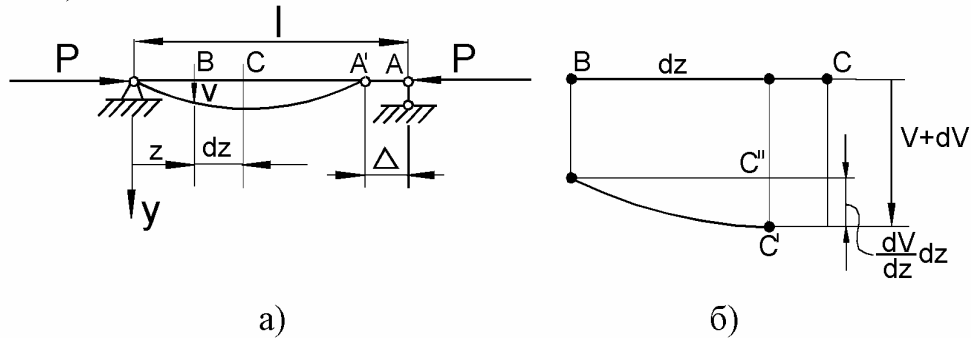


Рис. 9.51

При этом подвижная шарнирная опора переместится на величину Δ так, что сила P совершит работу $A = P\Delta$, а стержень выпучится (изогнётся). Энергия изгиба:

$$U_{изг} = \int_0^l \frac{M_u^2 dz}{2EJ_u}$$

Учитывая, что $M_u = -EJ_u V''$, получим:

$$U_{изг} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_u (V'')^2 dz. \quad (9.167)$$

Рассмотрим элемент стержня $BC = dz$. Этот элемент к моменту потери устойчивости уже сжат, и при упругом изгибе его длина не меняется. После изгиба элемент BC займёт положение $B'C' = dz$. Поэтому укорочение стержня BC по направлению z будет:

$$d\Delta = BC - B'C' = dz - \sqrt{dz^2 - dV^2} = dz \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{dV}{dz} \right)^2} \right] =$$

$$dz \left\{ 1 - \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \dots \right] \right\} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 dz.$$

Сближение концов стержня при потере устойчивости:

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 dz. \quad (9.168)$$

Работа, совершаемая силой P , определится соотношением:

$$A = P\Delta = \frac{1}{2} P \int_0^l \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 dz.$$

Приравнявая выражение (9.167), (9.168), получим:

$$P_{кр} = \frac{\int_0^l EJ \left(\frac{d^2V}{dz^2} \right)^2 dz}{\int_0^l \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 dz}. \quad (9.169)$$

Если точная функция прогибов стержня известна, то значение критической силы находится просто. Для шарнирно опёртого стержня $V = f \sin \pi z / l$, что даёт известную формулу:

$$P_{кр} = \frac{EJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 f^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz}{f^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \int_0^l \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

В общем случае функция прогибов V неизвестна, и её задают приближённо. Пусть, например, в той же задаче $V = fz(l - z)$.

Тогда

$$P_{кр} = \frac{EJf^2 \int_0^l 4dz}{f^2 \int_0^l (1 - 2z)^2 dz} = \frac{12EJ}{l^2} > \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Как видно, при приближённом задании прогиба, удовлетворяющем граничным условиям, критическое значение силы больше, чем при точном задании прогиба.

Можно показать в общем случае, что по сравнению со всеми функциями прогиба $V(z)$, удовлетворяющим граничным условиям, истинная функция прогиба даёт минимальное значение $P_{кр}$.

Пример. Найти критическую силу для сжатой колонны (рис. 9.54).

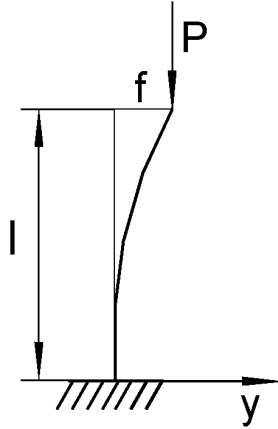


Рис. 9.52

Граничные условия для данной задачи имеют вид:

$$V = 0, V' = 0 \text{ при } z = 0.$$

Примем для прогиба выражение:

$$V = \left(\frac{z}{l}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{z}{l}\right)^n, \quad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям. Сохраним в (1) два члена ряда:

$$V = l_0 \left(\frac{z}{l}\right)^2 + C_1 \left(\frac{z}{l}\right)^3. \quad (2)$$

После подстановки выражения прогиба (2) в (9.164) и интегрирования, получим:

$$P = \frac{4EJ}{l^2} \frac{1 + 3\frac{C_1}{C_0} + 3\left(\frac{C_1}{C_0}\right)^2}{\frac{4}{3} + 3\frac{C_1}{C_0} + \frac{9}{5}\left(\frac{C_1}{C_0}\right)^2}. \quad (3)$$

Если выражение прогиба положим $C_1 = 0$, т.е. сохраним только один член, то найдём минимальное значение силы P , равное:

$$P_{кр} = \frac{3EJ}{l^2},$$

что даёт погрешность по отношению к точному значению $P_{кр} = 2,46EJ/l^2$, равную 21,6%.

При двух значениях постоянных C_0, C_1 минимальное значение P найдём, дифференцируя (3) по C_1/C_0 и приравняв выражение к нулю:

$$\frac{dP}{d\left(\frac{C_1}{C_0}\right)} = \frac{\left[\frac{4}{3} + 3\frac{C_1}{C_0} + \frac{9}{5}\left(\frac{C_1}{C_0}\right)^2\right] \left(3 + 6\frac{C_1}{C_0}\right) - \left[1 + 3\frac{C_1}{C_0} + 3\left(\frac{C_1}{C_0}\right)^2\right] \left(3 + \frac{18}{5}\frac{C_1}{C_0}\right)}{\left[\frac{4}{3} + 3\frac{C_1}{C_0} + \frac{9}{5}\left(\frac{C_1}{C_0}\right)^2\right]^2},$$

или

$$18\left(\frac{C_1}{C_0}\right)^2 + 22\left(\frac{C_1}{C_0}\right) + 5 = 0,$$

откуда

$$\frac{C_1}{C_0} = -0,301 \text{ или } \frac{C_1}{C_0} = -0,92.$$

Наименьшее значение критической силы даёт первый корень:

$$P_{кр} = \frac{2,49EJ}{l^2},$$

что отличается от точного решения только на 0,92 %.

Глава 10

Колебания упругих систем

Колебаниями упругих систем называют их повторяющиеся, периодические движения, которые они совершают около своего статического положения равновесия.

Поведение конструкций и машин при их колебательных движениях требует особого внимания инженеров. Известны случаи, когда строительные сооружения или машины, рассчитанные с большим запасом на статическую прочность, разрушались под действием сравнительно небольших периодически действующих сил вследствие резонанса, либо, так называемой, колебательной неустойчивости.

10.1. Степень свободы колеблющейся системы

Колебания упругих систем принято различать по числу степеней свободы n . Для упругой системы с геометрическими (голономными) связями под числом степеней свободы понимается число независимых координат, определяющих положение системы.

В случае кинематических (неголономных) связей число степеней свободы определяется числом независимых возможных перемещений.

На рис. 10.1 приведены примеры систем с сосредоточенными массами, степень свободы которых определяется по числу независимых перемещений Δ_i , этих масс. В этих примерах мы пренебрегаем массой, распределённой в элементах самой системы.

Реальная система обладает бесконечным числом степеней свободы. Рассмотрим, например, балку на двух опорах (рис. 10.2). Ее можно разбить на любое число участков (в том числе и бесконечно малых dl). Массу каждого участка можно сосредоточить в его середине. В зависимости от числа полученных сосредоточенных масс и количества их независимых перемещений мы можем легко подсчитать степень свободы системы. В пределе, когда число участков стремится к бесконечности, приходим к системе с бесконечным числом степеней свободы. В изображенном на рис. 10.2 случае $n = 4$.

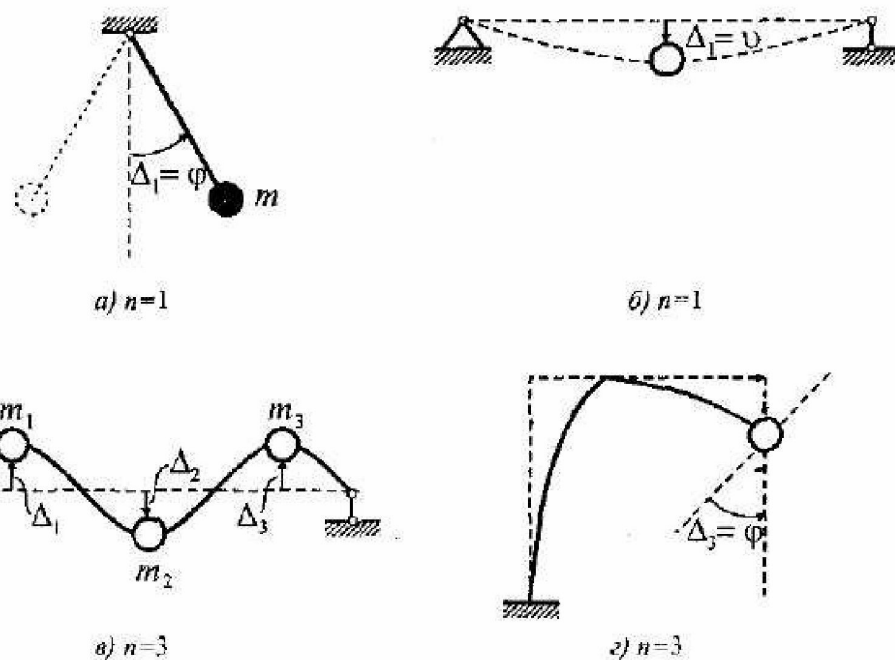


Рис. 10.1

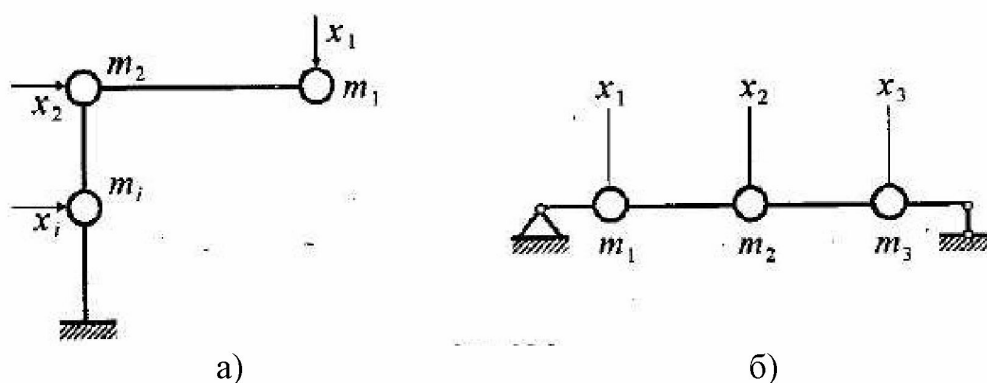


Рис. 10.2

Таким образом, число степеней свободы системы определяется фактически выбором ее расчетной схемы т.е. степенью приближения, к реальной системе. Если, например, балка несет один сосредоточенный груз (рис. 10.1, а), масса которого значительно превышает массу самой балки, то в расчетной схеме системы естественно пренебречь массой балки и считать $n = 1$.

10.2. Канонические уравнения колебания упругих систем с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим упругую систему, несущую несколько сосредоточенных масс ($i = 1, 2, \dots, i$). Пусть x_i - силы, приложенные к этим грузам в направлении их смещений (рис. 10.3).

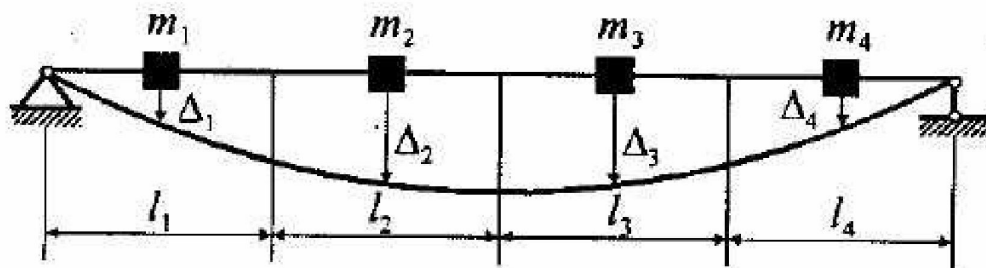


Рис. 10.3

Тогда перемещения этих грузов в направлении приложенных сил по закону Гука и принципу независимости действия сил определяются по формулам:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n, \\ \dots\dots\dots \\ \Delta_n = \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n \end{cases} \quad (10.1)$$

или в сокращённой записи

$$\Delta_i = \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in}X_n = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}X_j. \quad (10.2)$$

Здесь δ_{ij} - коэффициенты влияния, определяемые с помощью формулы Мора. Представим теперь, что наша система пришла в движение. Выясним природу сил X_i в этом случае. На сосредоточенную массу может действовать внешняя сила $P_i(t)$, зависящая от времени и, согласно принципу Даламбера, - сила инерции $\left(-m_i \ddot{\Delta}_i\right)$. Следовательно,

$$X_i = P_i(t) - m_i \ddot{\Delta}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, h) \quad (10.3)$$

Здесь точки над Δ_i означают двукратное дифференцирование по времени. В свою очередь сила P_i может состоять из постоянной P_i^0 (напри-

мер, вес груза) и переменной $\Delta P_i(t)$ частей:

$$P_i = P_i^0 + \Delta P_i(t). \quad (10.4)$$

Подставляя (10.3) в (10.2), получим форму записи уравнений движения упругих систем с конечным числом степеней свободы:

$$\Delta_j + \sum_{j=1}^n \delta_{ij} m_j \ddot{\Delta}_j = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} P_j(t), \quad (10.5)$$

которые называются каноническими уравнениями колебаний упругих систем. При исследовании колебаний различают собственные (свободные) и вынужденные колебания. Под собственными колебаниями системы понимают такие, которые она совершает при отсутствии внешнего силового воздействия, т.е. предоставленная самой себе. В этом случае $\Delta P_i(t) = 0$, и колебания поддерживаются только упругими силами. Под вынужденными колебаниями упругой системы понимают такие, которые происходят под действием возмущающих сил $\Delta P_i(t)$.

10.3. Собственные колебания упругих систем с конечным числом степеней свободы

В этом случае $\Delta P_i = 0$, и уравнения (10.5) принимают вид

$$\Delta_i + \sum_j \delta_{ij} m_j \ddot{\Delta}_j = \sum_j \delta_{ij} P_j^0, \quad (10.6)$$

Это система неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка. В частном случае системы с одной степенью свободы ($i = j = 1$) получим:

$$\Delta_1 + \delta_{11} m_1 \ddot{\Delta}_1 = \delta_{11} P_1^0 \quad (10.7)$$

или, так как $P_1^0 = m_1 g_1$:

$$\ddot{\Delta}_1 + \omega^2 \Delta_1 = \frac{P_1^0}{m_1}, \quad (10.8)$$

где обозначено

$$\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11} m_1}. \quad (10.9)$$

Решение (10.8) будет:

$$\Delta_1 = A \sin(\omega t + \varphi) + \Delta_{c0}^0, \quad (10.10)$$

где $\Delta_{c0}^0 = P_1^0 \delta_{11}$ – частное решение уравнения (10.8), представляющее статическое перемещение массы, A – амплитуда колебания, φ – начальная фаза колебания, ω – круговая частота (рис. 10.4).

Время T одного колебательного движения точки называют *периодом колебания*. Величину $\nu = 1/T$, характеризующую число колебаний в единицу времени, – *частотой колебаний*.

Свяжем частоту колебаний ν с круговой частотой ω . Так как при изменении времени на T система приходит, вследствие периодичности движения, в одно и то же положение, то

$$\Delta_1(T + t) = \Delta_1(t),$$

или

$$\sin[\omega(t + T) + \varphi] = \sin(\omega t + \varphi),$$

откуда имеем:

$$\begin{aligned} \omega(t + T) &= \omega t + 2\pi, \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \end{aligned} \quad (10.11)$$

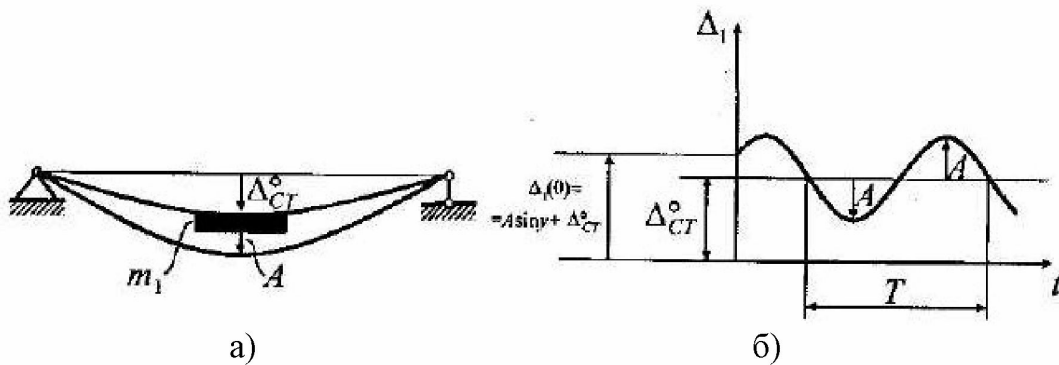


Рис. 10.4

Максимальное перемещение

$$\Delta_{1\max} = A + \Delta_{cm}^0 = k\Delta_{cm}^0, \quad (10.12)$$

где через

$$k = 1 + \frac{A}{\Delta_{cm}^0} \quad (10.13)$$

обозначен коэффициент динамичности.

Для определения A необходимо задать начальные условия:

$$\Delta_1 = \Delta_1(0), \dot{\Delta}_1 = v_0 \text{ при } t = 0. \quad (10.14)$$

Тогда

$$A \sin \varphi + \Delta_{ct}^0 = \Delta_1(0), \quad A \omega \cos \varphi = v_0,$$

откуда

$$A = \sqrt{[\Delta_1(0) - \Delta_{ct}^0]^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}. \quad (10.15)$$

Динамические максимальные напряжения определяются на основании закона Гука и соотношения (10.12) по формуле:

$$\sigma_{\max \text{ дин}} = k \sigma_{\max \text{ ст}}. \quad (10.16)$$

Если число степеней свободы $n > 1$, то решением (10.6) будет

$$\Delta_i = A_i \sin(\omega t + \varphi) + \Delta_i^0, \quad (10.17)$$

где Δ_i^0 - частные решения, представляющие собой статические перемещения масс m , A_i - амплитуды колебаний этих масс (рис. 10.5).

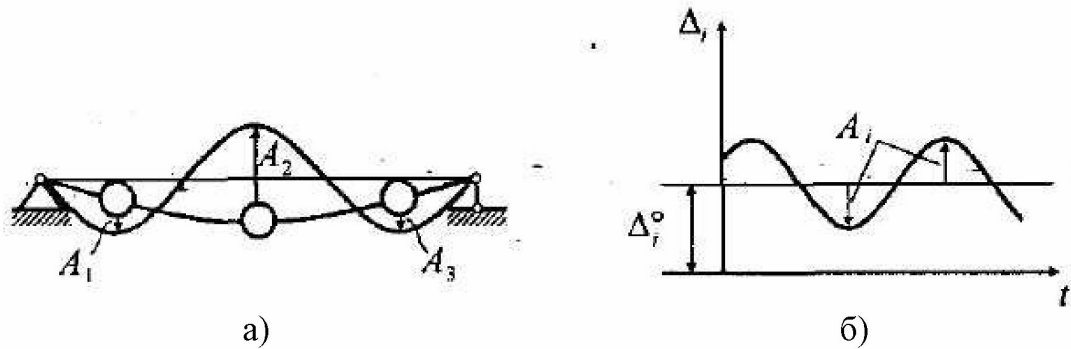


Рис. 10.5

Подставляя выражения (10.17) в (10.6), найдем уравнения:

$$A_i - \omega^2 \sum_{j=1}^n \delta_{ij} m_j A_j = 0, \quad (i=1, 2, \dots, h), \quad (10.18)$$

которые служат для определения собственных частот ω_k , ($k=1, 2, \dots, n$) колебаний упругой системы с n степенями свободы.

Например, для системы с двумя степенями свободы ($n=2$) имеем:

$$\begin{cases} A_1(-1 + \omega^2 \delta_{11} m_1) + A_2 \omega^2 \delta_{12} m_2 = 0, \\ + A_1 \omega^2 \delta_{21} m_1 + A_2(-1 + \omega^2 \delta_{22} m_2) = 0. \end{cases} \quad (10.19)$$

Однородная система уравнений (10.18) имеет отличные от нуля решения

только в том случае, если определитель, составленный из ее коэффициентов равен нулю:

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} -1 + \omega^2 \delta_{11} m_1 & \omega^2 \delta_{12} m_2 & \dots & \omega^2 \delta_{1n} m_n \\ \omega^2 \delta_{21} m_1 & -1 + \omega^2 \delta_{22} m_2 & \dots & \omega^2 \delta_{2n} m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^2 \delta_{n1} m_1 & \omega^2 \delta_{n2} m_2 & \dots & -1 + \omega^2 \delta_{nn} m_n \end{vmatrix} \quad (10.20)$$

Определитель (10.20) после раскрытия приводит к уравнению степени n относительно ω , которое имеет n корней ω_k . Каждый корень дает частоту собственных колебаний упругой системы, причем их можно пере- нумеровать так, что

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n \quad (10.21)$$

Коэффициенты динамичности

$$k_i = 1 + \frac{A_i}{\Delta_i^0}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10.22)$$

Выше мы рассматривали собственные колебания при отсутствии сил сопротивления. При таком предположении колебания продолжаются сколь угодно долго. В действительности всегда существуют силы (сопротивления воздуха, воды и др.), направленные против движения масс и приводящие к постоянному уменьшению амплитуды A_i собственных колебаний вплоть до остановки движения. Предположим, что силы сопротивления R_i пропорциональны первой степени скорости, т.е.:

$$R_i = \alpha \dot{\Delta}_i.$$

В этом случае вместо уравнений (10.6) имеем:

$$\Delta_i + \sum_j \left(\delta_{ij} m \ddot{\Delta}_j + \alpha \dot{\Delta}_j \right) = \sum_j \delta_{ij} P_j^0. \quad (10.23)$$

В частном случае системы с одной степенью свободы имеем:

$$\Delta_i + \left(\delta_{11} m \ddot{\Delta}_1 + \alpha \dot{\Delta}_1 \right) = \delta_{11} P_1^0, \quad (10.24)$$

или, в силу $P_1^0 = m_1 g$

$$\ddot{\Delta}_1 + 2n \dot{\Delta}_1 + \omega^2 \Delta_1 = 0, \quad (10.25)$$

где $2n = \alpha / m$, $\omega^2 = 1 / m \delta_{11}$.

Решение уравнения можно (10.25) записать в виде:

$$\Delta_1 = A e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \varphi) + \Delta_{cm}^0, \quad (10.26)$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}. \quad (10.27)$$

Из (10.26) видно, что с ростом времени t амплитуда колебаний $A_1 = Ae^{-nt}$ уменьшается, как показано на рис. 10.6, причем частота колебаний ω_1 мало отличается от ω в силу малости величины n .

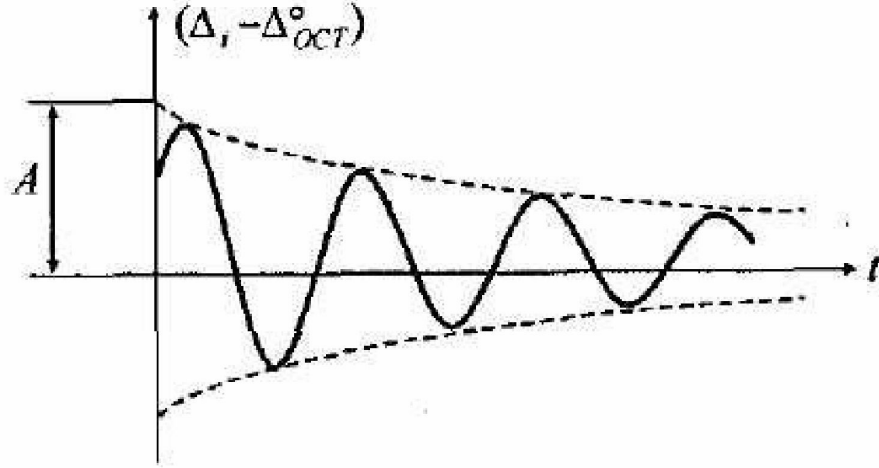


Рис. 10.6

Величина

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{b}\right)^2}} > T \quad (10.28)$$

является периодом колебаний, который больше, чем период колебаний T в отсутствие сил сопротивления. Через период колебаний T_1 отношение амплитуд будет равно:

$$\frac{A_1(t)}{A_1(t + T_1)} = \frac{e^{-nt}}{e^{-n(t+T_1)}} = e^{nT_1}, \quad (10.29)$$

или, логарифмируя, находим:

$$nT_1 = \ln \frac{A_1(t)}{A_1(t + T_1)}. \quad (10.30)$$

Как видим, амплитуда убывает по закону (10.29). Величину e^{nT_1} называют *декрементом колебаний*, а величину nT_1 - *логарифмическим декрементом*. Аналогичные результаты получим для упругих систем при $n > 1$.

Пример 1. Определить частоту ω собственных колебаний массы m рамы (рис. 10.7).

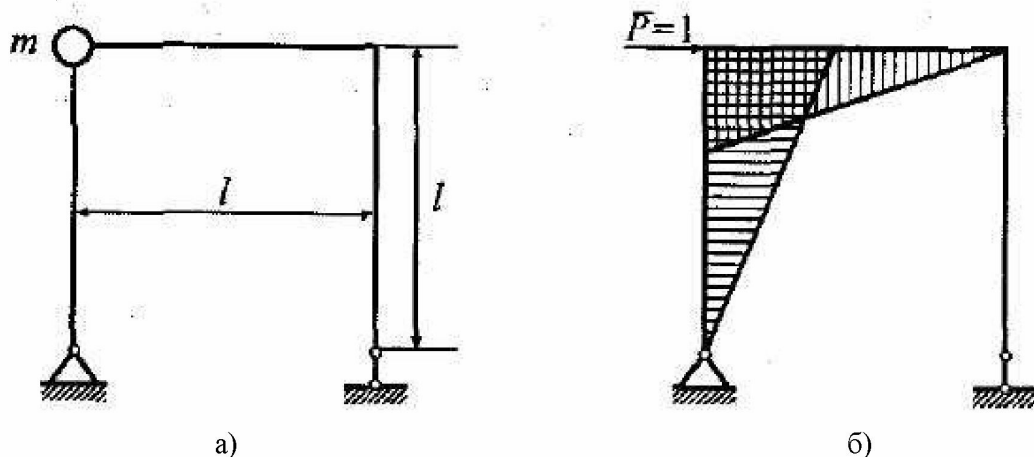


Рис. 10.7

Решение. Система обладает одной степенью свободы, так как масса имеет возможность перемещаться только в горизонтальном направлении. Частоту собственных колебаний определяем по формуле (10.9)

$$\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11} m}. \quad (1)$$

Для определения δ_{11} строим эпюру моментов от единичной силы $\bar{P} = 1$ приложенной к массе в горизонтальном направлении и вычисляем δ_{11} графоаналитическим способом по формуле Мора:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} l^2 \right) \frac{2}{3} 2l = \frac{2l}{3EJ}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), найдем:

$$\omega^2 = \frac{3EJ}{2l^3 m}. \quad (3)$$

Пример 2. Определить частоту собственных крутильных колебаний вала длиной l с диском массы m на конце (рис. 10.8,а).

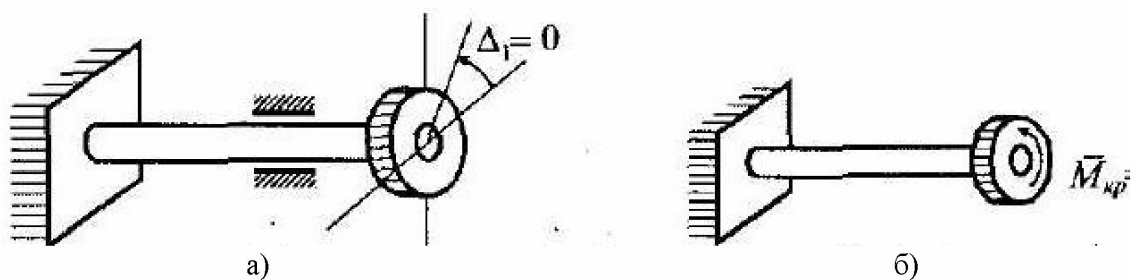


Рис. 10.8

Решение. Положение системы можно определить одним числом, углом поворота диска $\Delta_1 = \theta$. Следовательно, система обладает одной степенью свободы.

Согласно (10.1) имеем:

$$\theta = \delta_{11} X_1 \quad (1)$$

Сила X_1 в данном случае есть момент инерции системы:

$$X_1 = -J \ddot{\theta}, \quad (2)$$

где

$$J = \frac{1}{2} m R^2 -$$

момент инерции диска массой m и радиуса R .

На основании (2) уравнение (1) принимает вид:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0,$$

где

$$\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11} J}.$$

Согласно рисунку (10.7,б) имеем:

$$\delta_{11} = \frac{l_{kp}}{G J_p}$$

Поэтому

$$\omega^2 = \frac{G J_p}{I l}.$$

Пример 3. Определить частоты собственных колебаний балки с двумя сосредоточенными массами (рис. 10.9).

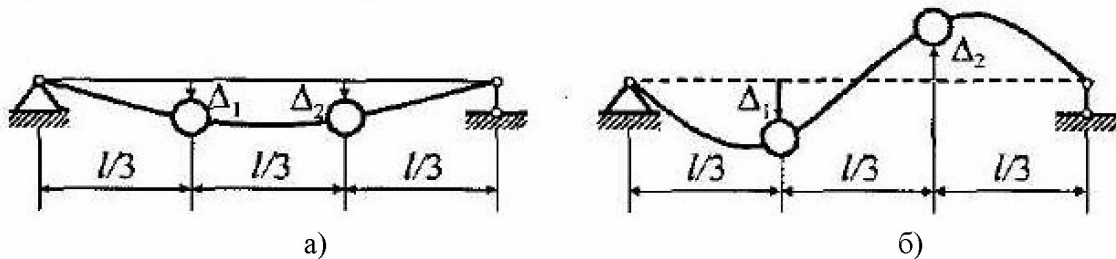


Рис. 10.9.

Решение. Для определения частот собственных колебаний имеем уравнение (10.20), которое для $n = 2$ принимает вид:

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} \omega^2 m_1 \delta_{11} - 1 & \omega^2 m_2 \delta_{12} - 1 \\ \omega^2 m_1 \delta_{21} & \omega^2 m_2 \delta_{22} - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Раскрывая определитель (1), получим:

$$m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \omega^4 - (\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2) \omega^2 + 1 = 0. \quad (2)$$

На рис. 10.10 построены эпюры моментов от единичных сил:

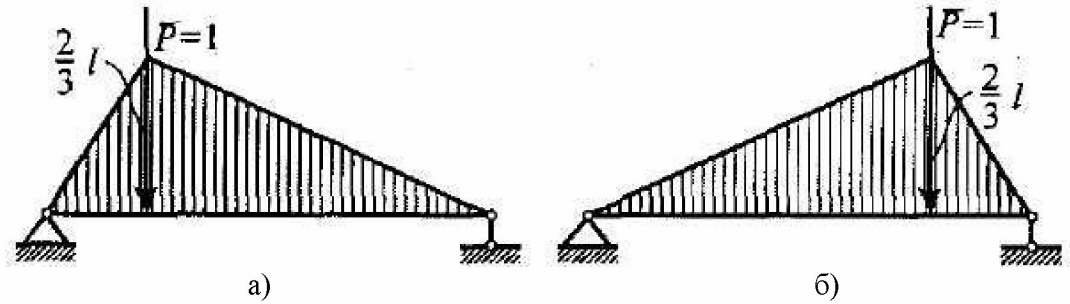


Рис. 10.10

Согласно формуле Мора (7.18) имеем:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4l^3}{9EJ}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7l^3}{18EJ}.$$

Если принять $m_1 = m_2 = m_3$, то из (2) получим:

$$\omega_1^2 = \frac{6EJ}{5ml^3}, \quad \omega_2^2 = \frac{90EJ}{5ml^3},$$

причем $\omega_1 < \omega_2$. Таким образом, система имеет две собственные частоты колебаний,

Полагая в (10.19) $\omega = \omega_1$, получим $A_1 = A_2$. Полагая $\omega = \omega_2$ найдем $A = -A_2$. В первом случае массы колеблются в одной фазе (рис. 10.9,а), во втором случае - в противофазе (рис. 10.9,б).

В общем случае колебания с частотами ω_1 и ω_2 происходят одновременно. Закон движения в этом случае (каждой массы) будет:

$$\begin{cases} \Delta_1 = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \Delta_2 = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{cases} \quad (3)$$

где $A, B, \varphi_1, \varphi_2$ — постоянные, определяемые из начальных условий.

10.4. Вынужденные колебания упругих систем с конечным числом степеней свободы. Резонанс.

Возмущающие силы ΔP_i представим в форме:

$$\Delta P_i = P_i^* \sin \Omega_i t, \quad (10.31)$$

где Ω_i — круговая частота возмущающей силы.

В этом случае канонические уравнения движения примут вид

$$\Delta_i + \sum_j \delta_{ij} m_j \ddot{\Delta}_j = \sum_j \delta_{ij} P_j^0 + \sum_j \delta_{ij} P_j^* \sin \Omega_j t. \quad (10.32)$$

В частном случае системы с одной степенью свободы ($i = j = 1$) вместо (10.32) будем иметь:

$$\Delta_i + \delta_{11} m_1 \ddot{\Delta}_i = \delta_{11} P_1^0 + \delta_{11} P_1^* \sin \Omega_1 t, \quad (10.33)$$

или

$$\ddot{\Delta}_1 + \omega^2 \Delta_1 = \frac{P_1^0}{m_1} + \frac{P_1^*}{m_1} \sin \Omega_1 t. \quad (10.34)$$

Решением уравнения (10.34) будет:

$$A_1 = A \sin(\omega t + \varphi) + \Delta_{cr}^0 + B \sin \Omega_1 t, \quad (10.35)$$

где

$$\Delta_{cr}^0 = P_1^0 \delta_{11}. \quad (10.36)$$

Подставляя (10.35) в (10.34), найдем постоянную В:

$$B(\omega^2 - \Omega^2) \sin \Omega t = \frac{P_1^*}{m_1} \sin \Omega t,$$

откуда

$$B = \frac{P_1^*}{m_1 (\omega^2 - \Omega^2)}. \quad (10.37)$$

Если учесть трение, то собственные колебания системы, определяемые в (10.35) первым слагаемым, со временем затухнут и для установившегося режима вынужденных колебаний будем иметь:

$$\Delta_1 = \Delta_{cr}^0 + B \sin \Omega_1 t. \quad (10.38)$$

Величина В представляет собой амплитуду вынужденных колебаний. Максимальное перемещение:

$$\Delta_{1\max} = \Delta_{cr}^0 + B = k \Delta_{cr}^0 \quad (10.39)$$

где

$$k = 1 + \frac{B}{\Delta_{cr}^0} - \quad (10.40)$$

коэффициент динамичности.

Максимальное динамическое напряжение

$$\sigma_{\max \text{ дин}} = k \sigma_{\max \text{ ст}}. \quad (10.41)$$

При $\omega \rightarrow \Omega$ имеем $B \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, $\Delta_{1\max} \rightarrow \infty$, $\sigma_{\max \text{ дин}} \rightarrow \infty$.

Явление резкого увеличения амплитуды колебаний В и $\sigma_{\max}$ при совпадении частот собственных колебаний и возмущающей силы носит

название *резонанса*, а само совпадение частот:

$$\omega = \Omega - \quad (10.42)$$

условия резонанса.

Возвратимся к системе с n степенями свободы. Решение системы уравнений (10.32) представим в виде

$$\Delta_i = A_i \sin(\omega t + \varphi) + \Delta_i^0 + B_i \sin \Omega t. \quad (10.43)$$

Подставляя (10.43) в (10.32), найдем:

$$B_i - \Omega^2 \sum_{j=1}^n \delta_{ij} m_j B_j = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} P_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10.44)$$

Например, для системы с двумя степенями свободы ($n = 2$) получим:

$$\begin{cases} B_1 (\Omega^2 \delta_{11} m_1 - 1) + B_2 \Omega^2 \delta_{12} m_2 = \delta_{11} P_1^* + \delta_{12} P_2^*, \\ B_1 \Omega^2 \delta_{21} m_1 + B_2 (\Omega^2 \delta_{22} m_2 - 1) = \delta_{21} P_1^* + \delta_{22} P_2^*. \end{cases} \quad (10.45)$$

Решение системы (10.44) имеет вид

$$B_i = \frac{D_i(\Omega, P_i^*)}{D(\Omega)}, \quad (10.46)$$

где $D(\Omega)$ определяется формулой (10.20), если заменить ω на Ω

При $\omega \rightarrow \Omega$ будем иметь:

$$D(\Omega) \rightarrow D(\omega) = 0, \quad (10.47)$$

и поэтому амплитуды вынужденных колебаний $B_i \rightarrow \infty$ т.е. имеет место резонанс.

В технике возмущающие силы бывают известны довольно редко.

Обычно известна только их частота Ω . Поэтому задача динамического расчета упругих систем сводится к определению собственных частот свободных колебаний с целью выявления возможности резонанса.

Пример. Определить критическое число n оборотов мотора, вес которого $P_0 = mg$ (рис. 10.11,а).

Решение. При критическом числе оборотов мотора имеет место резонанс, условием которого будет:

$$\omega = \Omega,$$

где

$$\Omega = \frac{\pi n}{30}, \quad \omega^2 = \frac{1}{\delta_{11} m}.$$

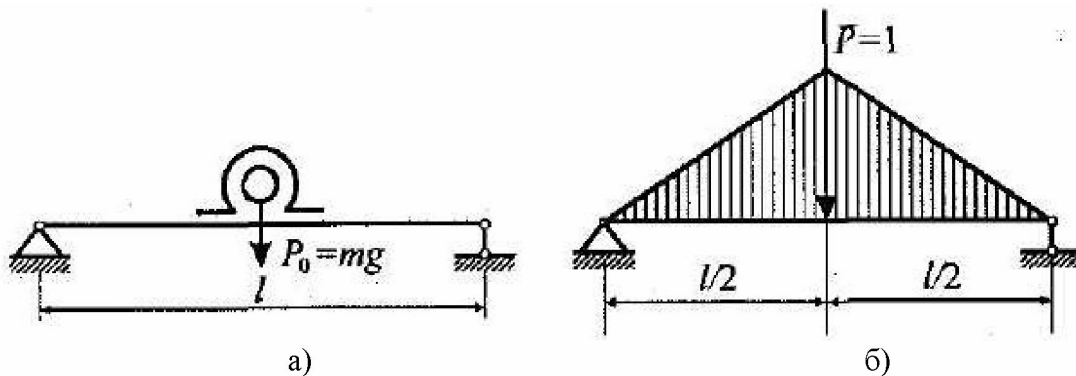


Рис. 10.11

На основании формулы Мора и рис. 10.11,б, находим:

$$\delta_{11} = \frac{\bar{P} l^3}{48EJ} = \frac{l^3}{48EJ}.$$

Следовательно,

$$\omega^2 = \frac{48EJ}{ml^3}, \quad n_{кр} = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}}.$$

10.5. Приближенные методы определения низших частот собственных колебаний упругих систем

В большем числе случаев собственная распределенная масса m упругих систем оказывается соизмеримой с присоединенными сосредоточенными массами. Поэтому сведение систем с бесконечным числом степеней свободы к системам с малым конечным числом степеней свободы оказывается не всегда приемлемым. В этих условиях предпочтительнее являются приближенные методы. Рассмотрим один из них – энергетический метод Релея.

