

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РАСЧЕТ ВАЛА НА ПРОЧНОСТЬ, ЖЕСТКОСТЬ
И ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ**

Методические указания к расчетно-графической работе

Приведены краткие теоретические сведения по расчету валов.
Рассмотрен пример расчета.

Предназначены для студентов всех специальностей очной и за-
очной форм обучения.

Ил. 10. Табл. 4. Библиогр. 3 назв.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Валы предназначены для передачи крутящего момента от одних деталей машин к другим. Валы могут испытывать только деформацию кручения (торсионные валы), совместную деформацию кручения и изгиба, а в некоторых случаях еще и деформацию растяжения и сжатия.

Форма вала зависит от его назначения. Валы могут иметь прямую ось или ось в виде ломаной линии (коленчатые валы) и опираться через подшипники на две опоры или быть многоопорными (статически неопределимыми). Прямые валы могут быть гладкими или ступенчатыми, близкими по форме к балкам равного сопротивления при изгибе.

Для изготовления валов используются углеродистые и легированные стали [1].

Основными для валов являются постоянные и переменные нагрузки от деталей, закрепленных на валу. Постоянные по величине и направлению силы передач вызывают во вращающихся валах переменные напряжения, изменяющиеся по симметричному циклу. Переменные напряжения могут вызываться и изменяющимися во времени нагрузками.

СОСТАВЛЕНИЕ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ

Исходными данными для вычисления действующих на вал усилий являются передаваемая этим валом мощность P и угловая скорость ω , определяемые из энергетического и кинематического расчетов привода машины или механизма.

Мощность на ведущей детали равна сумме мощностей на ведомых, Вт:

$$P_1 = \sum P_i,$$

где P_i – мощность на i -й ведомой детали, Вт.

Вращающий момент на любой детали вычисляется по формуле

$$T_{ci} = \frac{P_i}{\omega} = \frac{30 P_i}{\pi n},$$

где P_i – передаваемая мощность, Вт;

ω – угловая скорость вала, рад/с;

n – частота вращения (число оборотов) вала, об/мин.

У ведущей детали вращающий момент приложен в направлении вращения вала, у ведомых – направлен в противоположную сторону. При установившемся режиме сумма всех моментов равна нулю (рис. 1).

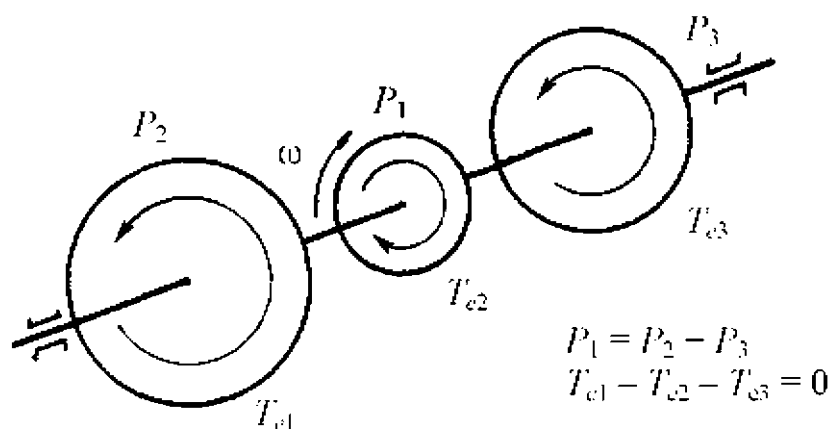


Рис. 1

Ведущими и ведомыми деталями на валах могут быть: шкивы ременных передач, зубчатые колеса (цилиндрические, конические, червячные), звездочки цепных передач, кривошипы. Если вал является последним звеном в кинематической цепи, то на нем закрепляется обрабатываемая деталь или инструмент для обработки (сверла, фрезы, ножи и т.д.).

Непосредственно на вал нагрузка передается через ступицы закрепленных на валу деталей в виде сил, распределенных по площади посадки и по рабочим элементам крепежных деталей (шпонок или шлицев). В приближенных расчетах валов принимают, что нагрузка передается в виде сосредоточенных сил и моментов.

На расчетной схеме вал и детали, укрепленные на валу, изображаются условно. Все нагрузки прикладываются так, как они расположены в пространстве согласно технологической схеме. Силами трения в подшипниках, силами тяжести валов и насаженных на них деталей обычно пренебрегают. Для удобства расчета все нагрузки следует привести к оси вала, предварительно разложив их на вертикальные и горизонтальные составляющие.

Рассмотрим схему приведения нагрузок к оси вала механизма, на расчетной схеме которого (рис. 2, а) обозначены следующие усилия:

F_t, F_r, F_a – окружная, радиальная и осевая силы в зацеплении косозубой цилиндрической передачи (в прямозубой передаче осевая сила отсутствует);

F_1, F_2 – силы натяжения в ведущей и ведомой ветвях ременной передачи.

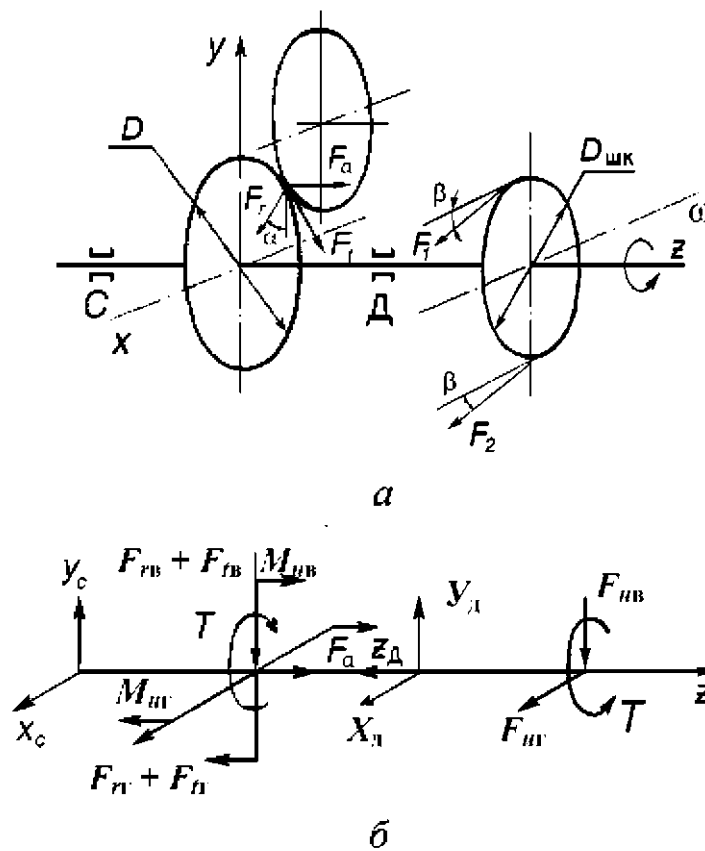


Рис. 2

В результате приведения нагрузок к оси вала (рис. 2, б):

– действие силы F_a представляем в виде продольного усилия, равного F_a , и изгибающих моментов в вертикальной $M_{ив} = (F_a D/2) \cos \alpha$ и горизонтальной $M_{иг} = (F_a D/2) \sin \alpha$ плоскостях (D – диаметр делительной окружности зубчатого колеса; α – угол между осью y и радиальной силой F_r);

– действие силы F_r представляем в виде составляющих – в вертикальной плоскости $F_{rv} = F_r \cos \alpha$, горизонтальной $F_{рт} = F_r \sin \alpha$;

