

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ  
ДЕФОРМАЦИЯ БАЛОК ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ**

Методические указания к лабораторной работе

Описан распространенный случай сложного сопротивления – косоугольный изгиб. Подробно рассмотрены его опасные особенности, связанные с распределением напряжений и характером деформирования балки.

Приведены правила техники безопасности, контрольные вопросы, список рекомендуемой литературы.

## ДЕФОРМАЦИЯ БАЛОК ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

**Цель работы:** исследование особенностей деформирования балки при косом изгибе и экспериментальная проверка теоретических формул для определения величины и направления прогиба балки, испытывающей деформацию косоугольного изгиба

### 1. Теоретическая часть

#### 1.1 Основные понятия

**Сложное сопротивление** — такой вид нагружения стержня, при котором в поперечных сечениях возникает два или больше внутренних усилий. Например, распространённые виды сложного сопротивления:

- **Косой изгиб** ( $M_z$  — изгибающий момент относительно главной центральной оси  $z$ ,  $M_y$  — изгибающий момент относительно главной центральной оси  $y$ , а также могут возникать  $Q_y$  и  $Q_z$  — поперечные усилия в главных плоскостях инерции).
- **Внецентренное растяжение или сжатие** ( $N$  — продольное внутреннее усилие,  $M_z$  — изгибающий момент относительно главной центральной оси  $z$ ,  $M_y$  — изгибающий момент относительно главной центральной оси  $y$ ).
- **Кручение с изгибом** ( $T$  — крутящий момент,  $M_z$  — изгибающий момент относительно главной центральной оси  $z$ ,  $M_y$  — изгибающий момент относительно главной центральной оси  $y$ , а также могут возникать  $Q_y$  и  $Q_z$  — поперечные усилия в главных плоскостях инерции).

**Косой изгиб** — один из видов сложного сопротивления, частный случай изгиба, при котором возникающий в поперечных сечениях изгибающий момент не лежит ни в одной из главных плоскостей инерции бруса. А значит, может быть разложен на две ненулевых составляющих в главных плоскостях инерции. Таким образом, косой изгиб можно рассматривать как сочетание двух плоских поперечных изгибов в главных плоскостях инерции бруса.

При изучении напряжений и деформаций при сложном сопротивлении используется **принцип суперпозиции (принцип независимости и сложения действия сил)**.

---

\* Обратите внимание, что в ряде случаев, для существенно нелинейных систем, принцип не может быть использован. Например, в случае продольно-поперечного изгиба гибких стержней.

## 1.2. Особенности косо́го изгиба

При проектировании конструкций, элементы которых работают на косо́й изгиб<sup>\*</sup>, нужно учитывать как минимум две *опасные особенности косо́го изгиба*:

1. Максимальные напряжения при косо́м изгибе — больше, чем при плоском поперечном изгибе.
2. Плоскость прогиба не совпадает с силовой плоскостью, а отклоняется от неё в сторону плоскости наименьшей жёсткости<sup>\*\*</sup>.

## 1.3. Напряжения при косо́м изгибе

Перед проведением лабораторной работы необходимо выполнить расчёт на прочность. Как обычно, используем наиболее простой принцип расчёта на прочность — *расчёт по допускаемым напряжениям*. Поэтому разберём особенности распределения напряжений при косо́м изгибе.

*Продольные нормальные напряжения в произвольной точке* при косо́м изгибе определяются по формуле:

$$\sigma_x = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y}, \quad (1)$$

где  $y, z$  — координаты (в главных центральных осях) точки, в которой определяются напряжения.

$I_z, I_y$  — моменты инерции относительно главных центральных осей  $y, z$ .

Опасными являются точки наиболее удалённые от нейтральной оси в силу линейного характера распределения перемещений (работает гипотеза плоских сечений — гипотеза Бернулли), деформаций, напряжений. *Нейтральная ось* — геометрическое место точек, в которых продольные нормальные напряжения равны нулю.