Пусть имеется некоторая колебательная упругая система (рис. 10.12,а) несущая собственный вес и несколько сосредоточенных масс m_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Наиболее опасной является первая форма колебаний, когда все массы колеблются в одной фазе (изогнутая ось 1 на рис. 10.12,б). В этом случае перемещения и напряжения в системе – наибольшие (мы отвлекаемся здесь от вопроса усталости материала, для которого существенными могут оказаться колебания с высокой собственной частотой).

Рассмотрим первую форму колебаний упругой системы. Если рассматривать колебания относительно статического положения равновесия системы, то закон движения любой точки упругой системы можно записать в виде

$$\Delta = A \sin(\omega t + \varphi), \quad A = A(z). \quad (10.48)$$

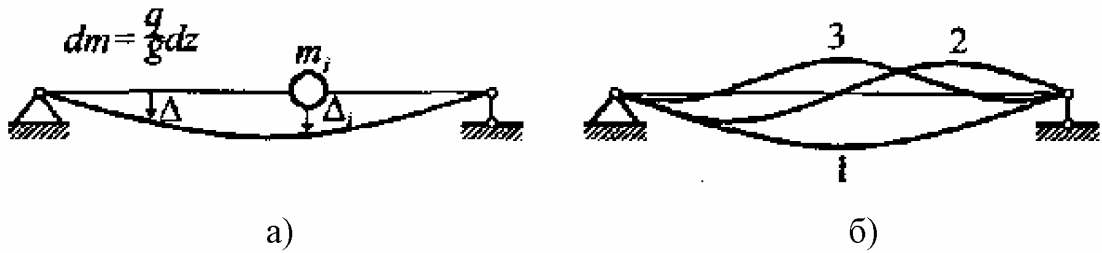


Рис. 10.12

Перемещение массы m_i будет:

$$\Delta_i = A_i \sin(\omega t + \varphi). \quad (10.49)$$

На основании закона сохранения энергии для любых двух положений системы имеем:

$$U_1 + T_1 = U_2 + T_2 = \text{const}, \quad (10.50)$$

где U - потенциальная энергия упругой системы,

$$T = \int_0^l \frac{dm \dot{\Delta}^2}{2} + \sum_i \frac{m_i \dot{\Delta}_i^2}{2} - \quad (10.51)$$

кинетическая энергия системы.

Рассмотрим в качестве первого положения такое, при котором все массы проходят статическое положение равновесия. В этом положении $\Delta_i = 0$ и потенциальная энергия $U_1 = 0$. Скорость

$$\dot{\Delta} = A\omega \cos(\omega t + \varphi); \quad \dot{\Delta}_i = A_i\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (10.52)$$

достигает максимального значения

$$\dot{\Delta}_{\max} = A\omega, \quad \dot{\Delta}_{i\max} = A_i\omega. \quad (10.53)$$

Поэтому максимального значения достигает кинетическая энергия системы:

$$T_{i\max} = \frac{\omega^2}{2} \left[\int A^2 dm + \sum_i A_i^2 m_i \right]. \quad (10.54)$$

В качестве второго положения рассмотрим момент наибольшего отклонения системы от статического положения равновесия, когда кинетическая энергия $T_2 = 0$, а потенциальная достигает своего максимального значения $U_{2\max} = U$, равенство (10.50) можно теперь написать на основании вышеприведенных рассуждений в виде $U_{2\max} = U$:

$$\frac{\omega^2}{2} \left[\int A^2 dm + \sum_i A_i^2 m_i \right] = U,$$

откуда получаем формулу Релея:

$$\omega^2 = \frac{2U}{\int A^2 dm + \sum A_i^2 m_i}. \quad (10.55)$$

Для вычисления необходимо знать форму деформированного состояния упругой системы. Если задать ее приближенно, то этим самым мы как бы накладываем на систему дополнительные связи, т.е. делаем ее более жесткой. Вычисленная при этом частота со будет несколько завышенной по сравнению с точным значением. Если форму деформированного состояния угадать точно, то формула Релея даст точное значение низшей частоты колебаний упругой системы.

В случае изгиба балки для вычисления и имеем формулу:

$$2U = \int \frac{M^2 dz}{EJ} = \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 A}{dz^2} \right) dz. \quad (10.56)$$

В случае растяжения – сжатия стержня:

$$2U = \int \frac{N^2 dz}{EF} = \int_0^l EJ \left(\frac{dA}{dz} \right)^2 dz, \quad (10.57)$$

так как

$$dA = \frac{N dz}{EF}; \quad N = EF \frac{dA}{dz}. \quad (10.58)$$

Для случая кручения:

$$2U = \int \frac{M^2 dz}{GJ_K} = \int_0^l GJ_K \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz, \quad (10.59)$$

так как

$$d\varphi = \frac{M dz}{GJ_K}, \quad M_z = GJ_K \frac{d\varphi}{dz}. \quad (10.60)$$

Пример 1. Определить низшую частоту собственных колебаний балки методом Релея, если вес единицы ее длины равен q (рис. 10.13).

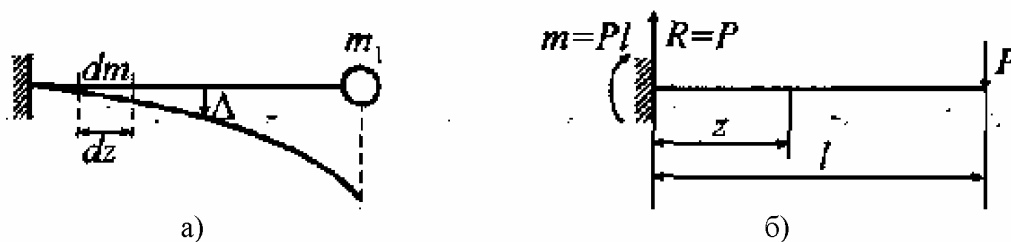


Рис. 10.13

Решение. Найдем сначала приближенное выражение изогнутой оси балки. Для этого к концу балки приложим поперечную силу P . Согласно методу начальных параметров, прогиб произвольной точки с координатой z будет:

$$A = v = v_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ} \left[-\frac{mz^2}{2} - \frac{Pz^3}{6} \right],$$

или, так как $v_0 = \theta_0 = 0, m = Pl$, то

$$A = \frac{P}{6EJ} [3z^2 l - z^3] = c(3z^2 l - z^3), A = A(z=l) = 2cl^3. \quad (1)$$

Вычислим потенциальную энергию согласно (10.56):

$$2u = EJc^2 \int_0^l (6l - 6z)^2 dz = 36EJc^2 \int_0^l (l^2 - 2lz + z^2) dz = 12EJc^2 l^2. \quad (2)$$

Знаменатель в формуле Релея (10.55) с учётом (1) будет равен:

$$\int_0^l A^2 dm + \sum A_i^2 m_i = c^2 \int_0^l (3z^2 l - z^3) dz + (2c)^2 m_1 = \frac{33q}{35g} c^2 l^7 + 4m_1 c^2 l^6, \quad (3)$$

поэтому, согласно (2), (3) и (10.55) имеем:

$$\omega^2 = \frac{12EJc^2 l^3}{\frac{33}{35} \frac{q}{g} c^2 l^7 + 4m_1 c^2 l^6} = \frac{3EJ}{\left[\frac{33q}{140g} l + m_1 \right] l^3}.$$

Точное решение этой же задачи есть:

$$\omega^2 = \frac{3EJ}{\left[\frac{ql}{4,12g} + m_1 \right] l^3}.$$

При $m_1 = 0$ легко подсчитать ошибку приближённого решения. Она составляет всего 1,5%.

Пример 2. Определить методом Релея низшую частоту собственных колебаний системы, состоящей из стержня и присоединенной к ней массы m . Масса стержня равна M (рис. 10.14).

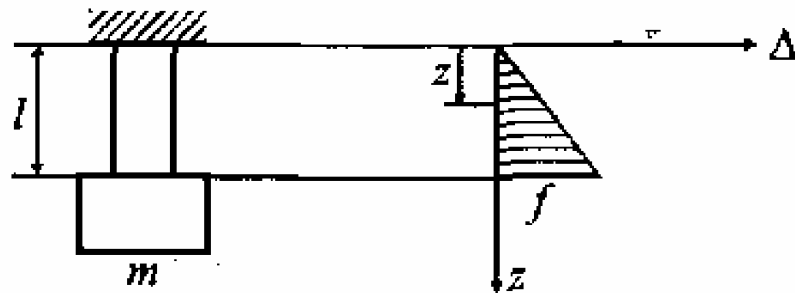


Рис. 10.14

Решение. Примем для перемещения поперечного сечения стержня выражение:

$$A = \frac{fz}{l}. \quad (1)$$

Согласно (10.57) с учётом (1), получим:

$$2U = EF \left(\frac{f}{l} \right)^2 \int_0^l dz = \frac{EFf^2}{l}. \quad (2)$$

Знаменатель в формуле (10.55):

$$\int_0^l A^2 dm + \sum A_i^2 m_i = \int_0^l \frac{f^2}{l^2} z^2 \frac{q}{g} dz + mf^2 = \frac{f^2 ql}{3g} + mf^2 = f^2 \left(m + \frac{1}{3} \frac{ql}{g} \right). \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в формулу Релея (10.55), найдём:

$$\omega^2 = \frac{EFf^2}{lf^2 \left(m + \frac{1}{3} M \right)} = \frac{EF}{l \left(m + \frac{1}{3} M \right)},$$

где $M = ql/g$ - масса стержня. Величина $m_0 = M/3$ носит название приведенной массы. Коэффициент $\frac{1}{3}$ - коэффициент приведения массы. Он показывает, какую часть массы стержня нужно присоединить к сосредоточенной массе m чтобы свести упругую систему к системе с одной степенью свободы. Если масса стержня ($M \ll m$), то

$$\omega^2 = EF / lm.$$

10.6. Понятие о приведенной массе

Рассмотрим упругую систему, например балку с распределенной массой (рис. 10.15,а). Поставим следующую задачу. Какую массу m_0 нужно приложить в некоторой точке В такой же, но невесомой балки (рис. 10.15,б), чтобы низшие частоты колебаний исходной и упрощенной систем были одинаковы. Точку В назовем точкой приведения массы системы, а массу m_0 - приведенной массой.

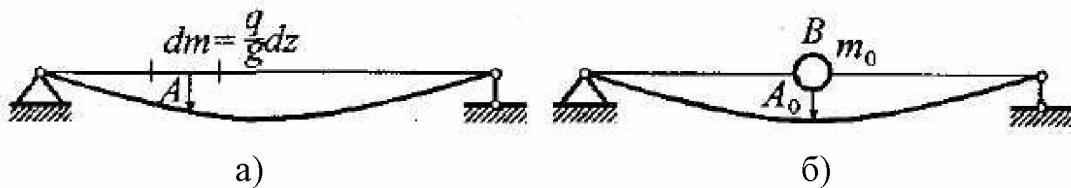


Рис. 10.15

Если $c = 1/\delta_{11}$ — коэффициент жесткости системы, то ее потенциальная энергия:

$$U = \frac{1}{2}(cA_0)A_0 = \frac{1}{2}cA_0^2. \quad (10.61)$$

Подставляя (10.61) в формулу Релея (10.55), получим:

$$\omega^2 = \frac{cA_0^2}{\int_0^l dm A^2 + \sum m_i A_i^2}. \quad (10.63)$$

С другой стороны, для системы с одной степенью свободы имеем

$$\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11}m_0} = \frac{c}{m_0}. \quad (10.64)$$

Сравнивая (10.62) и (10.63), получим:

$$m_0 = \frac{\int_0^l dm A^2 + \sum m_i A_i^2}{A_0^2}. \quad (10.65)$$

Пример. Определить приведенную массу и частоту собственных колебаний тяжелой балки (рис. 10.16).

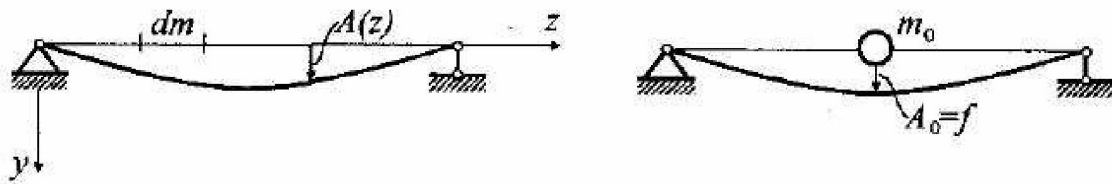


Рис. 10.16

Решение. Примем для амплитуды выражение

$$A = f \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Тогда, с учётом (10.64) имеем:

$$m_0 = \frac{1}{f^2} \int_0^l f^2 \left(\sin \frac{\pi z}{l} \right)^2 dz = \frac{q}{g} \frac{l}{2}.$$

Перемещение $\delta_{11} = l^3 / 48EJ$.

Поэтому

$$\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11}m_0} = \frac{48EJ}{m_0 l^3} = \frac{96EJg}{ql^4}.$$

10.7. Устойчивость вращающихся валов

Рассмотрим вал, вращающийся с угловой скоростью ω (рис. 10.17) и несущий сосредоточенные массы m_i (диски).

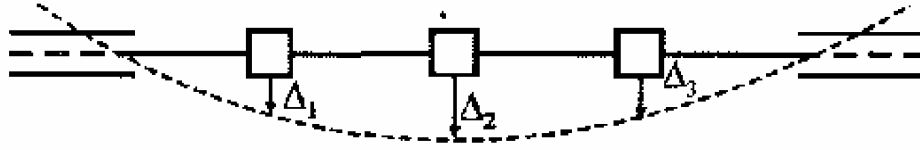


Рис. 10.17

Будем считать, что он идеально сбалансирован и при вращении сохраняет прямолинейную форму. Если скорость вращения невелика, то малые случайные воздействия приводят вал к изгибным колебаниям, которые быстро затухают. В этих условиях прямолинейная форма вала устойчива. При некоторых больших скоростях вращения прямолинейная форма вала перестает быть устойчивой. Получив при этих скоростях вращения прогиб от случайного воздействия, вал уже не возвращается к своему исходному, прямолинейному состоянию. Он теряет устойчивость своей прямолинейной формы. Скорость ω , при которой впервые вал не возвращается к своему исходному состоянию при действии случайного воздействия, называется *критической угловой скоростью* вращающегося вала.

Предположим, что при действии возмущающих сил в смысле Эйлера, вал отклонился от своей прямолинейной формы и остался в искривленном состоянии. Тогда при его вращательном движении возникают центробежные силы инерции $m_i \Delta_i \omega^2$, приложенные к сосредоточенным массам, в каждый момент движения уравниваются упругими силами. Поэтому перемещение Δ_i массы m , можно записать в виде:

$$\Delta_i = \delta_{i1} (m_1 \Delta_1 \omega^2) + \delta_{i2} (m_2 \Delta_2 \omega^2) + \dots = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} m_j \Delta_j \omega^2.$$

Например, для системы с двумя сосредоточенными массами будем иметь:

$$\begin{cases} \Delta_1 (\delta_{11} m_1 \omega^2) + \Delta_2 \delta_{12} m_2 \omega^2 = 0, \\ \Delta_1 \delta_{21} m_1 \omega^2 + \Delta_2 (\delta_{22} m_2 \omega^2 - 1) = 0. \end{cases} \quad (10.66)$$

Система (10.66) имеет отличные от нуля решения только в том случае,

если определитель, составленный из ее коэффициентов, равен нулю:

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} \delta_{11}m_1\omega^2 - 1 & \delta_{12}m_2\omega^2 \\ \delta_{12}m_1\omega^2 & \delta_{22}m_2\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (10.67)$$

В случае системы с n степенями свободы получим выражение (10.20), т.е. критическая угловая скорость вращения ω в точности совпадает с частотой собственных колебаний вала как балки.

В частности, для системы с одной степенью свободы имеем:

$$\Delta_1 (\delta_{11}m_1\omega^2 - 1) = 0, \quad \omega_{\text{кр}}^2 = \frac{1}{\delta_{11}m_1}. \quad (10.68)$$

Явлению неустойчивости вращающихся валов можно дать и несколько иное истолкование. Идеально сбалансированных валов не бывает и в них, с самого начала вращения, возникают центробежные силы инерции, которые растут с увеличением ω . Следовательно, растут и перемещения Δ_i (рис. 10.18,а).

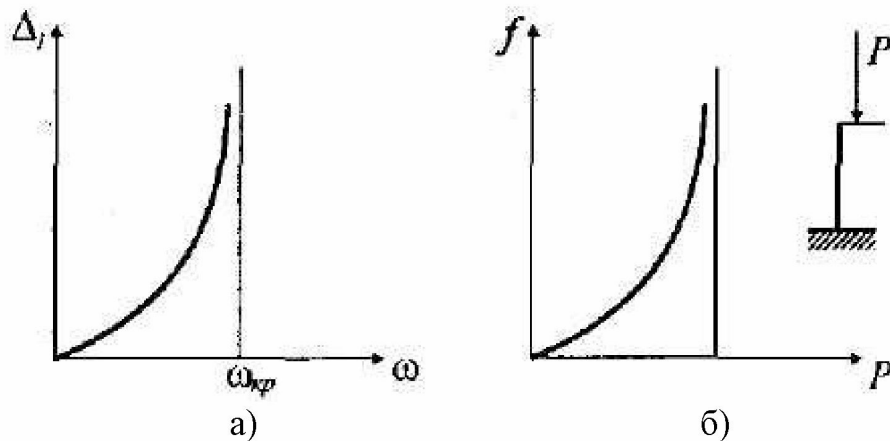


Рис. 10.18

Здесь имеем явление, аналогичное таковому при эксцентричном сжатии гибкого стержня (рис. 10.18,б).

10.8. Колебания упругих систем при действии ударной нагрузки

Ударными, или импульсивными, нагрузками будем называть такие, которые действуют в течение весьма короткого промежутка времени. Если он значительно меньше периода собственных колебаний упругой системы, то за время действия ударной нагрузки не произойдет заметных перемещений ее точек или масс, но они приобретут некоторые конечные скорости

Расчет упругих систем на ударную нагрузку можно разбить на два этапа:

1. Определение скоростей, которые получают точки системы сразу после удара.
2. Изучение свободных колебаний системы после удара при заданном распределении начальных скоростей.

Ударное нагружение происходит тогда, когда по упругой системе ударяет масса, движущаяся с некоторой скоростью v_0 .

Будем рассматривать в дальнейшем только неупругий или неосвобождающий удар, когда ударяющее тело не отскакивает от упругой системы, по которой совершается удар, а «прилипает» к нему и совершает вместе с ним как единое целое колебательное движение. Будем считать также, что конфигурация системы при ее движении после удара считается заранее известной и неизменной.

Удар по конструкции вертикально движущимся телом

Для наглядности рассмотрим не произвольную упругую систему, а тяжелую балку (рис. 10.19,а), на которую с высоты h падает груз массой M . Выберем у балки точку C , в которой происходит удар, за точку приведения массы и заменим балку с распределенной массой $dm = qdz / g$ (q - вес единицы длины балки, g - ускорение свободного падения) балкой с одной приведенной массой m_0 (рис. 10.19,б) заменим упругую систему с бесконечным числом степеней свободы на систему с одной степенью свободы. Обозначим через:

$$\Delta_i^0 = m_0 g \delta_{11} = \frac{m_0 g}{c}, \quad (10.69)$$

статический прогиб балки, соответствующий точке C в системе с приведённой массой, $c = 1 / \delta_{11}$ - жёсткость балки.

Пусть v_0 - скорость падающего тела в момент удара, а v - скорость приведённой массы и «прилипшего» к нему падающего тела сразу после удара. Если груз падает с высоты h , то $v_0 = \sqrt{2gh}$. Из условия сохранения количества движения системы имеем:

$$Mv_0 = (M + m_0)v,$$

откуда

$$v = \frac{Mv_0}{M + m_0} = \frac{\sqrt{2gh}}{1 + m_0 / M} \quad (10.70)$$

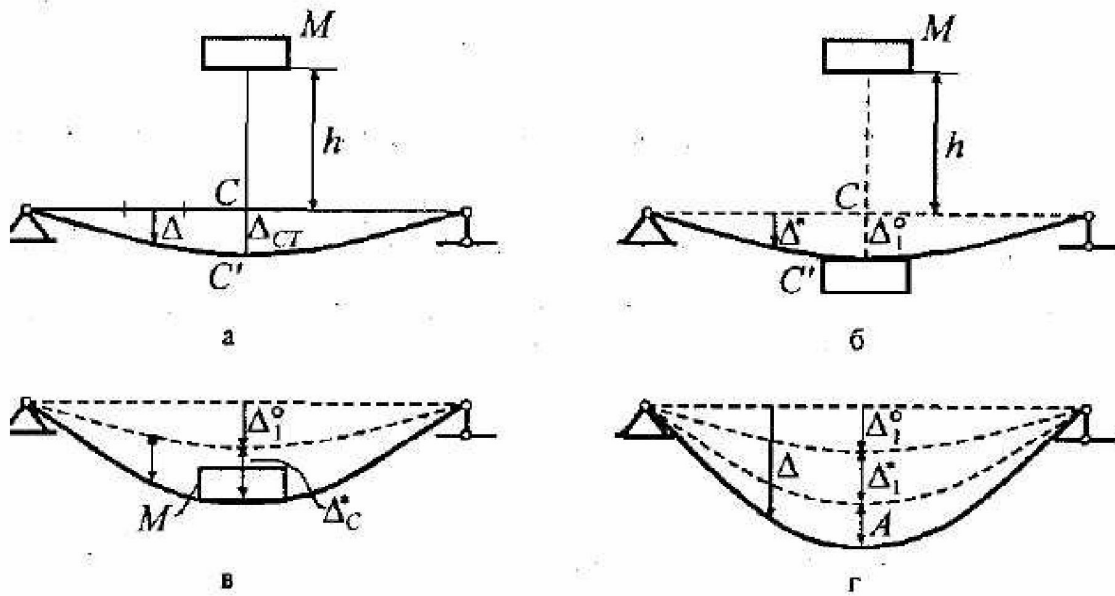


Рис. 10.19

Скорость v будет, с другой стороны, начальной скоростью объединённой массы $(M + m_0)$ в ее колебательном движении после удара (2-й этап).

Пусть Δ_1^* – статический прогиб балки в точке C от веса падающего груза Mg , т.е.

$$\Delta_1^* = Mg\delta = \frac{Mg}{c}. \quad (10.71)$$

Тогда полный статический прогиб:

$$\Delta_{ст} = \Delta_1^0 + \Delta_1^* = \frac{(M + m_0)g}{c} \quad (10.72)$$

После удара начнётся колебательное движение упругой системы. По закону сохранения энергии сумма кинетической и потенциальной энергии системы при максимальном отклонении от статического положения равновесия перейдёт в потенциальную энергию деформации упругой системы:

$$\frac{(M + m_0)v^2}{2} + (M + m_0)gf_{дин} = U,$$

где $f_{дин} = \Delta_1^0 + A$ динамическое перемещение после удара,

$$U = \frac{1}{2}P_{дин}f_{дин} = \frac{c}{2}f_{дин}^2,$$

т.к. $P_{дин} = cf_{дин}$ по закону Гука; c – жёсткость упругой системы.

В результате получаем уравнение:

$$f_{дин}^2 - 2 \frac{(M + m_0)g}{C} f_{дин} - \frac{(M + m_0)g}{C} \frac{v^2}{g} = 0,$$

или, с учётом (10.70) – (10.72):

$$f_{дин}^2 - 2\Delta_{ст} f_{дин} - \frac{\Delta_{ст} 2h}{(1 + m_0 / M)^2} = 0,$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим:

$$f_{дин} = k_{дин} \Delta_{ст},$$

где

$$k_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст} (1 + M)^2}} - \quad (10.73)$$

динамический коэффициент.

В частности при внезапном ударе ($n = 0$) имеем $k_{дин} = 2$.

Можно иначе определить динамический коэффициент.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний системы после удара будет:

$$\Delta_1 + \delta_{11} (M + m_0) \ddot{\Delta}_1 = \delta_{11} (M + m_0) g,$$

или

$$\ddot{\Delta}_1 + \omega^2 \Delta_1 = g, \quad (10.74)$$

где

$$\omega^2 = \frac{1}{(M + m_0) \delta_{11}} = \frac{g}{\Delta_{ст}}. \quad (10.75)$$

Решением уравнения (10.74) будет:

$$\Delta_1 = A \sin(\omega t + \varphi) + \Delta_{ст}, \quad (10.76)$$

где

$$\Delta_{ст} = \frac{g}{\omega^2} = (M + m_0) g \delta_{11} = \Delta_1^0 + \Delta_1^*.$$

Закон движения (10.76) представлен на рис. 10.20.

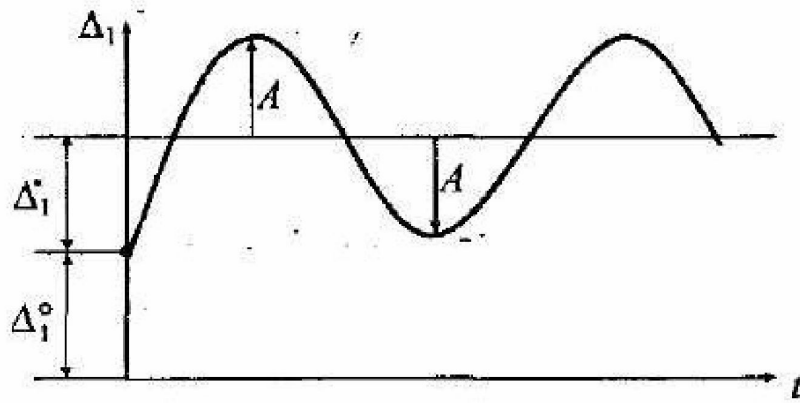


Рис. 10.20

Начальные условия колебательного движения системы после удара

$$\Delta_1 = \Delta_1(0) = \Delta_1^0; \quad \dot{\Delta}_1 = v = \frac{Mv_0}{M + m_0} \quad \text{при } t = 0. \quad (10.76)$$

Удовлетворяя решение (10.76) этим условиям, найдем:

$$A \sin \varphi + \Delta_1^0 + \Delta_1^* = \Delta_1^0, \quad A\omega \cos \varphi = v,$$

или

$$A \sin \varphi = -\Delta_1^*, \quad A \cos \varphi = \frac{v}{\omega},$$

откуда находим:

$$A = \sqrt{\Delta_1^{*2} + \frac{v^2}{\omega^2}}. \quad (10.77)$$

Найдем теперь максимальное отклонение системы от исходного состояния в ее колебательном движении:

$$\Delta_{\max} = \Delta_1^0 + \Delta_1^* + A = \Delta_1^0 + \Delta_1^* k, \quad (10.78)$$

Соотношение (10.78) можно записать

$$f_{\text{дин}} = \Delta_{\max} - \Delta_1^0 = k\Delta_1^*, \quad (10.79)$$

где

$$k = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{\Delta_1^{*2} \omega^2}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h\Delta_{\text{ст}}}{\Delta_1^{*2} (1 + m_0 / M)}} \quad (10.80)$$

коэффициент динамичности. Он показывает во сколько раз прогиб от удара больше прогиба при статическом приложении того же груза.

Если $m \ll M$, то $\Delta_1^0 \ll \Delta_1^*$, $\Delta_{\text{ст}} \approx \Delta_1^*$. В этом случае динамический

коэффициент (10.80) принимает вид:

$$k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ct}}}. \quad (10.81)$$

Выражение (10.80) совпадает с (10.73) при $m_0 \ll M$.

По закону Гука

$$P_{\max} = \frac{\Delta_{\max}}{\delta_{11}} = m_0 g + k(Mg).$$

Следовательно, максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max}^0 + k\sigma_{\max}^*, \quad (10.82)$$

где $\sigma_{\max}^0$ – напряжение в балке до удара груза $P_{ct} = m_0 g$, $\sigma_{\max}^0$ – статическое напряжение от груза $P_{ct}^* = Mg$. При $m_0 \ll M$ имеем $\sigma_{\max} \approx k\sigma_{\max}^*$.

Удар по конструкции горизонтально движущимся телом

Рассмотрим теперь удар по конструкции горизонтально движущимся со скоростью v_0 телом с массой M (рис. 10.21).

В этом случае $\Delta_1^0 = 0, \Delta_1^* = 0, \varphi = 0$.

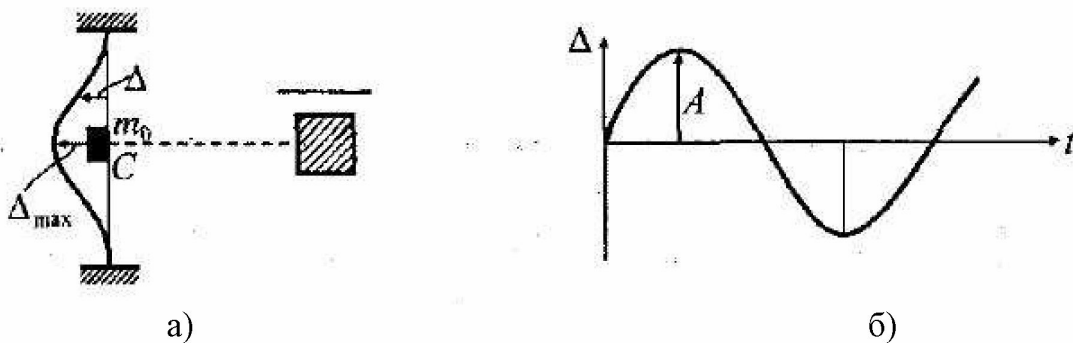


Рис. 10.21

$$\Delta_{\max} = A = \sqrt{\left(\frac{v}{\omega}\right)^2} = \frac{v}{\omega} = \frac{v_0}{\left(1 + \frac{m_0}{M}\right)\omega}. \quad (10.83)$$

$$P_{\max \text{ дин}} = \frac{\Delta_{\max}}{\delta_{11}} = \frac{v_0}{\omega \delta_{11} \left(1 + \frac{m_0}{M}\right)}. \quad (10.84)$$

Закон движения:

$$\Delta_1 = A \sin \omega t$$

представлен на рис. 10.21,б.

Зная $P_{\max, \text{дин}}$ можно всегда найти в упругой системе возникающие динамические напряжения.

10.9. Продольные колебания стержня

Перейдем теперь к изучению колебаний упругих систем с непрерывно распределенной массой, т.е. к системам с бесконечным числом степеней свободы. Простейшим примером такой системы является однородный стержень (рис. 10.22), в котором возбуждены продольные колебания, например, ударом по его концу.

Пусть ρ – плотность материала. Тогда масса элемента стержня длиной dz равна:

$$dm = \rho F dz. \quad (10.85)$$

Осевое перемещение сечения:

$$w = w(z, t)$$

является функцией двух аргументов – координаты произвольного сечения z и времени t .

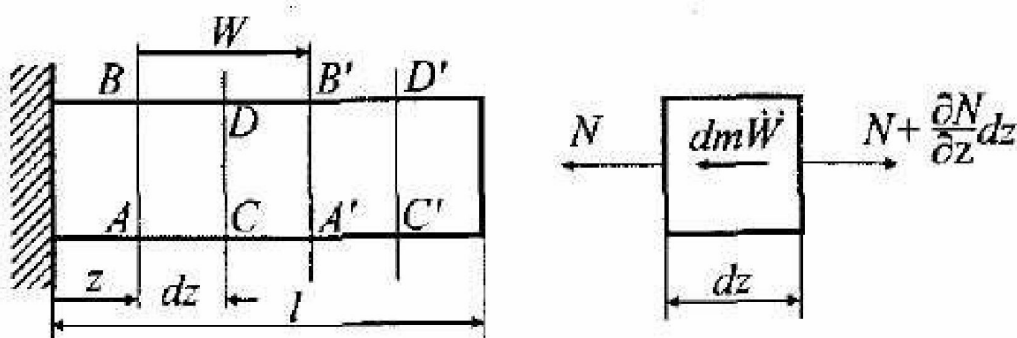


Рис. 10.22

Используя принцип Даламбера, напомним уравнение движения элемента стержня:

$$dm \ddot{w} = \frac{\partial N}{\partial z} dz,$$

или, с учётом (10.85),

$$\rho F \ddot{W} = \frac{\partial N}{\partial z}. \quad (10.86)$$

Поскольку

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} = \frac{A' C' - AC}{AC} = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (10.87)$$

то, исключив с помощью (10.87) из (10.86) усилие N , находим уравнение:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = c \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (10.88)$$

где

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (10.89)$$

Уравнение (10.88) называется *волновым уравнением*. Оно описывает динамические процессы в стержне, такие как распространение волн и колебания. Величина C называется скоростью распространения упругой волны. Для стали $C = 4900$ м/с, для алюминия $C = 5100$ м/с.

Решение уравнения (10.88) ищем в виде:

$$W = T(z)Z(z). \quad (10.90)$$

Подставляя (10.90) в (10.88), получим:

$$\ddot{T} Z - c^2 T Z'' = 0 \quad (10.91)$$

или, после разделения переменных:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{c^2 z''}{Z} = -\omega^2 = const,$$

откуда для функций $T(t)$, $Z(z)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (10.92)$$

$$Z'' + \frac{\omega^2}{c} Z = 0. \quad (10.93)$$

Общий интеграл уравнения (10.92):

$$T = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (10.94)$$

откуда видно, что ω – это круговая частота свободных колебаний.

Общий интеграл уравнения (10.93) имеет вид:

$$Z = c_1 \sin \frac{\omega z}{c} + c_2 \cos \frac{\omega z}{c}. \quad (10.95)$$

Постоянные c_1, c_2 находятся из граничных условий на концах стержня.

Пусть, например, стержень закреплен неподвижно на нижнем конце и свободен на верхнем (рис.10.23,а).

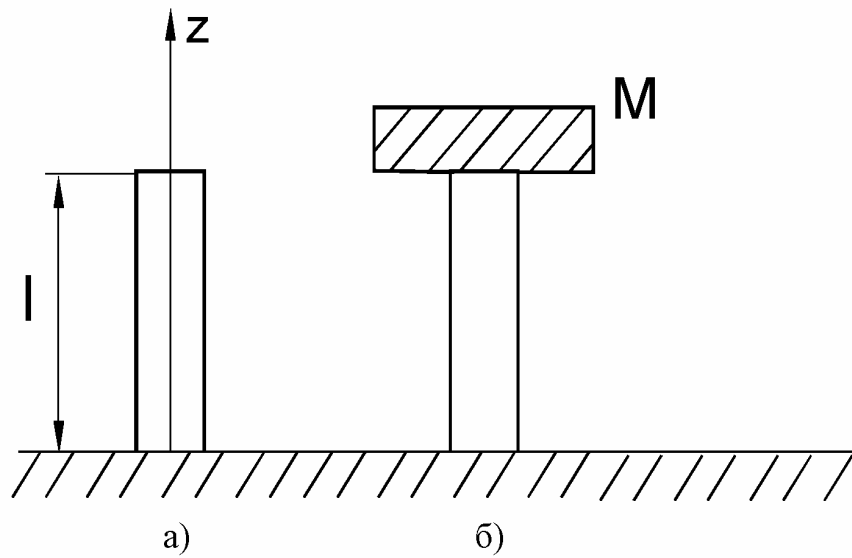


Рис. 10.23

При $Z = 0$ имеем $W = 0$, следовательно, $Z = 0$, а при $z = l$ $N = EFW' \approx 0$. Тогда получаем:

$$c_2 = 0, c_1 \cos \frac{\omega l}{c} = 0. \quad (10.96)$$

Если $c_1 = 0$, то колебания отсутствуют. Если $c_1 \neq 0$, то $\cos \omega l / 2 = 0$, и тогда:

$$\omega = \frac{\pi}{2l} (2n - 1)c. \quad (10.97)$$

Стержень имеет бесконечное множество частот собственных колебаний. Низшая частота или частота основного тона имеет место при $n = 1$:

$$\omega = \frac{\pi}{2l} c = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (10.98)$$

Рассмотрим теперь колебания стержня, у которого один конец зашпелён, а другой несет груз массы M (рис. 10.23,б). На закрепленном конце при $Z = 0$ по-прежнему имеем $Z = 0$, из (10.95) следует $c_2 = 0$.

На свободном конце с прикрепленной массой M на основании прин-

ципа Даламбера имеем:

$$N = EF \frac{\partial W}{\partial z} = -M \ddot{W}, \quad (10.99)$$

или с учетом (10.40), (10.92):

$$Z' = \frac{M \omega^2}{\rho F c^2} Z. \quad (10.100)$$

Подставляя (10.95) при $c_2 = 0$ в граничное условие (10.100), находим:

$$c_1 \left[\frac{M \omega^2}{\rho F c^2} \cos \frac{\omega l}{c} - \frac{\omega}{c} \sin \frac{\omega l}{c} \right] = 0. \quad (10.101)$$

Если $c_1 = 0$, никаких колебаний нет. Если $c_1 \neq 0$ то колебания есть. Для удовлетворения условия (10.102) следует приравнять нулю квадратную скобку. В результате находим:

$$\frac{\omega l}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega l}{c} = \frac{m}{M}, \quad (10.102)$$

где через $m = \rho F l$ обозначена масса стержня. Решение уравнения (10.102) можно найти графически (рис. 10.24). Для этого необходимо найти точки пересечения двух функций:

$$y_1 = \operatorname{tg} \frac{\omega l}{c}, \quad y_2 = \frac{m}{M} \frac{l}{\omega l}. \quad (10.103)$$

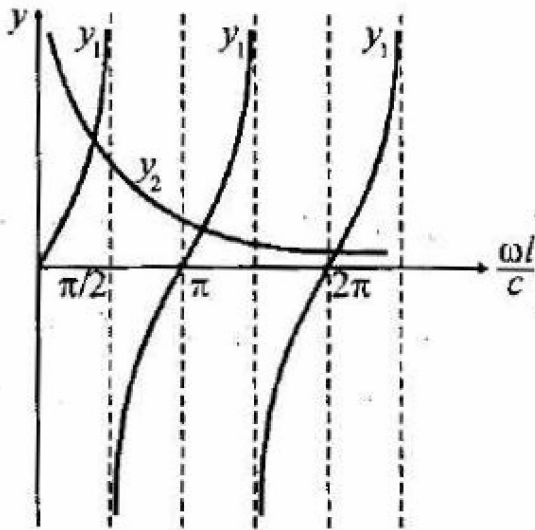


Рис. 10.24

При малых частотах, когда $\omega l / c$ — малая величина, уравнение (10.102) упрощается:

$$\left(\frac{\omega l}{c} \right)^2 = \frac{m}{M}, \quad (10.104)$$

откуда следует:

$$\omega = \sqrt{\frac{m c^2}{M l^2}} = \sqrt{\frac{E F}{l M}}. \quad (10.105)$$

Этот результат соответствует задаче, когда массой стержня m можно пренебречь по сравнению с массой $M_{\text{груза}}$.

Чтобы приближенно учесть массу стержня, удержим в разложении $tg \omega l / c$ в уравнении (10.102) два слагаемых:

$$tg \frac{\omega l}{c} + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega l}{c} \right)^3.$$

Тогда получим:

$$\left(\frac{\omega l}{c} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega l}{c} \right)^4 = \frac{m}{M},$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{mc^2}{l^2 \left(M + \frac{1}{3}m \right)}} = \sqrt{\frac{EF}{l \left(M + \frac{1}{3}m \right)}}. \quad (10.106)$$

При больших значениях $\omega l / c$ гипербола $\mathcal{Y}_2$ проходит близко к оси абсцисс, а точка пересечения с тангенсоидой мало отличается от $n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Следовательно, $\omega_n \approx \frac{cn\pi}{l}$.