– действие силы F_t представляем в виде составляющих – в вертикальной плоскости $F_{tv} = F_t \sin \alpha$, горизонтальной $F_{тг} = F_t \cos \alpha$, а также в поперечном сечении вала крутящим моментом $T = F_t D/2$;

– действие сил F_1 и F_2 представляем в виде составляющих – в вертикальной плоскости $F'_{ив} = (F_1 + F_2) \sin \beta$, горизонтальной $F'_{иг} = (F_1 + F_2) \cos \beta$, а также в поперечном сечении крутящим моментом $T = (F_1 - F_2) D_{шк}/2$ (β – угол наклона ветвей ременной передачи; $D_{шк}$ – диаметр шкива);

– $X_c, X_{ш}, Y_c, Y_{ш}, z_{ш}$ – составляющие опорных реакций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В СЕЧЕНИЯХ ВАЛА

После составления схемы приведения нагрузок к оси вала в вертикальной и горизонтальной плоскостях вычисляют реакции в опорах. Затем строят эпюры изгибающих моментов в вертикальной M_v и горизонтальной M_g плоскостях и суммарную $M_{сум} = \sqrt{M_v^2 + M_g^2}$, если вал круглого поперечного сечения (суммарные моменты можно изобразить на эпюре в одной плоскости).

Если вал имеет более двух опор, то эпюры строят после раскрытия статической неопределимости балки, например методом сил [2, 3].

Кроме эпюр изгибающих моментов, строят эпюры крутящих моментов T и продольных сил N , если последние возникают.

Все внутренние усилия определяются методом сечений.

ПОДБОР ДИАМЕТРА ВАЛА ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Первоначально диаметр вала определяют по передаваемому крутящему моменту

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0,2 \tau_{adm}}},$$

где τ_{adm} – допускаемое напряжение при кручении.

После составления расчетной схемы и определения внутренних усилий осуществляют проверку прочности вала с учетом совместного действия изгиба и кручения, а также продольной силы.

Материал вала находится в условиях плоского напряженного состояния. Проверку прочности при таких условиях надо проводить по одной из теорий прочности в сечениях вала с наиболее неблагоприятным сочетанием изгибающего и крутящего моментов. Для стальных валов используют третью или четвертую теорию прочности [2, 3]:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_u^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}; \quad \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_u^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{adm}.$$

С учетом продольной силы N

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{(\sigma_u + \sigma_N)^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm};$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{(\sigma_u + \sigma_N)^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{adm},$$

где $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ – эквивалентное или расчетное напряжение, Па;

σ_u – нормальное напряжение при изгибе, Па;

σ_N – нормальное напряжение от действия продольной силы, Па;

τ – касательное напряжение при кручении, Па;

σ_{adm} – допускаемое напряжение, Па.

Напряжения вычисляют по следующим формулам:

$$\sigma_u = \frac{M_{\text{сум}}}{W_x}; \quad \tau = \frac{T}{W_\rho}; \quad \sigma_N = \frac{N}{A}; \quad \sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{n},$$

где W_x – осевой момент сопротивления, м³;

W_ρ – полярный момент сопротивления, м³;

A – площадь поперечного сечения вала, м²;

σ_y – предел текучести для материала вала, Па;

n – коэффициент запаса прочности.

Для вала круглого сплошного сечения диаметром d

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}; W_p = 2W_x = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Для трубчатого сечения с наружным D и внутренним d диаметрами

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]; W_p = 2W_x = \frac{\pi D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right].$$

Момент сопротивления круглого поперечного сечения определяется из условия прочности

$$W_x \geq \frac{M_{\text{расч}}}{\sigma_{\text{adm}}}.$$

Без учета продольных сил для вала круглого поперечного сечения

$$M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{сум}}^2 + T^2}; M_{\text{расч}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{сум}}^2 + 0,75T^2}.$$

Диаметр вала определяется по формуле

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{расч}}}{\pi \sigma_{\text{adm}}}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_{\text{расч}}}{0,1 \sigma_{\text{adm}}}}.$$

Если в сечении есть еще и продольная сила, диаметр нужно увеличить, а затем проверить выполнение условия прочности с учетом σ_N . Если σ_N составляет не более 10 % от σ_u , то можно σ_N не учитывать.

Фактические напряжения не должны превышать допускаемых более чем на 5 %. Вычисленное значение диаметра (в мм) округляют до ближайшего стандартного значения (ГОСТ 6636–69):

1-й ряд	18	20	22	25	28	32	36	40	45	50	56	63	71	80
2-й ряд	19	21	24	26	30	34	38	42	48	53	60	67	75	85

Диаметры остальных участков валов выбирают конструктивно. Диаметр участков валов под подшипники качения принимают кратным 5.

ПРОВЕРКА ПО ДОПУСКАЕМЫМ ДЕФОРМАЦИЯМ

Деформации оказывают неблагоприятное влияние на работу подшипников, зубчатых колес и других деталей.

Деформации валов при изгибе характеризуются прогибами Y и углами поворота поперечных сечений θ , при кручении – углом закручивания φ° на 1 м длины.

Условия жесткости валов:

$$Y \leq Y_{adm}; \theta \leq \theta_{adm}; \varphi \leq \varphi_{adm},$$

где Y_{adm} – допускаемый прогиб в месте расположения деталей на валу; для вала, несущего зубчатые колеса, $Y_{adm} = (0,0002 \dots 0,0003) l$;

l – расстояние между опорами;

θ_{adm} – допускаемый угол поворота сечения вала, для подшипников качения $\theta_{adm} = 0,05$ рад, для подшипников скольжения и валов зубчатых передач $\theta_{adm} = 0,001$ рад;

φ_{adm} – допускаемый угол закручивания вала на 1 м длины, $\varphi_{adm} = 0,25 \dots 1^\circ$.

Деформацию определяют, используя непосредственно интеграл Максвелла–Мора, или вычисляют способом Верещагина [2, 3].

Прогибы и углы поворота сечений при изгибе вычисляют от всех приложенных нагрузок отдельно в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Полный прогиб и угол поворота определяются по формулам

$$Y = \sqrt{Y_B^2 + Y_G^2}; \theta = \sqrt{\theta_B^2 + \theta_G^2}.$$

Так как деформация обратно пропорциональна диаметру вала в четвертой степени, то при превышении фактическими деформациями допускаемых значений необходимо увеличить диаметр вала на величину

$$C = \sqrt[4]{\frac{\Delta}{\Delta_{adm}}},$$

где Δ , Δ_{adm} – фактическое и допускаемое значения деформации.

Полученные значения диаметров округляют до стандартных значений.

Уменьшить деформацию за счет применения качественных сталей и термообработки невозможно, так как модуль продольной упругости весьма мало зависит от марки стали и термообработки.

ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

На практике установлено, что разрушение валов машин обычно происходит в результате усталости материала [2, 3].

Постоянные по значению и направлению силы передач вызывают в валах переменные напряжения изгиба, изменяющиеся по симметричному синусоидальному циклу с амплитудой $\sigma_{\alpha} = \sigma_u = \frac{M_u}{0,1d^3}$ и средним напряжением $\sigma_m = 0$ (рис. 3).