---

<sup>\*</sup> Подавляющее большинства сечений (естественно, за исключением сечений, у которых все оси — главные центральные) могут оказаться в условиях косо́го изгиба из-за неточностей изготовления или сборки, монтажа. Причём для некоторых типов сечений, экономичных, хорошо работающих на плоский поперечный изгиб (например, двутавр), небольшое отклонение силовой плоскости от главной плоскости инерции (на несколько градусов) приводит к существенному увеличению максимальных напряжений (в несколько раз).

<sup>\*\*</sup> Следует отметить, что наибольшая и наименьшая величины прогибов возникают *при плоском поперечном изгибе* (соответственно, в плоскостях наименьшей и наибольшей жёсткости) В чём можно убедиться, приравняв к нулю первую производную от полного прогиба по углу  $\alpha$ , и определив для найденных точек экстремума знак второй производной.

Таким образом, **экстремальные продольные нормальные напряжения:**

$$\sigma_{\text{extr}} = \frac{M_z \cdot y_*}{I_z} + \frac{M_y \cdot z_*}{I_y}, \quad (2)$$

где  $y_*$ ,  $z_*$  — координаты опасных (наиболее удалённых от нейтральной оси) точек.

В случае сечений, для которых,  $y_* = y_{\text{max}}$ ,  $z_* = z_{\text{max}}$  (например, прямоугольник, двутавр):

$$\sigma_{\text{max}} = \left| \frac{M_z}{W_z} \right| + \left| \frac{M_y}{W_y} \right|, \quad (3)$$

где  $W_z$ ,  $W_y$  — осевые моменты сопротивления в главных плоскостях инерции.

Причём в опасных точках возникает линейное напряжённое состояние. Следовательно, условие прочности запишется  $\sigma_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{adm}}$

При известной величине угла между главной плоскостью инерции и силовой плоскостью  $\alpha$ , формулу (3) можно переписать в виде:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{|M|}{W_z} \left( \cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right). \quad (4)$$

Взяв производную от выражения (4) по  $\alpha$  и приравняв её к нулю, можно получить величину угла, при котором напряжения в балке будут максимальными (проверьте!):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{W_z}{W_y}. \quad (5)$$

Учтём также, что для прямоугольного сечения:

$$\frac{W_z}{W_y} = \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{6}{hb^2} = \frac{h}{b}. \quad (6)$$

#### 1.4. Деформации при косом изгибе

Главными центральными осями инерции являются оси  $y$  и  $z$ . При теоретическом определении прогибов, действующие на балку нагрузки целесообразно разложить на составляющие в главных плоскостях инерции. Перемещения центра тяжести поперечного сечения бруса от составляющих  $F_y$  и  $F_z$  нагрузок, расположенных в главных плоскостях инерции  $хоу$  и  $хоз$  будут соответственно равны

---

\* Для двутавров и сильно вытянутых прямоугольников максимальные напряжения при опасной величине угла  $\alpha$  мало отличаются от максимальных напряжений при плоском изгибе в плоскости минимальной жесткости (проверьте!).

$f_y$  и  $f_z$ . Составляющие  $f_y$  и  $f_z$  полного перемещения (проекции по главным центральным осям  $y$  и  $z$ ) при косом изгибе (рис. 1) можно определить для каждой конкретной балки, как и при плоском поперечном изгибе, учитывая способы её закрепления и схему нагружения внешними силами. Для консольной балки, нагруженной на свободном конце силой  $F$ , компоненты полного перемещения свободного конца определяются по формулам (проверьте!):

$$\left. \begin{aligned} f_y &= \frac{F_y l^3}{3EI_z} = \frac{Fl^3}{3EI_z} \cos \alpha \\ f_z &= \frac{F_z l^3}{3EI_y} = \frac{Fl^3}{3EI_y} \sin \alpha \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

где  $\alpha$  — угол между силовой плоскостью и главной плоскостью инерции  $xy$ .

На рис. 1а показано поперечное сечение балки, испытывающей деформацию косого изгиба.