10.10. Поперечные колебания стержня

Рассмотрим поперечные колебания балки постоянного сечения с площадью F (рис. 10.25). Участок балки длиной dz имеет массу

$dm = \rho F dz$, где ρ – плотность материала. Воспользуемся дифференциальным уравнением изогнутой оси балки четвертого порядка статической задачи:

$$EJ \frac{d^4 v}{dz^4} = q(z). \quad (10.107)$$

При рассмотрении динамической задачи мы должны считать, что прогиб v является функцией двух переменных z и t . Нагрузка q также должна зависеть от координаты z и времени t . Учитывая только инерционную силу

$q = -\rho F \ddot{v}$ и используя принцип Даламбера, вместо (10.107) получаем дифференциальное уравнение поперечных колебаний балки:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{\rho F}{EJ_x} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (10.108)$$

Как и в случае продольных колебаний, решение задачи ищем в виде:

$$v = T(t)Y(z). \quad (10.109)$$

Можно считать $T(t) = \sin \omega t$. Тогда после подстановки (10.109) в (10.108), получим уравнение

$$Y^{(IV)} - \alpha^4 Y = 0, \quad (10.110)$$

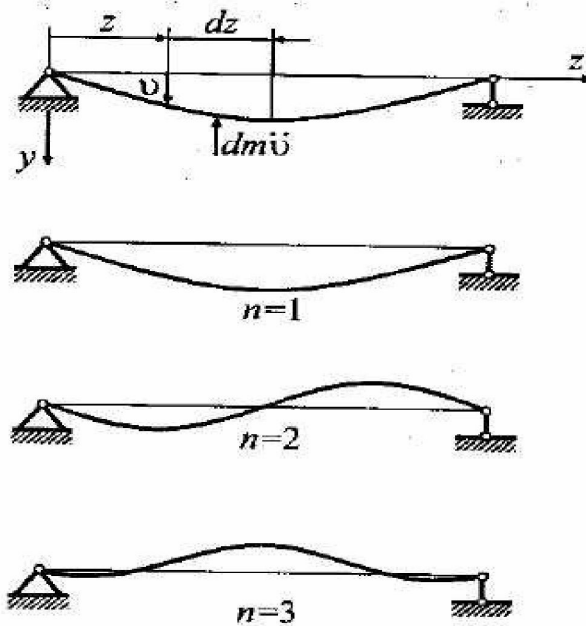


Рис. 10.25

где

$$\alpha^4 = \frac{\rho F \omega^2}{E J_x}. \quad (10.111)$$

Решение уравнения (10.110) имеет вид

$$y = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z + C \sinh \alpha z + D \cosh \alpha z. \quad (10.112)$$

Постоянные A, B, C, D находим из граничных условий на опорах:

$$\begin{aligned} Y = 0, Y'' = 0 & \text{ при } z = 0, \\ Y = 0, Y'' = 0 & \text{ при } z = l \end{aligned} \quad (10.113)$$

Из первых двух условий имеем $B = D = 0$. Из двух других находим:

$$\begin{cases} A \sin \alpha l + C \sinh \alpha l = 0, \\ -A \sin \alpha l + C \cosh \alpha l = 0. \end{cases} \quad (10.114)$$

Приравнявая нулю определитель системы уравнений (10.114), получим:

$$\sin \alpha l \operatorname{sh} \alpha l = 0. \quad (10.115)$$

Так как $\operatorname{sh} \alpha l = 0$ только при $\alpha l = 0$, то остаётся принять:

$$\sin \alpha l = 0, \alpha l = n\pi$$

или, согласно (10.111),

$$\omega = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}. \quad (10.116)$$

Из (10.114) при $\sin \alpha l = 0$ и $\operatorname{sh} \alpha l \neq 0$ следует $c = 0$. Таким образом, при изгибных колебаниях балки образуется бесконечное число частот собственных колебаний, пропорциональных n^2 , где n – число полуволин изогнутой оси балки. Прогибы балки:

$$v = T(t)Y(z) = A \sin \frac{n\pi z}{l} \sin(\omega t + \varphi). \quad (10.117)$$

При колебаниях в основном тоне балка изгибается по одной полувольне ($n = 1$). При $n = 2$ имеем две полуволны, при $n = 3$ – три (рис. 10.25).

Колебания балки в основном тоне ($n = 1$) можно использовать для определения динамического модуля упругости материала, из которого изготовлена балка. Из (10.116) получаем:

$$E = \frac{\omega^2 \rho F l^4}{\pi^4 J} = \frac{4 \rho F l^4}{\pi^2 J} \nu^2, \quad (10.118)$$

где $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ – частота колебаний.

Глава 11

Теория сложного напряжённо-деформированного состояния (НДС) твёрдого тела

11.1 Напряжённое и деформированное состояние частицы тела.

Теория НДС ставит своей задачей определение внутренних напряжений, деформаций и перемещений в различных точках деформируемого твёрдого тела произвольной формы и размеров. Отнесём тело к координатным осям x, y, z и выделим мысленно из него материальную частицу в виде параллелепипеда или кубика размерами dx, dy, dz (рис. 11.1)

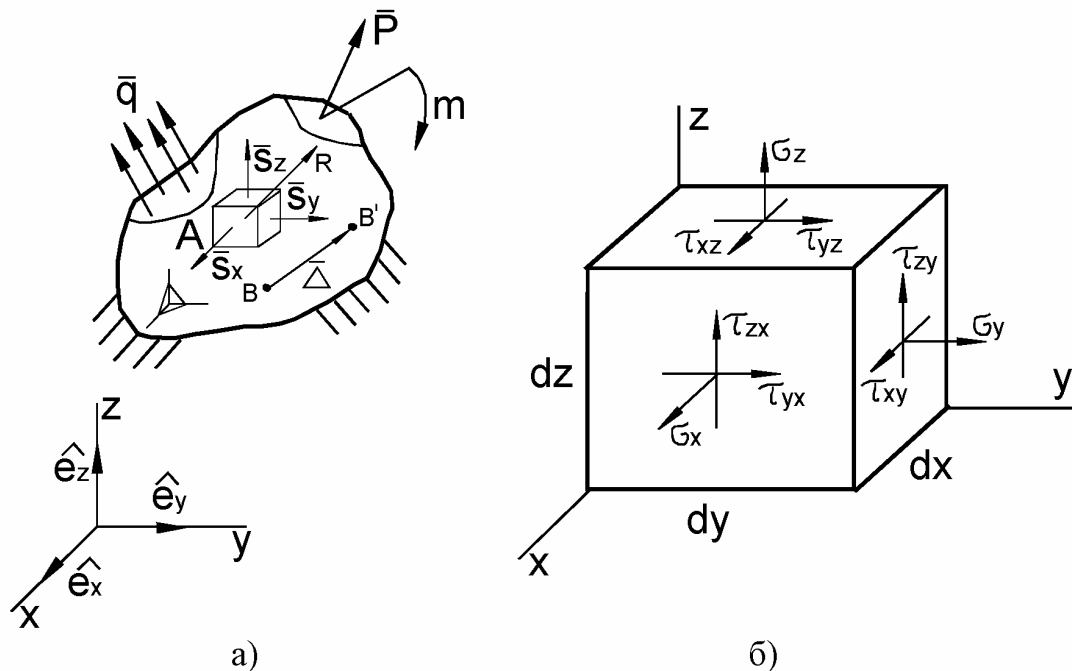


Рис. 11.1

Действия отброшенной части тела заменим векторами – напряжениями $\bar{S}_x, \bar{S}_y, \bar{S}_z$ и разложим их на составляющие по координатным осям.

$$\begin{cases} \bar{S}_x = \sigma_x e_x + \tau_{yx} e_y + \tau_{zx} e_z, \\ \bar{S}_y = \tau_{xy} e_x + \sigma_y e_y + \tau_{zy} e_z, \\ \bar{S}_z = \tau_{xz} e_x + \tau_{yz} e_y + \sigma_z e_z. \end{cases} \quad (11.1)$$

где e_x, e_y, e_z – единичные векторы, направленные вдоль координатных осей x, y, z ; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения, $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{xz}, \tau_{zy}$ – касательные напряжения. У касательных напряжений первый индекс указывает на направление его действия, второй индекс – на нормаль к площадке, на которой оно действует. У нормальных напряжений индекс соответствует одновременно как направлению, так и нормали к площадке их действия. На невидимых на рис. 11.1 гранях частицы действуют такие же, но противоположно направленные напряжения.

Совокупность указанных напряжений полностью характеризует напряжённое состояние частицы тела. Эту совокупность записывают в виде квадратной матрицы

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (11.2)$$

и называют *тензором напряжений* Коши. Система напряжений, приложенных к частице тела, должна удовлетворять условиям равновесия. Первые три условия в проекциях на оси x, y, z дают тождества, т.к. на противоположных гранях мы считаем напряжения равными по величине. Остаётся проверить, обращаются ли в нуль суммы моментов всех сил относительно координатных осей. Составим условие равновесия моментов относительно оси x :

$$(\tau_{zy} dx dz) dy - (\tau_{yz} dx dy) dz = 0$$

откуда следует $\tau_{zy} = \tau_{yz}$. Аналогично можно составить два уравнения равновесия моментов относительно осей y и z . В результате получим соотношения:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad (11.3)$$

которые называют законом парности касательных напряжений: *на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, ортогональные их общему ребру, равны по величине и направлены оба либо к ребру, либо от него*. На основании этого закона тензор-матрица напряжений T_σ является симметричной относительно главной диагонали, состоящей из нормальных напряжений.

Напряжение

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (11.4)$$

называют *средним напряжением*. Тензор напряжений, для которого $\sigma_0 = 0$, называется *тензором-девиатором напряжений*. В общем случае тензор напряжений можно разложить на сумму двух тензоров:

$$T_\sigma = T_0 + T_S$$

Первый из них

$$T_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \quad (11.5)$$

носит название *шарового тензора напряжений*, а второй:

$$T_S = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix} - \quad (11.6)$$

тензора-девиатора или просто девиатора напряжений.

Иногда компоненты девиатора напряжений обозначают:

$$\begin{cases} S_x = \sigma_x - \sigma_0, S_{xy} = \tau_{xy}, \\ S_y = \sigma_y - \sigma_0, S_{yz} = \tau_{yz}, \\ S_z = \sigma_z - \sigma_0, S_{xz} = \tau_{xz}. \end{cases}$$

Шаровой тензор характеризует напряженное состояние всестороннего растяжения – сжатия частицы тела, а девиатор – напряженное состояние её формоизменения.

На каждую частицу тела кроме напряжений действуют объёмные силы:

$$\vec{R} = R_x e_x + R_y e_y + R_z e_z,$$

где R_x, R_y, R_z – проекции этих сил на координатные оси. Каждая вектор-сила $\vec{R}$ действует на единицу объёма.

На поверхности тела F на каждую единицу её площади могут действовать распределённые силы:

$$\vec{q} = q_x e_x + q_y e_y + q_z e_z,$$

где q_x, q_y, q_z – проекции этих сил.

Если последние действуют на малых площадках контакта ΔF поверхности тела, то их, согласно принципу смягчения граничных условий Сен-Венана, заменяют главными вектором $\vec{P}$ и моментом $\vec{m}$ всех сил, действующих на этих малых площадках:

$$\vec{P} = \int_{\Delta F} \vec{q} dF, \vec{m} = \int_{\Delta F} (\vec{r} \times \vec{q}) dF,$$

где $\vec{r}$ – радиус – вектор, проведённый из заданной точки (центра приведения сил) на ΔF до текущей силы $\vec{q}$.

В результате действия на тело внешних сил $\vec{R}, \vec{q}$ температуры T каждая точка B совершает перемещение $\vec{\Delta}$ в новое положение B' . Это перемещение характеризуется направленным отрезком $\vec{BB'}$, т.е. *вектором перемещения*:

$$\vec{\Delta} = u e_x + v e_y + w e_z,$$

где u, v, w – проекции этого перемещения на координатные оси.

Перемещения $\vec{\Delta}$ характеризуют деформацию тела в целом. Например, прогибы точек оси балки V и поворот поперечных сечений, проходящих через эти же точки, характеризуют деформацию балки в целом при её изгибе.

Деформация тела складывается из деформации её материальных (физических) частиц, каждая из которых испытывает удлинения $\Delta(dx), \Delta(dy), \Delta(dz)$ в направлении её рёбер и искажения прямых углов:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{xz} = \gamma_{zy}$$

между её гранями в каждой из координатных плоскостей (рис. 11.2).

Величины

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx}, \varepsilon_y = \frac{\Delta(dy)}{dy}, \varepsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz}$$

называют относительными удлинениями или деформациями частиц тела.

Половины сдвигов обозначают:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}, \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz}, \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz}.$$

Совокупность шести компонентов деформации полностью характеризует деформированное состояние частицы тела. Эту совокупность запишем в виде квадратной матрицы:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (11.7)$$

и назовем тензором деформаций Коши.

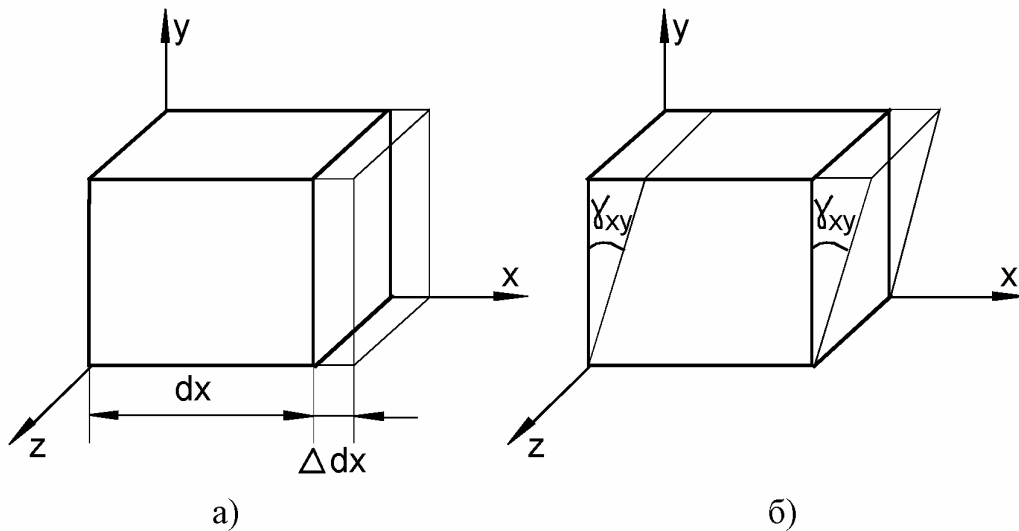


Рис. 11.2

Величину

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (11.8)$$

называют *средней деформацией*.

Если для рассматриваемого тензора деформация $\varepsilon_0 = 0$, то он называется *тензором-девиатором* или просто *девиатором деформации*.

В общем случае $\varepsilon_0 \neq 0$ тензор (11.7) можно разложить на сумму двух тензоров:

$$T_\varepsilon = T_0 + T_\vartheta$$

Первый из них:

$$T_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix} \quad (11.9)$$

носит название *шарового тензора деформации* и описывает объёмную деформацию всестороннего растяжения – сжатия.

Второй тензор:

$$T_\vartheta = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix} \quad (10.10)$$

представляет собой тензор-девиатор и характеризует деформацию изменения формы частиц тела.

11.2. Основные виды напряжённо-деформированного состояния (НДС)

До сих пор мы рассматривали в основном простейшие виды НДС – растяжение – сжатие, плоский чистый сдвиг и их комбинацию (рис. 11.3).

Они встречаются при растяжении и сжатии стержня и его кручении, а также при изгибе (рис. 11.4).

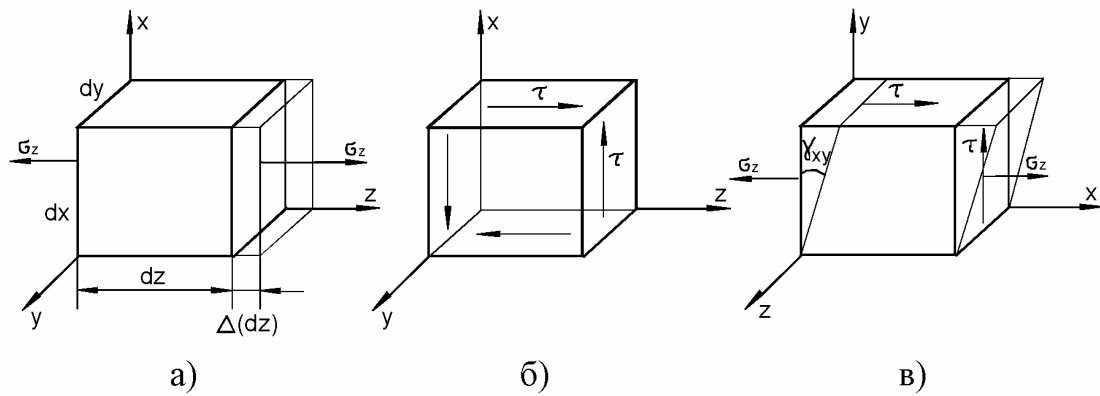


Рис. 11.3

Они встречаются при растяжении и сжатии стержня и его кручении, а также при изгибе (рис. 11.4). При растяжении и сжатии (рис. 11.4,а) осевая ε_z и поперечные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ определяются законами Гука и Пуассона:

$$\varepsilon_z = \sigma_z / E, \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu \varepsilon_z. \quad (11.11)$$

7

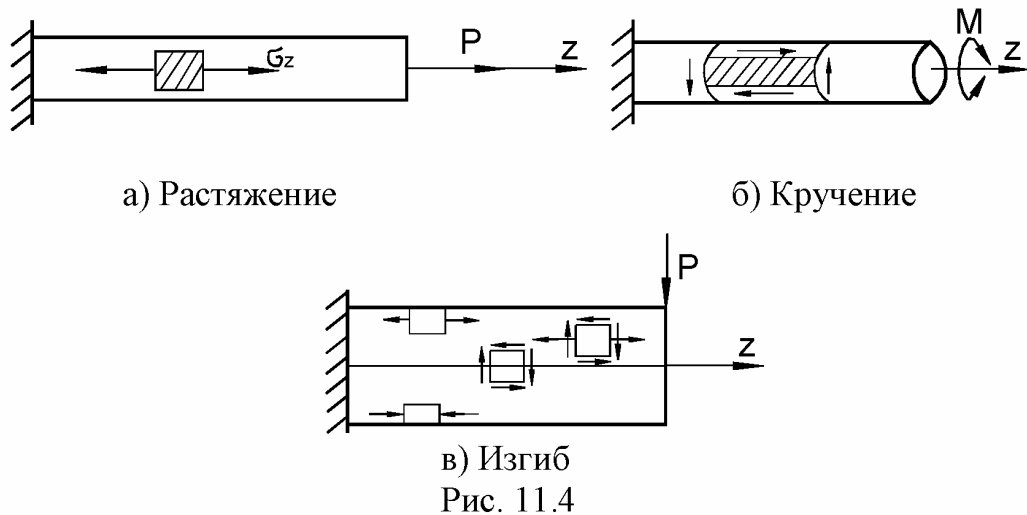


Рис. 11.4

При плоском чистом сдвиге (рис. 11.4,б) деформация сдвига

$$\gamma = \tau / G. \quad (11.12)$$

Часто на практике встречаются двухосное растяжение и его комбинация с чистым сдвигом (рис. 11.5).

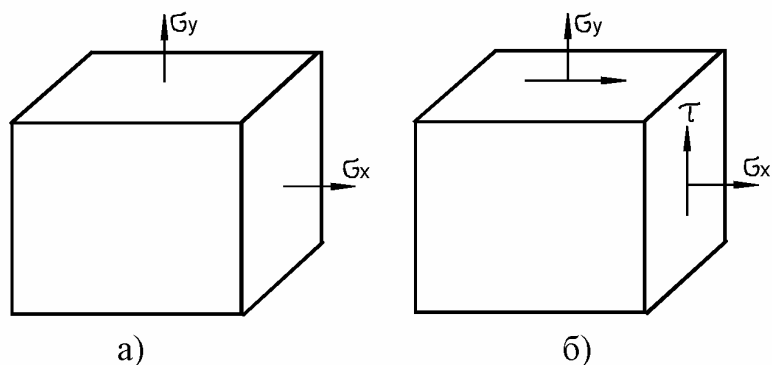


Рис. 11.5

В последнем случае состояние называют *плоским напряжённым состоянием*. Оно возникает в тонкостенных элементах конструкций, таких как плиты (пластины) и оболочки (рис. 11.6).

При двухосном растяжении деформации в направлениях x и y могут быть найдены на основании законов (11.11) для одноосного растяжения.

Представим $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ на основании принципа независимости действия сил (напряжений σ_x, σ_y) в виде суммы деформаций в каждом из направлений x и y от этих сил:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_y}{E} \right) = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_x}{E} \right) = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x), \\ \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y). \end{cases} \quad (11.13)$$

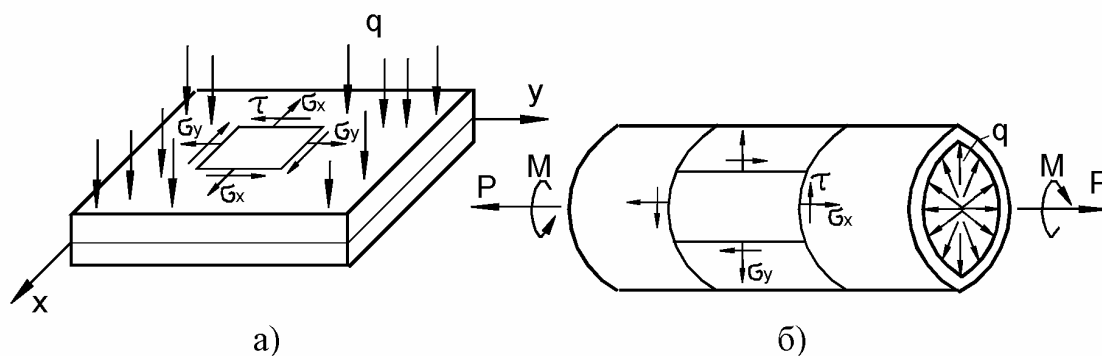


Рис. 11.6

Для плоского напряжённого состояния (рис. 11.6,б) с учётом (11.12) получаем:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \varepsilon_z = \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \end{cases} \quad (11.14)$$

При трёхосном растяжении (рис. 11.7,а) на основании законов (11.11) аналогичным образом получаем:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases} \quad (11.15)$$

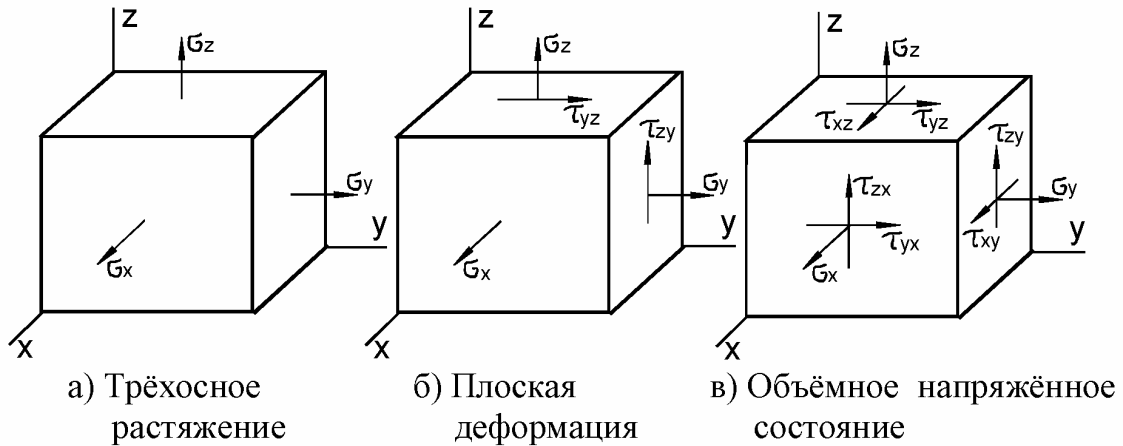


Рис. 11.7

Если сложить соотношения (11.15), то получим закон упругого изменения объёма:

$$\Theta = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (11.16)$$

где $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_0$ – (11.17)
относительное изменение объёма,

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} - \quad (11.18)$$

модуль объёмной деформации.

На практике часто встречается напряжённое состояние, изображённое на рис. 11.7,б. Оно возникает в удлинённых телах со стеснённой в этих направлениях деформацией. Примером могут служить подпорная стенка, тело плотины, железнодорожный рельс и др. В этих случаях призматическое тело как бы зажато между двумя опорами, а нагрузка вдоль тела остаётся неизменной (рис. 11.8).

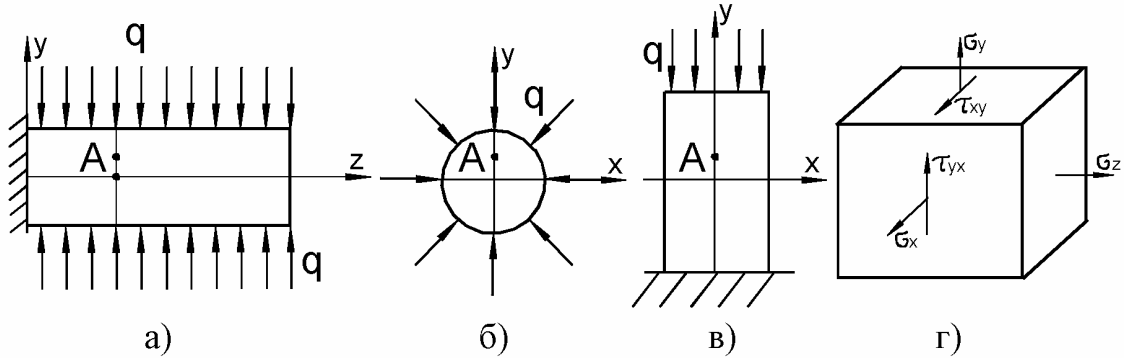


Рис. 11.8

Произвольная точка A тела при деформации остаётся лежать в одной плоскости, параллельной плоскости x, y . Напряжённое состояние отличается от плоского тем, что возникает напряжение σ_z . Соответствующее деформированное состояние тела носит название *плоской деформации*. Относительные деформации определяются соотношениями закона Гука, полученные использованием принципа независимости действия сил (напряжений). Накладывая на соотношения (11.5) при трёхосном растяжении плоский чистый сдвиг с напряжениями $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$, получаем:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{cases} \quad (11.19)$$

Характерным примером возникновения объёмной НДС могут служить *контактные задачи*. Например, задачи о контакте колёс вагона с рельсами, задача о вдавливании шарика в подшипнике, шаровой опоры в фундамент и др. (рис. 11.9,а).

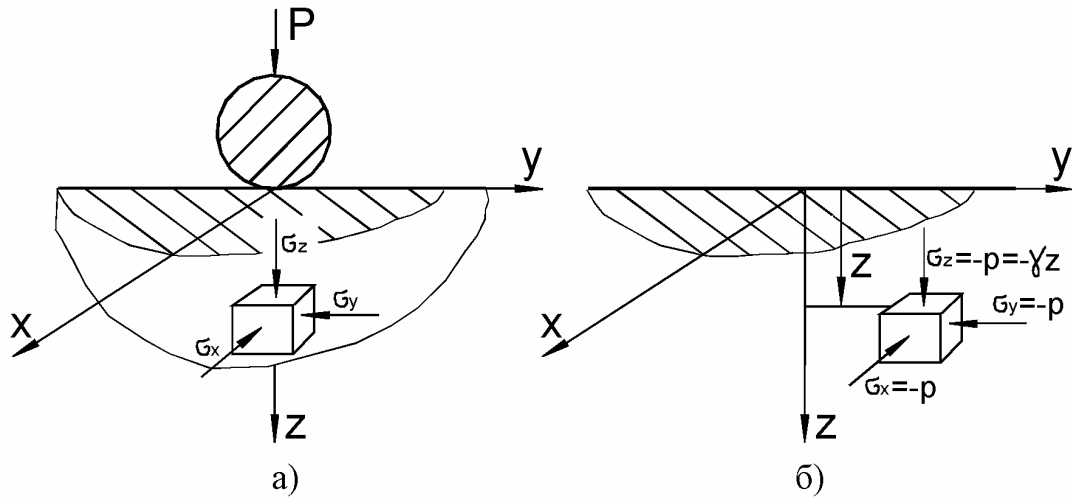


Рис. 11.9

Кубик, опущенный в воду (рис. 11.9,б), будет испытывать всестороннее сжатие напряжениями

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p, \quad \Theta = \sigma_0 / K = -p / K, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \sigma_0 / 3K, \quad p = \gamma z,$$

где γ – удельный вес воды.

Другим близким примером могут служить полупространства, представляющие собой модель грунтовой среды. Слой грунта толщины z оказывает на нижележащие слои давление $p = \gamma z$, где γ – удельный вес грунта. Напряжения $\sigma_z = -p = -\gamma z, \sigma_x = \sigma_y$. Деформации $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, и согласно (11.12):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_x(1 - \mu) - \mu\sigma_z] = 0,$$

откуда

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_z = -\zeta \gamma z,$$

где

$$\zeta = \frac{\mu}{1 - \mu}$$

называется коэффициентом бокового давления среды. Если $\mu = 0,5$, то $\zeta = 1$ и частица будет испытывать всестороннее сжатие, т.к.:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\gamma z.$$

При этом изменение объёма $\Theta = \sigma_0 / K = 0$, так как $K \rightarrow \infty$. Такая среда называется несжимаемой.

11.3. Общий случай НДС. Обобщённый закон Гука-Коши

Рассмотрим далее общий случай объёмного напряжённо-деформированного состояния (рис. 11.10).

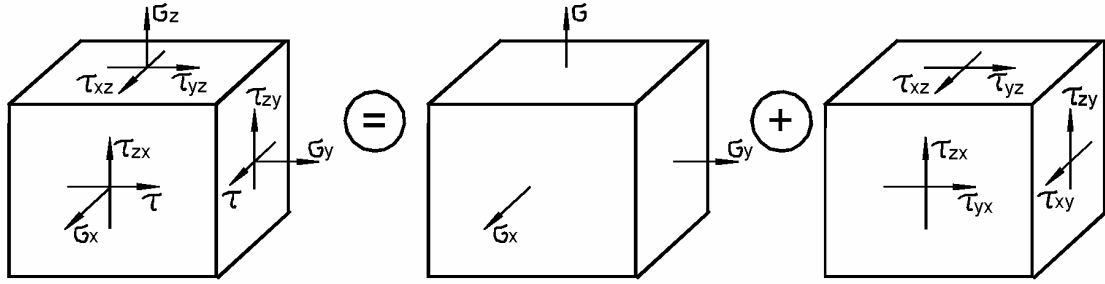


Рис. 11.10

Его можно разложить на сумму двух состояний – трёхосное растяжение и сложный сдвиг в трёх координатных плоскостях. На основании принципа независимости действия сил (напряжений), используя (11.19) и

$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$, $\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$, получаем:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \end{cases} \quad (11.20)$$

Уравнения (11.20) можно разрешить относительно напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\Theta + 2G\varepsilon_x, \tau_{xy} = 2G\varepsilon_{12} = G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\Theta + 2G\varepsilon_y, \tau_{yz} = 2G\varepsilon_{yz} = G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\Theta + 2G\varepsilon_z, \tau_{xz} = 2G\varepsilon_{xz} = G\gamma_{xz}, \end{cases} \quad (11.21)$$

где

$$\lambda = \frac{2G\mu}{1-2\mu}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (11.22)$$

Коэффициент λ называют модулем Коши – Ламе.

Из (11.20), (11.21) следует ещё одна форма записи обобщённого закона Коши – Гука в форме трёх законов:

1. Закон упругого изменения объёма

Складывая в (11.20) относительные удлинения, получаем:

$$\Theta = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (11.23)$$

где $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ - относительное изменение объёма, $K = E/3(1-2\mu)$ - модуль деформации.

2. Закон упругого формоизменения

Составим на основании (11.20), (11.23) выражение:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon_0 &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_x (1 + \mu) - \mu (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - (1 - 2\mu) \sigma_0 \right\} = \\ &= \frac{1 + \mu}{E} (\sigma_x - \sigma_0) = \frac{1}{2G} (\sigma_x - \sigma_0). \end{aligned}$$

Аналогично можно найти разности $(\varepsilon_y - \varepsilon_0)$, $(\varepsilon_z - \varepsilon_0)$. В результате получаем соотношения

$$\begin{cases} \sigma_x - \sigma_0 = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0), \tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \\ \sigma_y - \sigma_0 = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_0), \tau_{yz} = 2G\varepsilon_{yz} \\ \sigma_z - \sigma_0 = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_0), \tau_{xz} = 2G\varepsilon_{xz} \end{cases}, \quad (11.24)$$

представляющие закон упругого формоизменения. Соотношения (11.24) связывают компоненты девиаторов напряжений и деформаций.

3. Закон упругого упрочнения материала:

Величину

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \quad (11.25)$$

называют модулем девиатором напряжений.

Из (11.24) следует:

$$\begin{cases} \sigma_x - \sigma_y = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_y), \tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma_z = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_z), \tau_{yz} = 2G\varepsilon_{yz}, \\ \sigma_z - \sigma_x = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_x), \tau_{xz} = 2G\varepsilon_{xz}, \end{cases}$$

Подставляя полученные выражения в (11.25), находим:

$$\sigma = 2G\gamma, \quad (11.26)$$

где величина

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2)} \quad (11.27)$$

носит название *модуля-девиатора деформаций*. Соотношение (11.26) выражает собой закон упругого упрочнения материала. В частном случае простого растяжения $\sigma = \sqrt{2/3} \sigma_x$, $\Theta = \sqrt{2/3} (1 + \mu) \varepsilon_x$ и соотношение (11.26) принимает вид

$$\sigma_x = 2G(1 + \mu) \varepsilon_x = E \varepsilon_x.$$

Таким образом, закон упругого упрочнения (11.26) с точностью до постоянного множителя $\sqrt{2/3}$ совпадает графически с упругим участком диаграммы растяжения.

11.4. Определение напряжений на произвольно ориентированной площадке

Рассечём частицу тела около произвольной точки А (рис. 11.11) наклонной плоскостью, направление единичной нормали

$$\mathbf{v} = l_x \mathbf{e}_x + l_y \mathbf{e}_y + l_z \mathbf{e}_z,$$

к которой определено направляющими косинусами l_x, l_y, l_z (рис. 11.11,а). В результате мы получили фигуру четырёхугольник, или *тетраэдр*. При уменьшении расстояния $AN = h$ до нуля наклонная плоскость пройдёт через точку А. Обозначим площадь наклонной грани через

dF , а площади координатных граней dF_x, dF_y, dF_z . Вектор $\vec{S}_v$ на произвольно ориентированной площадке с нормалью $\mathbf{V}$ и площадью dF разложим на составляющие:

$$\vec{S}_v = X_v \mathbf{e}_x + Y_v \mathbf{e}_y + Z_v \mathbf{e}_z, \quad (11.28)$$

где X_v, Y_v, Z_v – проекции напряжения на координатные оси.

Проецируя все силы, действующие на тетраэдр, последовательно на оси x, y, z и сокращая на dF , получим:

$$\begin{cases} X_v dF = \sigma_x dF_x + \tau_{xy} dF_y + \tau_{xz} dF_z, \\ Y_v dF = \tau_{yx} dF_x + \sigma_y dF_y + \tau_{yz} dF_z, \\ Z_v dF = \tau_{zx} dF_x + \tau_{zy} dF_y + \sigma_z dF_z. \end{cases}$$

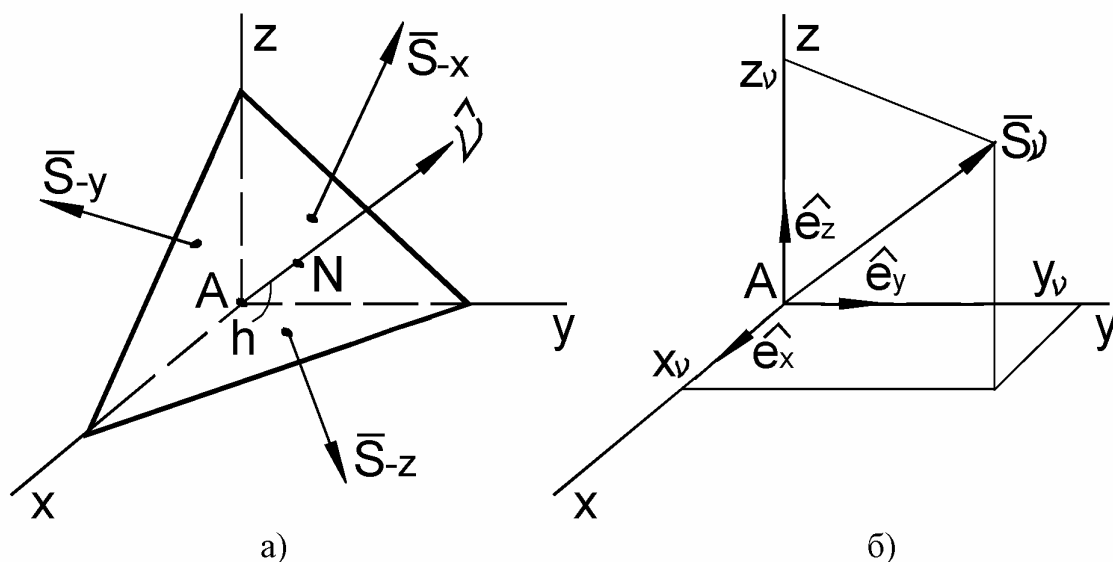


Рис. 11.11

Очевидно, что площади координатных граней:

$$dF_x = dFl_x, dF_y = dFl_y, dF_z = dFl_z.$$

Поэтому после сокращения на dF , получаем формулы

$$\begin{cases} X_v = \sigma_x l_x + \tau_{xy} l_y + \tau_{xz} l_z \\ Y_v = \tau_{yx} l_x + \sigma_y l_y + \tau_{yz} l_z \\ Z_v = \tau_{zx} l_x + \tau_{zy} l_y + \sigma_z l_z \end{cases}, \quad (11.29)$$

называемые *формулами Коши*.

Таким образом, проекции вектора напряжений $\vec{S}_v$ на произвольно ориентированной площадке с направляющими косинусами l_x, l_y, l_z выражается через шесть компонент напряжённого состояния, совокупность которых образует тензор напряжений. При помощи формул Коши (11.29) можно найти величину полного напряжения:

$$\vec{S}_v = \sqrt{X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2}. \quad (11.30)$$

Вектор напряжений $\vec{S}_v$ может быть разложен также на нормальную $\bar{\sigma}_v$ и касательную $\bar{\tau}_v$ составляющие:

$$\vec{S}_v = \sigma_v v + \tau_v t,$$

где t – единичный вектор касательной. Тогда:

$$S_v = \sqrt{\sigma_v^2 + \tau_v^2}.$$

Выразим нормальное напряжение σ_v через проекции X_v, Y_v, Z_v вектора S_v :

$$\sigma_v = X_v l_x + Y_v l_y + Z_v l_z \quad (11.31)$$

и заменим эти проекции согласно (11.29). Получим формулу:

$$\sigma_v = \sigma_x l_x^2 + \sigma_y l_y^2 + \sigma_z l_z^2 + 2\tau_{xy} l_x l_y + 2\tau_{yz} l_y l_z + 2\tau_{xz} l_x l_z. \quad (11.32)$$

Если единичный касательный вектор

$$t = l_x \hat{e}_x + l_y \hat{e}_y + l_z \hat{e}_z,$$

то

$$\tau_v = X_v l'_x + Y_v l'_y + Z_v l'_z, \quad (11.33)$$

где l'_x, l'_y, l'_z – направляющие косинусы вектора t , определяющие направление действия касательного напряжения τ_v .