За один оборот вала происходит полный цикл изменения напряжений. При суммировании напряжений от изгибающего момента и продольной силы получают переменные напряжения, меняющиеся по асимметричному циклу (рис. 4), со следующими характеристиками:

$$\sigma_{\max} = \sigma_N + \sigma_u; \sigma_m = \sigma_N;$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_N - \sigma_u; \sigma_{\alpha} = \sigma_u.$$

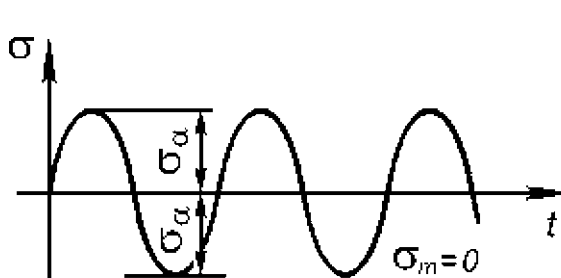


Рис. 3

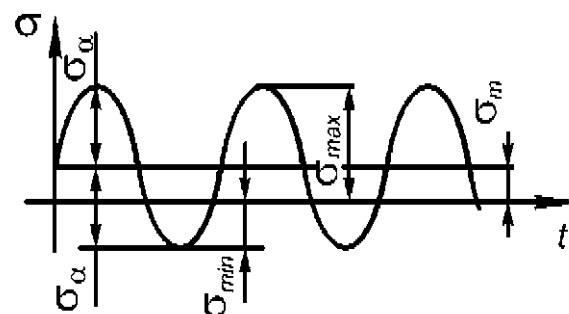


Рис. 4

Касательные напряжения меняются по отнулевому циклу, если вал вращается только в одну сторону (не реверсируется). Продолжи-

тельность цикла равна времени работы машины от пуска до пуска или времени технологического цикла (рис. 5). При этом

$$\tau_{\max} = \tau; \tau_{\min} = 0; \tau_m = 0,5 \tau; \tau_\alpha = 0,5 \tau.$$

В реверсивных валах при одинаковых нагрузках прямого и обратного хода касательные напряжения меняются по симметричному циклу (рис. 6).

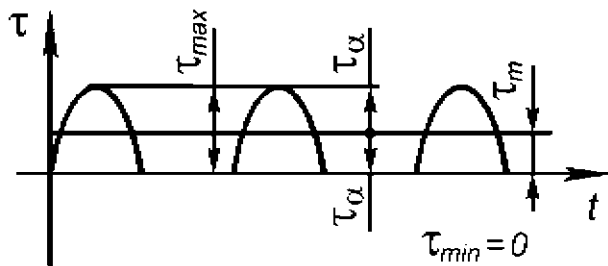


Рис. 5

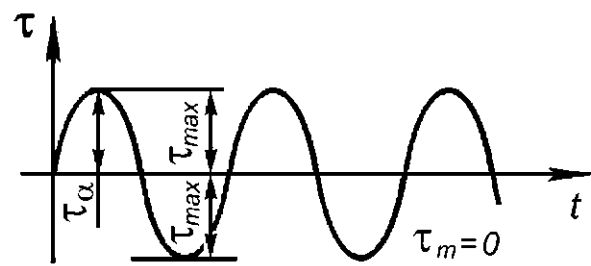


Рис. 6

Тогда

$$\tau_{\max} = \tau; \tau_{\min} = -\tau; \tau_m = 0; \tau_\alpha = \tau.$$

Известно, что при переменных напряжениях все материалы разрушаются при напряжениях значительно меньших, чем предел прочности σ_n . Прочность при таких напряжениях зависит от различных конструктивных и технологических факторов. Ее можно проверить по коэффициенту запаса прочности для каждого предположительно опасного сечения, сравнив его с допускаемой величиной σ_{adm} . Опасным может оказаться место перехода вала от одного диаметра к другому (галтели, выточки), наличие на валу поперечных отверстий, шпоночных канавок, шлицев, резьб и др.

Если амплитудные $\sigma_\alpha = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$, $\tau_\alpha = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2}$ и средние $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$, $\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2}$ напряжения возрастают при нагружении пропорционально, то коэффициент запаса прочности определяется по формуле

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}},$$

где n_{σ} , n_{τ} – соответственно запас прочности по нормальным и касательным напряжениям,

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{\alpha} \frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \beta_{\sigma}} + \psi_{\sigma} \sigma_m}; \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{\alpha} \frac{K_{\tau}}{\varepsilon_{\tau} \beta_{\tau}} + \psi_{\tau} \tau_m};$$

σ_{-1} , τ_{-1} – пределы выносливости материала соответственно при деформации изгиба и кручения;

K_{σ} , K_{τ} – эффективные коэффициенты концентрации соответственно нормальных и касательных напряжений;

ε_{σ} , ε_{τ} – коэффициенты, учитывающие влияние абсолютных размеров (масштабные);

β_{σ} , β_{τ} – коэффициенты, учитывающие состояние поверхности;

ψ_{σ} , ψ_{τ} – коэффициенты чувствительности материала к асимметрии цикла напряжений.

Механические характеристики материалов и значения всех коэффициентов приведены в приложении.

Если коэффициент запаса прочности оказался меньше $n_{adm} = 1,5 \dots 2,5$, то диаметр вала надо пересчитать, учитывая, что нормальные и касательные напряжения в вале обратно пропорциональны диаметру вала в третьей степени, по формуле

$$d = d_0 \sqrt[3]{\frac{n}{n_0}},$$

где d_0 – ранее принятый диаметр вала по коэффициенту запаса прочности n_0 ;
 d – новое значение диаметра с желаемым коэффициентом запаса прочности (обычно принимают $n = 1,65$).

Вновь найденный диаметр вала округляют до стандартного значения и выбирают диаметры для остальных участков.

При нестационарных нагрузках расчет ведут по эквивалентному напряжению [1].

Для повышения предела выносливости материала (сопротивления усталости) используют различные методы поверхностного упрочнения пластическим деформированием, а также конструктивные меры при проектировании валов.

РАСЧЕТ ВАЛА НА ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебания валов с присоединенными к ним деталями возникают под действием внешних, постоянно действующих и периодически изменяющихся сил и связаны с упругой деформацией валов. Колебания ухудшают условия работы зубчатых зацеплений и подшипников, снижают качество вырабатываемой продукции, а также могут привести к разрушению деталей, если динамические напряжения при колебаниях превысят предел выносливости материала. Неуравновешенные массы на валу при вращении вызывают появление периодических возмущающих сил с круговой частотой $\omega = \frac{2\pi n}{60}$, где n – частота вращения вала в минуту. Если частота возмущающей силы ω достигнет частоты собственных колебаний вала ω_k , наступает резонанс, при котором резко возрастают напряжения и деформации. В этом случае ω является критической угловой скоростью вала ω_k , а $n_k = \frac{60\omega_k}{2\pi}$ – критической частотой вращения вала.

Критическая угловая скорость вала может быть вычислена по приближенной формуле Рэлея

$$\omega_k = \sqrt{\frac{g \sum Q_i y_i}{\sum Q_i y_i^2}},$$

где g – ускорение свободного падения, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$;

Q_i – сила тяжести i -й колеблющейся массы, которая условно принята сосредоточенной, Н;

y_i – статический прогиб под i -й сосредоточенной массой, вызванный силами тяжести всех сосредоточенных масс, м.

Для упрощения расчета распределенная сила тяжести вала приводится к сосредоточенным силам с использованием коэффициентов K_1 и K_2 . Сила тяжести вала между опорами приводится к одной любой сосредоточенной силе тяжести между опорами, а сила тяжести консольной части вала – к сосредоточенной силе на консоли (см. пример расчета). Если вал ступенчатый, то собственную силу тяжести вычисляют для каждой ступени отдельно, а результаты складывают.