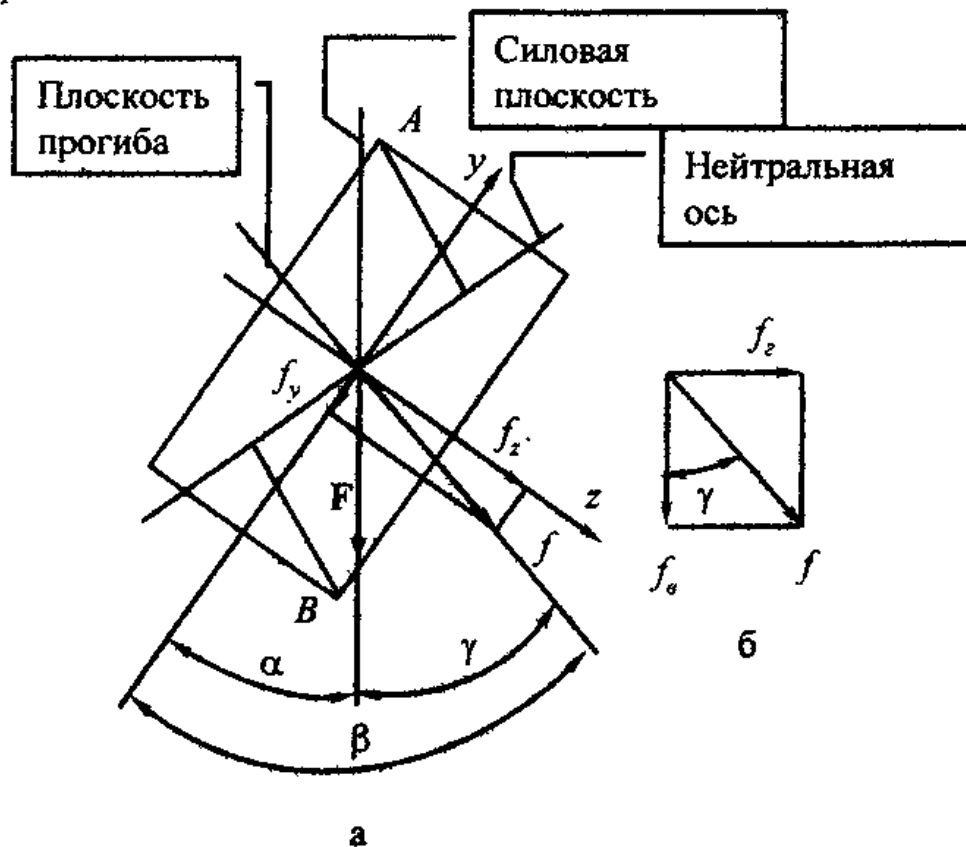


Рис. 1. Сечение балки, испытывающей косой изгиб

Тогда полное перемещение  $f$  и угол  $\beta$  между плоскостью изгиба и направлением одной из главных центральных осей инерции (осью  $y$ ) будут определяться, как это непосредственно следует из рис. 1а, по формулам:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f_z}{f_y}. \quad (9)$$

Подставляя в уравнения (8) и (9) значения перемещений  $f_y$  и  $f_z$  (см. формулы 7), выраженные через компоненты нагрузок, действующих соответственно в главных плоскостях инерции  $xoy$  и  $xoz$ , получим величину полного перемещения и его направление (проверьте!):

$$f = \frac{Pl^3}{3EI_z} \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(\frac{I_z}{I_y}\right)^2 \sin^2 \alpha}, \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha. \quad (11)$$

Нужно обратить внимание на то, что в формуле (11) в знаменателе находится момент инерции относительно той оси, от которой откладываются углы  $\alpha$  и  $\beta$ .

Как видно из рис. 1, при косом изгибе плоскость изгиба балки не совпадает ни с главными плоскостями инерции балки, ни с плоскостью, в которой действует внутренний изгибающий момент  $M$ . При этом угол  $\gamma$  между плоскостью прогиба и силовой плоскостью:

$$\gamma = \beta - \alpha. \quad (12)$$

При экспериментальном определении полного прогиба и его направления целесообразно разложить полный прогиб *по другим взаимно перпендикулярным плоскостям*: на вертикальную  $f_v$  и горизонтальную  $f_h$  составляющие (см. рис. 1б), которые измеряются с помощью закреплённых на установке индикаторов. Тогда:

$$f = \sqrt{f_v^2 + f_h^2}, \quad (13)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_h}{f_v}. \quad (14)$$

В результате необходимо сравнить теоретические значения, рассчитанные по формулам (10), (12) с экспериментальными, полученными по формулам (13) и (14).