Подставляя в (11.33) вместо X_v, Y_v, Z_v их выражения (11.29), получаем:

$$\begin{aligned} \tau_v = & \sigma_x l_x l'_x + \sigma_y l_y l'_y + \sigma_z l_z l'_z + \tau_{xy} (l_x l'_y + l'_x l_y) \\ & + \tau_{yz} (l_y l'_z + l'_y l_z) + \tau_{xz} (l_x l'_z + l'_x l_z). \end{aligned} \quad (11.34)$$

В частном случае плоской задачи имеем (рис. 11.12):

$$\begin{cases} l_x = \cos \alpha, l_y = \sin \alpha, l_z = \cos 90^\circ = 0, \\ l'_x = -\sin \alpha, l'_y = \cos \alpha, l'_z = \cos 90^\circ = 0. \end{cases}$$

Из (11.32), (11.34) находим:

$$\begin{cases} \sigma_v = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha \\ \tau_v = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha, \end{cases} \quad (11.35)$$

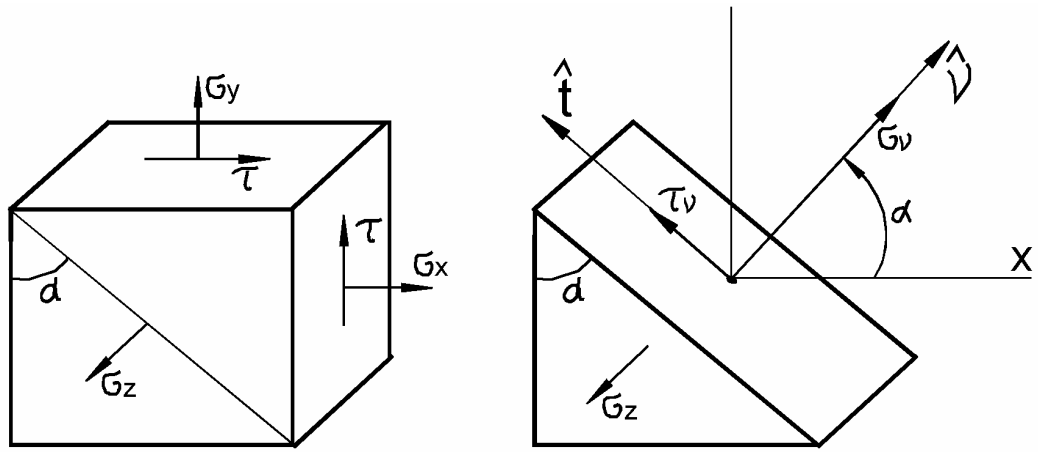


Рис. 11.12

где использованы соотношения

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) .$$

11.5. Главные оси и главные напряжения в плоских задачах

Рассмотрим напряжённое состояние, характеризуемое тензором напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} .$$

Если $\sigma_z = 0$, то напряжённое состояние называется *плоским*. Если $\sigma_z \neq 0$, то напряжённое состояние соответствует *плоской деформации*.

Найдём экстремальные значения нормального напряжения σ_v для плоских задач.

Дифференцируя выражение (11.35) для σ_v по α , и приравниваем полученный результат к нулю:

$$\frac{d\sigma_v}{d\alpha} = 2 \left[-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha \right] = 2\tau_v = 0,$$

откуда получаем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} . \quad (11.36)$$

Из (11.36) находим два значения угла α_1 и $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$ (рис. 11.13), определяющие два направления и две площадки, называемые *главными*.

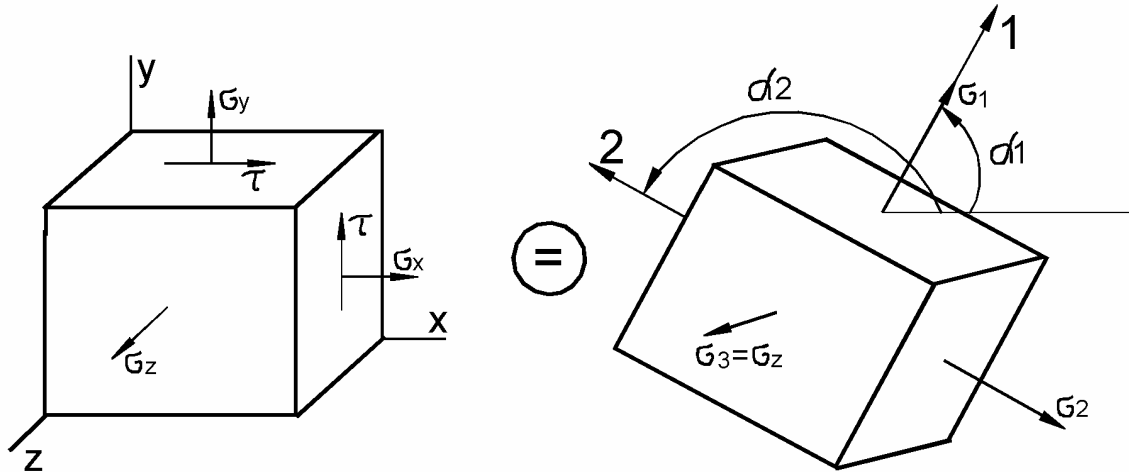


Рис. 11.13

Экстремальные значения напряжений $\sigma_{\max} = \sigma_1$ и $\sigma_{\min} = \sigma_2$ называются *главными нормальными напряжениями*. На главных площадках касательные напряжения отсутствуют. Поэтому третья площадка, на которой действует нормальное напряжение σ_z , будет также главной. Главным будет напряжение $\sigma_3 = \sigma_z$.

Так как

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}, \quad \sin 2\alpha = \operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\alpha,$$

то, с учётом (11.36) из (11.35), получаем значения главных нормальных напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}, \\ \sigma_z = \sigma_3. \end{cases} \quad (11.37)$$

Обычно принято главные напряжения нумеровать так, чтобы $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

В частном случае чистого сдвига $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau \neq 0$ (рис. 11.4).

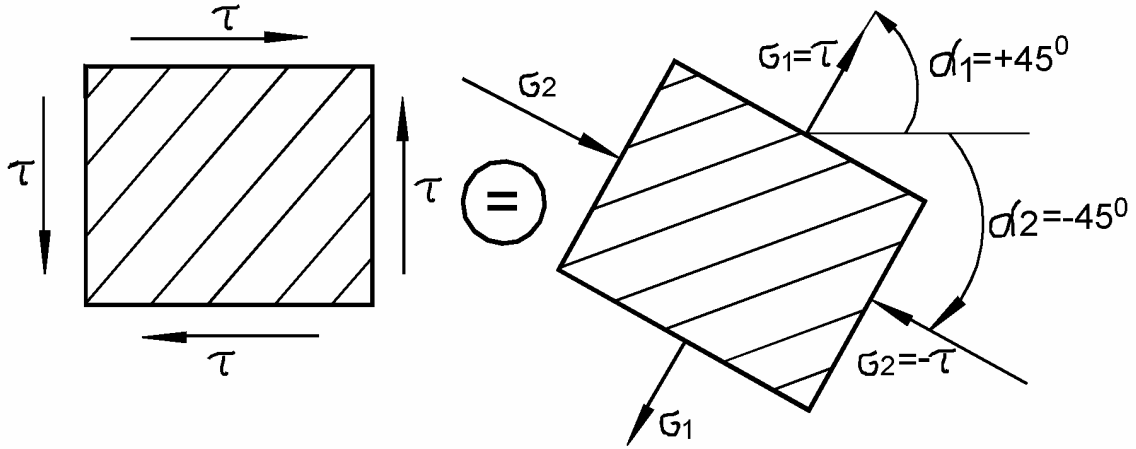


Рис. 11.14

Из (11.37) получаем: $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = -\tau, \sigma_3 = 0$.

В случае растяжения напряжениями σ_x и чистого сдвига напряжениями τ имеем:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}, \sigma_2 = 0.$$

Если частица отнесена к главным осям (рис. 11.15), то формулы (11.35) принимают вид

$$\begin{cases} \sigma_v = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \\ \tau_v = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \end{cases} \quad (11.38)$$

Из (11.38) видно, что максимальное касательное напряжение по модулю возникает при $\alpha = \pm 45^\circ$ т.е. на площадках, наклонённых к главным осям под углом $\alpha = \pm 45^\circ$. В этом случае

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}, \sigma_v = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (11.39)$$

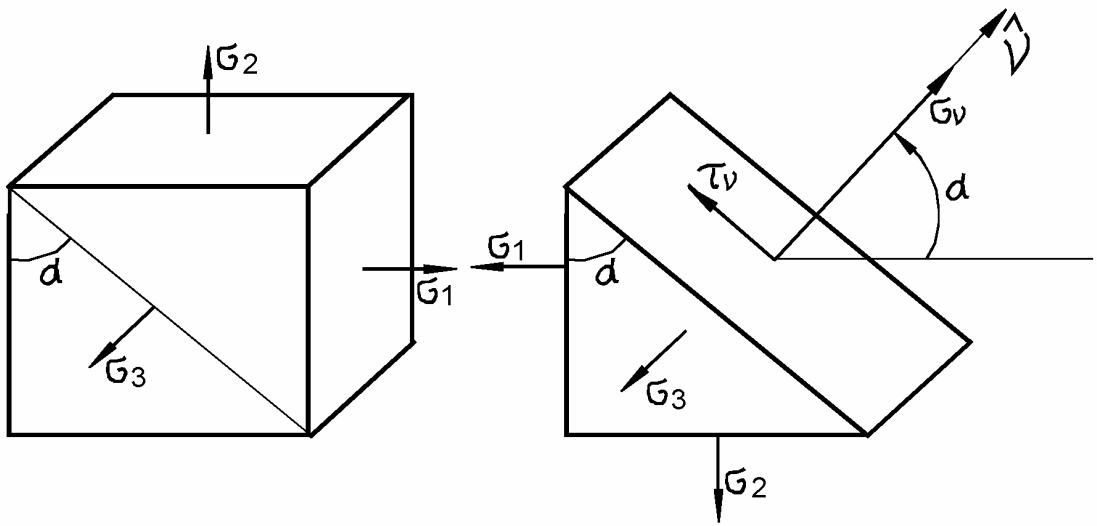


Рис. 11.15

Как видно из (11.39), на площадке, где действует $\tau_{\max}$, нормальное напряжение σ_v отлично от нуля и равно полусумме нормальных напряжений σ_x, σ_y .

11.6. Главные деформации в плоских задачах

Рассмотрим частицу тела с напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau$ (рис. 11.16,а). Повернём её на угол α относительно оси z . На гранях такой частицы действуют напряжения $\sigma_v, \sigma_t, \tau_{vt}$ (рис. 11.16,б).

Предположим, что имеет место плоское напряжённое состояние ($\sigma_z = 0$). Тогда, на основании (11.35), получаем:

$$\begin{cases} \sigma_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha, \\ \sigma_t = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau \sin 2\alpha, \\ \tau'_{vt} = -\tau_v = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau \cos 2\alpha. \end{cases} \quad (11.40)$$

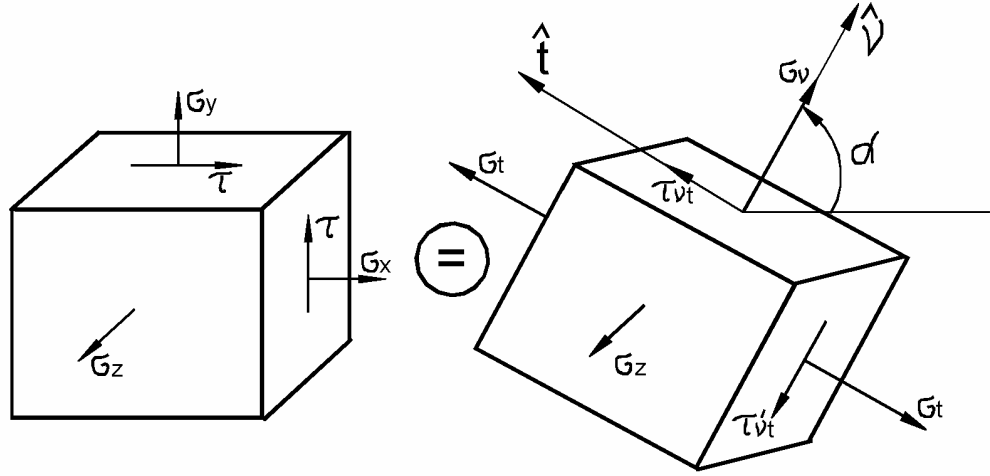


Рис. 11.16

Заметим, что направление касательного вектора $\hat{t}$ отличается от $\hat{v}$ на 90° и поэтому при вычислении σ_t угол α следует заменить на $\alpha \pm 90^\circ$.

Найдём деформации повернутой частицы, используя закон Гука для плоских задач:

$$\begin{cases} \varepsilon_v = \frac{1}{E}(\sigma_v - \mu\sigma_t), \varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_v), \gamma_{vt} = 2\varepsilon_{vt} = \frac{\tau_{vt}}{G}, \\ \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \end{cases} \quad (11.41)$$

Из (11.40), (11.41) получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \sigma_x - \sigma_y = \frac{E}{1+\mu}(\varepsilon_x - \varepsilon_y), \quad \tau_{xy} = \frac{E\varepsilon_{xy}}{1+\mu}, \\ \begin{cases} \varepsilon_v = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \varepsilon_{xy} \sin 2\alpha \\ \varepsilon_{vt} = \frac{\gamma_{vt}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \varepsilon_{xy} \cos 2\alpha \end{cases} \end{aligned} \quad (11.42)$$

Формулы (11.42) аналогичны (11.35). Найдём теперь экстремальные

(главные) значения деформации. Из условия экстремума:

$$\frac{d\varepsilon_v}{d\alpha} = 2 \left[-\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \varepsilon_{xy} \cos 2\alpha \right] = 2\varepsilon_v = 0$$

получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}. \quad (11.43)$$

Используя выражение (11.43) находим главные значения деформаций:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}, \varepsilon_3 = \varepsilon_z. \quad (11.44)$$

Как видно, при использовании закона Гука главные направления тензоров напряжений и деформаций совпадают. Это предположение было сделано Коши. Если $\sigma_z \neq 0$ (плоская деформация, $\varepsilon_z = 0$), то формулы для главных деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ не изменяется.

11.7. Главные нормальные напряжения и направления в общем случае объёмного напряжённого состояния

Плоские задачи являются частным случаем объёмного напряжённого состояния. Поставим задачу по определению таких площадок, на которых действуют только экстремальные нормальные напряжения, а касательные обращаются в нуль (рис. 11.17). Такие площадки назовём главными, а соответствующие экстремальные значения нормальных напряжений – *главными нормальными напряжениями*. Будем обозначать их $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и считать, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Направляющие косинусы нормали $\hat{V}$ на площадке общего положения удовлетворяют условию

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1. \quad (11.45)$$

Следовательно, возникает задача об отыскании условного экстремума напряжения σ_v при дополнительном условии (11.45).

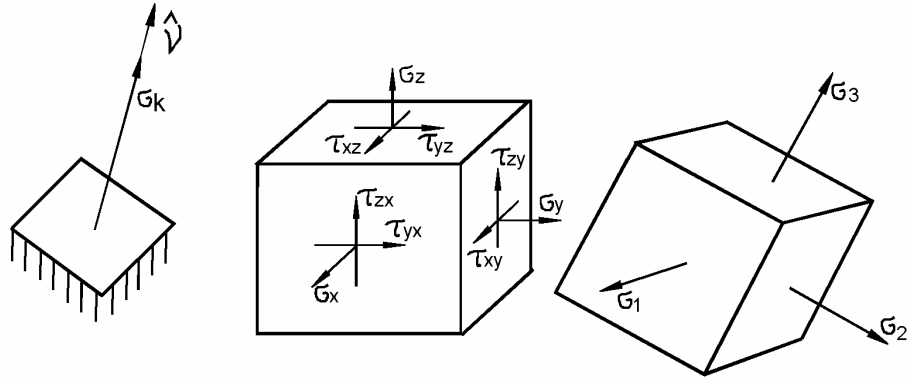


Рис. 11.17

Составим функцию Лагранжа:

$$F = \sigma_v - \sigma_k (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 - 1),$$

где σ_k играет роль неопределённых множителей Лагранжа. Найдём безусловный экстремум функции F по переменным l_x, l_y, l_z . Для этого найдём частные производные по этим переменным и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_k) l_x + \tau_{xy} l_y + \tau_{xz} l_z = 0, \\ \tau_{yx} l_x + (\sigma_y - \sigma_k) l_y + \tau_{yz} l_z = 0, \\ \tau_{zx} l_x + \tau_{zy} l_y + (\sigma_z - \sigma_k) l_z = 0, \end{cases} \quad (11.46)$$

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 - 1 = 0. \quad (11.47)$$

Так как l_x, l_y, l_z одновременно обратиться в нуль не могут, то система трёх однородных алгебраических уравнений (11.46) имеет заведомо отличные от нуля решения.

В этом случае определитель системы (11.46) должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_k & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_k & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_k \end{vmatrix} = 0. \quad (11.48)$$

Раскрывая определитель (11.48), приходим к кубическому уравнению

для определения трёх главных напряжений σ_k ($k=1,2,3$):

$$\sigma_k^3 - I_1^{(\sigma)}\sigma_k - I_2^{(\sigma)}\sigma_k - I_3^{(\sigma)} = 0, \quad (11.49)$$

где коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1^{(\sigma)} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_0, \\ I_2^{(\sigma)} = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x = \\ = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1, \\ I_3^{(\sigma)} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}, \end{array} \right. \quad (11.50)$$

являются *инвариантами* тензора напряжений по отношению к преобразованиям координат x, y, z . Все три корня уравнения (11.49) позволяют найти направляющие косинусы главных направлений напряжённого состояния частицы тела. Поскольку из трёх уравнений (11.46) только два независимы, то беря, например, два первых уравнения и решая их совместно с (11.47)

относительно l_x, l_y, l_z по методу Крамера, получим:

$$l_x = \frac{D_{xk}}{D_k}, \quad l_y = \frac{D_{yk}}{D_k}, \quad l_z = \frac{D_k}{D}$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} D_k = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_k & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_k \end{vmatrix} = (\sigma_x - \sigma_k)(\sigma_y - \sigma_k) - \tau_{xy}^2, \\ D_{1k} = \left[-(\sigma_y - \sigma_k)\tau_{xz} + \tau_{xy}\tau_{yz} \right], \\ D_{2k} = \left[-(\sigma_k - \sigma_k)\tau_{yz} + \tau_{xy}\tau_{xz} \right], \\ D = \sqrt{D_k^2 + D_{1k}^2 + D_{2k}^2}. \end{array} \right. \quad (11.51)$$

В частном случае плоской задачи $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$, и определитель

(11.48) приводит к уравнению

$$(\sigma_z - \sigma_k) [\sigma_k^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \sigma_k - (\tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y)] = 0,$$

откуда находим ранее полученную формулу

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad \sigma_3 = \sigma_z$$

Полагая в (11.46) $l_x = \cos \alpha, l_y = \sin \alpha, l_z = 0$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_k) l_x + \tau_{xy} l_y = 0, \\ \tau_{xy} l_x + (\sigma_y - \sigma_k) l_y = 0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на l_y , а второе на l_x и вычитая, находим:

$$(\sigma_x \sigma_y) l_x l_y + \tau_{xy} (l_y^2 - l_x^2) = 0$$

откуда, с учётом $l_x = \cos \alpha, l_y = \sin \alpha$, получим уже известную нам формулу (11.43):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

для определения углов α_1, α_2 , характеризующих направление главных осей.

Пример 1. Пусть $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau$. Такое напряжённое состояние называется пространственным чистым сдвигом (рис. 11.18,а). Инварианты тензора $I_1^{(\sigma)} = 0, I_2^{(\sigma)} = 3\tau^2, I_3^{(\sigma)} = 2\tau^3$. Кубическое уравнение:

$$\sigma_k^3 - 3\tau^2 \sigma_k - 2\tau^3 = 0$$

или, с учётом $3\tau^2 \sigma_k = \tau^2 \sigma_k + 2\tau^2 \sigma_k$, получаем

$$(\sigma_k + \tau)(\sigma_k^2 - \tau \sigma_k - 2\tau^2) = 0,$$

откуда

$$\sigma_1 = 2\tau, \sigma_2 = \sigma_3 = -\tau.$$

Если все касательные напряжения $\tau = k$, где k — предел текучести, то состояние частицы называют *полным пластическим*.

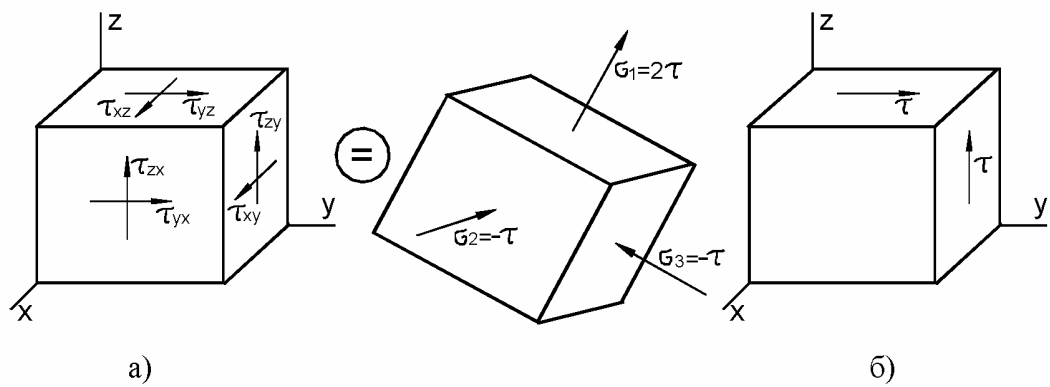


Рис. 11.18

При плоском чистом сдвиге касательные напряжения τ параллельны одной плоскости xy (рис. 11.18,б). В этом случае, согласно диаграмме чистого сдвига, частица тела переходит в пластическое состояние при $\tau = \tau_T$, где τ_T — предел текучести для плоского чистого сдвига. Такое состояние частицы является неполным пластическим, т.к. в направлении z частица остаётся в упругом состоянии. Заметим, что $k = 3\tau_T / 2$.

Пример 2. При растяжении стержня напряжения $\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0, \sigma_z \neq 0$ (рис. 11.19).

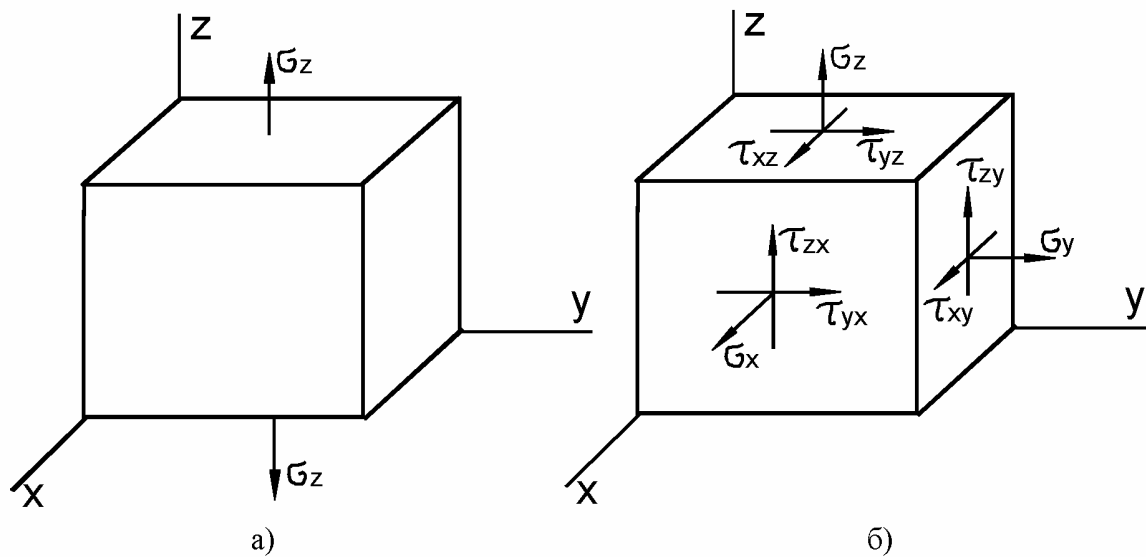


Рис. 11.19

В этом случае инварианты $I_1 = \sigma_z, I_2 = 0, I_3 = 0$. Кубическое уравнение (11.49) принимает вид:

$$\sigma_k^2 (\sigma_k - \sigma_z) = 0,$$

откуда находим $\sigma_1 = \sigma_z, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Пример 3. Пусть требуется найти главные напряжения, если все компоненты тензора напряжений равны одной и той же величине σ_0 . В этом случае

$I_1 = 3\sigma_0, I_2 = 0, I_3 = 0$. Из (11.49) получаем $\sigma_1 = 3\sigma_0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Следовательно, заданное напряжённое состояние представляет собой одноосное растяжение. Данное напряжённое состояние можно разложить на напряжённое состояние всестороннего растяжения напряжениями $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_0$ и пространственный чистый сдвиг с напряжениями $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = \sigma_0$. Если считать объёмную деформацию упругой, т.е.

$\Theta = \sigma_0 / K$, то рассматриваемое напряжённое состояние за пределом упругости представляется состоянием полной пластичности. Такое состояние возникает при одноосном растяжении.

11.8. Общее решение кубического уравнения для определения главных напряжений

Примем в (11.49) $\sigma_k = \sigma_0 + S_k$, где S_k — главные значения девиатора напряжений. В результате получим:

$$S_k^3 - J_1^{(\sigma)} S_k^2 - J_2^{(\sigma)} S_k - J_3^{(\sigma)} = 0, \quad (11.52)$$

где коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1^{(\sigma)} = (\sigma_x - \sigma_0) + (\sigma_y - \sigma_0) + (\sigma_z - \sigma_0) \equiv 0, \\ J_2^{(\sigma)} = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 - (\sigma_x - \sigma_0)(\sigma_y - \sigma_0) - (\sigma_y - \sigma_0)(\sigma_z - \sigma_0) - \\ - (\sigma_z - \sigma_0)(\sigma_x - \sigma_0) = -S_1 S_2 - S_2 S_3 - S_3 S_1, \\ J_3^{(\sigma)} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{vmatrix} = S_1 S_2 S_3. \end{array} \right. \quad (11.53)$$

являются инвариантами девиатора напряжений при преобразовании координатных осей.

Удобная форма $J_2^{(\sigma)}$ получается прибавлением нулевого члена

$$\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_0) + (\sigma_y - \sigma_0) + (\sigma_z - \sigma_0)]^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_0)^2 + (\sigma_y - \sigma_0)^2 + (\sigma_z - \sigma_0)^2] + \\ + (\sigma_x - \sigma_0)(\sigma_y - \sigma_0) + (\sigma_y - \sigma_0)(\sigma_z - \sigma_0) + (\sigma_z - \sigma_0)(\sigma_x - \sigma_0) = 0$$

к правой части J_2^σ . В результате получаем

$$J_2^{(\sigma)} = \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_0)^2 + (\sigma_y - \sigma_0)^2 + (\sigma_z - \sigma_0)^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right\} = \\ = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)$$

или

$$6J_2^{(\sigma)} = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = \\ = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2,$$

где использовано, что $3\sigma_0 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$.

Второй инвариант девиатора напряжений играет фундаментальную роль в сопротивлении материалов пластическому деформированию. - Величину

$$\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$$

или

$$\sigma = \sqrt{2J_2^{(\sigma)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (11.54)$$

называют модулем *тензора-девиатора* напряжений.

Величину

$$S = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \sqrt{3\sigma_0^2 + \sigma^2} \quad (11.55)$$

называют *модулем тензора напряжений*, а σ_0 — *модулем шарового тензора* напряжений.

Общее решение кубического уравнения (11.52) в тригонометрической

форме Кордано имеет вид:

$$\begin{cases} S_1 = \sigma_1 - \sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma \cos \varphi, \\ S_2 = \sigma_2 - \sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right), \\ S_3 = \sigma_3 - \sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma \cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right), \end{cases} \quad (11.56)$$

где угол φ называется фазой девиатора или углом вида напряжённого состояния формоизменения. Для определения φ имеет место соотношение:

$$\cos 3\varphi = 3\sqrt{6} \frac{J_3^{(\sigma)}}{\sigma^3}. \quad (11.57)$$

Определив φ из (11.57) находим по формулам (11.56) главные напряжения S_k, σ_k девиатора и тензора напряжений.

11.9. Эллипсоид напряжений Ламе

Пусть координатные оси в данной точке А тела совпадают с главными осями (рис. 11.20).

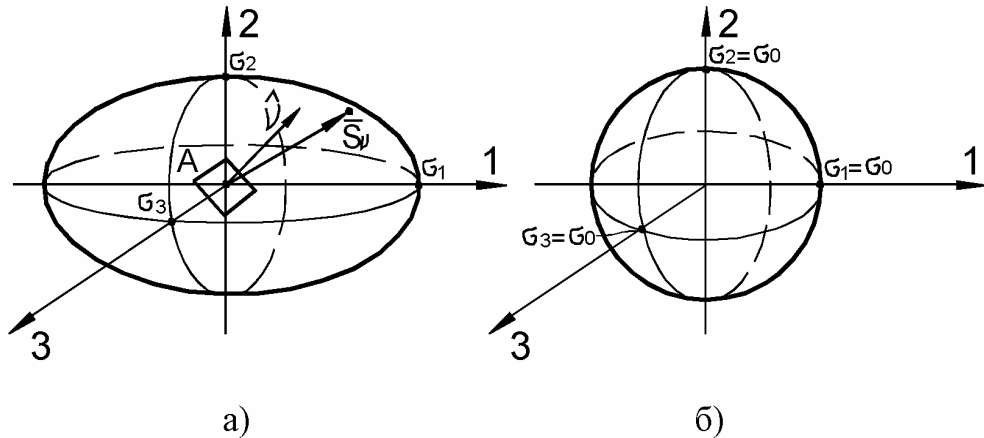


Рис. 11.20

Тогда на основании формул Коши получаем:

$$X_v = \sigma_1 l_1, Y_v = \sigma_2 l_2, Z_v = \sigma_3 l_3,$$

где направляющие косинусы l_1, l_2, l_3 удовлетворяют соотношению:

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1.$$

Подставляя в это соотношение $l_1 = X_v / \sigma_1$, $l_2 = Y_v / \sigma_2$, $l_3 = Z_v / \sigma_3$, получим уравнение эллипсоида:

$$\left(\frac{X_v}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{Y_v}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{Z_v}{\sigma_3}\right)^2 = 1, \quad (11.58)$$

называемого *эллипсоидом напряжений Ламе*.

Так как X_v, Y_v, Z_v – координаты конца вектора напряжений, то конец этого вектора всегда находится на поверхности эллипсоида с полуосями $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Эллипсоид Ламе (11.58) представляет собой геометрический образ напряжённого состояния частицы тела, т.е. тензора напряжений.

Тензор напряжений можно представить как совокупность векторов

напряжений $\vec{S}_v$ в точке А на различно ориентированных площадках, т.е. своего рода «ёжик» эллипсоидальной формы. Из рис. 11.20 видно, что

главное напряжение σ_1 есть одновременно наибольшее значение полного и максимального нормального напряжения $\sigma_{\max}$, т.е. $\left|\vec{S}_v\right|_{\max} = \sigma_{\max} = \sigma_1$.

Если $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$, то эллипсоид превращается в шар. Соответствующий тензор напряжений:

$$T_0 = \begin{pmatrix} \sigma_v & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_v & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_v \end{pmatrix}$$

называется поэтому *шаровым*, а среднее напряжение σ_0 – его модулем.

11.10. Круги напряжений Мора

Удобное двумерное геометрическое представление трёхмерного напряжённого состояния было предложено немецким учёным О. Мором. Отнесём материальную частицу к главным осям (рис. 11.21). Рассечём её плоскостью, содержащей направление третьей главной оси (рис. 11.21,а). Тогда, согласно (11.35), имеем:

$$\sigma_v = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha_{12}, \quad \tau_v = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha_{12} \quad (11.59)$$

Уравнения (11.59) представляют собой параметрические уравнения окружности, каноническое уравнение которой имеет в системе координат

σ_v, τ_v вид (рис. 11.22):

$$\left(\sigma_v - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_v^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2. \quad (11.60)$$

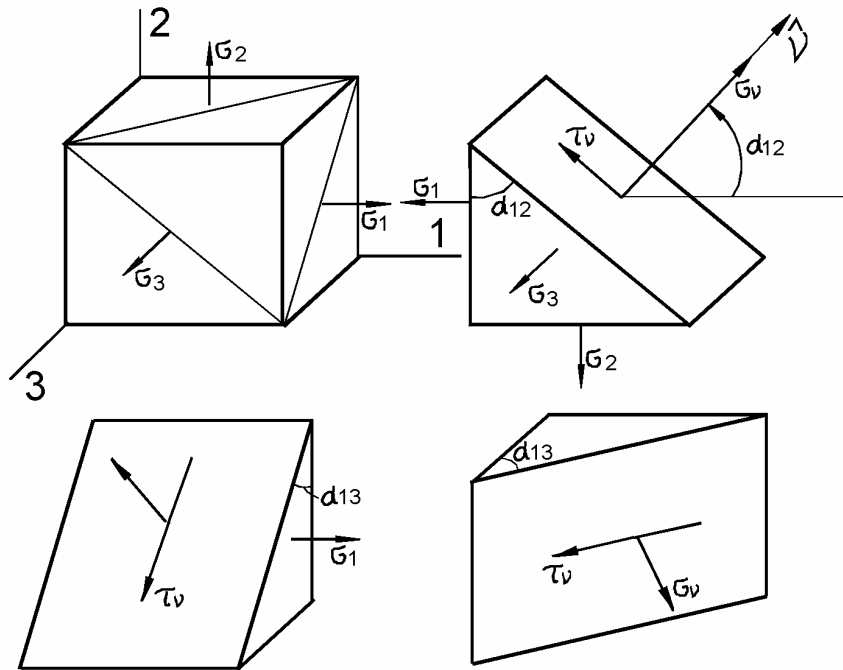


Рис. 11.21

Координаты центра окружности $\sigma_v = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$, $\tau_v = 0$, радиус

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

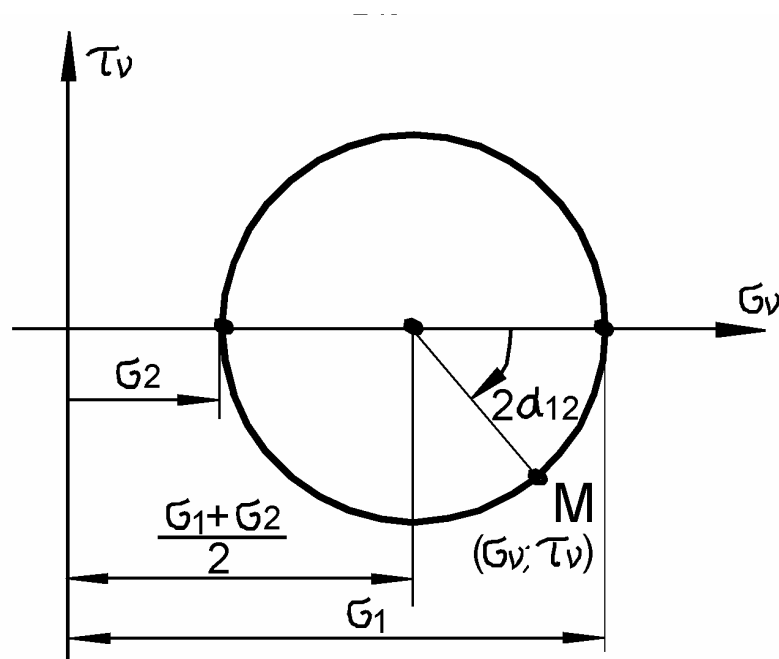


Рис. 11.22

Окружность Мора позволяет графически найти напряжение σ_v, τ_v на любой площадке, положение которой характеризуется углом α . Для этого нужно отложить по часовой стрелке угол 2α и провести под этим углом радиус R до пересечения с окружностью в точке M . Координаты этой точки и есть искомые значения σ_v, τ_v . Наибольшее касательное напряжение возникает при $\alpha_{12} = 45^\circ$ и равно численно радиусу окружности Мора:

$$\tau_{12} = T_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Минимальное значение τ_v возникает на площадке при $\alpha = +45^\circ$ и равно:

$$\tau_{\min} = T_{21} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} = -T_{21}.$$

Аналогичные круги Мора можно построить для наклонных площадок, содержащих главные направления 1 и 2 (рис. 11.23).

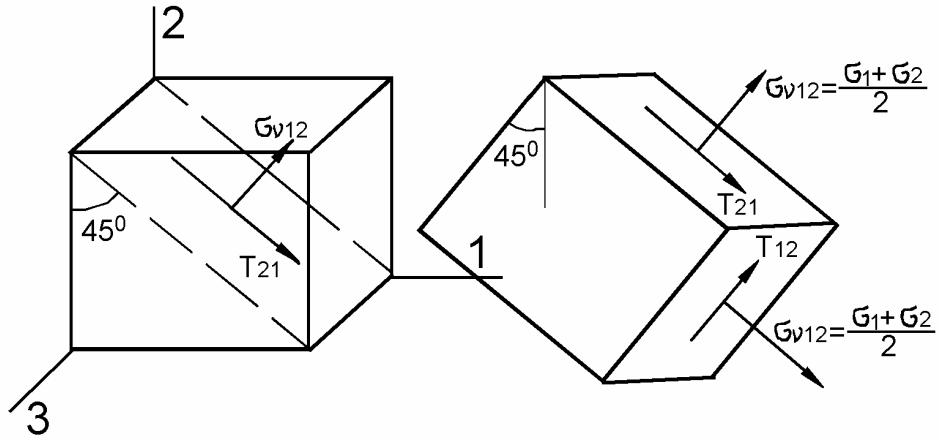


Рис. 11.23

Их уравнения в параметрической форме имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_v = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha_{13}, \tau_v = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha_{13}, \\ \sigma_v = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha_{23}, \tau_v = -\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha_{23}, \end{cases}$$

откуда следует, что наибольшее касательные напряжения в этих случаях:

$$T_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, T_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

также равны радиусам соответствующих кругов Мора.