Упругая система имеет столько форм собственных колебаний, сколько сосредоточенных масс расположено на ней. Обычно интересуются первой (низшей) частотой собственных колебаний, так как частота вращения подавляющего большинства валов современных машин находится в области, близкой к первой частоте собственных колебаний, и только у сверхбыстроходных машин она сопоставима со второй и третьей собственными частотами. При первой (основной) частоте все силы направлены так, чтобы изогнутая ось вала не имела точек перегиба, и прогибы были наибольшими; при этом силы в пролете направлены в одну сторону, а силы на консоли – в другую.

Во избежание резонансных явлений необходимо, чтобы частоты собственных и вынужденных колебаний отличались не менее чем на 30 %. Таким образом, опасная зона угловых скоростей вала находится в пределах

$$\omega_{оп} = (0,7...1,3) \omega_k.$$

Если фактическая угловая скорость находится в опасной зоне, необходимо пересчитать диаметр вала.

При увеличении диаметра жесткость вала увеличится, и условие по допускаемым деформациям не будет нарушено, а частота собственных колебаний возрастет. Так как ω_k пропорциональна квадрату диаметра вала, то новый диаметр, при котором зона опасных скоростей будет выше фактической угловой скорости вала, может быть найден по формуле

$$d = d_0 \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{0\min}}},$$

где d_0 – ранее принятый диаметр;

ω – наименьшее значение угловой скорости при диаметре d ;

$\omega_{0\min}$ – наименьшее значение опасной угловой скорости при диаметре d_0 .

Полученное значение диаметра округляют до стандартного значения.

Частоты собственных поперечных колебаний вала могут быть определены и иным способом. Решение задач по определению частот собственных колебаний конструкции с несколькими степенями свободы приводит к системе однородных линейных алгебраических уравнений свободы относительно амплитудных значений сил инерции сосредоточенных масс. Система однородных линейных уравнений имеет не нулевое решение, если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2} & \delta_{12}m_2 & \dots & \delta_{1i}m_i & \dots & \delta_{1n}m_n \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 - \frac{1}{\omega^2} & \dots & \delta_{2i}m_i & \dots & \delta_{2n}m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{i1}m_1 & \delta_{i2}m_2 & \dots & \delta_{ii}m_i - \frac{1}{\omega^2} & \dots & \delta_{in}m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1}m_1 & \delta_{n2}m_2 & \dots & \delta_{ni}m_i & \dots & \delta_{nn}m_n - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0$$

где $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in}$ – перемещение в направлении колебаний m_i от $\bar{F} = 1$;
 m_1, m_2, \dots, m_n – сосредоточенные массы.

В результате раскрытия определителя получается уравнение частот колебаний сосредоточенных масс.

ПРИМЕР РАСЧЕТА ВАЛА

Исходные данные: $P_1 = 7,0$ кВт; $D_1 = 600$ мм; $G_1 = 600$ Н; $P_2 = 5,0$ кВт; $D_2 = 400$ мм; $P_3 = 2,0$ кВт, $D_3 = 200$ мм; $n = 300$ об/мин; $a = 100$ мм; $\alpha = 70^\circ$; $\beta = 65^\circ$. При расчете вала на поперечные колебания учесть $G_2 = 150$ Н, $G_3 = 50$ Н. Материал вала – сталь 45, допускаемое напряжение для материала с учетом динамического характера нагрузки $\sigma_{adm} = 80$ МПа. Схема вала приведена на рис. 7.

Определить диаметры вала.

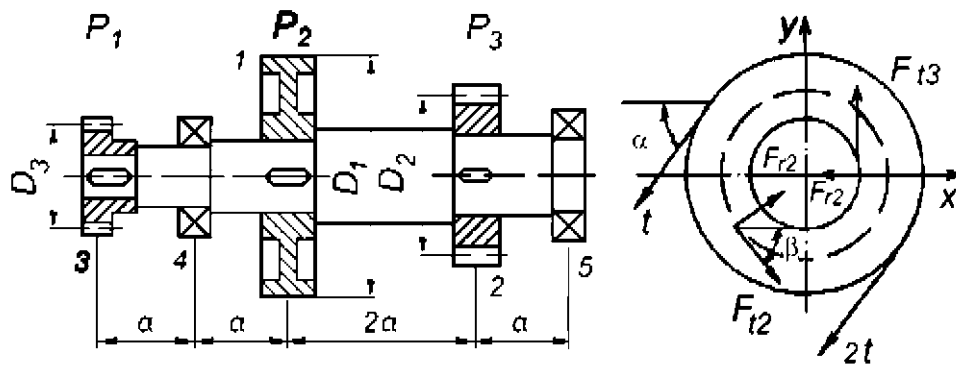


Рис. 7

Передача вращательного движения осуществляется от электрического двигателя через ременную передачу на трансмиссионный вал, на котором расположены шкив ременной передачи 1 и зубчатые колеса 2 и 3. Вал опирается через подшипники 4 и 5.

Определение расчетных нагрузок

1. Определяем вращающие моменты, передаваемые:
шкивом

$$T_{e1} = \frac{P_1 \cdot 30}{\pi n} = \frac{7000 \cdot 30}{3,14 \cdot 300} = 222,9 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

зубчатым колесом (шестерней) с диаметром D_2

$$T_{e2} = \frac{P_2 \cdot 30}{\pi n} = \frac{5000 \cdot 30}{3,14 \cdot 300} = 159,2 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

зубчатым колесом (шестерней) с диаметром D_3

$$T_{e3} = \frac{P_3 \cdot 30}{\pi n} = \frac{2000 \cdot 30}{3,14 \cdot 300} = 63,7 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Проверяем правильность вычисления моментов:

$$\Sigma T_e = 0; 222,9 - 159,2 - 63,7 = 0.$$

2. Определяем усилия:

в ведомой ветви ременной передачи

$$t = \frac{2T_{e1}}{D_1} = \frac{2 \cdot 222,9}{0,6} = 743,0 \text{ Н};$$

в ведущей ветви ременной передачи

$$2t = 2 \cdot 743,0 = 1486,0 \text{ Н};$$

на прямозубой цилиндрической шестерне с диаметром D_2 :

окружное

$$F_{t2} = \frac{2T_{e2}}{D_2} = \frac{2 \cdot 159,2}{0,4} = 796,0 \text{ Н};$$

радиальное (при угле зацепления $\alpha_w = 20^\circ$)

$$F_{r2} = F_{t2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_w = 796,0 \cdot 0,364 = 289,7 \text{ Н};$$

на прямозубой цилиндрической шестерне с диаметром D_3 :

окружное

$$F_{t3} = \frac{2T_{e3}}{D_3} = \frac{2 \cdot 63,7}{0,2} = 637,0 \text{ Н};$$

радиальное

$$F_{r3} = F_{t3} \cdot \operatorname{tg} \alpha_w = 637,0 \cdot 0,364 = 231,9 \text{ Н}.$$

3. Раскладываем силы на вертикальные и горизонтальные составляющие и приводим их к оси вала.