## 2. Оборудование, приборы и испытуемый образец

На рис. 2 представлен внешний вид испытательной установки.

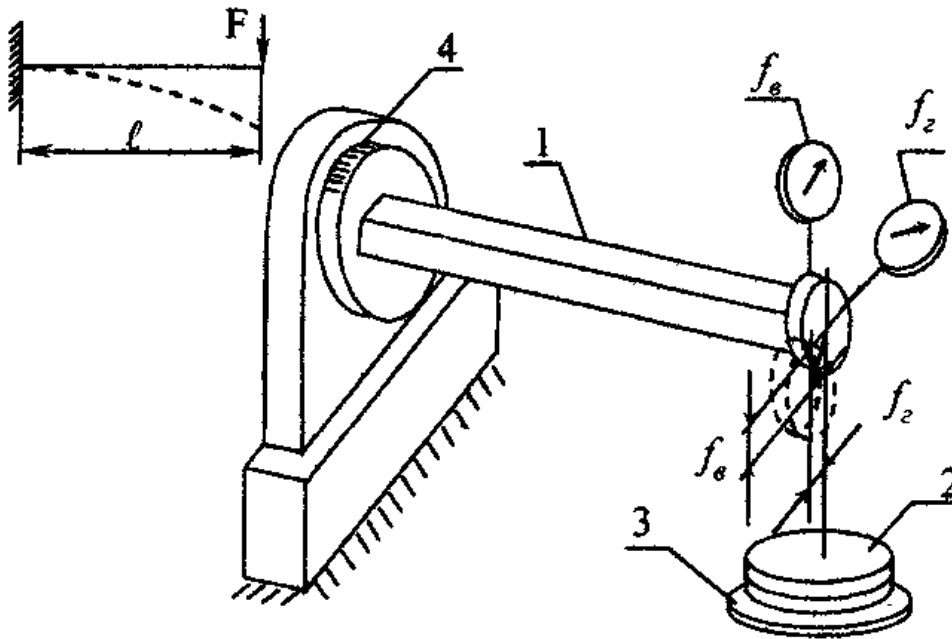


Рис. 2. Вид испытательной установки.

Испытуемый образец (1) представляет собой консольную балку постоянного по длине прямоугольного поперечного сечения с одним жёстко закреплённым концом. На свободном конце балка нагружается сосредоточенной силой посредством грузов (2), которые устанавливаются на поддон подвески (3). Изменение положения плоскости действия внешних сил, определяемого углом  $\alpha$ , осуществляется поворотом балки вокруг ее геометрической оси на угол, который отсчитывается по шкале (4).

Полученное от преподавателя задание на проведение эксперимента (величины углов  $\alpha$  — для косоугольного изгиба и для плоского поперечного изгиба — в плоскости наибольшей или наименьшей жёсткости) заносится в таблицу 1. В этой же таблице приводятся рассчитанные величины осевых моментов инерции  $I_y$  и  $I_z$ .

## Основные данные испытываемой балки

Материал балки		
Значение $E$ , МПа		
Угол $\alpha$ , град		
Длина балки $l$ , м		
Форма поперечного сечения		
Размеры сечения:	$h$ , м	
	$b$ , м	
Осевые моменты инерции	$I_z$ , м <sup>4</sup>	
	$I_y$ , м <sup>4</sup>	

## 3. Экспериментальная часть

## 3.1. Подготовка к работе

Прежде чем приступить к выполнению эксперимента, необходимо установить величину допускаемой нагрузки  $[F]$ , которой можно нагружать балку без опасности появления в ней остаточных деформаций. Расчет на прочность необходимо выполнить, принимая для стали  $\sigma_{\text{доп}} = 160$  МПа для случаев нагружения балки в плоскости наибольшей жесткости, наименьшей жесткости и для найденного по вышеизложенным формулам опасного напряжения угла  $\alpha$ . Сделайте вывод.

## 3.2. Порядок выполнения работы

1. Поворачивая балку вокруг геометрической оси, установите ее в положение, определяемое заданным углом  $\alpha$ .