Касательные напряжения:

$$T_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, T_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, T_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (11.61)$$

носят название *главных касательных напряжений*. Они удовлетворяют тождеству

$$T_{12} + T_{23} = T_{13}.$$

Каждой точке на любой из окружности Мора отвечают напряжения σ_v, τ_v и площадки, направление которой характеризуется одним из углов $\alpha_{ij}, (i, j = 1, 2, 3)$. Те площадки, которые не содержат ни одну из главных осей, окружностями Мора не описываются. Можно показать, что напряжения на этих площадках задаются точками, расположенными между окружностями в заштрихованной области. Из рис. 11.24 видно, что:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1, \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (11.62)$$

если принято условие $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

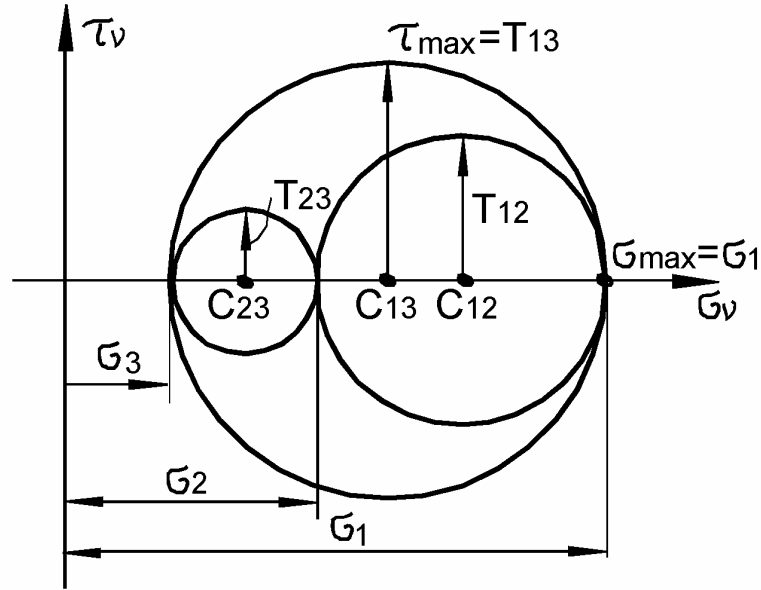


Рис. 11.24

Следовательно, $\tau_{\max}$ определяется радиусом большого круга Мора. Величину

$$\mu_{\sigma} = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 \quad (11.63)$$

называют *параметром вида напряжённого состояния Лоде*. При наложении на напряжённое состояние частицы всестороннего давления параметр Лоде не изменяется. Для одноосного растяжения ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) имеем $\mu_{\sigma} = -1$, для сжатия ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$) имеем $\mu_{\sigma} = +1$, для плоского чистого сдвига ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \sigma_2 = 0$) $\mu_{\sigma} = 0$. Соответствующие круги Мора приведены на рис. 11.25.

Таким образом, параметр Лоде μ_{σ} характеризует вид напряжённого состояния.

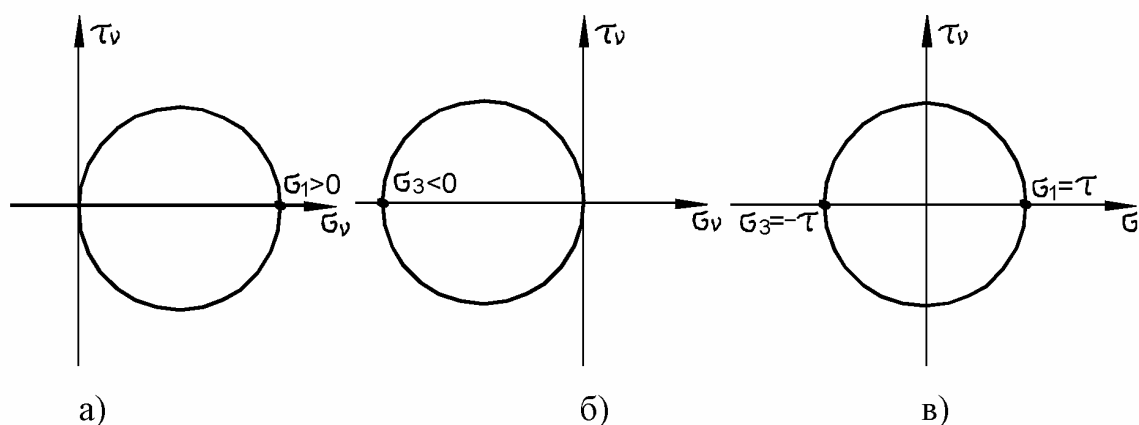


Рис. 11.25

Если изначально напряжённое состояние не является двухосным, связанным с главными осями, то для построения круга напряжений Мора при плоском напряжённом состоянии следует использовать формулы (11.35):

$$\begin{cases} \sigma_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \tau_v = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha, \end{cases} \quad (11.63)$$

Поступая так же, как и в случае двухосного растяжения сводим параметрические уравнения окружности (11.63) к каноническому виду (рис. 11.26):

$$\left(\sigma_v - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_v^2 = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 \right]. \quad (11.64)$$

В (11.64) мы имеем более сложное выражение радиуса окружности:

$$r_{\max} = R = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}.$$

При $\tau = 0$ уравнение (11.64) сводится к (11.60) как частному случаю.

При $\tau \neq 0$ построение круга Мора показано на рис. 11.26. Сначала определяется положение центра С круга как точки с координатами $\sigma_v = (\sigma_x + \sigma_y)/2, \tau_v = 0$.

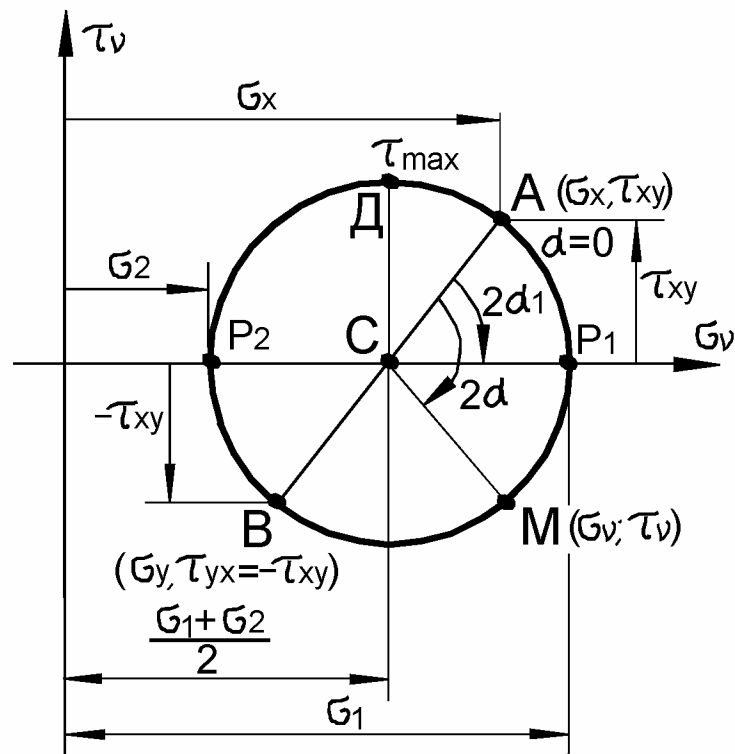


Рис. 11.26

Затем определяется положение точки А, характеризующей напряжения на грани х элемента при $\alpha = 0$, т.е. $\sigma_v = \sigma_x, \tau_v = \tau_{xy}$. Здесь следует помнить правило знаков для σ_v, τ_v и других напряжений, указанных на рис. 11.12. Заметим, что точки А и В, характеризующие напряжения на площадках, расположенных под углом 90° друг к другу, лежат на противоположных концах диаметра круга Мора. Далее на АВ с центром в точке С чертится круг. Напряжения σ_v, τ_v на произвольной площадке, лежащей под углом α к оси х, можно определить следующим образом. Откладываем от точки А по часовой стрелке угол 2α и определяем положение точки М на круге с искомыми координатами σ_v, τ_v . Точка М', диаметрально противоположная Д, даёт напряжения σ_t, τ_t для площадки, составляющей угол 90° с той, которая имеет нормаль $\hat{v}$, т.е. для площадки с углом $\alpha + 90^\circ$ с осью х. Точка Д даёт максимальное касательное напряже-

ние, равное радиусу круга Мора:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (11.65)$$

Одной из важных задач использования круга Мора является определение главных нормальных напряжений σ_1 и σ_2 . Этим напряжениям отвечают точки P_1 и P_2 круга. Из рис. 11.26 следует, что угол между направлениями на точки A и P_1 равен удвоенному углу α_1 , определяющему первое главное напряжение, а угол между направлениями A и P_2 – удвоенный угол $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$, определяющий второе главное направление. Имеет место соотношение

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{AE}{CE} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},$$

которое совпадает с формулой (11.36).

Из изложенного следует, что круг Мора можно использовать в качестве графического способа определения как напряжений на произвольной площадке, так и главных нормальных и максимальных касательных напряжений.

11.11. Напряжения на октаэдрических площадках

Рассмотрим площадки, равнонаклонённые к главным осям (рис. 11.27,а). Такие площадки называются *октаэдрическими*. Они образуют геометрическую фигуру, называемую главным октаэдром (восьмигранником) (рис. 11.27,б).

Для первого октаната, образуемого положительными направлениями главных осей, направляющие косинусы $l_x = l_y = l_z = 1/\sqrt{3}$. Поэтому из формул Коши (11.29) следует:

$$X_v = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}, Y_v = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, Z_v = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}. \quad (11.66)$$

Нормальное напряжение, согласно (11.31), равно:

$$\sigma_v = \sigma_{окт} = X_v l_x + Y_v l_y + Z_v l_z = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_0 \quad (11.67)$$

т.е. равно среднему напряжению.

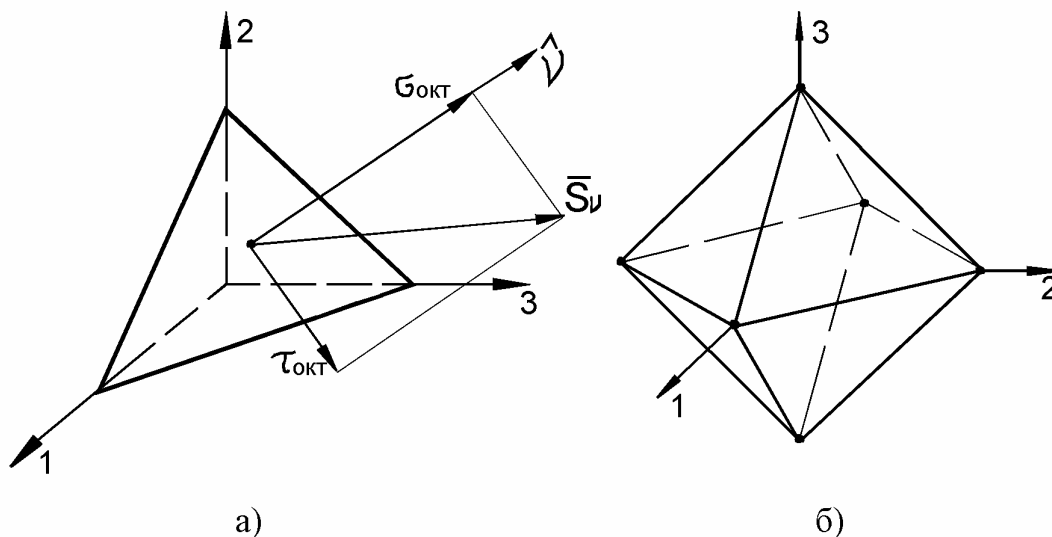


Рис. 11.27

Касательное напряжение находим по формуле

$$\tau_v = \tau_{OKT} = \sqrt{S_v^2 - \sigma_v^2} = \sqrt{X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2 - \sigma_v^2}.$$

Заменяя X_v, Y_v, Z_v, σ_0 их выражениями (11.66), (11.67) получим:

$$\tau_{OKT} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (11.68)$$

Направление действия τ_{OKT} определяется углом вида напряжённого состояния φ на октаэдрической площадке (рис. 11.28), который совпадает с фазой напряжённого состояния. На рис. 11.28 занумерованные направления со штрихами представляют собой проекции главных направлений на октаэдрическую плоскость.

Угол φ связан с параметром Лоде μ_σ простым соотношением:

$$\mu_\sigma = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Для растяжения $\varphi = 0$, $\mu_\sigma = -1$; сжатия $-\varphi = -\frac{\pi}{3}$, $\mu_\sigma = 1$; для чистого

сдвига $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, $\mu_\sigma = 0$.

Таким образом, на всех гранях главного октаэдра действуют одинаковые нормальные напряжения $\sigma_{OKT} = \sigma_0$ (11.67) и одинаковые

касательные напряжения $\tau_{окт}$ (11.68).

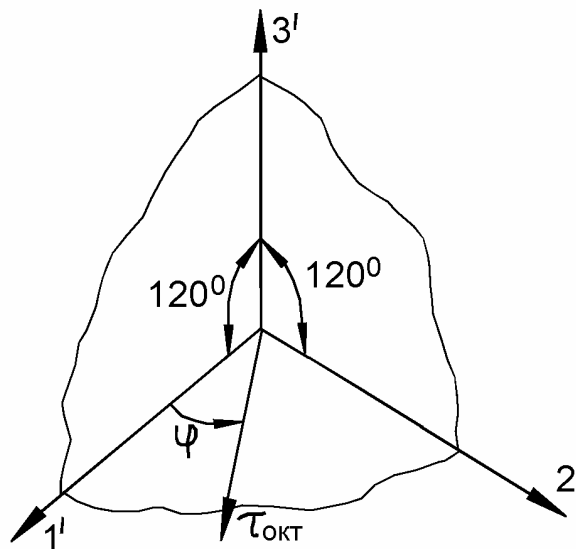


Рис. 11.28

Первые подвергают октаэдр всестороннему растяжению или сжатию, что можно сравнить с давлением воды на погружённый в неё октаэдр. Вторые приводят к изменению формы октаэдра и к его пластическому деформированию. Октаэдрическое касательное напряжение не изменяется, если наложить на частицу всестороннее растяжение – сжатие. С точностью до множителя модуль девиатора напряжений:

$$\sigma = \sqrt{3}\tau_{окт}$$

и этим самым, с точностью до постоянного множителя, определяет его физический смысл.

Введём два важных понятия о *простом* (пропорциональном) и *сложном* нагружении. Нагружение назовём *простым* (пропорциональным), если все компоненты тензора напряжений изменяются пропорционально

одному параметру t , т.е. $\sigma_x = t\sigma_x^0$, $\sigma_y = t\sigma_y^0, \dots, \tau_{xz} = t\tau_{xz}^0$. В этом случае

параметр Лоде μ_σ и угол вида (фаза) напряжённого состояния φ остаются неизменными. В противном случае нагружение называют *сложным*. Эти понятия были введены великим русским учёным-механиком, профессором Московского государственного университета А.А. Ильюшиным (1911 – 1999).

11.12. Определение удлинений и сдвигов для произвольно направленных волокон

Рассмотрим частицу тела, отнесённую к координатным осям x, y, z (рис. 11.29).

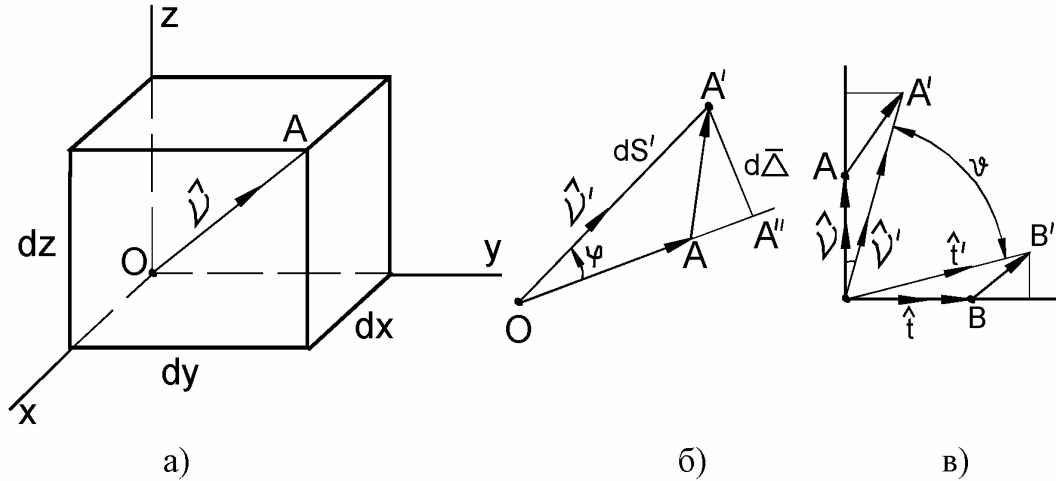


Рис. 11.29

Направление диагонали $OA = dS$ определим до деформации единичным вектором:

$$\hat{\mathbf{v}} = l_x \hat{\mathbf{e}}_x + l_y \hat{\mathbf{e}}_y + l_z \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (11.69)$$

а после деформации – единичным вектором $\hat{\mathbf{v}}'$, повернутым на угол φ . После деформации длина волокна изменится и станет равной $OA' = dS'$, так, что будет выполнено векторное равенство:

$$ds' \hat{\mathbf{v}}' = ds \hat{\mathbf{v}} + d\bar{\Delta}. \quad (11.70)$$

Волокно OA получит относительную деформацию:

$$\varepsilon_v = \frac{ds' - ds}{ds}, \quad (11.71)$$

откуда

$$ds' = (1 + \varepsilon_v) ds. \quad (11.72)$$

Соотношение (11.70), с учётом (11.71), (11.72), запишем в виде:

$$(1 + \varepsilon_v) \hat{v}' = \hat{v} + \frac{d\bar{\Delta}}{ds}. \quad (11.73)$$

Соотношение (11.73) названо профессором Л.А. Толоконниковым (1923 – 1998) *фундаментальным соотношением теории деформаций*.

Так как вектор перемещения

$$\vec{\Delta} = u \hat{e}_x + v \hat{e}_y + w \hat{e}_z,$$

то

$$\frac{d\bar{\Delta}}{ds} = \frac{du}{ds} \hat{e}_x + \frac{dv}{ds} \hat{e}_y + \frac{dw}{ds} \hat{e}_z, \quad (11.74)$$

где

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} l_x + \frac{\partial u}{\partial y} l_y + \frac{\partial u}{\partial z} l_z, \\ \frac{dv}{ds} = \frac{\partial v}{\partial x} l_x + \frac{\partial v}{\partial y} l_y + \frac{\partial v}{\partial z} l_z, \\ \frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial x} l_x + \frac{\partial w}{\partial y} l_y + \frac{\partial w}{\partial z} l_z, \end{cases} \quad (11.75)$$

$$l_x = dx/ds, l_y = dy/ds, l_z = dz/ds.$$

Возводя (11.73) в квадрат, получим:

$$\varepsilon_v \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_v \right) = \hat{v} \frac{d\bar{\Delta}}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\Delta}}{ds} \right)^2. \quad (11.76)$$

Считая деформации малыми по сравнению с единицей и пренебрегая в (11.76) нелинейными членами, находим:

$$\varepsilon_v = \hat{v} \frac{d\bar{\Delta}}{ds}. \quad (11.77)$$

Учитывая (11.69), (11.74), (11.75) и производя скалярное умножение, находим:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x l_x^2 + \varepsilon_y l_y^2 + \varepsilon_z l_z^2 + 2\varepsilon_{xy} l_x l_y + 2\varepsilon_{yz} l_y l_z + 2\varepsilon_{xz} l_x l_z \quad (11.78)$$

где обозначено:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \end{cases} \quad (11.78)$$

Формулы (11.79) связывают компоненты малой линейной деформации и перемещения и носят название геометрических соотношений Коши для деформаций.

Рассмотрим теперь два ортогональных волокна, направление которых характеризуется единичными векторами:

$$\hat{\nu} = l_x \hat{e}_x + l_y \hat{e}_y + l_z \hat{e}_z, \hat{t} = l'_x \hat{e}_x + l'_y \hat{e}_y + l'_z \hat{e}_z,$$

где

$$l_x = \frac{dx}{ds}, l_y = \frac{dy}{ds}, l_z = \frac{dz}{ds}; l'_x = \frac{dx}{dt}, l'_y = \frac{dy}{dt}, l'_z = \frac{dz}{dt}.$$

Для них можно составить два фундаментальных соотношения (рис. 11.29,в):

$$(1 + \varepsilon_v) \hat{\nu}' = \hat{\nu} + \frac{d\bar{\Delta}}{ds}, (1 + \varepsilon_t) \hat{t}' = \hat{t} + \frac{d\bar{\Delta}}{dt}. \quad (11.80)$$

Для производной $d\bar{\Delta}/ds$ имеем соотношение (11.74), а для $d\bar{\Delta}/dt$ аналогичное соотношение с заменой ds на dt .

В результате перемножения соотношений (11.80) получим:

$$(1 + \varepsilon_v)(1 + \varepsilon_t) \sin \gamma_{vt} = \hat{\nu} \frac{d\bar{\Delta}}{ds} + \hat{t} \frac{d\bar{\Delta}}{dt} + \left(\frac{d\bar{\Delta}}{ds} \frac{d\bar{\Delta}}{dt} \right).$$

Считая деформации малыми и пренебрегая нелинейными слагаемыми, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{vt}}{2} &= \varepsilon_x l_x l'_x + \varepsilon_y l_y l'_y + \varepsilon_z l_z l'_z + \varepsilon_{xy} (l_x l'_y + l'_x l_y) + \\ &+ \varepsilon_{yz} (l_y l'_z + l'_y l_z) + \varepsilon_{xz} (l_x l'_z + l'_x l_z). \end{aligned} \quad (11.81)$$

Легко установить геометрический смысл введенных в формулах Коши (11.79) обозначений, названных компонентами малой линейной деформации.

Пусть мы имеем волокно dx . Для него $l_x = \cos 0 = 1$, $l_y = l_z = \cos 90^\circ = 0$.

Из (11.79) получаем $\varepsilon_v = \varepsilon_x$. Следовательно, ε_x есть действительно относительное удлинение частицы вдоль оси x . Аналогично выясняется геометрический смысл компонент деформации $\varepsilon_y, \varepsilon_z$.

Пусть теперь мы имеем два ортогональных волокна dx и dy . Тогда для первого $l_x = 1, l_y = l_z = 0$, а для второго $l'_x = l'_z = 0, l'_y = 1$. Из (11.81) получаем $\gamma_{xy}/2 = \varepsilon_{xy}$. Следовательно, ε_{xy} представляет собой половины сдвига между волокнами dx и dy . Аналогично можно выяснить геометрический смысл остальных компонент: ε_{yz} и ε_{xz} .

В частном случае плоской деформации ($\varepsilon_z = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{zx} = 0$) имеем:

$$\begin{cases} l_x = \cos \alpha, l_y = \sin \alpha, l_z = 0, \\ l'_x = -\sin \alpha, l'_y = \cos \alpha, l'_z = 0, \end{cases}$$

и из формул (11.78), (11.81) следуют полученные нами ранее формулы

$$\begin{cases} \varepsilon_v = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{\gamma}{2} \sin 2\alpha, \\ \frac{\gamma_v}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \varepsilon_{xy} \cos 2\alpha. \end{cases} \quad (11.82)$$

Формулы Коши (11.35) можно получить значительно проще. Рассмотрим одну из граней ОАСВ частицы тела в плоскости xy со сторонами dx и dy (рис. 11.30). В результате малой линейной деформации эта грань элемента удлинится в направлениях осей x , y и изменит прямой угол на величину деформации сдвига $\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2$.

Рассмотрим деформацию волокна $OA = dx$. Её можно вычислить следующим образом. Представим сначала, что волокно переместилось в положение $O'A' = dx$ как жёсткое целое, сохранив свою длину. Затем волокно удлинилось на величину $A''A'''$ и по перпендикуляру $A'''A'$ перешло в положение OA' .

В соответствии с принципом малости перемещений перемещение $A'''A'$ не вызывает дополнительного удлинения волокна OA .

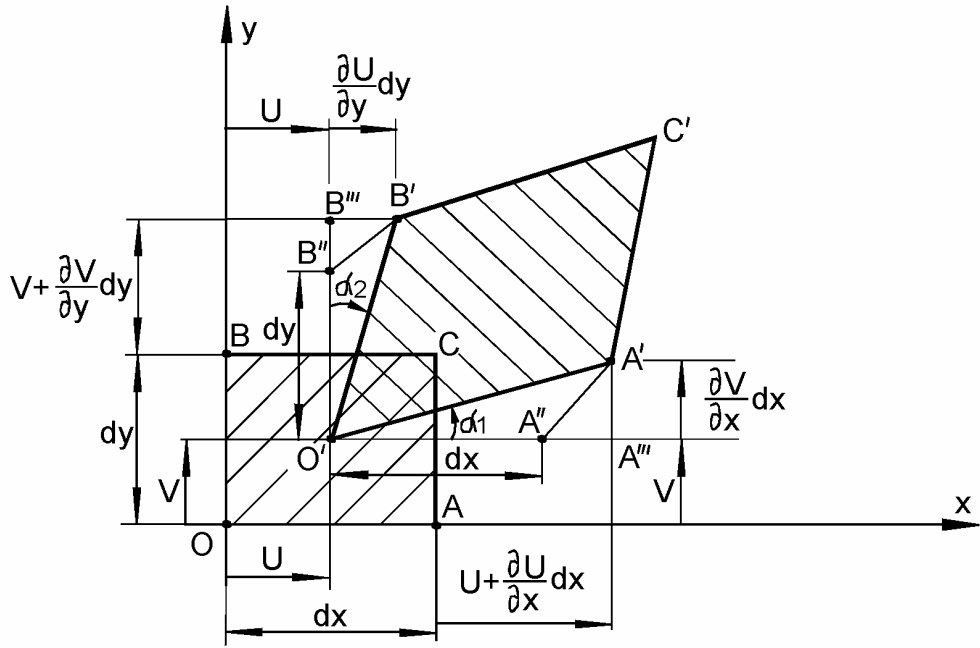


Рис. 11.30

Поэтому

$$\varepsilon_x = \frac{O'A''' - O'A''}{O'A''} = \frac{A''A'''}{O'A''} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Аналогично можно найти деформации в направлениях осей y и z:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Рассмотрим теперь деформацию сдвига между волокнами OA и OB (рис. 11.30). Малые углы поворота α_1 и α_2 волокон отождествим с их тангенсом. Тогда:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{A'A'''}{O'A'''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x} \approx \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{B'B'''}{O'B'''} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \varepsilon_y} \approx \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned} \right.$$

где считается $1 + \varepsilon_x \approx 1, 1 + \varepsilon_y \approx 1$ в силу малости относительных деформаций по сравнению с единицей.

Таким образом:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Аналогично находим деформации сдвига (угловые деформации) в двух других координатных плоскостях.

В результате получаем шесть геометрических зависимостей Коши между компонентами тензора деформации и составляющих перемещения:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \end{cases} \quad (11.83)$$

Деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ считаются положительными, если отвечают удлинению волокон, и отрицательными, если они укорачиваются. Положительные сдвиги отвечают уменьшению прямого угла между положительными направлениями координатных осей. Отрицательные сдвиги отвечают увеличению прямого угла между этими же волокнами.

Объёмная деформация

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

т.е. может быть выражена через составляющие перемещения.

11.13. Главные деформации и сдвиги

Поставим вопрос об отыскании таких направлений в данной точке тела, в которых волокна испытывают экстремальные удлинения, а сдвиг отсутствует. Такие направления назовём *главными направлениями деформации*, а сами деформации – главными деформациями. Обозначим их

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$. Пусть l_x, l_y, l_z – направляющие косинусы главного

направления, удовлетворяющие условию:

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1. \quad (11.84)$$

Составим функцию Лагранжа:

$$F = \varepsilon_v - \varepsilon_k (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 - 1)$$

и условия экстремума этой функции. Получим систему трёх однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (\varepsilon_x - \varepsilon_k) l_x + \varepsilon_{xy} l_y + \varepsilon_{xz} l_z = 0, \\ \varepsilon_{yx} l_x + (\varepsilon_y - \varepsilon_k) l_y + \varepsilon_{yz} l_z = 0, \\ \varepsilon_{zx} l_x + \varepsilon_{zy} l_y + (\varepsilon_z - \varepsilon_k) l_z = 0. \end{cases} \quad (11.85)$$

Приравнявая к нулю определитель системы (11.85), получаем:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_k & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_k & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_k \end{vmatrix} = 0. \quad (11.86)$$

Раскрывая этот определитель, приходим к кубическому уравнению для определения главных удлинений:

$$\varepsilon_k^3 - I_1^{(\varepsilon)} \varepsilon_k^2 - I_2^{(\varepsilon)} \varepsilon_k - I_3^{(\varepsilon)} = 0, \quad (11.87)$$

где обозначено:

$$\begin{cases} I_1^{(\varepsilon)} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_0 = \Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ I_2^{(\varepsilon)} = \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1, \\ I_3^{(\varepsilon)} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{cases}$$

Величины $I_1^{(\varepsilon)}, I_2^{(\varepsilon)}, I_3^{(\varepsilon)}$ являются инвариантами тензора деформаций по отношению к повороту координатных осей. Направления волокон, испытывающих главные удлинения называются *главными направлениями* или *осями деформации*. Они взаимно ортогональны и сдвигов между ними не происходит.

В частном случае плоской деформации ($\varepsilon_z = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$). Из (11.87) следует уравнение

$$(\varepsilon_k - \varepsilon_z) \left[\varepsilon_k^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \varepsilon_k - (\varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y) \right] = 0,$$

откуда находим:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}, \varepsilon_3 = \varepsilon_z. \quad (11.89)$$

Система (11.85) при $l_z = 0, l_x = \cos \alpha, l_y = \sin \alpha$ принимает вид

$$\begin{cases} (\varepsilon_x - \varepsilon_k) l_x + \varepsilon_{xy} l_y = 0, \\ \varepsilon_{yx} l_x + (\varepsilon_y - \varepsilon_k) l_y = 0, \end{cases}$$

откуда следует формула

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (11.90)$$

для определения главных направлений деформации.

Аналогично кругам напряжений Мора имеют место круги деформации Мора. Параметрические уравнения наибольшего из кругов Мора имеют вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_v = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \cos 2\alpha, \\ \frac{\gamma_{vt}}{2} = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \sin 2\alpha. \end{cases} \quad (11.91)$$

Из (11.91) следует каноническое уравнение окружности Мора для деформации:

$$\left(\varepsilon_v - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{vt}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \right)^2.$$

На рис. 11.31 дано геометрическое изображение кругов деформаций Мора, из которых следует:

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \varepsilon_{\max} = \varepsilon_1. \quad (11.92)$$

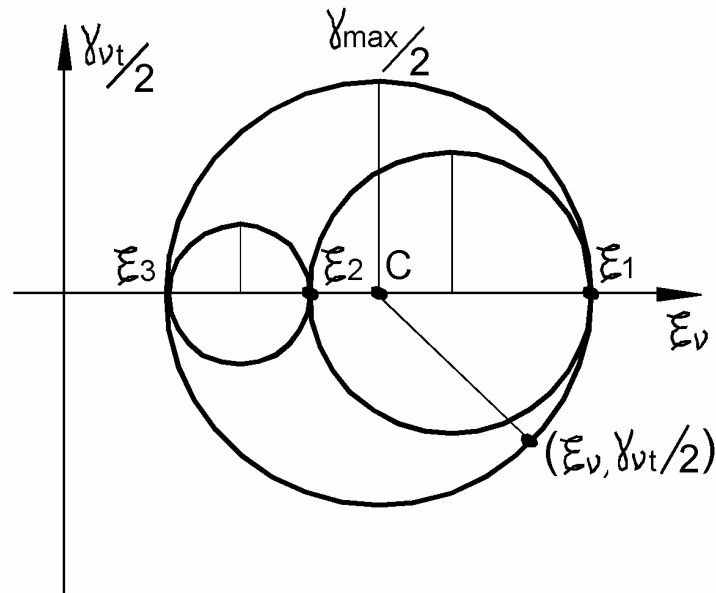


Рис. 11.31

Величина:

$$\mu_\varepsilon = 2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} - 1$$

называется *параметром Лоде* для деформированного состояния. Она характеризует вид деформированного состояния.

Радиусы кругов Мора дают экстремальные значения сдвигов:

$$\Gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \Gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \Gamma_{13} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \quad (11.93)$$

которые называются главными сдвигами.

В соответствии с законом Гука (11.15) и с учётом (11.61), (11.93) получаем:

$$\tilde{A}_{12} = \frac{T_{12}}{G}, \tilde{A}_{23} = \frac{T_{23}}{G}, \tilde{A}_{13} = \frac{T_{13}}{G}. \quad (11.94)$$

11.14. Общее решение кубического уравнения для определения главных деформаций

Как и при определении главных напряжений, сделаем в уравнении (11.87) замену $\varepsilon_k = \varepsilon_0 + \mathcal{E}_k$, где $\mathcal{E}_k$ – главные деформации тензора-девиатора деформаций. В результате получим:

$$\dot{Y}_k^3 - J_1^{(\varepsilon)} \dot{Y}_k^2 - J_2^{(\varepsilon)} \dot{Y}_k - J_3^{(\varepsilon)} = 0, \quad (11.95)$$

где коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1^{(\varepsilon)} = (\varepsilon_x - \varepsilon_0) + (\varepsilon_y - \varepsilon_0) + (\varepsilon_z - \varepsilon_0) = 0, \\ 6J_2^{(\varepsilon)} = (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2) = \\ = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2, \\ J_3^{(\varepsilon)} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad (11.96)$$

являются инвариантами относительно поворота координатных осей x, y, z .

Фундаментальную роль в сопротивлении материалов играет второй инвариант. Величину

$$\mathfrak{D} = \sqrt{\mathfrak{D}_1^2 + \mathfrak{D}_2^2 + \mathfrak{D}_3^2}$$

или

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \sqrt{2J_2^{(\varepsilon)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \end{aligned} \quad (11.97)$$

называют *модулем тензора-девиатора деформаций*. Величину

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} = \sqrt{3\varepsilon_0^2 + \mathfrak{D}^2}$$

называем модулем тензора деформаций.

Общее решение кубического уравнения (11.65) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathfrak{D} \cos \psi, \\ \mathfrak{D}_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathfrak{D} \cos \left(\psi + \frac{2\pi}{3} \right), \\ \mathfrak{D}_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathfrak{D} \cos \left(\psi - \frac{2\pi}{3} \right), \end{array} \right. \quad (11.98)$$

где угол ψ называется фазой девиатора или углом вида деформированного состояния формоизменения. Для определения ψ имеет место соотношение:

$$\cos 3\psi = 3\sqrt{6}J_3^{(\varepsilon)} / \dot{Y}^3. \quad (11.99)$$

Определив из (11.99) ψ , находим по формулам (11.98) главные деформации $\mathcal{E}_k$ и ε_k девиатора и тензора деформаций.

Угол ψ связан с параметром Лоде μ_ε соотношением:

$$\mu_\varepsilon = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\psi + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Модуль $\mathcal{E}$ девиатора деформаций имеет простой геометрический смысл. С точностью до множителя $\mathcal{E}$ совпадает с октаэдрическим сдвигом, т.е. $\mathcal{E} = \sqrt{3}\gamma_{\text{ОКТ}} / 2$. Под октаэдрическим сдвигом понимается сдвиг между октаэдрическими волокнами, которые равнонаклонены к главным осям. Модули девиаторов деформаций $\mathcal{E}$ и напряжений σ связаны простым соотношением (11.26).

Из закона Гука (11.15) для главных направлений имеем:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 2G(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_3),$$

тогда

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = \\ &= \frac{2G}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2} = 2G\mathcal{E}. \end{aligned}$$

11.15. Дифференциальные уравнения равновесия Коши

Для равновесия тела необходимо и достаточно, чтобы каждая его частица находилась в равновесии. Выделим из тела материальную частицу в форме параллелепипеда со сторонами dx, dy, dz (рис. 11.32).

Действие отброшенной части тела заменим напряжениями, равномерно распределёнными по его граням. Напряжения на противоположных гранях могут отличаться на малые частные приращения вследствие приращения координат.

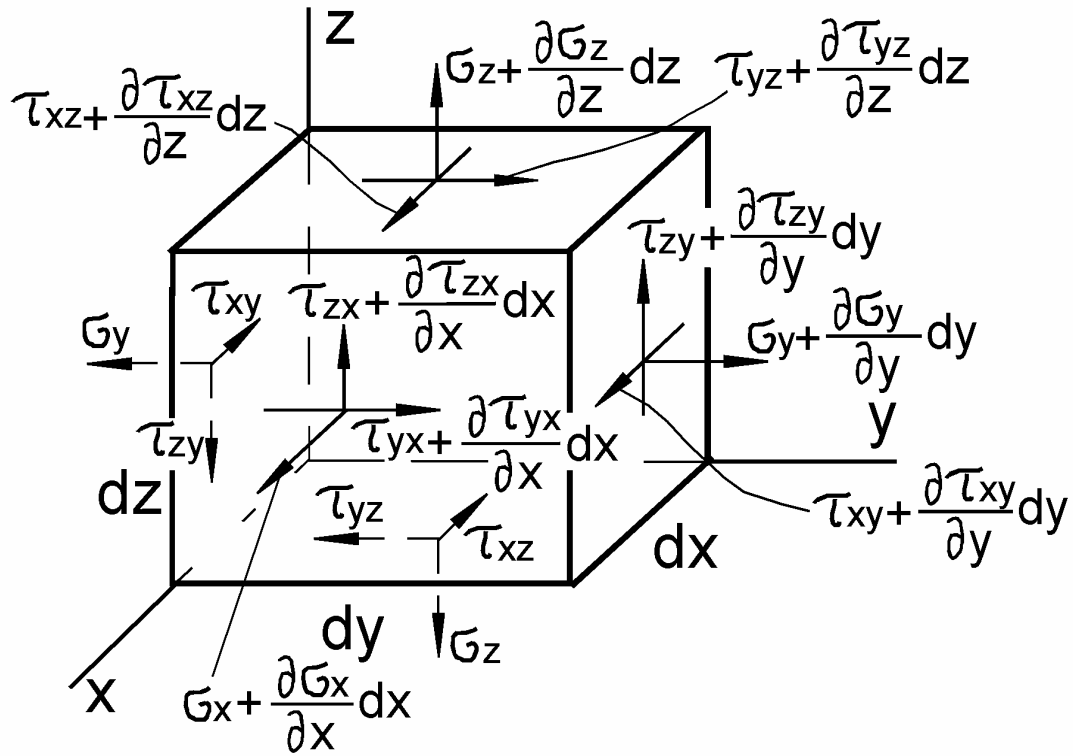


Рис. 11.32

Составим три уравнения равновесия в проекциях на оси x , y , z .

Проецируя все силы на ось x , получаем:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy + R_x dx dy dz = 0,$$

где R_x – проекция объёмной силы.

Аналогично можно записать уравнения равновесия в направлении осей y и z . После сокращений три уравнения равновесия Коши принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + R_x = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + R_y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + R_z = 0. \end{cases} \quad (11.100)$$

Составим ещё три уравнения равновесия моментов относительно осей x, y, z . Сумма моментов относительно оси x равна:

$$\left[\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \right] dy - \left[\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz \right) dx dy \right] dz - \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy dx dz \right) \frac{dz}{2} + \\ + (R_z dx dy dz) \frac{dy}{2} - (R_y dx dy dz) \frac{dz}{2}.$$

Аналогично можно записать ещё два уравнения равновесия моментов относительно осей y и z .

Сокращая на $dx dy dz$ и пренебрегая бесконечно малыми величинами высшего порядка, получаем закон парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (11.101)$$

Система уравнений равновесия (11.100) Коши представляет собой дифференциальные уравнения равновесия в напряжениях. Они показывают с учётом (11.101), что задача определения напряжений трижды статически неопределима. При интегрировании уравнений (11.100) появятся произвольные функции, для определения которых используются статические граничные условия:

$$\begin{cases} q_x = \sigma_x l_x + \tau_{xy} l_y + \tau_{xz} l_z, \\ q_y = \tau_{yx} l_x + \sigma_y l_y + \tau_{yz} l_z, \\ q_z = \tau_{zx} l_x + \tau_{zy} l_y + \sigma_z l_z. \end{cases} \quad (11.102)$$

Иногда удобно иметь уравнения равновесия в перемещениях. Согласно закону Коши – Гука (11.21) и соотношений (11.83):

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda \Theta + 2G \varepsilon_x = \lambda \Theta + 2G \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \tau_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{xz} = 2G \varepsilon_{xz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases} \quad (11.103)$$

Подставляя (11.103) в первое уравнение (11.100), получим уравнение:

$$(\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + R_x = 0,$$

где

$$\lambda = \frac{2G\mu}{1-2\mu}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad \lambda + G = \frac{G}{1-2\mu}.$$

Аналогично получают два других уравнения. В результате вместо (11.100) получаем систему уравнений Ламе в перемещениях:

$$\begin{cases} (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + R_x = 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + G \nabla^2 v + R_y = 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + G \nabla^2 w + R_z = 0, \end{cases} \quad (11.104)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} -$$

дифференциальный оператор Лапласа.