Вертикальные составляющие:

$$F_{y1} = -G_1 - 2t \sin \alpha - t \sin \alpha = -G_1 - 3t \sin 70^\circ = -600 - 3 \cdot 743 - 0,940 = -2695,3 \text{ Н};$$

$$F_{y2} = -F_{t2} \sin \beta + F_{r2} \cos \beta = 796,0 \cdot 0,906 + 289,7 \cdot 0,423 = -598,8 \text{ Н};$$

$$F_{y3} = F_{t3} = 637,0 \text{ Н}.$$

Горизонтальные составляющие:

$$F_{x1} = -t \cos \alpha - 2t \cos \alpha = -3t \cos \alpha = -3 \cdot 743,0 \cdot 0,423 = -762,3 \text{ Н};$$

$$F_{x2} = F_{t2} \cos \beta + F_{r2} \sin \beta = 796,0 \cdot 0,423 + 289,7 \cdot 0,906 = 599,0 \text{ Н};$$

$$F_{x3} = -F_{r3} = -231,9 \text{ Н}.$$

4. Определяем реакции опор, рассматривая вал как балку на шарнирных опорах (рис. 8, а, б)

В вертикальной плоскости

$$\Sigma M_B = 0; -637 \cdot 0,5 - V_{вА} \cdot 0,4 + 2695,3 \cdot 0,3 + 598,8 \cdot 0,1 = 0,$$

откуда $V_{вА} = 1374,9$ Н;

$$\Sigma M_A = 0; 637 \cdot 0,1 - 2695,3 \cdot 0,1 - 598,8 \cdot 0,3 + V_{вВ} \cdot 0,4 = 0,$$

откуда $V_{вВ} = 1282,2$ Н.

$$\text{Проверка: } \Sigma V = 0; 637 - 1374,9 - 2695,3 - 598,8 + 1282,2 = 0.$$

В горизонтальной плоскости

$$\Sigma M_B = 0; 231,9 \cdot 0,5 - V_{гА} \cdot 0,4 + 762,3 \cdot 0,3 - 599,2 \cdot 0,1 = 0,$$

откуда $V_{гА} = 711,8$ Н;

$$\Sigma M_A = 0; 231,9 \cdot 0,1 - 762,3 \cdot 0,1 + 599,2 \cdot 0,3 - V_{гВ} \cdot 0,4 = 0,$$

откуда $V_{гВ} = 316,8$ Н.

$$\text{Проверка: } \Sigma x = 0; -231,9 + 711,8 - 762,3 + 599,2 - 316,8 = 0.$$

Определение внутренних усилий в сечениях вала

1. Строим эпюру крутящих моментов для вала, определяя их по вращающим моментам, считая момент положительным, если при взгляде со стороны сечения вращающий момент направлен против часовой стрелки:

$$T_1 = -T_{с3} = -63,7 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$T_2 = -T_{с2} + T_{с1} = T_{с2} = -637 - 222,9 = 159,2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

2. Строим эпюры изгибающих моментов, вычисляя моменты в сечениях вала (рис. 8, а, б).

В вертикальной плоскости:

$$M_{в1} = 0;$$

$$M_{в2} = 637 \cdot 0,1 = 63,7 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{в3} = 637 \cdot 0,2 + 1374,9 \cdot 0,1 = 264,9 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{в4} = 1282,2 \cdot 0,1 = 128,2 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{в5} = 0.$$

В горизонтальной плоскости:

$$M_{г1} = 0;$$

$$M_{г2} = -231,9 \cdot 0,1 = -23,2 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{г3} = -231,9 \cdot 0,2 + 711,8 \cdot 0,1 = 24,8 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{г4} = -316,8 \cdot 0,1 = -31,7 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{г5} = 0.$$

Учитывая, что поперечное сечение вала круглое, строим эпюру суммарных изгибающих моментов, совмещая все плоскости в одну:

$$M_{\text{сум1}} = \sqrt{M_{в1}^2 + M_{г1}^2} = 0;$$

$$M_{\text{сум2}} = \sqrt{M_{в2}^2 + M_{г2}^2} = \sqrt{63,7^2 + (-23,2)^2} = 67,8 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{сум3}} = \sqrt{M_{в3}^2 + M_{г3}^2} = \sqrt{264,9^2 + 24,8^2} = 266,1 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{сум4}} = \sqrt{M_{в4}^2 + M_{г4}^2} = \sqrt{128,2^2 + (-31,7)^2} = 132,1 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{сум5}} = \sqrt{M_{в5}^2 + M_{г5}^2} = 0.$$

3. Расчетные моменты определяем, используя третью теорию прочности:

$$M_{\text{расч1}} = \sqrt{M_{\text{сум1}}^2 + T_1^2} = \sqrt{0^2 + (-63,7)^2} = 63,7 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{расч2}} = \sqrt{M_{\text{сум2}}^2 + T_1^2} = \sqrt{67,8^2 + (-63,7)^2} = 93,0 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{расч3}} = \sqrt{M_{\text{сум3}}^2 + T_1^2} = \sqrt{266,1^2 + (-63,7)^2} = 273,6 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{расч3}'} = \sqrt{M_{\text{сум3}}^2 + T_2^2} = \sqrt{266,1^2 + 159,2^2} = 310,1 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{расч4}} = \sqrt{M_{\text{сум4}}^2 + T_2^2} = \sqrt{132,1^2 + 159,2^2} = 206,9 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{расч4}'} = \sqrt{M_{\text{сум4}}^2 + 0^2} = \sqrt{132,1^2 + 0^2} = 132,1 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{расч5}} = 0.$$