2. Осторожно, не вызывая колебаний балки, положите на грузовой поддон гири, общий вес которых не должен превышать допускаемую нагрузку  $[F]$ . Проследите за тем, чтобы штоки индикаторов не отрывались от балки.

3. По индикаторам определите вертикальную  $f_v$  и горизонтальную  $f_h$  составляющие полного прогиба  $f$ .

4. Определите по формулам (13), (14) опытные значения величин  $f$  и  $\gamma$ .

5. Подсчитайте по формулам (10) и (11), (12) теоретические величины прогиба  $f$  и угла  $\gamma$  между силовой плоскостью и плоскостью прогиба.

6. Определите расхождение между теоретическими и опытными значениями величин  $f$  и  $\gamma$ . Заполните все графы табл. 2.



7. Прodelайте то же самое для заданного преподавателем случая плоского поперечного изгиба — в плоскости минимальной ( $\alpha = 0^\circ$ ) или в плоскости максимальной ( $\alpha = 90^\circ$ ) жёсткости. Сделайте вывод.

Таблица 2

**Сопоставление теоретически и экспериментально определённых прогибов свободного конца балки  $f$  и углов  $\gamma$  между плоскостью прогиба и силовой плоскостью**

$\alpha$	Прогиб			Угол		
	Теоретическая величина $f_m$ , мм	Опытная величина $f_{оп}$ , мм	Расхождение $\frac{(f_m - f_{оп})}{f_{оп}} \cdot 100\%$	Теоретическая величина $\gamma_m$ , град	Опытная величина $\gamma_{оп}$ , град	Расхождение $\frac{(\gamma_m - \gamma_{оп})}{\gamma_{оп}} \cdot 100\%$

#### 4. Рекомендации по составлению отчета

1. Дайте определение косому изгибу. Приведите схему разложения полного перемещения  $f$  на составляющие  $f_y$  и  $f_z$ ,  $f_2$  и  $f_3$  а также схему разложения нагрузки  $F$  на составляющие  $F_y$  и  $F_z$  и сделайте на чертежах все обозначения перемещений, усилий и углов. Дайте пояснения ко всем обозначениям, выполненным на данных рисунках.

2. Приведите расчетные формулы, справедливость которых необходимо проверить при проведении настоящей лабораторной работы.

3. В разделе «Оборудование и испытуемый образец» приведите краткие сведения об экспериментальной установке. Нарисуйте схему нагружения испытуемой балки. Основные данные балки занесите в таблицу.

4. Подсчитайте допускаемую нагрузку.

5. Проведите эксперимент.

6. Определите экспериментальные и теоретические величины  $f$  и  $\gamma$  и найдите расхождение между ними, полученные результаты занесите в сводную таблицу.

7. Сделайте выводы о работе. Кратко сформулируйте, когда возникает косой изгиб и его опасные особенности.

#### 5. Дополнение

Обратите внимание, что при повороте балки вертикальный и горизонтальный прогибы образуют круговую диаграмму (см. рис. 3). Таким образом, для определения величины полного прогиба  $f$  или

его составляющих  $f_z$  и  $f_x$  можно использовать, например, *графоаналитический метод*. Для чего необходимо:

- ◆ Определить прогибы при плоских поперечных изгибах при нагружении балки в плоскостях наибольшей и наименьшей жёсткости
- ◆ Построить на этих значениях, как на горизонтальном диаметре окружность,
- ◆ Задаваясь значениями угла поворота по полученной круговой диаграмме определить  $f$ ,  $f_z$  и  $f_x$ .