При интегрировании уравнений (11.104) используются геометрические граничные условия вида:

$$u = u_0(x, y, z), \quad v = v_0(x, y, z), \quad w = w_0(x, y, z)$$

на поверхности тела S_Δ .

11.16. Уравнение совместности деформаций

Компонент тензора малых линейных деформаций Коши (11.83) можно рассматривать как систему шести дифференциальных уравнений в частных производных для определения трёх компонент перемещений u, v, w . При произвольном выборе $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$ система (11.83) не имеет решения. Компоненты деформации должны удовлетворять шести соотношениям интегрируемости уравнений (11.83), которые носят название *уравнений совместности деформаций Сен-Венана*.

Они имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z}, \end{cases} \quad (11.105)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (11.106)$$

При подстановке в соотношения (11.105), (11.106) выражений (11.83) для деформаций они обращаются в тождества. Поэтому их иногда называют тождествами Сен-Венана.

Получим, например, первое из соотношений (11.100):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Аналогично можно получить другие соотношения.

Подставляя в (11.105), (11.106) вместо компонент деформации их выражения согласно обобщённому закону Гука (11.20) и, используя уравнения равновесия Коши, можно получить уравнения совместности деформации Бельтрами через составляющие напряжений.

При отсутствии объёмных сил эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} (1+\mu)\nabla^2\sigma_x + 3\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial x^2} = 0, \\ (1+\mu)\nabla^2\sigma_y + 3\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial y^2} = 0, \\ (1+\mu)\nabla^2\sigma_z + 3\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial z^2} = 0, \end{cases} \begin{cases} (1+\mu)\nabla^2\tau_{xy} + 3\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial x\partial y} = 0, \\ (1+\mu)\nabla^2\tau_{yz} + 3\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial y\partial z} = 0, \\ (1+\mu)\nabla^2\tau_{xz} + 3\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial x\partial z} = 0, \end{cases} \quad (11.107)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

- среднее напряжение.

11.17. Кручение призматических стержней произвольного поперечного сечения

Рассмотрим стержень произвольного сплошного поперечного сечения, который закреплён на одном конце и скручивается моментом M на другом (рис. 11.33).

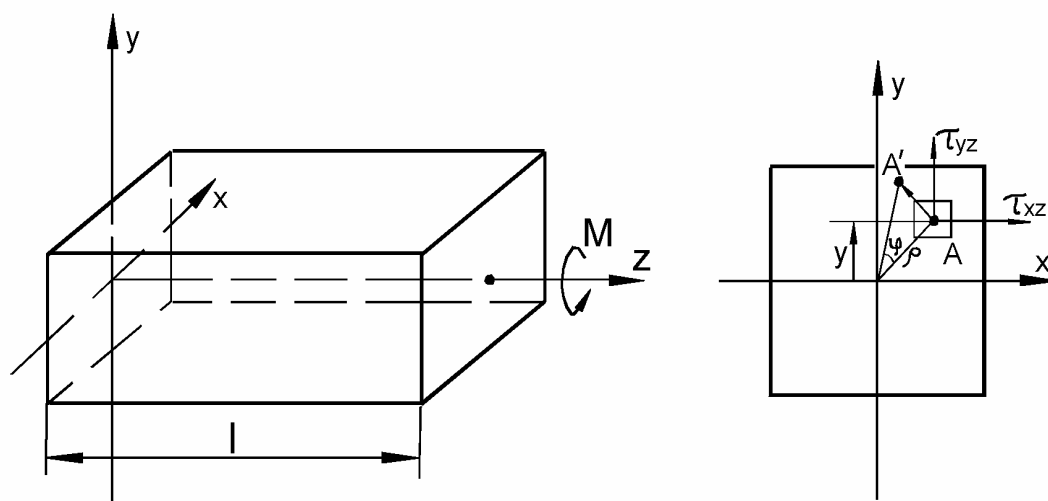


Рис. 11.33

Вводим гипотезу жёсткого контура, согласно которой контур сечения поворачивается как жёсткое целое, а площадь сечения может исказиться. Под действием момента правое свободное торцевое сечение повернётся относительно левого на угол:

$$\psi(z) = \theta z, \quad (11.108)$$

где θ – угол закручивания на единицу длины. Перемещения u и v произвольной точки A в плоскости сечения:

$$u = -y\psi = -\theta yz, \quad v = x\psi = \theta xz. \quad (11.109)$$

Так как гипотеза плоских сечений в общем случае произвольного сечения на выносливость, осевое перемещение

$$w = \theta \varphi(x, y), \quad (11.110)$$

где функция $\varphi(x, y)$ называется *функцией кручения Сен-Венана*. Она характеризует искажение (депланацию) поперечного сечения.

Согласно (11.109), (11.110) и соотношениям Коши (11.83) получаем:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0, \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right), \\ \varepsilon_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \right). \end{cases}$$

В соответствии с обобщённым законом Гука (11.21) находим:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{yz} = G\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right), \tau_{xz} = G\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \right). \end{cases} \quad (11.111)$$

Считая в уравнениях равновесия Коши (11.100) объёмные силы равными нулю и подставляя в них выражения (11.111), получим, что первые два уравнения тождественно удовлетворятся, а третье примет вид:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (11.112)$$

Полученное уравнение в частных производных (11.112) называется *гармоническим уравнением Лапласа*.

На боковой поверхности стержня внешние силы $q_x = q_y = q_z = 0$,

$l_z = \cos 90^\circ = 0$ и граничные условия (11.102) принимают вид

$$q_z = \tau_{zx} l_x + \tau_{zy} l_y = 0,$$

или

$$q_z = G\theta \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) l_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) l_y \right\} = 0. \quad (11.113)$$

Крутящий момент в поперечном сечении

$$M_z = \iint_F (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dz dy = G\theta J_{кр} \quad (11.114)$$

где

$$J_{кр} = \int_F \left\{ x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x^2 + y^2 \right\} dF \quad (11.115)$$

- геометрическая жёсткость стержня при кручении.

Из (11.114) следует:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_{кр}}, \quad \varphi = \int_0^\ell \frac{M_z dz}{GJ_{кр}} \quad (11.116)$$

Полное касательное напряжение:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{Mr}{J_{кр}},$$

(11.117)

где

$$r = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)^2}. \quad (11.118)$$

Из (11.117), (11.118) видно, что $\tau_{\max}$ возникает при $r_{\max}$ в опасной точке сечения, которая не обязательно наиболее удалённая.

Таким образом, задача о кручении призматического стержня сводится к решению гармонического уравнения (11.112) для функции φ с граничным условием (11.113) на контуре L поперечного сечения. Предложенный метод решения называется *полуобратным методом Сен-Венана*, в котором часть искомых величин задаётся, а остальные неизвестные определяются из общих уравнений теории упругости при заданных статических граничных условиях.

Можно вместо функции кручения φ ввести *функцию напряжений* $F(x,y)$ Прандтля:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} = G\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} = -G\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right). \quad (11.119)$$

В этом случае все три уравнения равновесия Коши будут тождественно удовлетворены. Составим гармоническую операцию над F .

С учётом (11.119) получаем:

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -G\theta. \quad (11.120)$$

Уравнение (11.120) называется уравнением Пуассона. Граничные условия:

$$q_z = \tau_{zx} l_x + \tau_{zy} l_y,$$

с учётом $l_x = \frac{dy}{dS}$, $l_y = -\frac{dx}{dS}$ (рис. 11.34) преобразуется к виду

$$\frac{dF}{dS} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dS} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dS} = 0,$$

или

$$F = const \quad (11.121)$$

на контуре L поперечного сечения.

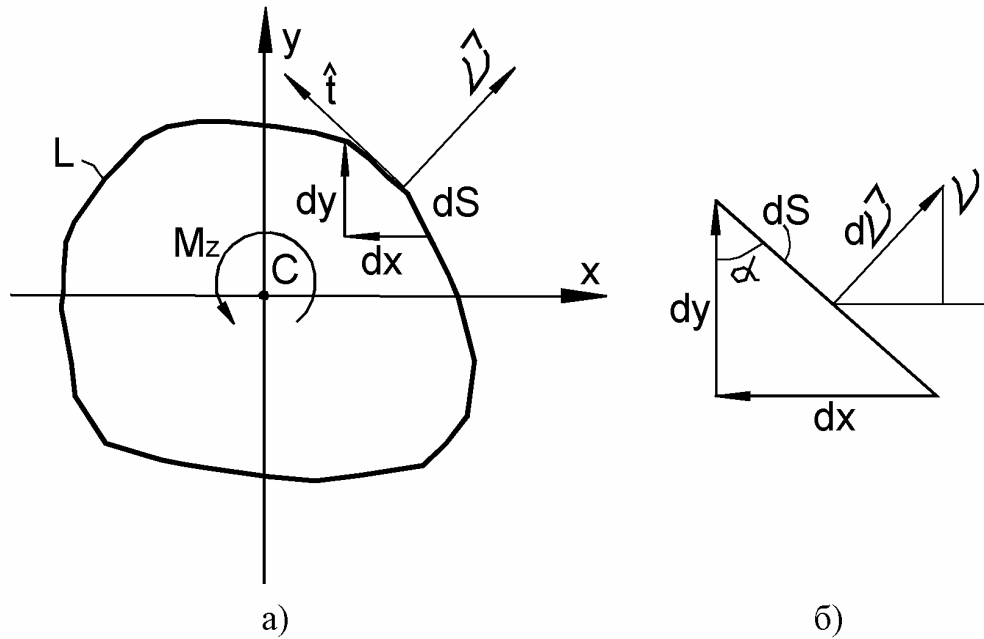


Рис. 11.34

Крутящий момент (11.114) может быть представлен в виде

$$M = \iint_F F dx dy. \quad (11.122)$$

Таким образом, задача о кручении в напряжениях сводится к нахождению функции напряжений F из уравнения Пуассона при граничном условии $F = 0$ на контуре поперечного сечения.

11.18. Кручение стержня эллиптического сечения.

В качестве примера рассмотрим стержень эллиптического сечения (рис. 11.35).

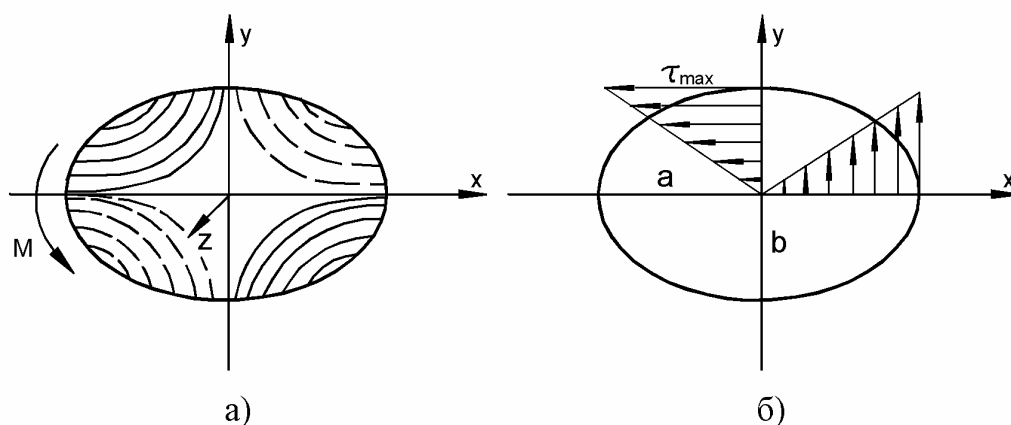


Рис. 11.35

Уравнение контура эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Для функции напряжений примем выражение

$$F = A \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (11.123)$$

которое удовлетворяет граничному условию $F = 0$, на контуре сечения.

Подставляя выражение (11.123) в уравнение Пуассона (11.120), получим:

$$A = -G\theta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Крутящий момент, согласно (11.122), равен:

$$M_z = 2 \iint F dx dy = G\theta \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2},$$

откуда

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GJ_{кр}}, \quad J_{кр} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Напряжения (11.119):

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2Ay}{b^2}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{2Ax}{a^2}.$$

Полное напряжение (11.117):

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{2A}{a^2 b^2} \sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}$$

или

$$\tau = \frac{M_z r}{J_{кр}}, \quad r = \frac{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}{a^2 + b^2}$$

Распределение напряжений показано на рис. 11.35,б. Максимальное напряжение имеет место на концах малой оси эллипса.

11.19. Кручение стержня прямоугольного сечения

Рассмотрим сначала стержень узкого прямоугольного поперечного сечения (рис. 11.36,а).

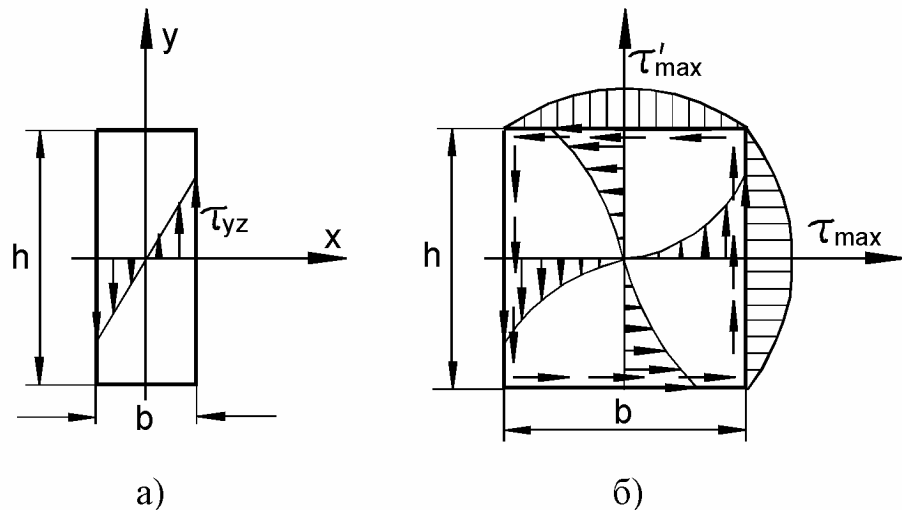


Рис. 11.36

В этом случае будем пренебрегать выполнением граничных условий на коротких сторонах при $y = \pm \frac{h}{2}$. Примем функцию напряжений в виде

$$F = A \left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right). \quad (11.124)$$

В таком виде граничное условие $F = 0$ на длинных сторонах при $x = \pm \frac{b}{2}$ будет удовлетворено.

Подставляя предполагаемое решение в уравнение (11.120) Пуассона, получим $A = -G\theta$. Напряжения (11.119):

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} = -2Ax = -2G\theta x.$$

Полное напряжение (11.117):

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = G\theta r, \quad (11.125)$$

где

$$r = 2x.$$

Крутящий момент M_z (11.122):

$$M_z = 2 \int \int F dx dy = -2G\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right) dx dy = G\theta J_{\partial\partial}, \quad (11.126)$$

где

$$J_{кр} = \frac{1}{3} h b^3 \quad (11.127)$$

Из (11.125), (11.126) следует:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_{кр}}, \quad \tau = \frac{M_z r}{J_{кр}}. \quad (11.128)$$

Максимальное напряжение имеет место в середине длинной стороны сечения, где $r_{\max} = b$ ($x = b/2$):

$$\tau_{\max} = \frac{M_z r_{\max}}{J_{кр}} = \frac{M_z}{W_{кр}}. \quad (11.129)$$

где

$$W_{кр} = \frac{J_{кр}}{\gamma_{\max}} = \frac{1}{3} h b^2 \quad (11.130)$$

- момент сопротивления узкого прямоугольного сечения.

Пусть теперь отношение сторон h/b одного порядка. Решение уравнения Пуассона представим в виде:

$$F = -G\theta \left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right) + X(y)Y(y), \quad (11.131)$$

где первое слагаемое представляет его частное решение, а второе – решение однородного уравнения Лапласа $\nabla^2 F = 0$ в форме Фурье. На контуре сечения $F = 0$.

Поэтому граничные условия можно записать в виде:

$$\begin{cases} X\left(\pm \frac{b}{2}\right)Y(y) = 0, \\ X(x)Y\left(\pm \frac{h}{2}\right) = G\theta \left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right). \end{cases} \quad (11.132)$$

Подставляя (11.131) в уравнение Пуассона (11.120), получим:

$$X''Y + XY'' = 0,$$

откуда, разделяя переменные:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2,$$

или

$$X'' + \lambda^2 X = 0, Y'' - \lambda^2 Y = 0.$$

Решения этих уравнений имеют вид:

$$X = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x, Y = C \sinh \lambda y + D \cosh \lambda y.$$

Удовлетворяя полученное решение граничным условиям (11.132) и учитывая симметрию функций $X(x)$, $Y(y)$ относительно осей x , y , получим, что $A = 0$, $C = 0$, $\cos(\lambda l / 2) = 0$, откуда следует $\lambda_i = (2i - 1)\pi / b$, где $i = 1, 2, 3, \dots$

В результате функция F принимает вид

$$F = G\theta \left\{ -\left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right) + \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cos \lambda_i x \cosh \lambda_i y}{(2i - 1)^3 \cosh \lambda_i b} \right\}.$$

Далее, согласно (11.122), вычисляем:

$$M_z = 2 \iint F dx dy = G\theta J_{кр} \quad \theta = \frac{M_{кр}}{GJ_{кр}}, \quad (11.133)$$

где

$$\begin{cases} J_{\dot{\epsilon}\dot{\sigma}} = \beta \left(\frac{h}{b} \right) h b^3, \\ \beta \left(\frac{h}{l} \right) = \frac{1}{3} - \frac{64b}{\pi^5 h} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{th(\lambda_i h/2)}{(2i-1)^5}. \end{cases} \quad (11.134)$$

Напряжения (11.119):

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} = G\theta r_1, \quad r_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} = -G\theta r_2,$$

где

$$\begin{cases} r_1 = \frac{8b}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cos \lambda_i x \operatorname{sh} \lambda_i y}{(2i-1)^2 \operatorname{ch}(\lambda_i h/2)}, \\ r_2 = 2x + \frac{8b}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \sin \lambda_i x \operatorname{ch} \lambda_i y}{(2i-1)^2 \operatorname{ch}(\lambda_i h/2)}, \\ \tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = G\theta r, \end{cases} \quad (11.136)$$

или

$$\tau = \frac{M_z r}{J_{kp}}, \quad (11.137)$$

а величина r_1, r_2 определяются согласно (11.136).

Наибольшее значение $\tau_{\max}$ имеет место при $h > b$ в середине длинной стороны при $x = \pm b/2, y = 0$. В этом случае $r_1 = 0, r_{xz} = 0, r_{\max} = r_{2\max}$,

$$\tau_{\max} = \frac{M_z r_{\max}}{J_{kp}} = \frac{M_z}{W_{kp}}, \quad (11.138)$$

где

$$W_{kp} = \frac{J_{kp}}{r_{\max}} = \alpha \left(\frac{h}{b} \right) h b^2$$

- геометрический момент сопротивления кручению, $r_1 = 0, \tau_{xz} = 0$,

$$r_{\max} = r_{2\max} = b \left\{ 1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \sin \lambda_i b/2}{(2i-1)^2 \operatorname{ch} \lambda_i b} \right\}. \quad (11.140)$$

Для практических расчётов достаточно взять $i = 1$, т.е. сохранив в рядах одно слагаемое.

Для вычисления $\tau'_{\max}$ в середине короткой стороны следует принять в (11.136) $x = 0, y = \pm \frac{b}{2}$. В результате получим $r_2 = 0, \tau_{yz} = 0$,

$$\tau'_{\max} = \frac{M_z r_{1\max}}{J_{\partial\partial}} = \gamma \left(\frac{h}{b} \right) \tau_{\max}. \quad (11.141)$$

Значения коэффициентов α, β, γ в зависимости от отношения сторон h/b приведены в табл. 3.1 главы 3.

Таким образом, мы показали, что задача о кручении стержня прямоугольного сечения может быть решена строгими методами теории упругости, что отмечалось в параграфе 3.4.

11.20. Кручение стержня треугольного сечения

Рассмотрим стержень с равносторонним треугольным сечением (рис. 11.37).

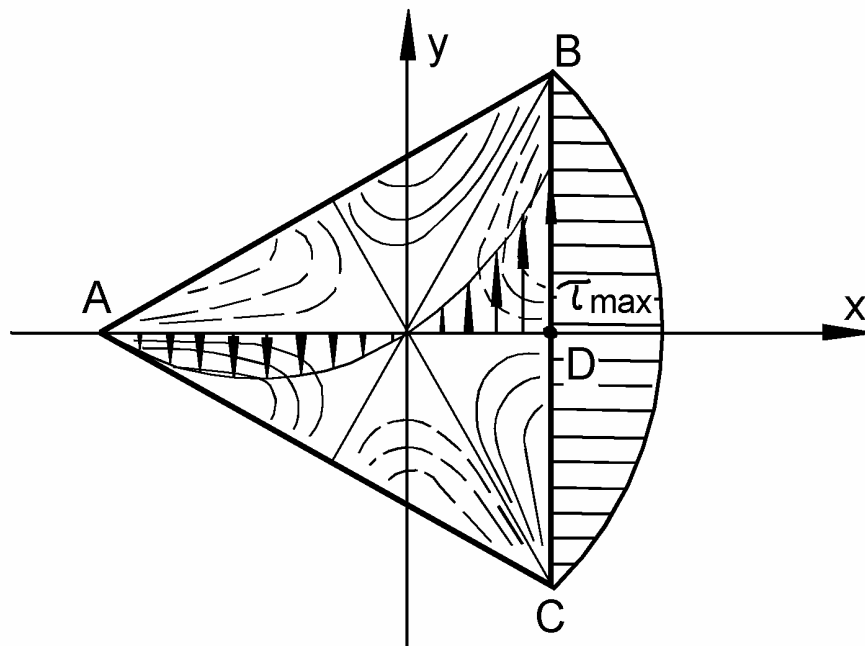


Рис. 11.37

Контур сечения определяется уравнением

$$x = a, x + 2a - \sqrt{3}y = 0, x + 2a + \sqrt{3}y = 0. \quad (11.141)$$

Примем функцию деформации φ в виде

$$\varphi = A(y^3 - 3x^2y). \quad (11.142)$$

Она удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ и поэтому является решением задачи Сен-Венана о кручении.

Подставляя (11.142) в граничные условия (11.113), получаем:

$$\frac{d}{dS} \left[A(3xy^3 - x^3) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] = 0,$$

откуда следует:

$$A(3xy^2 - x^3) + \frac{x^2 + y^2}{2} = C, \quad (11.143)$$

где C – постоянная интегрирования.

Если в (11.143) положить $A = -1/6a$, $C = 2a^2/3$, то получим:

$$(x - \sqrt{3}y + 2a)(x + \sqrt{3}y + 2a)(x - a) = 0. \quad (11.144)$$

Первая часть полученного уравнения (11.144) представляет собой произведение левых частей уравнений сторон равностороннего треугольника (рис. 11.37). Поэтому контурные условия всегда выполняются.

Вычислим геометрическую жёсткость:

$$J_{кр} = \iint [x^2 + y^2 + 3A(y^2 - x^2) - 6Axy] dx dy \quad (11.145)$$

Интегрирование по x ведётся от $x = \sqrt{3}y - 2a$ до $x = a$ и по y от нуля до $\sqrt{3}a$. В результате получим:

$$J_{кр} = \frac{9\sqrt{3}}{5}a^4 = \frac{3}{5}J_p,$$

где $J_p = 3\sqrt{3}a^4$.

Относительный угол поворота:

$$\theta = \frac{M}{GJ_{кр}} = \frac{5M}{3J_p}$$

Вычисляем напряжения:

$$\begin{cases} \sigma_{23} = \frac{G\theta}{2a}(x^2 - y^2 + 2ax), \\ \sigma_{13} = \frac{G\theta y}{a}(x - a), \\ \tau = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \frac{G\theta}{2a} \sqrt{4y^2(x-a)^2 + (x^2 - y^2 - 2ax)^2}. \end{cases}$$

Полагая $x = a$, $y = 0$, получаем:

$$\tau_{\max} = G\theta a = \frac{Ma}{J_{кр}}$$

Эпюра τ для $y = 0$ показана на рис. 11.37.

Глава 12

Прочность и разрушение материалов и конструкций

12.1. Постановка вопроса о прочности

Основной областью применения сопротивления материалов и в целом механики деформируемого твердого тела является оценка прочности реальных материалов и элементов конструкций при их эксплуатации. Определение напряжений, деформаций и перемещений в телах еще не дает ответа на вопрос об их прочности. Термин «прочность» требует некоторого разъяснения. В широком смысле слова под нарушением прочности (разрушением) понимается достижение такого состояния, когда нарушается конструктивная функция тела и оно становится непригодным к эксплуатации. В прямом, но более узком смысле слова, под нарушением прочности (разрушением) понимается разделение тела на части. Для пластичных материалов под разрушением следует понимать возможность появления недопустимо больших деформаций. Заметим, что для пластичных материалов выполнение условия пластичности в одной точке тела еще не означает потери его несущей способности. Например, в балке на рис. 12.1,а появление пластичности в точках А и В среднего опасного сечения не представляет реальной опасности. Поэтому расчет по методу допускаемых напряжений для пластичного материала безусловно гарантирует прочность элемента конструкции. В то же время перемещения в балке остаются ограниченными, и потому обнаруживается значительный резерв прочности.

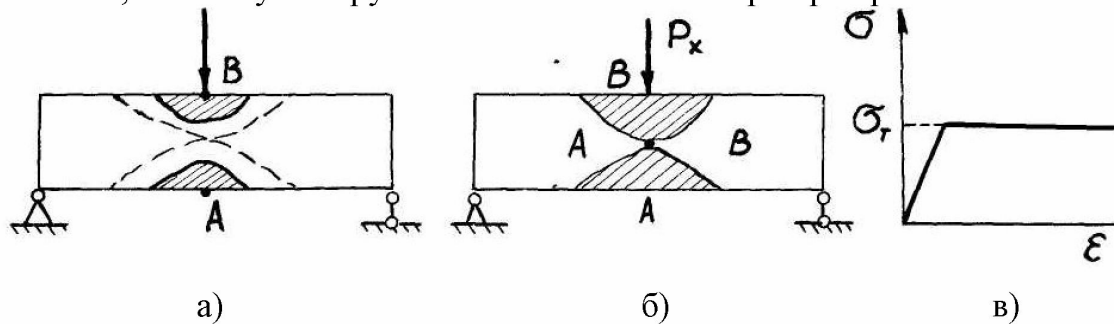


Рис. 12.1

При увеличении внешней нагрузки заштрихованные пластические зоны расширяются и, наконец, соединяются, отделяя при этом жесткие части А и В друг от друга (рис. 12.1,б). Эти части могут теперь свободно перемещаться друг относительно друга, а тело балки получает неограниченно большие деформации и перемещения (рис.12.1,в). Поэтому расчет по методу допускаемых нагрузок представляет собой расчет на прочность. С другой стороны, пластические материалы при низких температурах разрушаются без заметных пластических деформаций. Такое разрушение называют хрупким в результате разрыва материала. Разрушение хрупкого материала начинается локально с отдельной микротрещины путём её разрастания. Локальное разрушение служит источником концентрации напряжений и потому может послужить началом мгновенного разрушения тела в целом путем разделения на части. Поэтому расчет хрупких материалов на прочность по допускаемым напряжениям в наиболее напряженной точке тела оправдан.

Отметим, что деление материалов на пластические и хрупкие является условным. Например, хрупкие материалы (бетон, гранит и др.) при высоких давлениях и температурах обнаруживают значительные пластические деформации. Существенную роль в оценке прочности играет время.

Разрушение является *процессом*, развертывающимся во времени, и потому может произойти при разных уровнях напряжений. Так, в условиях ползучести мы ввели понятие о времени разрушения, пределе длительной прочности (напряжении, приводящем к разрушению через определенное время). Таким образом, проблема прочности и разрушения зависит от многих факторов и очень сложна. Несмотря на сложность проблемы, в сопротивлении материалов есть разделы, с помощью которых можно прямо и непосредственно ответить на вопрос о возможности разрушения. Это разделы об устойчивости и колебаниях упругих и упругопластических систем.

Достижение нагрузкой предельной величины можно считать за момент разрушения. Если частота возмущающей силы совпадает с частотой низших собственных колебаний, наступает резонанс с недопустимо большими перемещениями, приводящими к разрушению. Отметим, что резонанс на высоких гармониках, как правило, не страшен.

12.2. Хрупкое и пластическое разрушение

В начале курса мы ввели понятия о двух простейших типах разрушения:

1) *хрупком*– путем отрыва от наибольших растягивающих нормальных напряжений $\sigma_{\max} = R$;

2) *пластичном* – путем сдвига от максимальных касательных напряжений $\tau_{\max} = \tau_T$.

Схематически эти условия показаны на рис.12.2 с помощью прямых 1-1 и 2-2.

Свойство материала разрушаться пластически (вязко) или хрупко не является абсолютным. Каждое тело обладает тем и другим свойством в большей или меньшей степени в зависимости от температуры, внешнего давления, скорости нагружения, времени нагружения и др.

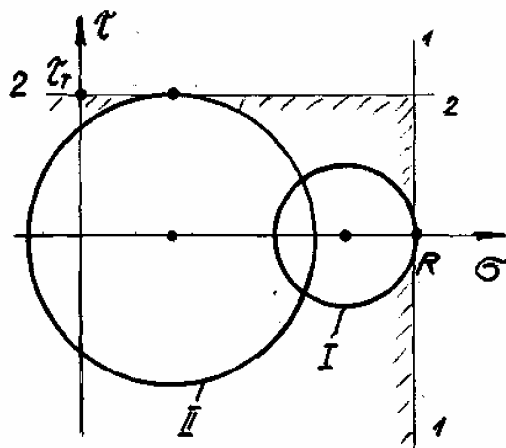


Рис. 12.2

Пусть напряженное состояние в точке тела описывается окружностью Мора 1 (рис. 12.2), которая касается вертикальной прямой 1-1 и не пересекает прямой 2-2, в этом случае произойдет хрупкое разрушение материала путем отрыва, и критерий разрушения запишется в виде:

$$\sigma_1 = R, (\sigma_1 > 0). \quad (12.1)$$

Сопротивление отрыву R считается постоянной величиной, не зависящей от вида напряженного состояния. Если окружность Мора II касается горизонтальной прямой 2-2, то наступает текучесть материала при касательном напряжении $\tau_{\max} = \tau_T$, которая может привести, а может и не привести к большим деформациям.

Изложенная простая схема разрушения носит довольно грубый и приближенный характер в силу того, что разрушение является смешанным. Однако представление о существовании двух видов разрушения материалов путем сдвига и отрыва имело и имеет положительное методическое значение для объяснения физической стороны вопроса о разрушении.

Еще одним простейшим критерием хрупкого разрушения материалов является критерий наибольших удлинений Сен-Венана, согласно которому

предельное состояние материала в частице тела достигается тогда, когда максимальное растягивающее удлинение $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1$ достигает некоторого предельного постоянного значения, равного относительному удлинению ε_0 при разрыве от растяжения, т.е.:

$$\varepsilon_{v\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] = \varepsilon_0.$$

Для хрупкого материала $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$. Поэтому получаем:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{11} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{33}) = \sigma_0,$$

где величину $\sigma_{\text{экв}}$ назовём эквивалентным удлинением.

Данный критерий не нашёл на практике должного экспериментального подтверждения. Однако он в некоторых случаях даёт качественное подтверждение характера разрушения материалов. Например, при сжатии ряда горных пород возникают продольные трещины разрушения. При сжатии и выпучивании цилиндрической оболочки из дюралюминия возникают продольные трещины от окружного растяжения при отсутствии соответствующего растягивающего напряжения и др.

12.3. Условия пластичности и разрушения материалов

Условия (критерии) пластичности и разрушения являются важными обобщениями понятий пределов текучести и прочности при одноосном растяжении (сжатии) на случай сложного напряжённого состояния (рис. 12.3).

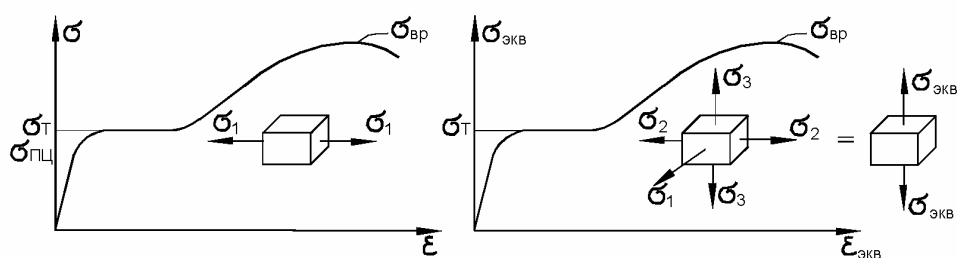


Рис. 12.3

При одноосном растяжении предельные условия перехода в пластическое состояние и разрушение имеют соответственно вид (рис. 12.3)

$$\sigma_1 = \sigma_T, \quad \sigma_1 = \sigma_{\text{вр}}$$

а условие прочности –

$$\sigma_{11\max} \leq [\sigma].$$

Предположим, что для любого сложного напряжённого состояния можно найти ему равноопасное одноосное напряжённое состояние, осуществляемое некоторым эквивалентным напряжением

$$\sigma_{\text{экр}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

являющимся комбинацией главных напряжений. Тогда предельные условия при сложном напряжённом состоянии могут быть записаны в виде

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_T, \quad \sigma_{\text{экр}} = \sigma_{\text{вр}} \quad (12.1)$$

а условие прочности –

$$\sigma_{\text{экр max}} \leq [\sigma]. \quad (12.2)$$

Такая постановка задачи не является безупречной, но в то же время она удобна для ведения практических расчётов на прочность. Рассмотрим два критерия (условия) перехода тела из упругого состояния в неупругое или пластическое.

Условие пластичности Сен-Венана.

Согласно этому критерию свойство пластичности материала при сложном напряжённом состоянии начинает проявляться тогда, когда максимальное касательное напряжение достигает некоторого предельного постоянного значения k , т.е.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k. \quad (12.3)$$

В случае простого растяжения предельное условие имеет место при $\sigma_1 = \sigma_T$, $\sigma_3 = 0$. Поэтому из (12.3) имеем $k = \sigma_T / 2$. Условие пластичности принимает вид

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T \quad (12.4)$$

В случае чистого сдвига имеем $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_3 = -\tau$, $k = \tau_T$. Следовательно, должно выполняться условие:

$$\tau_{\max} = \tau = k.$$

Сравнивая (12.4) с (12.1) видим, что $\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3$. Условие прочности, согласно (12.2), запишем в виде

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (12.5)$$

Условие пластичности (12.4), Сен-Венана достаточно хорошо подтверждается экспериментами. Его недостатком является то, что не учитывает

среднее главное напряжение σ_2 .

Условие (критерий) пластичности Мизеса.

Согласно этому критерию материал переходит в пластическое состояние тогда, когда октаэдрическое касательное напряжение достигает некоторого предельного постоянного значения, т.е.

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \tilde{N}_T \quad (12.6)$$

При простом растяжении это условие соответствует

$\sigma_1 = \sigma_T$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Следовательно, $C_T = \sqrt{2}\sigma_T / 3$ и потому, согласно (12.1),

$$\sigma_{эKB} = \sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_T \quad (12.7)$$

Следовательно,

$$\sigma_{эKB} = \sigma_i = \sigma_T.$$

В случае чистого сдвига $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_T$, $\sigma_2 = 0$. Из (12.6) следует

$C_T = \sqrt{\frac{2}{3}}\tau_T$. Сравнивая значения постоянных C_T при растяжении и чистом сдвиге, находим связь между пределами текучести:

$$\tau_T = \sigma_T / \sqrt{3}.$$

Условие пластичности Мизеса (12.7) лучше соответствует экспериментальным данным, нежели условие пластичности Сен-Венана (12.4). В отличие от последнего, условие пластичности Мизеса учитывает все три главных напряжения $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Отметим, что условие Сен-Венана и Мизеса дают различные формулы, связывающие пределы текучести k и σ_T при чистом плоском сдвиге и растяжении.

12.4. Теория прочности Мора (1860г.)

Согласно этой теории нарушение прочности происходит тогда, когда на некоторой площадке с нормалью V возникает наиболее неблагоприятная комбинация нормального и касательного напряжений. Запишем это условие в виде

$$\tau_v = f(\sigma_v). \quad (12.8)$$

Чтобы сформулировать условие Мора (12.8) в терминах главных

напряжений, воспользуемся кругами напряжений Мора.

Если $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то мы можем в одной плоскости построить три окружности Мора (рис. 12.3,а). Условие (12.8) изображается в этой плоскости некоторой кривой.

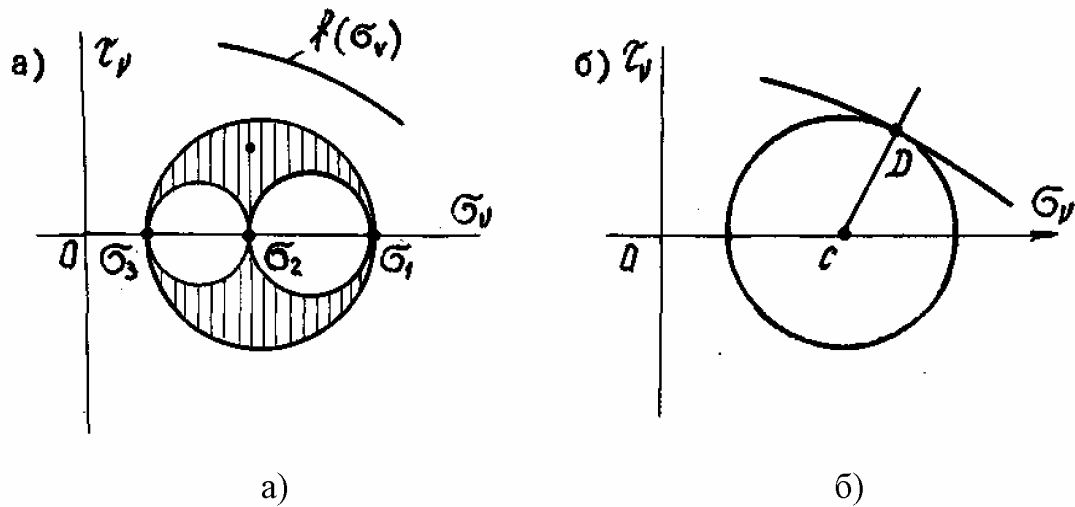


Рис. 12.3

Если окружность большого круга Мора не касается предельной кривой, как показано на рис. 12.3,а, то разрушения не произойдет. Если круг Мора коснется предельной кривой (рис. 12.3,б), то произойдет локальное разрушение. Следовательно, становится ясным, как построить предельную кривую $\tau_v = f(\sigma_v)$. Необходимо провести несколько испытаний до разрушения при различных однородных напряженных состояниях, т.е. различных соотношениях σ_1, σ_3 , а затем построить круги Мора. На рис. 12.4 построены три предельных круга Мора для случаев растяжения чистого сдвига и сжатия. Огибающая этих предельных окружностей и будет предельной кривой. Наиболее просто построить предельные окружности Мора при растяжении и сжатии (рис. 12.5, а). Проведем к ним касательную и допустим, что эта касательная служит предельной огибающей $\tau_v = f(\sigma_v)$. Это внесет некоторую погрешность в наши рассуждения.