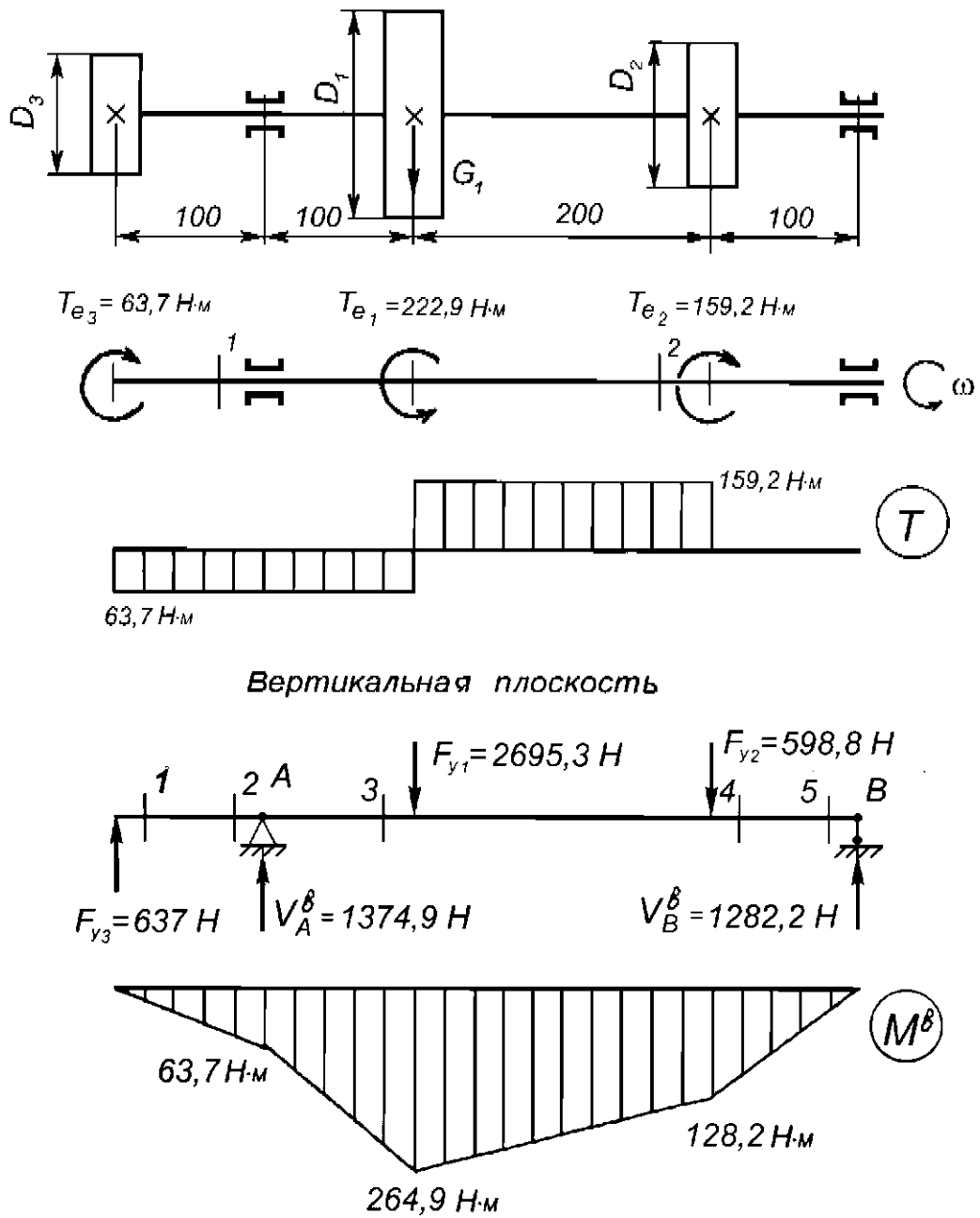


Рис. 8, а

Горизонтальная плоскость

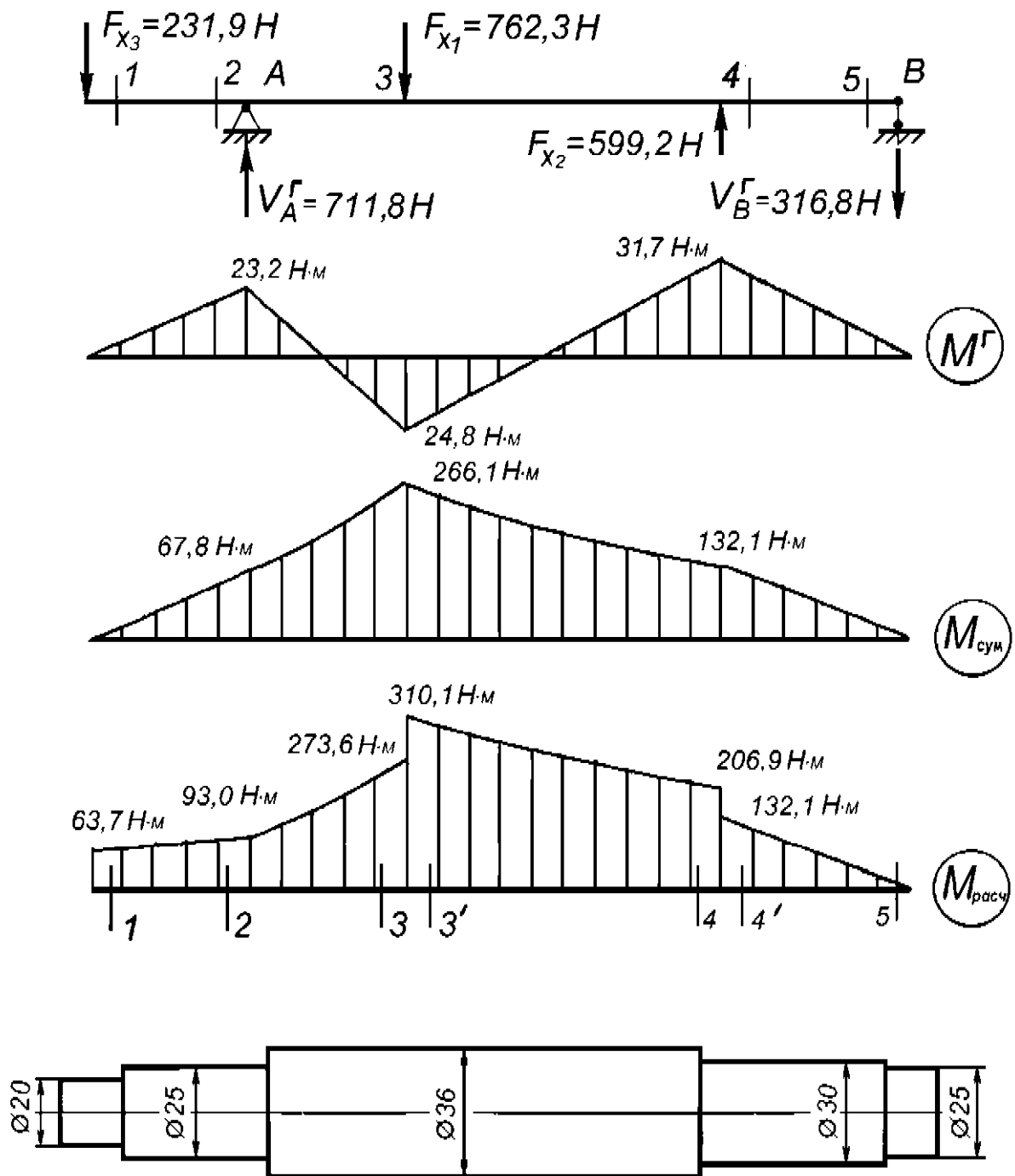


Рис. 8, б

Подбор диаметров вала по допускаемым напряжениям

Вычисляем диаметры вала на разных участках, исходя из расчетного момента и конструктивных соображений. Диаметры определяем по наибольшим расчетным моментам на данных участках и округляем до ближайшего стандартного значения.

В месте установки подшипников

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{расч4}}}{0,1 \sigma_{\text{adm}}}} = \sqrt[3]{\frac{132,1}{0,1 \cdot 80 \cdot 10^6}} \cdot 10^3 = 22,7 \text{ мм.}$$

В месте установки шкива

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{расч3}}}{0,1 \sigma_{\text{adm}}}} = \sqrt[3]{\frac{310,1}{0,1 \cdot 80 \cdot 10^6}} \cdot 10^3 = 33,8 \text{ мм.}$$

В месте установки шестерни диаметром D_2

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{расч4}}}{0,1 \sigma_{\text{adm}}}} = \sqrt[3]{\frac{206,9}{0,1 \cdot 80 \cdot 10^6}} \cdot 10^3 = 29,6 \text{ мм.}$$

Переход от одного диаметра вала к другому не должен быть сделан в пределах мест, предназначенных для посадки шкива, зубчатых колес и подшипников. Длину ступиц выбирают обычно равной $2d$, длину шеек под подшипники качения – $0,5d$. Найденный диаметр распространяется по длине вала в сторону меньших расчетных моментов. Эскиз вала на основе полученных данных приведен на рис. 8, б.

Проверка вала по допускаемым деформациям

Деформации вала от натяжения ремней, усилий в зубчатых передачах и силы тяжести шкива определяем способом Верещагина, используя эпюры изгибающих моментов M_b и M_r . Собственной силой тяжести вала пренебрегаем. Для упрощения расчетов принимаем размеры вала по рис. 9, а.