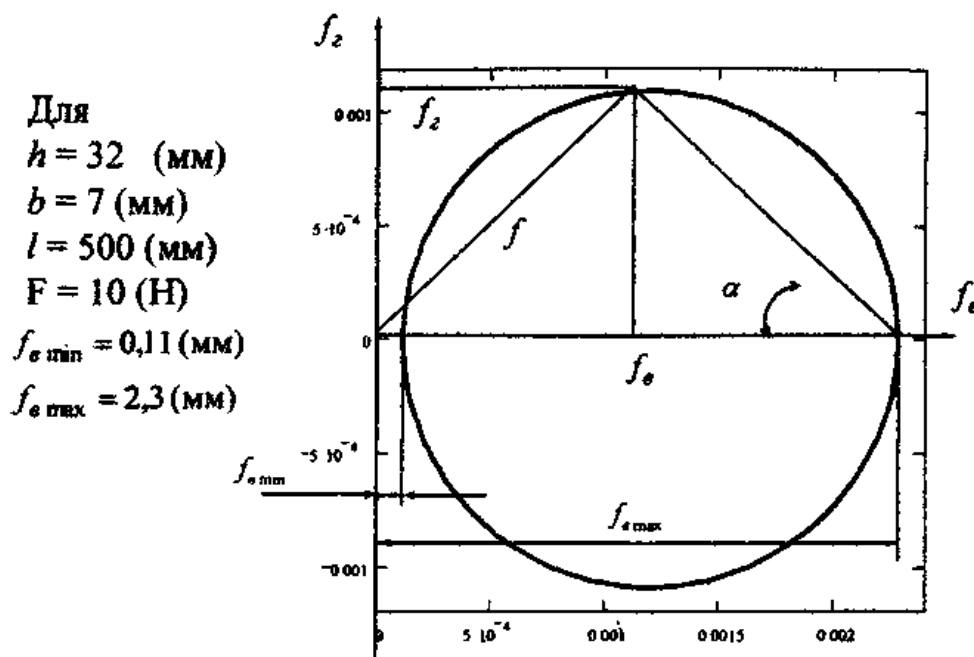


Рис. 3. Круговая диаграмма прогибов.

## 6. Вопросы для самопроверки

1. Что называется сложным сопротивлением? Приведите примеры.
2. Что называется косым изгибом? Плоским косым изгибом?
3. Напишите условие, при котором деформация косого изгиба невозможна.
4. Назовите внутренние усилия, возникающие при косом изгибе.
5. Где располагаются опасные точки в сечении балки, испытывающей косой изгиб? Уточните их положение для стержня прямоугольного сечения.
6. Что такое «нейтральная ось»?
7. Укажите вид напряжённого состояния в опасных точках прямоугольного сечения. Запишите условие прочности.
8. При какой величине угла в балке прямоугольного сечения возникают наибольшие максимальные напряжения?
9. Какое положение занимает плоскость изгиба при косом изгибе?

10. Получите выражения для составляющих  $f_x$  и  $f_z$  полного прогиба на свободном конце консоли, нагруженной сосредоточенной силой на конце, используя один из известных Вам способов (прямое интегрирование приближенного дифференциального уравнения упругой линии балки, универсальное уравнение упругой линии балки, теорема Кастильяно, интеграл Максвелла — Мора).
11. При каких условиях нагружения прогибы балки будут экстремальные по величине (при  $F = \text{const}$ )?
12. При косом изгибе плоскость изгиба отклоняется от плоскости действия сил. В какую сторону она отклоняется? В сторону плоскости наибольшей или наименьшей жесткости? Объясните это, пользуясь соответствующим выражением.
13. Какое положение занимает плоскость изгиба, если след плоскости действия сил совпадает с диагональю квадратного поперечного сечения балки? А при ином положении относительно сторон квадрата? А в случае, если сечение представляет собой равнобедренный треугольник?
14. Может ли балка круглого поперечного сечения испытывать деформацию косоугольного изгиба?
15. Для испытываемой балки найдите отношение  $f_z/f_x$  при  $\alpha=45^\circ$ .
16. При каком условии направление перемещения всегда совпадает с направлением действия внешней силы?
17. Какое положение занимает плоскость изгиба, если след плоскости действия сил совпадает с диагональю прямоугольного поперечного сечения балки?

## 7. Правила техники безопасности

1. Разрешается работать на установке только одному экспериментатору.
2. Необходимо соблюдать осторожность при подъеме грузов и установке их на поддон, случайное падение их может привести к травме.
3. Запрещается класть грузы на столы, стулья, установку и другие места, не предусмотренные для этого. Места хранения грузов указаны на рабочем месте.

## 8. Литература

1. Сопротивление материалов. / Под ред. Г.С. Писаренко. – 5-е изд. Киев: Вища школа, 1986. — 775 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.