Рассмотрим теперь произвольную предельную окружность Мора, касающуюся предельной прямой огибающей (рис. 12.5,б). Из подобия треугольников AOB и CDB следует:

$$CD:AO = CB:AB.$$

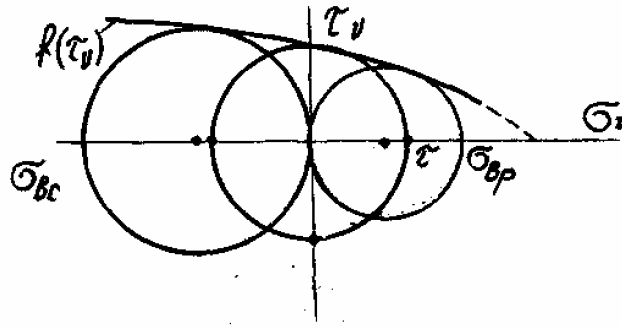


Рис. 12.4

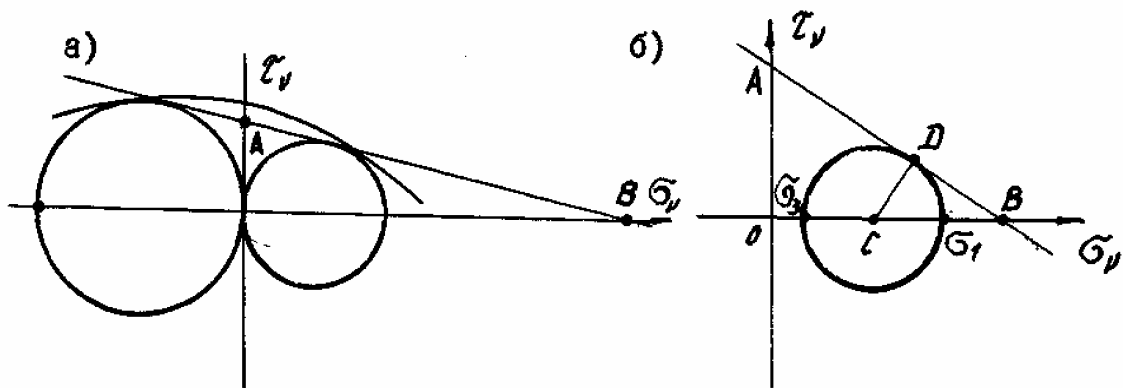


Рис. 12.5

Поскольку

$$CD = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; OC = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; CB = OB - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2},$$

то

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2AO} = \frac{OB - (\sigma_1 + \sigma_3)}{AB}.$$

Так как отрезки АО, ОВ, АВ - фиксированы, то получаем связь между σ_1 и σ_3 в виде

$$\sigma_1 = a\sigma_3 + b.$$

В случае растяжения в предельном состоянии $\sigma_1 = \sigma_{TP}, \sigma_3 = 0$ и потому $b = \sigma_{TP}$. В случае сжатия $\sigma_1 = 0, \sigma_3 = -\sigma_{TC}$. Следовательно, $a = b/\sigma_{TC} = \sigma_{TP}/\sigma_{TC} \cdot a$. Таким образом, условие разрушения по Мору

принимает вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{TC}} \sigma_3 = \sigma_{TP} \quad (12.9)$$

Условие прочности для хрупких материалов по Мору принимает вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{BP}}{\sigma_{BC}} \sigma_3 \leq [\sigma]_P, \quad (12.10)$$

где $[\sigma]_P = \frac{\sigma_{BP}}{n}$ - допустимое напряжение на растяжение.

Для пластичных материалов ($\sigma_{TP} = \sigma_{TC}$) условие (12.9) превращается в условие прочности по Сен-Венану. Отметим, что у некоторых пластичных материалов пределы текучести при растяжении и сжатии различны, т.е. $\sigma_{TP} \neq \sigma_{TC}$. В этом случае условие Мора (12.9) преобразуется в условие пластичности для таких материалов:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{TC}} \sigma_3 = \sigma_{TP}. \quad (12.11)$$

Недостатком теории Мора является то, что она не учитывает среднего главного напряжения σ_2 , т.е. по существу обоснована только для плоского напряженного состояния.

Чтобы устранить этот недостаток, Шлейхером (1926г.) было предложено считать, что предельное состояние (разрушение) достигается тогда, когда возникает наиболее неблагоприятная комбинация октаэдрических касательного и нормального напряжений:

$$\tau_{\text{окт}} = f(\sigma_{\text{окт}}).$$

При $\tau_{\text{окт}} = f(\sigma_{\text{окт}}) = \text{const} = C$ приходим к условию пластичности Мизеса (прямая 1-1 на рис.12.6). В общем случае предельная кривая $f(\sigma_{\text{окт}})$ является гладкой. Прямая 2-2 соответствует хрупкому разрушению от всестороннего растяжения. Эта кривая задается некоторым аналитическим выражением, соответствующим экспериментальным данным.

В механике горных пород теория прочности Мора нашла широкое применение.

На рис. 12.7,а изображён круг напряжений Мора радиусом r произвольного предельного напряжённого состояния, а также круг Мора в предельном состоянии для напряжённого состояния чистого сдвига.

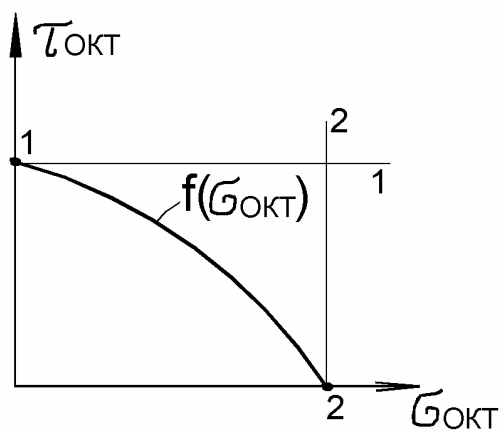


Рис. 12.6

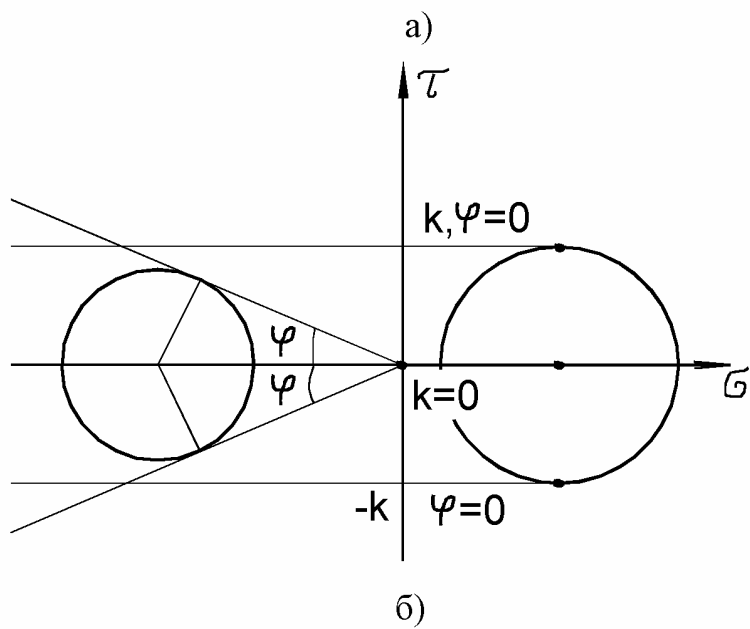
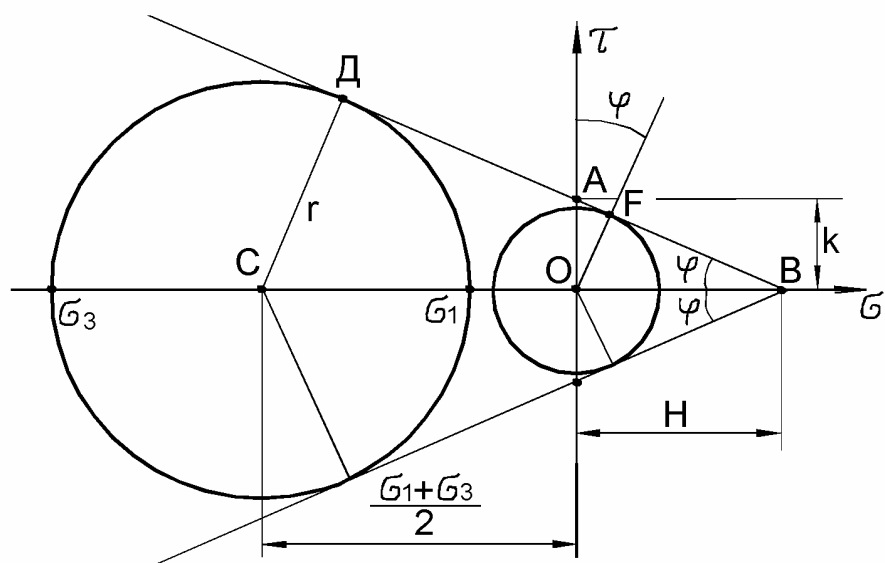


Рис. 12.7

Уравнение предельной прямой АВ представим в виде

$$\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi + k,$$

где k называют коэффициентом сцепления горных пород, величину H – сопротивлением всестороннему растяжению, φ – угол внутреннего трения.

Если $\varphi = 0, k = \tau_T$, то среду называют идеально связной (металлы, бетон, гранит и др.). Если $k = 0$, то среду называют сыпучей (сухой песок). Последняя совершенно не воспринимает растяжение (рис. 12.7,б).

Из подобия СДВ и OFB (рис. 12.5,в) находим:

$$\frac{CD}{OF} = \frac{CB}{OB},$$

или, с учётом $OF = \cos \varphi, OB = H, CD = r = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}, CB = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} + H$,

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2k \cos \varphi} = 1 + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2H},$$

откуда

$$\sigma_1 - \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right) \sigma_3 = \frac{2k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (12.12)$$

Величины

$$R = \frac{2k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad a = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

представляют собой параметры предельного состояния горной породы. Величина R может быть названа расчётным сопротивлением среды. Оба параметра R , a выражены через два других параметра предельного состояния: сцепления среды k и угол внутреннего трения φ .

Определяем главные напряжения по формуле:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}.$$

12.5. Механизм хрупкого разрушения.

Простейшая модель разрушения Гриффитса

Большую роль в разрушении реальных материалов имеют те или иные дефекты (неоднородность материала, поры, трещины, надрезы, повреждения поверхности). Особая роль среди этих дефектов принадлежит микро-трещинам. При малых нагрузках эти трещины безопасны, так как не

обнаруживают тенденции к расширению. При больших нагрузках они могут оказаться неустойчивыми, способными к быстрому росту, слиянию друг с другом и образованию магистральных трещин, приводящих к разрушению конструкций. Есть много примеров катастрофического разрушения газопроводов, корпусов судов, мостов, самолетов, ракет в результате трещинообразования. Это свидетельствует о недостаточности оценки прочности с помощью традиционных подходов по упругому или пластическому состоянию конструкций.

В 1920 году Гриффитс в работе "Явление разрушения и течения твердого тела" показал, что низкая реальная прочность хрупких материалов вызывается наличием трещин, приводящих к значительной концентрации напряжений.

Пусть тонкая пластинка из хрупкого материала равномерно растягивается в одном направлении напряжениями $\sigma = q$. Трещину будем моделировать математическим разрезом нулевой толщины. Пусть в пластине имеется такая трещина длиной $2l$, ориентированная перпендикулярно направлению растяжения (рис. 12.8). Длина трещины считается малой по сравнению с размерами пластинки ($l \ll a, l \ll b$). Опыт показывает, что начиная с некоторого значения q_c трещина – разрез начинает расширяться или развиваться.

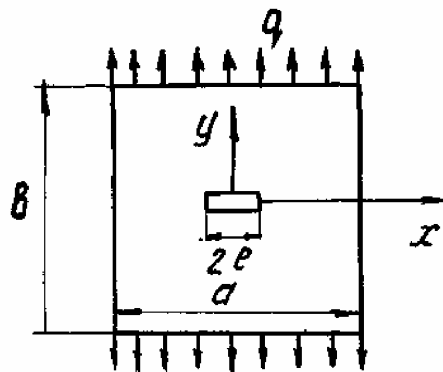


Рис. 12.8

На рис.12.9,а показана эпюра нормальных напряжений в сечении, совпадающем по направлению с трещиной, т.е. при $y = 0$, определяемая формулой:

$$\sigma_y = q \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{l^2} - 1}} \left(2 \frac{x}{l} + \sqrt{\frac{x^2}{l^2} - 1} \right)^{-1} \right]. \quad (12.13)$$

При $x \rightarrow l$ напряжение $\sigma_y \rightarrow \infty$. Вертикальное перемещение верхнего края разреза или берега определяется формулой

$$V = \frac{2q}{E} \sqrt{l^2 - x^2}, \quad (12.14)$$

т.е. разрез превращается в вытянутый эллипс (рис.12.9,б).

Можно с помощью указанного точного решения задачи методами теории упругости показать, что при $q < q_c$ напряжения производят следующую работу по раскрытию трещины (рис.12.9).

$$U = 2 \left(\frac{1}{2} q \int_{-l}^l V dx \right) = \frac{\pi^2 l^2 q^2}{E}. \quad (12.15)$$

Если q достигает критического значения q_c , то трещина трогается и начинает развиваться. При этом произойдет освобождение упругой энергии на величину dU . Она должна превратиться в иной вид энергии, идущей на образование свободной поверхности трещины. Гриффитс ввел понятие о поверхностной энергии натяжения. Обозначим удельное значение этой энергии через γ . Тогда поверхностная энергия трещины:

$$A = \gamma 4l. \quad (12.16)$$

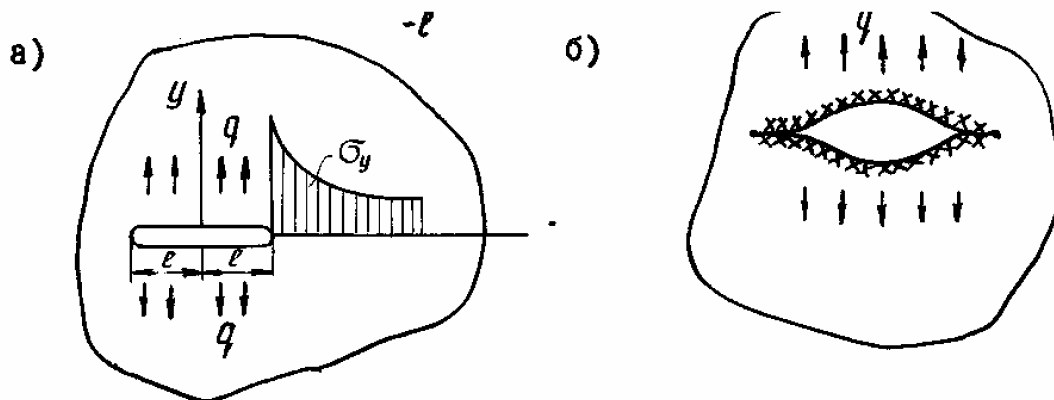


Рис. 12.9

Полная энергия

$$\Pi = U - A = \frac{\pi l^2 q^2}{E} - 4\gamma l.$$

При равновесном расширении трещины

$$\frac{d\Pi}{dl} = \frac{2\pi l q^2}{E} - 4\gamma = 0,$$

откуда получим формулу Гриффитса:

$$\sigma = q = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi l}}. \quad (12.17)$$

Эта формула при заданной длине трещины l определяет *критическое напряжение* q_c (рис. 12.9а), приводящее к расширению трещины. При $q < q_c$ длина трещины l_0 остается неизменной, пока не достигнуто значение q_c . После этого происходит динамический процесс развития трещины. Трещина Гриффитса является примером неустойчивой трещины.

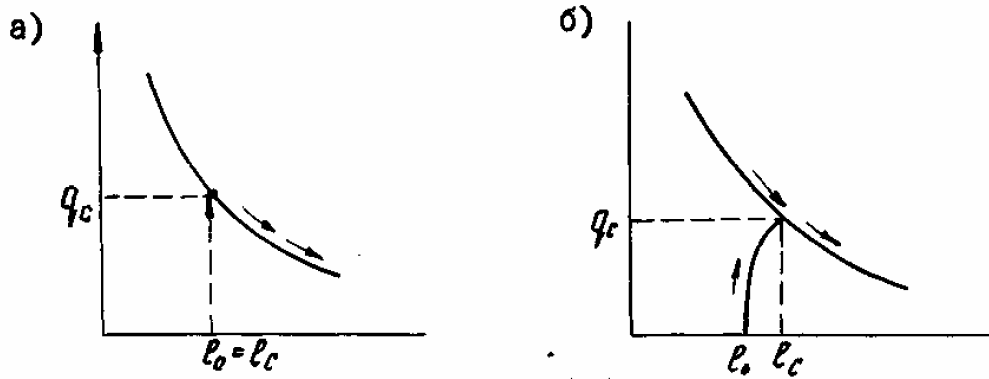


Рис. 12.10

Из формулы (12.17) следует:

$$q\sqrt{\pi l} = \sqrt{2E\gamma} = const.$$

Величину

$$K_1 = q\sqrt{\pi l} \quad (12.18)$$

называют *коэффициентом интенсивности напряжений*. Величина K_1 является константой, характерной для данного материала. Ее можно трактовать так же, как силу расширения трещин. Трещина начнет расширяться, если $K_1 = q\sqrt{\pi l}$ достигнет критического значения, $K_1^* = q_c\sqrt{\pi l}$ как показал Ирвин (1957 г.).

При рассмотрении трещины Гриффитса предполагается, что материал остается идеально упругим, вплоть до разрушения. В действительности в процессе увеличения нагрузки наблюдается медленный рост трещины от

начальной длины l_0 (рис. 12.9,б). В вершине трещины в силу очень большой концентрации напряжений возникнет пластическая деформация. Затрачиваемая на нее удельная работа $\gamma_P \gg \gamma$ для идеально хрупкого разрушения. Например, для стали $\gamma_P = 10^3 \gamma$ формула Гриффитса с учетом пластической деформации может быть переписана в виде

$$\sigma = q = \sqrt{\frac{2E(\gamma + \gamma_P)}{\pi l}} \approx \sqrt{\frac{2E\gamma_P}{\pi l}},$$

откуда

$$K_I = q\sqrt{\pi l} \approx \sqrt{2E\gamma_P}. \quad (12.19)$$

Образование пластических зон около трещины препятствует ее развитию. Эту способность называют *трещиностойкостью*. Рассмотренный выше тип трещины называется *трещиной отрыва*. Кроме рассмотренного типа трещин могут быть еще два основных типа, называемых *поперечной и продольной трещинами* сдвига.

Рассмотрим случай (рис. 12.11,а) пластинки с трещиной поперечного сдвига, подвергающейся чистому сдвигу. Коэффициент концентрации напряжений в этом случае:

$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi l}. \quad (12.20)$$

В случае трещины продольного сдвига при $\tau = const$ (рис.12.11,б) коэффициент интенсивности

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi l}. \quad (12.21)$$

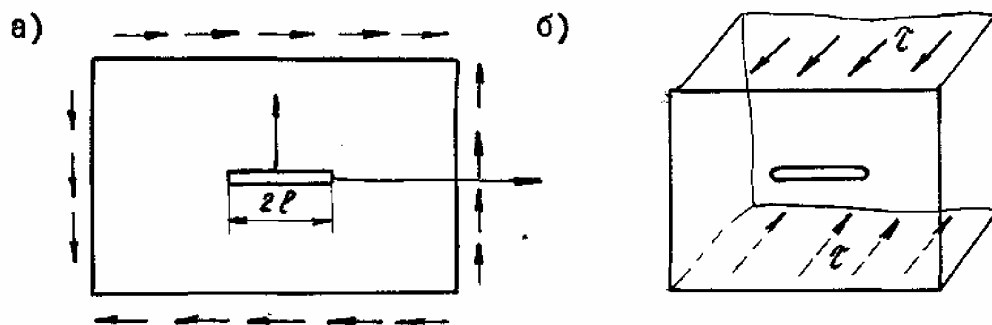


Рис. 12.11

Для каждого из трех типов трещин критерий разрушения записывается в виде

$$K_{\alpha} = K_{\alpha c}, (\alpha = \text{I, II, III}), \quad (12.22)$$

где $K_{\alpha c}$ - критические значения коэффициентов интенсивности (12.18) – (12.21) напряжений, являющиеся постоянными материала и характеризующие его трещиностойкость.

Критические значения коэффициентов $K_{\alpha c}$ подлежат экспериментальному определению, наиболее опасной является трещина нормального отрыва, причем $K_{\text{IC}} \ll K_{\text{IIC}}, K_{\text{IIIC}}$.

Рассмотрим теперь неоднородное напряженное состояние и малую окрестность точки О на конце трещины. Введем локальные полярные координаты r, θ для произвольной точки А в окрестности точки О в плоскости трещины x_1, x_2 . Для напряжений в этой точке А в общем случае нагружения тела справедливо представление :

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum K_m f_{ij}^{(m)}(\theta). \quad (12.23)$$

где K_m определены формулами (12.18) – (12.22).

Напряжения являются линейной суперпозицией трех независимых состояний I, II, III соответствующих трем основным типам трещин.

При $r \rightarrow 0$ все напряжения в вершине трещины $\sigma_{ij} \rightarrow \infty$.

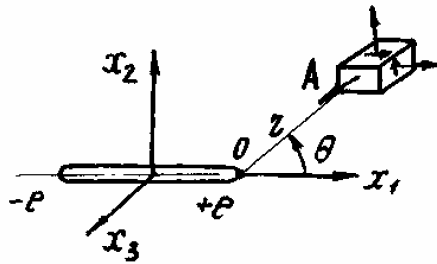


Рис. 12.12

На самом деле напряжения ограничены, и у вершины возникают пластические зоны.

Функции $f_{ij}^{(m)}(\theta)$ дают угловое распределение напряжений, множитель $1/\sqrt{r}$ - радиальное. Следовательно, распределение напряжений в окрестности вершины трещины не зависит ни от размера, ни от формы разреза-трещины, ни от геометрии тела, ни от величины и характера внешних сил. От всех этих величин зависят коэффициенты интенсивности K_m ,

которые, в свою очередь, не зависят от координат r, θ . Таким образом, коэффициенты K_m полностью характеризуют перераспределение σ_{ij} от изменения отмеченных выше факторов, являясь их количественными характеристиками.

Конкретный вид зависимостей коэффициентов K_m от внешних сил, геометрических характеристик тела и трещины определяются из решения конкретных задач методами теории упругости для тел с разрезами.

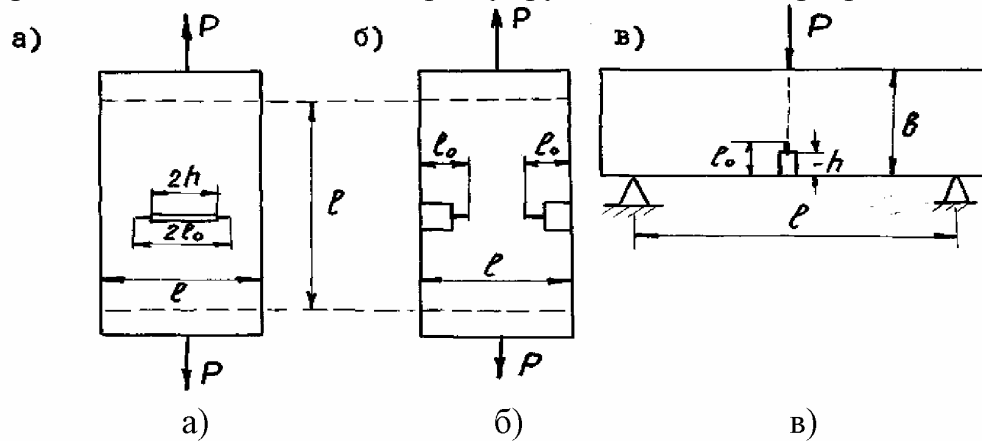


Рис. 12.13

Рассмотрим несколько примеров, используемых в лабораторном практикуме (рис.12.13). Здесь через l обозначена базовая длина образцов между захватами или опорами испытательной установки, через $2h$ - длина надреза, $2l_0$ - длина начальной трещины, создаваемой предварительным знакопеременным нагружением, t - толщина плоского образца, b - ширина образца.

Решение задач методами теории упругости приводит соответственно к формулам для коэффициентов интенсивности напряжений:

$$\left\{ \begin{array}{l} K = \frac{0,38P}{t\sqrt{b}} \left[1 + 2,31 \left(\frac{2l}{b} \right) + 2,44 \left(\frac{2l}{b} \right)^2 \right]; (b \geq 50 \text{ мм}), \\ K = \frac{P\sqrt{l}}{tb} \left[1,98 + 0,36 \left(\frac{2l}{b} \right) - 2,12 \left(\frac{2l}{b} \right)^2 + 3,42 \left(\frac{2l}{b} \right)^3 \right]; (l/b \leq 0,3), \\ K = 3,49 \frac{Pl}{t\sqrt{b^3}} \left[1 - 3,4 \left(\frac{l}{b} \right) + 5,84 \left(\frac{l}{b} \right)^2 \right]. \end{array} \right. \quad (12.23)$$

В табл.12.1 приведены значения критических интенсивностей напряжений для некоторых материалов

Значения критических интенсивностей
для некоторых материалов

Таблица 12.1

№	Материал	K_{Ic} МПа·м ^{1/2}	σ_T , МПа	$B=(K_{Ic}/\sigma_T)^2$
1	Высокопрочная легированная сталь	98	1460	45
2	Алюминиевый сплав	30	540	31
3	Среднеуглеродистая сталь	54	260	43
4	Мягкая сталь для сосудов высокого давления	209	470	200

Величина $(K_{Ic} / \sigma_T)^2$ характеризует размер пластической зоны. Обычно считают, что если $\beta < 25 \text{ мм}$, то материал обладает низкой трещиностойкостью. Из таблицы видно, что легированные стали, алюминиевые сплавы обладают низкой трещиностойкостью. В то же время стали низкой и средней прочности обладают высокой трещиностойкостью. Расчет на прочность материалов первого типа надежнее производить по условию:

$$K_{\alpha} \leq K_{\alpha c} / n, \quad (12.24)$$

где n - некоторый коэффициент запаса на трещиностойкость.

В целом раздел сопротивления материалов о хрупком разрушении (механика разрушения) бурно развивается и еще далек от завершения.

12.5. Прочность материалов при переменных напряжениях

Многие элементы конструкций и деталей машин работают в условиях переменных, циклически изменяющихся напряжений. Так, например, балка с работающим двигателем испытывает колебательные движения под действием силы P (рис.12.14,а). При вращении ротора вследствие неуравновешенности его массы возникает центробежная сила инерции P_a , дающая проекцию на вертикальную ось $P_a \sin \omega t$. Складывая ее с весом мотора P_m , получаем силу

$$P = P_m + P_a \sin \omega t, \quad (12.25)$$

передаваемую на балку и приводящую ее в движение.

Закон изменения силы (12.25) повторяют перемещения и напряжения:

$$\begin{aligned} f &= f_m + f_a \sin \omega t, \\ \sigma &= \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t. \end{aligned} \quad (12.26)$$

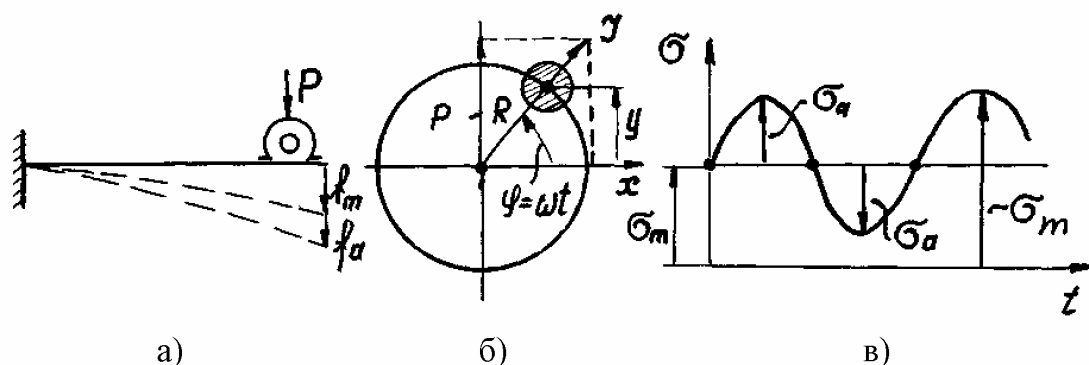


Рис. 12.14

Ось вагона, вращающаяся вместе с колесами, испытывает циклически изменяющиеся напряжения при неизменных внешних силах (рис. 12.15). Точки сечения вала при вращении оказываются то в сжатой, то в растянутой зонах.

Закон изменения напряжений имеет вид (12.26) при $\sigma_m = 0$.

Простой опыт с изгибом проволоки (рис. 12.15) показывает, что при переменных напряжениях после некоторого числа перегибов (циклов) может наступить разрушение. Число циклов N до разрушения зависит

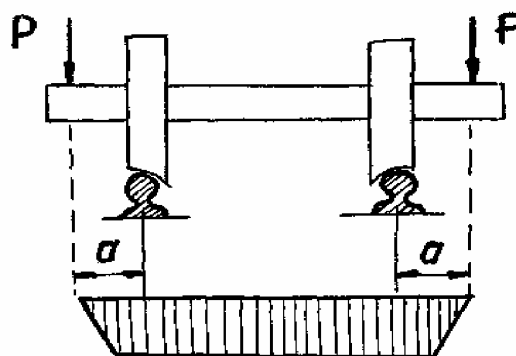


Рис. 12.15

от $\sigma_{\max}$ и изменяется в широких пределах. Чем больше изгиб и, следовательно, $\sigma_{\max}$, тем меньшее число циклов потребуется для разрушения.

Причиной разрушения при переменных напряжениях, называемого *усталостным* разрушением, оказываются микротрещины в материале. При переменных напряжениях микротрещины разрастаются, соединяются и превращаются в макротрещины, которые и приводят к разрушению.

После разрушения на поверхности излома детали обнаруживаются две ярко выраженные зоны. В одной зоне поверхность сглажена вследствие многократно сменяющихся прямой и обратной пластической деформации зерен металла. В одной зоне поверхность сглажена вследствие

многократно сменяющихся прямой и обратной пластической деформации зерен металла. Другая зона разрыхлена и носит следы свежего хрупкого разрушения вследствие развития трещин.



Рис. 12.16

Из рис.12.13, в видно, что

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a, \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a, \quad (12.27)$$

откуда

$$\begin{cases} \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \sigma_{\max} \left(\frac{1+r}{2} \right), \\ \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \sigma_{\max} \left(\frac{1-r}{2} \right), \end{cases} \quad (12.28)$$

где σ_m - среднее или статическое напряжение, σ_a - амплитуда переменных напряжений.

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (12.29)$$

называется коэффициентом асимметрии цикла переменных напряжений.

При $r = 1$ имеем $\sigma_a = 0$, $\sigma_m = \sigma_{\max}$, т.е. случай статического нагружения. При $r = -1$ имеем $\sigma_m = 0$, $\sigma_a = \sigma_{\max}$.

Такой цикл изменения напряжений называется симметричным. Если $r = 0$, то $\sigma_m = \sigma_{\max} / 2$, $\sigma_a = \sigma_{\max} / 2$. Цикл переменных напряжений называется пульсирующим. Наиболее распространенным, стандартным типом испытаний на усталостную прочность являются испытания в условиях симметричного цикла, например, испытания в условиях чистого изгиба.

Откладывая по оси ординат $\sigma_{\max} = M_{изг} / W$, а по оси абсцисс - число циклов N до разрушения, получаем кривую, называемую диаграммой усталостного разрушения Велера.

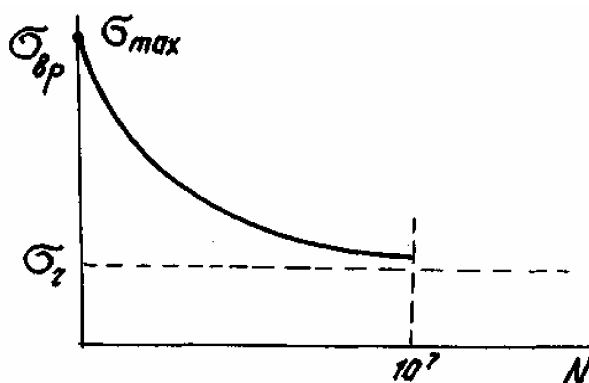


Рис. 12.17

Для стальных образцов диаграмма Велера имеет горизонтальную асимптоту, на которую кривая практически выходит при $N \approx 10^7$. Соответствующее напряжение называется *пределом выносливости* и обозначается в случае симметричного цикла ($r = -1$), через σ_{-1} , а в общем случае - σ_r . Число циклов $N = 10^7$ называют базой испытаний.

У цветных металлов и сталей при повышенных температурах диаграмма Велера асимптоты не имеет и потому предел выносливости определяется условно как величина напряжения, при котором образец выдерживает базовое число циклов, которое устанавливается в зависимости от назначения изделия и его долговечности.

Обычно для сталей при изгибе считают:

$$\sigma_{-1} \approx (0,4 \div 0,5) \sigma_{вр}.$$

Коэффициент 0,4 берется для углеродистых сталей; 0,5 - для легированных. Для цветных металлов:

$$\sigma_{-1} \approx (0,25 \div 0,5) \sigma_{вр}.$$

Аналогично испытаниям на изгиб проводят испытания на кручение в условиях переменных напряжений τ . Для обычных сталей берется

$$\tau_{-1} = 0,6 \sigma_{-1}, \text{ для хрупких материалов (высоколегированная сталь, чугун)}$$

$$\tau_{-1} \approx 0,8 \sigma_{-1}.$$

Мы рассмотрели схему испытаний на усталостную прочность при симметричном цикле. Пусть цикл будет несимметричным ($r \neq -1$). В этом случае обычно проводят испытания не на изгиб, а на растяжение - сжатие (рис. 12.18).

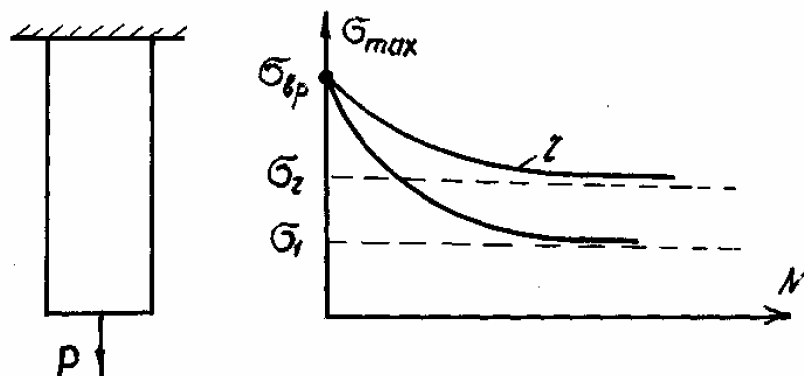


Рис. 12.18

В этом случае условие усталостной прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a = \sigma_r, \quad (r \neq -1). \quad (12.30)$$

Задаем значение r (см. табл. 12.2).

Таблица характеристик прочности

Таблица 12.2

Название цикла		σ_z	σ_m	σ_a
I	Статический	$\sigma_{*} = \sigma_{0p}$	σ_{0p}	0
-I	Симметричный	σ_{-1}	0	σ_{-1}
0	Пульсирующий	σ_0	$\sigma_0/2$	$\sigma_0/2$
	Произвольный	σ_z	$\sigma_m^{(z)}$	$\sigma_a^{(z)}$

По формулам:

$$\begin{cases} \sigma_m = \sigma_{\max} \frac{1+r}{2} = \sigma_r \frac{1+r}{2}, \\ \sigma_a = \sigma_{\max} \frac{1-r}{2} = \sigma_r \frac{1-r}{2}, \end{cases} \quad (12.31)$$

находим соответствующие значения σ_m, σ_a , которые откладываем на плоскости $\sigma_a \sim \sigma_m$. Нанесенные точки соединяем кривой линией, называемой *диаграммой предельных амплитуд* (рис.12.19). Экспериментальное построение диаграммы дело сложное. Поэтому ее заменяют аппроксимационной прямой 1, либо 2, уравнение которых:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_*} + \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} = 1, \quad (12.32)$$

где $\sigma_* = \sigma_{ep}$ либо $\sigma_* = \sigma_T$ соответственно.

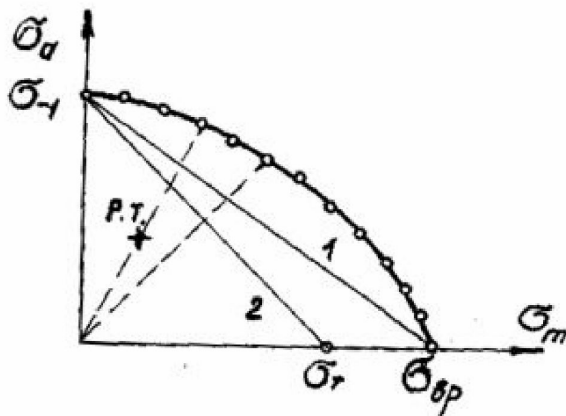


Рис. 12.19

Смысл прямой 2 состоит в недопустимости пластических деформаций в элементе.

Диаграмма предельных амплитуд отделяет область состояний материала элемента (детали), приводящих к разрушению, от области допустимых состояний, характеризуемых рабочей точкой (РТ) на

плоскости $\sigma_a \sim \sigma_m$.

Математически это можно записать в виде

$$\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_d \leq \sigma_r.$$

В силу разброса экспериментальных данных вводится коэффициент запаса:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a < \frac{\sigma_r}{n}.$$

При использовании приближенной предельной прямой (12.28) после введения коэффициента запаса n по отношению к значениям σ_m, σ_d в рабочей точке А ($\sigma_m = n\sigma_{mA}, \sigma_d = n\sigma_{dA}$) находим:

$$\frac{\sigma_{mA}}{\sigma_*} + \frac{\sigma_{dA}}{\sigma_{-1}} = \frac{1}{n}. \quad (12.33)$$

На усталостную прочность значительное влияние оказывают концентрация напряжений, масштабный фактор и качество обработки поверхности элемента (детали). Рассмотрим по отдельности влияние этих факторов.

а) *Концентрация напряжений.* Возникает в местах резкого изменения геометрии изделия (отверстия, выточки и т.п.). Введем понятие о действительном или эффективном коэффициенте концентрации K_T . Для пластичных материалов в силу выравнивания напряжений при достижении предела текучести σ_T принимается $K_2 = 1$ (в т.ч. $K_{+1} = 1, K_{-1} = 1$). Для хрупких материалов $K_T = K_T$, где K_T - теоретический коэффициент концентрации, определяемый из решения задач методами теории упругости. Исключение составляет чугун, для которого $K_T = 1$.

В общем случае для конструкционных материалов принимают:

$$K_{-1} = 1 + q(K_T - 1),$$

где q - коэффициент чувствительности материала к концентрации при переменных напряжениях.

В частности, для пластичных материалов $q = 0$, для хрупких – $q = 1$, для конструкционных сталей $q = 0,6 - 0,8$.

При учете концентрации напряжений напряжение в (12.26) следует умножить на соответствующий коэффициент, а именно:

$$K_{+1}\sigma_{mA}, K_{-1}\sigma_{aA}. \quad (12.34)$$

б) *Масштабный фактор*. Если взять образец диаметра 100 мм и образец диаметра 10мм, то предел выносливости первого окажется примерно на 40% меньше, чем второго. Это объясняется тем, что в образце большего размера (объема) дефектов типа трещин больше. Следовательно, у образца большего объема вероятность разрушения выше. Пусть σ_{-1} - предел выносливости образца стандартных размеров с объемом V , а σ_{-1A} - предел выносливости рабочего образца с объемом V_A . Тогда имеет место формула:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_{-1A}}{\sigma_{-1}} = \left(\frac{V}{V_A} \right)^{1/\alpha}, \quad (12.35)$$

где α – константа, подлежащая определению из опыта для данного материала. Коэффициент ε_i называется *масштабным коэффициентом*.

Из формулы (12.28), в частности, следует, что предел выносливости при растяжении - сжатии ниже, чем предел выносливости при изгибе. Во втором случае $\sigma_{\max}$ действует в значительно меньшем объеме, чем при растяжении.

Из (12.31) следует, что

$$\sigma_{-1A} = \varepsilon_M \sigma_{-1}. \quad (12.36)$$

в) *Качество поверхности*. Его можно оценить введением *коэффициента качества поверхности*:

$$\varepsilon_{II} = \frac{\sigma_{-1A}}{\sigma_{-1}}, \quad (12.37)$$

где σ_{-1A} - действительный предел выносливости детали с шероховатостью при симметричном цикле, σ_{-1} - предел выносливости отполированного образца. Шероховатость поверхности измеряется в мкм. Шероховатость в

12 мкм отвечает тонкой обточке образца на токарном станке (рис.12.20).

Из (12.36) следует:

$$\sigma_{-1A} = \varepsilon_{II} \sigma_{-1}. \quad (12.38)$$

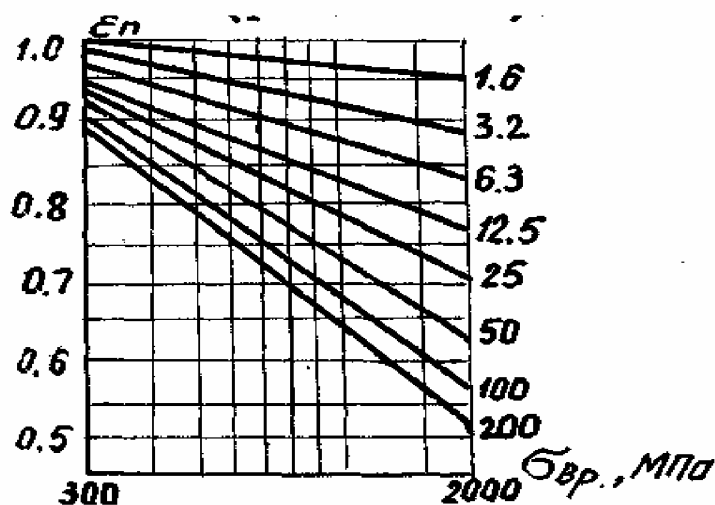


Рис. 12.20

Учитывая влияние всех трех отмеченных факторов (12.34), (12.35), (12.37) условие (12.33) запишем:

$$\frac{K_{+1} \sigma_{mA}}{\sigma_*} + \frac{K_{-1} \sigma_{aA}}{\varepsilon_M \varepsilon_I \sigma_{-1}} = \frac{1}{n_\sigma}. \quad (12.39)$$

Если элемент работает в условиях циклического изменения касательных напряжений, то структура выражения (12.36) не изменяется, меняются лишь обозначения:

$$\frac{K_{+1} \tau_{mA}}{\tau_*} + \frac{K_{-1} \tau_{aA}}{\varepsilon_M \varepsilon_I \tau_{-1}} = \frac{1}{n_\tau}. \quad (12.40)$$

В случае сложного двухосного напряженного состояния (σ, τ) общепринятой считается эмпирическая формула Гафа и Полларда:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}, \quad (12.41)$$

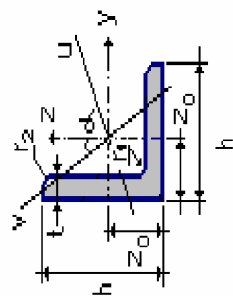
где n - искомый коэффициент запаса.

Приложения

1. Каталог металлопроката

Каталог: Полный каталог профилей ГОСТ

Тип: Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509-93)



№ уголка	Масса 1м уголка, кг	Размеры, мм		A, см ²	J _{x₀} ⁴ см ⁴	i _{x₀} ⁴ см ⁴	J _{u₀} ⁴ см ⁴	i _{u₀} ⁴ см ⁴	J _{v₀} ⁴ см ⁴	i _{v₀} ⁴ см ⁴	J _{x_y} ⁴ см ⁴	Z ₀
		b	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	0,90	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,60
	1,20	20	4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64
2,5	1,10	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	0,47	0,73
	1,50	25	4	1,36	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	0,59	0,76
	1,80	25	5	2,27	1,22	0,73	1,91	0,92	0,53	0,48	0,69	0,80
2,8	1,30	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	0,68	0,80
3,0	1,40	30	3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59	0,85	0,85
	1,80	30	4	4,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89
3,2	2,20	30	5	2,78	2,20	0,89	3,47	1,12	0,94	0,58	1,27	0,93
	1,50	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	1,03	0,89
	1,90	32	4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	1,32	0,94

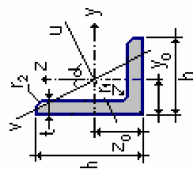
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3,5	1,60	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69	1,37	0,97
	2,10	35	4	2,17	331	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68	1,75	1,01
	2,60	35	5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68	2,10	1,05
4	1,90	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09
	2,40	40	4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	2,68	1,13
	3,00	40	5	3,79	5,53	1,21	8,75	1,52	2,30	0,78	3,22	1,17
4,5	3,50	40	6	4,48	6,41	1,20	10,13	1,50	2,70	0,78	3,72	1,21
	2,10	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	3,00	1,21
	2,70	45	4	3,48	6,63	1,38	10,52	1,74	2,74	0,89	3,89	1,26
	3,40	45	5	4,29	8,03	1,37	12,74	1,72	3,33	0,88	4,71	1,30
	4,00	45	6	5,08	9,35	1,36	14,80	1,71	3,90	0,88	5,45	1,34
	2,30	50	3	2,96	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1,00	4,16	1,33
5	3,00	50	4	3,89	9,21	1,54	14,63	1,94	3,80	0,99	5,42	1,38
	3,80	50	5	4,80	11,20	1,33	17,77	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
	4,50	50	6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46
	5,20	50	7	6,36	14,84	1,50	23,47	1,89	6,21	0,97	8,63	1,50
	5,80	50	8	7,41	16,51	1,49	26,03	1,87	6,98	0,97	9,32	1,53
	3,40	56	4	4,38	13,10	1,73	20,79	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
5,6	4,30	56	5	5,41	15,97	1,72	25,36	2,16	6,59	1,10	9,41	1,57
6,3	3,90	63	4	4,96	18,86	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	11,00	1,69
	4,80	63	5	6,13	23,10	1,94	36,80	2,44	9,52	1,25	13,70	1,74
	5,70	63	6	7,28	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,90	1,78
7	5,40	70	5	6,86	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,70	1,90
	6,40	70	6	8,15	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,10	1,94
	7,40	70	7	9,42	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,20	1,99
7,5	5,80	75	5	7,39	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	23,10	2,02

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	6,90	75	6	8,78	46,57	2,30	73,87	2,90	19,28	1,48	27,30	2,06
	8,00	75	7	10,15	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,47	31,20	2,10
8	7,40	80	6	9,38	56,97	2,47	90,40	3,11	23,54	1,58	33,40	2,19
	8,50	80	7	10,85	65,31	2,45	103,60	3,09	26,97	1,58	38,30	2,23
	9,60	80	8	12,30	73,36	2,44	116,39	3,08	30,32	1,57	43,00	2,27
9	8,30	90	6	10,61	82,10	2,78	130,00	3,50	33,97	1,79	48,10	2,43
	9,60	90	7	12,28	94,30	2,77	149,67	3,49	38,94	1,78	55,40	2,47
	10,90	90	8	13,93	106,11	2,76	168,42	3,48	43,80	1,77	62,30	2,51
10	10,80	100	7	13,75	130,59	3,08	207,01	3,88	54,16	1,98	76,40	2,71
	12,20	100	8	15,60	147,19	3,07	233,46	3,87	60,92	1,98	86,30	2,75
	15,10	100	10	19,24	178,95	3,05	283,83	3,84	74,08	1,96	110,00	2,33
11	17,90	100	12	22,80	208,90	3,03	330,95	3,81	86,84	1,95	122,00	2,91
	11,90	110	7	15,15	175,61	3,40	278,54	4,29	72,68	2,19	106,00	2,96
	13,50	110	8	17,20	198,17	3,39	314,51	4,28	81,83	2,18	116,00	3,00
12,5	15,50	125	8	19,69	294,36	3,87	466,76	4,87	121,98	2,49	172,00	3,36
	17,30	125	9	22,00	327,48	3,86	520,00	4,86	135,88	2,48	192,00	3,40
	19,10	125	10	24,33	359,82	3,85	571,04	4,84	148,59	2,47	211,00	3,45
14	19,40	140	9	24,72	465,72	4,34	739,42	5,47	192,03	2,79	274,00	3,78
	21,40	140	10	27,33	512,29	4,33	813,62	5,46	210,96	2,78	301,00	3,82
	25,50	140	12	32,49	602,49	4,31	956,98	5,43	248,01	2,76	354,00	3,90
16	24,70	160	10	31,43	774,24	4,96	1229,10	6,25	319,38	3,19	455,00	4,30
	27,00	160	11	34,42	844,21	4,95	1340,06	6,24	347,77	3,18	496,00	4,35
	28,40	160	12	37,39	912,89	4,94	1450,00	6,23	375,78	3,17	537,00	4,39
	34,00	160	14	43,57	1046,47	4,92	1662,13	6,20	430,81	3,16	615,00	4,47
	33,50	160	16	49,07	1175,19	4,89	1865,73	6,17	484,64	3,14	690,00	4,55

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
18	30,50	180	11	38,80	1216,44	5,60	1933,10	7,06	499,78	3,59	716,00	4,85
	33,10	180	12	42,19	1316,62	5,59	2092,78	7,04	540,45	3,58	770,00	4,89
	41,00	180	15	52,18	1607,36	5,55	2554,99	7,00	659,73	3,56	948,00	5,01
20	37,00	200	12	47,10	1822,78	6,22	2896,16	7,84	749,40	3,99	1073,0	5,37
	39,90	200	13	50,85	1960,77	6,21	3116,18	7,83	805,35	3,98	1156,0	5,42
	42,30	200	14	54,60	2097,00	6,20	3333,00	7,81	861,00	3,97	1236,30	5,46
	48,60	200	16	61,98	2362,57	6,17	3755,39	7,78	969,74	3,96	1393,30	5,54
22	54,40	200	18	69,30	2620,64	6,15	4164,54	7,75	1076,74	3,94	1544,30	5,62
	47,40	220	14	60,38	281436	6,83	4470,19	8,60	1158,56	4,38	1655,30	5,91
	53,80	220	16	68,58	3175,44	6,80	5045,37	8,58	1305,52	4,36	1869,0	6,02
25	61,50	250	16	78,40	4717,10	7,76	7492,10	9,78	1942,09	4,98	2775,30	6,75
	68,90	250	18	87,72	5247,24	7,73	8336,69	9,75	2157,78	4,96	3089,30	6,83
	76,10	250	20	96,96	5764,87	7,71	9159,73	9,72	2370,01	4,94	3395,00	6,91
	83,30	250	22	106,12	6270,32	7,09	9961,60	9,69	2579,04	4,93	3691,00	7,00

2. Каталоги металлопроката

Каталог : Полный каталог профилей ГОСТ
Тип : Уголок неравнополочный по ГОСТ 8510-86*



Сортировка : (Не сортировать)

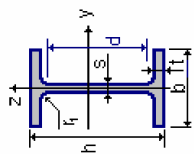
	h	b	t	r1	r2	A	Iy	Iy	Wy	Iy	Iz	Wz	Iz	Iv	Wv	Iv	yo	zo	Iyz	tga	P
	mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	cm ⁴	cm ⁴	cm ³	mm	cm ⁴	cm ³	mm	cm ⁴	cm ³	cm ⁴	mm	mm	cm ⁴		кг/с
L25x16x3	25.000	16.000	3.000	3.500	1.200	1.160	0.700	0.430	0.430	7.800	0.220	0.190	4.400	0.130	0.160	0.130	4.200	8.600	0.220	0.392	0.009
L30x20x3	30.000	20.000	3.000	3.500	1.200	1.430	1.270	0.620	0.620	9.400	0.450	0.300	5.600	0.260	0.250	0.260	5.100	10.000	0.430	0.427	0.011
L30x20x4	30.000	20.000	4.000	3.500	1.200	1.860	1.610	0.820	0.820	9.300	0.560	0.390	5.500	0.340	0.320	0.340	5.400	10.400	0.540	0.421	0.015
L32x20x3	32.000	20.000	3.000	3.500	1.200	1.490	1.520	0.720	0.720	10.100	0.460	0.300	5.500	0.280	0.250	0.280	4.900	10.800	0.470	0.382	0.012
L32x20x4	32.000	20.000	4.000	3.500	1.200	1.940	1.930	0.930	0.930	10.000	0.570	0.390	5.400	0.350	0.330	0.350	5.300	11.200	0.500	0.374	0.015
L40x25x3	40.000	25.000	3.000	4.000	1.300	1.890	3.060	1.140	1.140	12.700	0.930	0.490	7.000	0.560	0.410	0.560	5.900	13.200	0.960	0.385	0.015
L40x25x4	40.000	25.000	4.000	4.000	1.300	2.470	3.930	1.490	1.490	12.600	1.180	0.630	6.900	0.710	0.520	0.710	6.300	13.700	1.220	0.281	0.019
L40x25x5	40.000	25.000	5.000	4.000	1.300	3.030	4.730	1.820	1.820	12.500	1.410	0.770	6.800	0.860	0.640	0.860	6.600	14.100	1.440	0.374	0.024
L40x30x4	40.000	30.000	4.000	4.000	1.300	2.670	4.180	1.540	1.540	12.500	2.010	0.910	8.700	1.090	0.750	1.090	7.800	12.800	1.680	0.544	0.023
L40x30x5	40.000	30.000	5.000	4.000	1.300	3.280	5.040	1.880	1.880	12.400	2.410	1.110	8.600	1.330	0.910	1.330	8.200	13.200	2.000	0.539	0.025
L45x28x3	45.000	28.000	3.000	5.000	1.700	2.140	4.410	1.450	1.450	14.800	1.320	0.610	7.900	0.790	0.520	0.790	6.400	14.700	1.380	0.382	0.017
L45x28x4	45.000	28.000	4.000	5.000	1.700	2.800	5.680	1.900	1.900	14.200	1.690	0.800	7.800	1.020	0.670	1.020	6.800	15.100	1.770	0.379	0.022
L50x32x3	50.000	32.000	3.000	5.500	1.800	2.420	6.180	1.820	1.820	16.000	1.990	0.810	9.100	1.180	0.680	1.180	7.200	16.000	2.010	0.403	0.019
L50x32x4	50.000	32.000	4.000	5.500	1.800	3.170	7.980	2.380	2.380	15.900	2.560	1.050	9.000	1.520	0.880	1.520	7.600	16.500	2.590	0.401	0.024

	h	b	t	r1	r2	A	Iy	Wy	Iy	Iz	Wz	Iz	Iv	Wv	iv	yo	zo	Iyz	tga	P
	MM	MM	MM	MM	MM	CM ²	CM ⁴	CM ³	MM	CM ⁴	CM ³	CM ⁴	CM ⁴	CM ³	MM	MM	MM	CM ⁴		KT/C
L56x36x4	56.000	36.000	4.000	6.000	2.000	3.580	11.370	3.010	17.800	3.700	1.340	10.200	2.190	1.130	7.800	8.400	18.200	3.740	0.406	0.028
L56x36x5	56.000	36.000	5.000	6.000	2.000	4.410	13.820	3.700	17.700	4.480	1.650	10.100	2.650	1.370	7.800	8.800	18.700	4.500	0.404	0.035
L63x40x4	63.000	40.000	4.000	7.000	2.300	4.040	16.330	3.830	20.100	5.160	1.670	11.300	3.070	1.410	8.700	9.100	20.300	5.250	0.397	0.032
L63x40x5	63.000	40.000	5.000	7.000	2.300	4.980	19.910	4.720	20.000	6.260	2.050	11.200	3.730	1.720	8.600	9.500	20.800	6.410	0.396	0.039
L63x40x6	63.000	40.000	6.000	7.000	2.300	5.900	23.310	5.580	19.900	7.290	2.420	11.100	4.360	2.020	8.600	9.000	21.200	7.440	0.393	0.046
L63x40x8	63.000	40.000	8.000	7.000	2.300	7.680	29.800	7.220	19.600	9.150	3.120	10.900	5.580	2.600	8.500	10.700	22.000	9.270	0.386	0.060
L65x50x5	65.000	50.000	5.000	6.000	2.000	5.560	23.410	5.200	20.500	12.080	3.230	14.700	6.410	2.680	10.700	12.600	20.000	9.770	0.576	0.044
L65x50x6	65.000	50.000	6.000	6.000	2.000	6.600	27.460	6.160	20.400	14.120	3.820	14.600	7.520	3.150	10.700	13.000	20.400	11.460	0.575	0.052
L65x50x7	65.000	50.000	7.000	6.000	2.000	7.620	31.320	7.080	20.300	16.050	4.380	14.500	8.600	3.590	10.600	13.400	20.800	12.940	0.571	0.059
L65x50x8	65.000	50.000	8.000	6.000	2.000	8.620	35.000	7.990	20.200	18.880	4.930	14.400	9.650	4.020	10.600	13.700	21.200	13.610	0.570	0.068
L70x45x5	70.000	45.000	5.000	7.500	2.500	5.590	27.760	5.880	22.300	9.050	2.620	12.700	5.340	2.200	9.800	10.500	22.800	9.120	0.406	0.043
L75x50x5	75.000	50.000	5.000	8.000	2.700	6.110	34.810	6.810	23.900	12.470	3.250	14.300	7.240	2.730	10.900	11.700	23.900	12.000	0.436	0.048
L75x50x6	75.000	50.000	6.000	8.000	2.700	7.250	40.920	8.080	23.800	14.800	3.850	14.200	8.480	3.210	10.800	12.100	24.400	14.100	0.435	0.057
L75x50x7	75.000	50.000	7.000	8.000	2.700	8.370	46.770	9.310	23.600	16.610	4.430	14.100	9.690	3.690	10.800	12.500	24.800	16.180	0.435	0.066
L75x50x8	75.000	50.000	8.000	8.000	2.700	9.470	52.380	10.520	23.500	18.520	4.880	14.000	10.870	4.140	10.700	12.900	25.200	17.800	0.430	0.074
L80x50x5	80.000	50.000	5.000	8.000	2.700	6.360	41.640	7.710	25.600	12.680	3.280	14.100	7.570	2.750	10.000	11.300	26.000	13.200	0.387	0.045
L80x50x6	80.000	50.000	6.000	8.000	2.700	7.550	48.980	9.150	25.500	14.850	3.880	14.000	8.880	3.240	10.800	11.700	26.500	15.500	0.386	0.059
L80x60x6	80.000	60.000	6.000	8.000	2.700	8.150	52.060	9.420	25.300	25.180	5.580	17.600	13.610	4.660	12.900	14.900	24.700	20.980	0.547	0.064
L80x60x7	80.000	60.000	7.000	8.000	2.700	9.420	59.610	10.870	25.200	28.740	6.430	17.500	15.580	5.340	12.900	15.300	25.200	24.010	0.546	0.074
L80x60x8	80.000	60.000	8.000	8.000	2.700	10.670	66.880	12.380	25.000	32.150	7.260	17.400	17.490	5.990	12.800	15.700	25.600	26.830	0.544	0.084
L90x56x5	90.000	56.000	5.500	9.000	3.000	7.860	65.280	10.740	28.800	19.670	4.530	15.800	11.770	3.810	12.200	12.600	29.200	20.540	0.384	0.062
L90x56x6	90.000	56.000	6.000	9.000	3.000	8.540	70.580	11.680	28.800	21.220	4.910	15.800	12.700	4.120	12.200	12.800	29.500	22.230	0.384	0.067
L90x56x8	90.000	56.000	8.000	9.000	3.000	11.180	90.870	15.240	28.500	27.080	6.390	15.600	16.290	5.320	12.100	13.600	30.400	28.330	0.380	0.088
L100x63x6	100.000	63.000	6.000	10.000	3.300	9.580	98.290	14.520	32.000	30.580	6.270	17.900	18.200	5.270	13.800	14.200	32.300	31.500	0.393	0.075
L100x63x7	100.000	63.000	7.000	10.000	3.300	11.090	112.860	16.780	31.900	34.990	7.230	17.800	20.830	6.060	13.700	14.600	32.800	36.100	0.392	0.087

	h	b	t	r1	r2	A	Iy	Wy	Iy	Iz	Wz	Iz	Iv	Wv	iv	yo	zo	Iyz	tga	P
	MM	MM	MM	MM	MM	CM ²	CM ⁴	CM ³	MM	CM ⁴	CM ³	MM	CM ⁴	CM ³	MM	MM	MM	CM ⁴		KT/C
L100x63x8	100.000	63.000	8.000	10.000	3.300	12.570	126.960	19.010	31.800	39.210	8.170	17.700	23.380	6.820	13.600	15.000	33.200	40.500	0.391	0.099
L100x63x10	100.000	63.000	10.000	10.000	3.300	15.470	153.950	23.320	31.500	47.180	9.990	17.500	28.340	8.310	13.500	15.800	34.000	48.600	0.387	0.121
L100x65x7	100.000	65.000	7.000	10.000	3.300	11.230	114.050	16.870	31.900	38.320	7.700	18.500	22.770	6.430	14.100	15.200	32.400	38.000	0.415	0.088
L100x65x8	100.000	65.000	8.000	10.000	3.300	12.730	128.310	19.110	31.800	42.960	8.700	18.400	25.240	7.260	14.100	15.600	32.800	42.640	0.414	0.100
L100x65x10	100.000	65.000	10.000	10.000	3.300	15.670	155.520	23.450	31.500	51.680	10.640	18.200	30.600	8.830	14.000	16.400	33.700	51.180	0.410	0.123
L110x70x6	110.000	70.000	6.500	10.000	3.300	11.450	142.420	19.110	35.300	45.610	8.420	20.000	26.940	7.050	15.300	15.800	35.500	46.800	0.402	0.090
L110x70x8	110.000	70.000	8.000	10.000	3.300	13.930	171.540	23.220	35.100	54.640	10.200	19.800	32.310	8.500	15.200	16.400	36.100	55.900	0.400	0.109
L125x80x7	125.000	80.000	7.000	11.000	3.700	14.060	226.530	26.670	40.100	73.730	11.890	22.900	43.400	9.960	17.600	18.000	40.100	74.700	0.407	0.110
L125x80x8	125.000	80.000	8.000	11.000	3.700	15.980	225.620	30.260	40.000	80.950	13.470	22.800	48.820	11.250	17.500	18.400	40.500	84.100	0.406	0.126
L125x80x10	125.000	80.000	10.000	11.000	3.700	19.700	311.610	37.270	39.800	100.470	16.520	22.600	59.330	13.740	17.400	19.200	41.400	102.000	0.404	0.155
L125x80x12	125.000	80.000	12.000	11.000	3.700	23.360	364.790	44.070	39.500	116.840	19.460	22.400	69.470	16.110	17.200	20.000	42.200	118.000	0.400	0.183
L140x90x8	140.000	90.000	8.000	12.000	4.000	18.000	363.690	38.250	44.900	119.790	17.190	25.800	70.270	14.390	15.800	20.300	44.900	121.000	0.411	0.141
L140x90x10	140.000	90.000	10.000	12.000	4.000	22.240	444.450	47.190	44.700	145.540	21.140	25.800	85.510	17.580	19.600	21.200	45.800	147.000	0.409	0.175
L160x100x9	160.000	100.000	9.000	13.000	4.300	22.870	605.970	56.040	51.500	186.030	23.960	28.500	110.400	20.010	22.000	22.400	51.900	194.000	0.391	0.180
L160x100x10	160.000	100.000	10.000	13.000	4.300	25.280	666.590	61.910	51.300	204.090	26.420	28.400	121.160	22.020	21.900	22.800	52.300	213.000	0.390	0.199
L160x100x12	160.000	100.000	12.000	13.000	4.300	30.040	784.220	73.420	51.100	238.750	31.230	28.200	142.140	25.930	21.800	23.600	53.200	249.000	0.388	0.236
L160x100x14	160.000	100.000	14.000	13.000	4.300	34.720	897.190	84.650	50.800	271.600	35.890	28.000	162.490	29.750	21.600	24.300	54.000	232.000	0.385	0.273
L180x110x10	180.000	110.000	10.000	14.000	4.700	28.330	952.280	78.590	58.000	276.370	32.270	31.200	165.440	29.960	24.200	24.400	58.800	295.000	0.376	0.222
L180x110x12	180.000	110.000	12.000	14.000	4.700	33.690	1122.560	93.330	57.700	324.090	38.200	31.000	194.280	31.830	24.000	25.200	59.700	348.000	0.374	0.264
L200x125x11	200.000	125.000	11.000	14.000	4.700	34.870	1449.020	107.310	64.500	446.360	45.980	35.800	263.840	38.270	27.500	27.900	65.000	465.000	0.392	0.274
L200x125x12	200.000	125.000	12.000	14.000	4.700	37.890	1568.190	116.510	64.300	481.930	49.850	35.700	285.040	41.450	27.400	28.300	65.400	503.000	0.392	0.297
L200x125x14	200.000	125.000	14.000	14.000	4.700	43.870	1800.830	134.640	64.100	550.770	57.430	35.400	326.540	47.570	27.300	29.100	66.200	575.000	0.390	0.344
L200x125x16	200.000	125.000	16.000	14.000	4.700	49.770	2026.080	152.410	63.800	616.660	64.830	35.200	366.990	53.560	27.200	29.900	67.100	643.000	0.388	0.391

3. Каталоги металлопроката

Каталог : Полный каталог профилей ГОСТ
Тип : Двутавр нормальный (Б) по ГОСТ 26020-83



Сортировка : (Не сортировать)

	h	b	s	t	r1	A	P	Iy	Wy	Sy	iy	Iz	Wz	iz
	мм	мм	мм	мм	мм	см ²	кг/см	см ⁴	см ³	см ³	мм	см ⁴	см ³	мм
10Б1	100.000	55.000	4.100	5.700	7.000	10.320	0.081	171.000	34.200	19.700	40.700	15.900	5.800	12.400
12Б1	117.600	64.000	3.800	5.100	7.000	11.030	0.087	257.000	43.800	24.900	48.300	22.400	7.000	14.200
12Б2	120.000	64.000	4.400	6.300	7.000	13.210	0.104	318.000	53.000	30.400	49.000	27.700	8.600	14.500
14Б1	137.400	73.000	3.800	5.600	7.000	13.390	0.105	435.000	63.300	35.800	57.000	36.400	10.000	16.500
14Б2	140.000	73.000	4.700	6.900	7.000	16.430	0.129	541.000	77.300	44.200	57.400	44.900	12.300	16.500
16Б1	157.000	82.000	4.000	5.900	9.000	16.180	0.127	689.000	87.800	49.500	65.300	54.400	13.300	18.300
16Б2	160.000	82.000	5.000	7.400	9.000	20.090	0.158	869.000	108.700	61.900	65.800	68.300	16.600	18.400
18Б1	177.000	91.000	4.300	6.500	9.000	19.580	0.154	1063.000	120.100	67.700	73.700	81.900	18.000	20.400
18Б2	180.000	91.000	5.300	8.000	9.000	23.950	0.188	1317.000	146.300	83.200	74.100	100.800	22.200	20.500
20Б1	200.000	100.000	5.600	8.500	12.000	28.490	0.224	1943.000	194.300	110.300	82.600	142.300	28.500	22.300
23Б1	230.000	110.000	5.600	9.000	12.000	32.910	0.258	2996.000	260.500	147.200	95.400	200.300	36.400	24.700
26Б1	258.000	120.000	5.800	8.500	12.000	35.620	0.280	4024.000	312.000	176.600	106.300	245.600	40.900	26.300
26Б2	261.000	120.000	6.000	10.000	12.000	39.700	0.312	4654.000	356.600	201.500	108.300	288.800	48.100	27.000
30Б1	296.000	140.000	5.800	8.500	15.000	41.920	0.329	6328.000	427.000	240.000	122.900	390.000	55.700	30.500
30Б2	299.000	140.000	6.000	10.000	15.000	46.670	0.366	7293.000	487.800	273.800	125.000	458.600	65.500	31.300

	h	b	s	t	r1	A	P	Iy	Wy	Sy	iy	Iz	Wz	iz
	MM	MM	MM	MM	MM	CM ²	KG/CM	CM ⁴	CM ³	CM ³	MM	CM ⁴	CM ³	MM
3551	346.000	155.000	6.200	8.500	18.000	49.530	0.389	10059.999	581.700	328.600	142.500	529.600	68.300	32.700
3552	349.000	155.000	6.500	10.000	18.000	55.170	0.433	11549.999	662.200	373.000	144.700	622.900	80.400	33.600
4051	392.000	165.000	7.000	9.500	21.000	61.250	0.481	15749.998	803.600	456.000	160.300	714.900	86.700	34.200
4052	396.000	165.000	7.500	11.500	21.000	69.720	0.547	18529.998	935.700	529.700	163.000	865.000	104.800	35.200
4551	443.000	180.000	7.800	11.000	21.000	76.230	0.598	24939.998	1125.800	639.500	180.900	1073.700	119.300	37.500
4552	447.000	180.000	8.400	13.000	21.000	85.960	0.675	28869.998	1291.900	732.900	183.200	1269.000	141.000	38.400
5051	492.000	200.000	8.800	12.000	21.000	92.980	0.730	37159.996	1511.000	860.400	199.900	1606.000	160.600	41.600
5052	496.000	200.000	9.200	14.000	21.000	102.800	0.807	42389.996	1709.000	970.200	203.000	1873.000	187.300	42.700
5551	543.000	220.000	9.500	13.500	24.000	113.370	0.890	55679.996	2051.000	1165.000	221.600	2404.000	218.600	46.100
5552	547.000	220.000	10.000	15.500	24.000	124.750	0.979	62789.992	2296.000	1302.000	224.300	2760.000	250.900	47.000
6051	593.000	230.000	10.500	15.500	24.000	135.260	1.062	78759.992	2656.000	1512.000	241.300	3154.000	274.300	48.300
6052	597.000	230.000	11.000	17.500	24.000	147.300	1.156	87639.992	2936.000	1669.000	243.900	3561.000	309.600	49.200
7051	691.000	260.000	12.000	15.500	24.000	164.700	1.293	125929.984	3645.000	2095.000	276.500	4556.000	350.500	52.600
7052	697.000	260.000	12.500	18.500	24.000	183.600	1.442	145911.984	4187.000	2393.000	281.900	5437.000	418.200	54.400
8051	791.000	280.000	13.500	17.000	26.000	203.200	1.595	199499.969	5044.000	2917.000	313.300	6244.000	446.000	55.400
8052	796.000	280.000	14.000	20.500	26.000	226.600	1.779	232199.969	5820.000	3343.000	320.100	7526.999	537.600	57.600
9051	893.000	300.000	15.000	18.500	30.000	247.100	1.940	304399.969	6817.000	3964.000	350.900	8364.999	557.600	58.200
9052	900.000	300.000	15.500	22.000	30.000	272.400	2.138	349199.969	7760.000	4480.000	358.000	9942.999	662.800	60.400
10051	990.000	320.000	16.000	21.000	30.000	293.820	2.306	445999.938	9010.999	5234.000	389.600	11519.999	719.900	62.600
10052	998.000	320.000	17.000	25.000	30.000	328.900	2.582	516399.938	10349.999	5980.000	396.200	13709.999	856.900	64.600
10053	1006.000	320.000	18.000	29.000	30.000	364.000	2.857	587699.938	11679.999	6736.000	401.800	15899.998	993.900	66.100
10054	1013.000	320.000	19.500	32.500	30.000	400.600	3.145	655399.938	12939.999	7470.000	404.500	17829.998	1114.300	66.700

Библиографический список

1. Александров А.В., Потапов В.Д. *Основы теории упругости и пластичности*. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
2. Александров А.В., Потапов В.Д. *Сопротивление материалов*. – М.: Высшая школа, 1995. – 560 с.
3. Беляев Н.М. *Сопротивление материалов*. – М.: ГИТТЛ, 1976. – 607 с.
4. Беляев Н.М. *Сборник задач по сопротивлению материалов*. – М.: Наука, 1968. – 348 с.
5. Беляев Н.М. *Лабораторные работы по сопротивлению материалов*. – М.; Л.: ГИТЛ, 1951. – 336 с.
6. Безухов Н.И. *Основы теории упругости, пластичности и ползучести*. М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
7. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
8. Ван-Цзи-Де. *Прикладная теория упругости*. – М.: ГИМФЛ, 1959. – 400 с.
9. Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. – М.: Наука, 1984. – 984 с.
10. Вольмир А.С. *Сборник задач по сопротивлению материалов*. – М.: Наука, 1984. – 407 с.
11. Грязнов И.М., Ленский В.С. *Лабораторный практикум по сопротивлению материалов, деформированию*. – М.: МГУ, 1961. – 197 с.
12. Гуле Ж. *Сопротивление материалов*. – М.: Высшая школа, 1985. – 192 с.
13. Дарков А.В., Клейн Т.К., Кузнецов В.И. *Строительная механика*. – М.: Высшая школа, 1976. – 600 с.
14. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. *Строительная механика*. – М.: Высшая школа, 1986. – 544 с.
15. Демидов С.П. *Теория упругости*. – М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.
16. Зубчанинов В.Г. *Основы теории упругости и пластичности*. – М.: Высшая школа, 1990. – 368 с.
17. Зубчанинов В.Г. *Механика сплошных сред*. – Тверь: ТГТУ, 2000. – 703 с.
18. Зубчанинов В.Г. *Математическая теория пластичности*. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300 с.
19. Зубчанинов В.Г. *Лекции по механике деформируемого твёрдого тела. (В 3-х ч.)*. – Тверь: ТвепИ, 1993. – 441 с.
20. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. *Экспериментальная пластичность. Книга 1*. – Тверь: ТГТУ, 2003. – 170 с.
21. Зубчанинов В.Г. *Устойчивость. Ч. 1*. – Тверь: ТГТУ, 1995. – 199 с.

22. Зубчанинов В.Г. *Устойчивость*. Ч. 2. – Тверь: ТГТУ, 1996. – 190 с.
23. Зубчанинов В.Г., Колтунов М.А., Майборода В.П. *Прочностные расчёты изделий из полимерных материалов*. – М.: Машиностроение, 1983. – 239 с.
24. Зубчанинов В.Г. *Лабораторный практикум по сопротивлению материалов* – Калинин: КПИ, 1986. – 96 с.
25. Зубчанинов В.Г. *Математические основы механики деформируемого твёрдого тела*. – Тверь: ТвеПИ, 1990. – 59 с.
26. Зубчанинов В.Г. *Изгиб упругих пластин в примерах и задачах*. – Тверь: ТвеПИ, 1992. – 49 с.
27. Зубчанинов В.Г. *Руководство к практическим занятиям по теории упругости*. – Калинин: КПИ, 1978. – 64 с.
28. Зубчанинов В.Г. *Руководство к практическим занятиям по теории пластичности*. – Калинин: КПИ, 1978. – 41 с.
29. Зубчанинов В.Г. *Расчётно-проектировочные работы по теории упругости*. – Калинин: КПИ, 1979. – 73 с.
30. Зубчанинов В.Г. *Расчётно-проектировочные работы по строительной механике пластин и оболочек*. – Калинин: КПИ, 1979. – 47 с.
31. Зубчанинов В.Г. *Кручение призматических стержней*. – Калинин: КПИ, 1988. – 40 с.
32. Зубчанинов В.Г. *Руководство к самостоятельной работе студентов по теории вязкоупругости*. – Калинин: КПИ, 1990. – 24 с.
33. Зубчанинов В.Г., Володин В.П. *Вариационные методы теории упругости в примерах и задачах*. – Тверь: ТГТУ, 1995. – 31 с.
34. Зубчанинов В.Г., Воронцов А.П., Ведерников В.Н. и др. *Расчёты и испытания на прочность. Методы испытаний стержней, пластин и оболочек на устойчивость за пределом упругости. Рекомендации Р-54-314-91*. – М.: Госстандарт СССР, ВНИИЭС, 1991. – 77 с.
35. Ильюшин А.А. *Пластичность. Упругопластические деформации*. – М.; Л.: ГИТЛ, 1948. – 378 с.
36. Ильюшин А.А. *Механика сплошной среды*. – М.: МГУ, 1990. – 310 с.
37. Ильюшин А.А., Ленский В.С. *Сопротивление материалов*. – М.: Физматгиз, 1959. – 372 с.
38. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
39. Киселев В.А. *Строительная механика (Спецкурс "Динамика и устойчивость сооружений")*. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
40. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н., Ванюшенков М.Г. *Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики* – М.: Высшая школа, 1980. – 384 с.

41. Керштейн И.М., Ключников В.Д., Ломакин В.Е. *Основы экспериментальной механики разрушения*. – М.: МГУ, 1989. – 40 с.
42. Ленский В.С. *Введение в теорию пластичности*. Вып. 1. – М.: МГУ, 1968. – 109 с.
43. Ленский В.С. *Введение в теорию пластичности*. Вып. 2. – М.: МГУ, 1969. – 91 с.
44. Лейбезон Л.С. *Краткий курс теории упругости*. – М.: Гостехиздат, 1942. – 304 с.
45. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. – М. 1950.
46. Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. – М.: Машиностроение, 1986. – 400 с.
47. Мейз Дж. *Теория и задачи механики сплошных сред*. – М. 1974.
48. Надаи А. *Пластичность и разрушение твердых тел*. – М.: ИИЛ, 1954. – 647 с.
49. Писаренко Г.С. *Сопротивление материалов*. – Киев: Наукова думка, 1964. – 455 с.
50. Работнов Ю.Н. *Сопротивление материалов*. – М.: Физматгиз, 1962. – 455 с.
51. Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела*. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
52. Ржаницын А.Р. *Строительная механика*. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с.
53. Самуль В.И. *Основы теории упругости и пластичности*. М.: Высшая школа, 1982. – 264 с.
54. Смирнов А.Ф., Александров А.В. *Сопротивление материалов*. – М.: Высшая школа, 1964. – 407 с.
55. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащенко Б.Я. *Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений*. – М.: Стройиздат, 1984. – 415 с.
56. Тимошенко С.П. *Курс теории упругости*. – Киев: Наукова думка, 1972. – 506 с.
57. Тимошенко С.П. *Устойчивость стержней, пластин и оболочек*. – М.: Наука, 1971. – 807 с.
58. Тимошенко С.П., Гере Дж. *Механика материалов*. – М.: Мир, 1976. – 669 с.
59. Толоконников Л.А. *Механика деформируемого твердого тела*. – М.: Высшая школа, 1979. – 318 с.
60. Уманский А.А. *Сборник задач по сопротивлению материалов*. – М.: Наука, 1964. – 550 с.
61. Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. – М.: Наука, 1974. – 559 с.; 1986. – 512 с.