Для вала – модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^{10}$ Па; моменты инерции

$$I_1 = \frac{\pi d_1^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 3^4}{64} = 3,97 \text{ см}^4; I_{p1} = 2 I_1 = 7,94 \text{ см}^4;$$

$$I_2 = \frac{\pi d_1^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 3,6^4}{64} = 8,24 \text{ см}^4; I_{\rho 1} = 2 I_1 = 16,48 \text{ см}^4;$$

$$I_3 = \frac{\pi d_1^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 3^4}{64} = 3,97 \text{ см}^4; I_{\rho 1} = 2 I_1 = 7,94 \text{ см}^4.$$

Для вычисления в вертикальной и горизонтальной плоскостях прогибов под шестернями и под шкивом прикладываем единичные силы $\bar{F} = 1$, а для вычисления углов поворота в местах крепления подшипников и зубчатых колес прикладываем единичные моменты $\bar{M} = 1$.

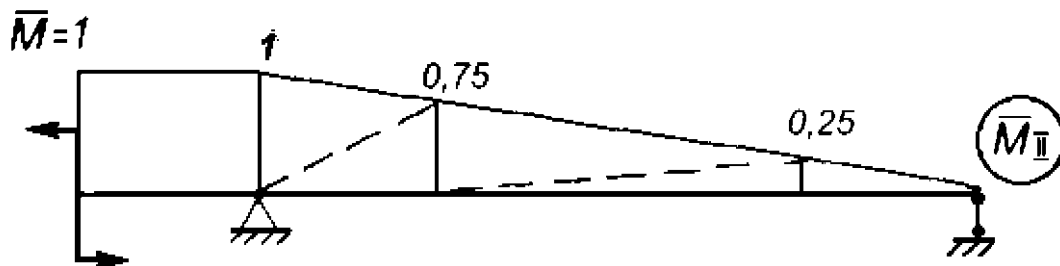
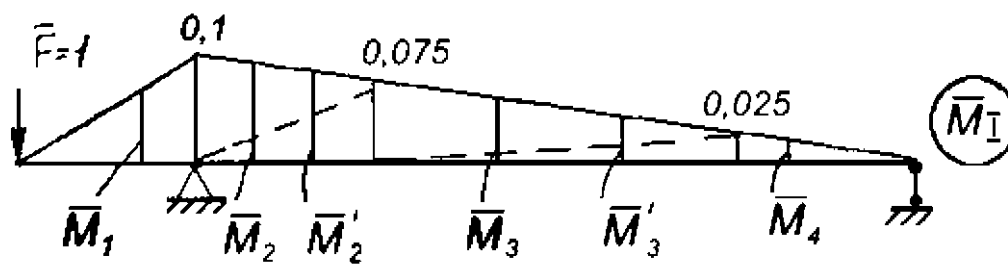
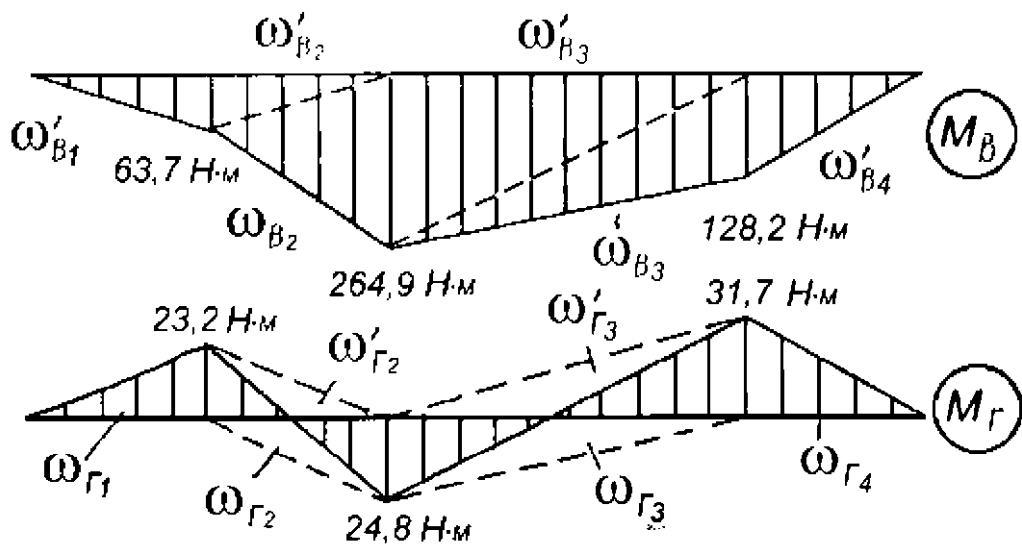
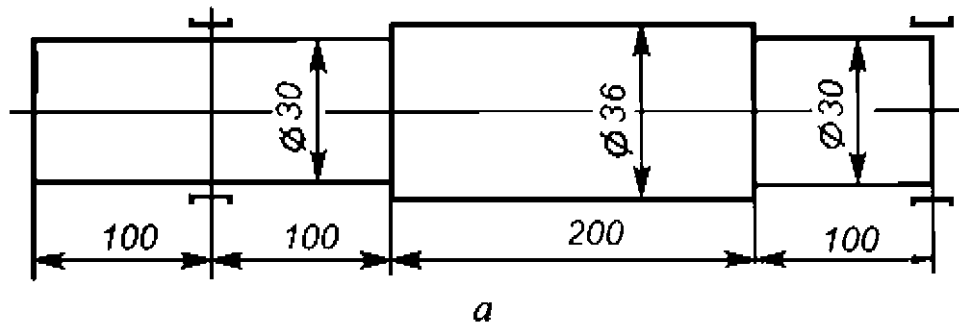
Прогиб на конце консоли:

в вертикальной плоскости

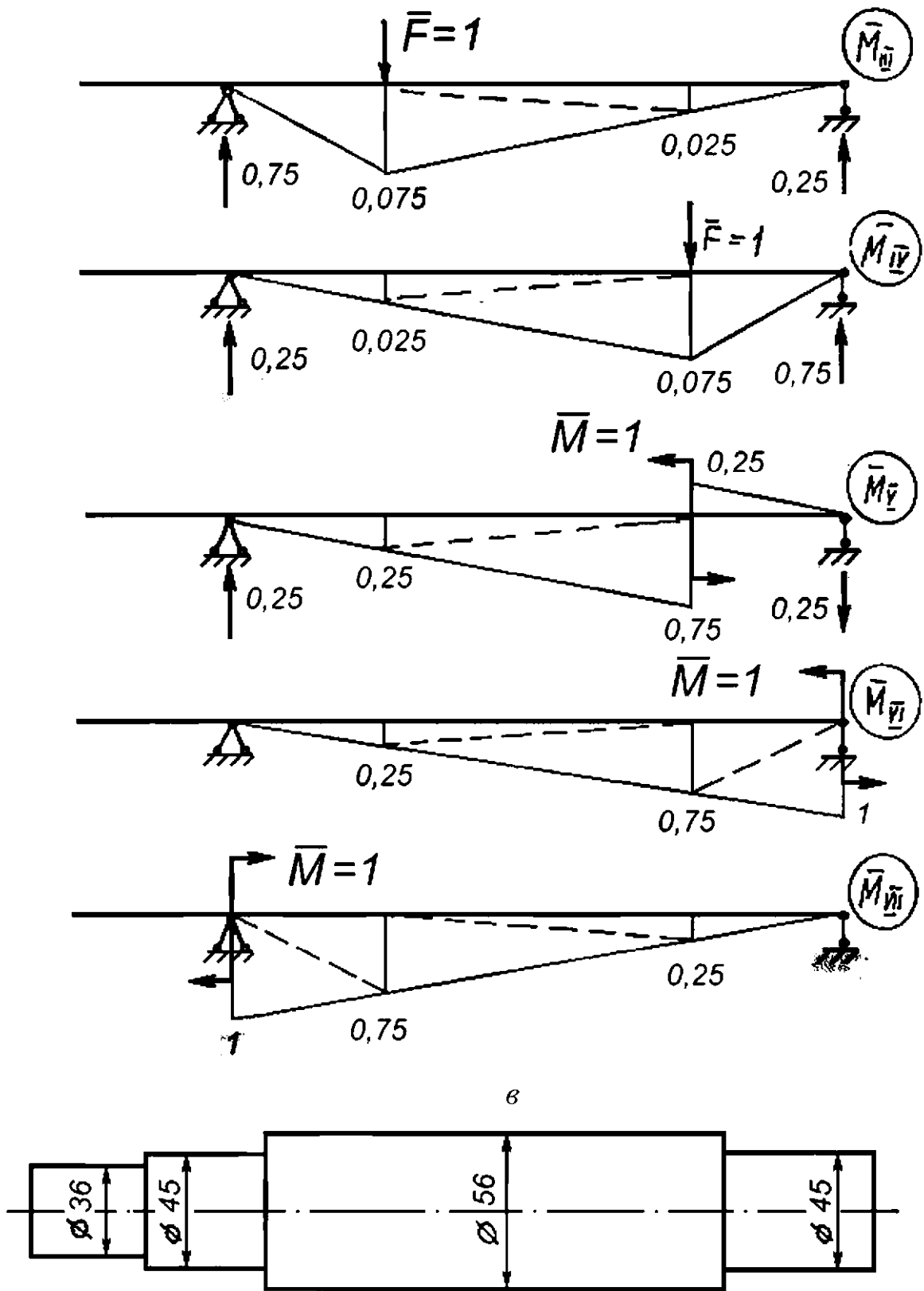
$$\begin{aligned} Y_{\text{вл}} &= \sum \int \frac{M_{\text{в}} \bar{M}_1}{EI} dz = \frac{\omega_{\text{в1}} \bar{M}_1}{EI_1} + \frac{\omega_{\text{в2}} \bar{M}_2 + \omega'_{\text{в2}} \bar{M}_2}{EI_1} + \frac{\omega_{\text{в3}} \bar{M}_3 + \omega'_{\text{в3}} \bar{M}_3}{EI_2} + \\ &+ \frac{\omega_{\text{в4}} \bar{M}_4}{EI_3} = -\frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot 63,7 \cdot 0,1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,1 + \frac{1}{2} \cdot 63,7 \cdot 0,1 \times \right. \\ &\times \left(\frac{2}{3} \cdot 0,1 + \frac{1}{3} \cdot 0,075 \right) + \frac{1}{2} \cdot 264,9 \times 0,1 \left(\frac{2}{3} \cdot 0,075 + \frac{1}{3} \cdot 0,1 \right) + \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{2} \times \\ &\times 264,9 \cdot 0,2 \times \left(\frac{2}{3} \cdot 0,075 + \frac{1}{3} \cdot 0,025 \right) + \frac{1}{2} \cdot 128,2 \cdot 0,2 \left(\frac{2}{3} \cdot 0,025 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{3} \cdot 0,075 \right) + \frac{1}{EI_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 128,2 \cdot 0,1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,025 = -0,342 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \end{aligned}$$

в горизонтальной плоскости

$$\begin{aligned} Y_{\text{г1}} &= \sum \int \frac{M_{\text{г}} \bar{M}_1}{EI} dz = \frac{\omega_{\text{г1}} \bar{M}_1}{EI_1} + \frac{\omega_{\text{г2}} \bar{M}_2 + \omega'_{\text{г2}} \bar{M}_2}{EI_1} + \frac{\omega_{\text{г3}} \bar{M}_3 + \omega'_{\text{г3}} \bar{M}_3}{EI_2} + \\ &+ \frac{\omega_{\text{г4}} \bar{M}_4}{EI_3} = \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot 23,2 \cdot 0,1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,1 + \frac{1}{2} \cdot 23,2 \cdot 0,1 \times \right. \\ &\times \left(\frac{2}{3} \cdot 0,1 + \frac{1}{3} \cdot 0,075 \right) - \frac{1}{2} \cdot 24,8 \cdot 0,1 \cdot 0,2 \left(\frac{2}{3} \cdot 0,075 + \frac{1}{3} \cdot 0,1 \right) - \\ &- \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 24,8 \cdot 0,2 \left(\frac{2}{3} \cdot 0,075 + \frac{1}{3} \cdot 0,035 \right) + \frac{1}{2} \cdot 3,17 \cdot 0,2 \times \\ &\times \left(\frac{2}{3} \cdot 0,025 + \frac{1}{3} \cdot 0,075 \right) + \frac{1}{EI_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 31,7 \cdot 0,1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,025 = 0,0126 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$



6



2
Рис. 9

Полный прогиб вычисляем геометрическим сложением:

$$Y_1 = \sqrt{Y_{B1}^2 + Y_{r1}^2} = \sqrt{(-0,342)^2 + (0,0126)^2} \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,343 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Подобным образом вычисляем и другие деформации. В результате получаем:

угол поворота на консоли

$$\Theta_{B1} = \sum \int \frac{M_B \bar{M}_{II}}{EI} dz = -3,55 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Theta_{r1} = \sum \int \frac{M_r \bar{M}_{II}}{EI} dz = 0,176 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Theta_1 = \sqrt{\Theta_{B1}^2 + \Theta_{r1}^2} = 3,55 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

прогиб под шкивом

$$Y_{B3} = \sum \int \frac{M_B \bar{M}_{III}}{EI} dz = 0,230 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$Y_{r3} = \sum \int \frac{M_r \bar{M}_{III}}{EI} dz = -0,0085 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$Y_3 = \sqrt{Y_{B3}^2 + Y_{r3}^2} = 0,230 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

прогиб под шестерней с диаметром D_2

$$Y_{B4} = \sum \int \frac{M_B \bar{M}_{IV}}{EI} dz = 0,184 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$Y_{r4} = \sum \int \frac{M_r \bar{M}_{IV}}{EI} dz = -0,0136 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$Y_4 = \sqrt{Y_{B4}^2 + Y_{r4}^2} = 0,184 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

угол поворота под шестерней с диаметром D_2

$$\Theta_{B4} = \sum \int \frac{M_B \bar{M}_V}{EI} dz = 1,310 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Theta_{r4} = \sum \int \frac{M_r \bar{M}_V}{EI} dz = -0,005 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Theta_4 = \sqrt{\Theta_{B4}^2 + \Theta_{r4}^2} = 1,310 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

угол поворота под правым подшипником

$$\Theta_{в5} = \sum \int \frac{M_{в} \bar{M}_{vI}}{EI} dz = 2,10 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Theta_{r5} = \sum \int \frac{M_{r} \bar{M}_{vI}}{EI} dz = -0,20 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Theta_5 = \sqrt{\Theta_{в5}^2 + \Theta_{r5}^2} = 2,10 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

угол поворота под левым подшипником

$$\Theta_{в2} = \sum \int \frac{M_{в} \bar{M}_{vII}}{EI} dz = 3,15 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Theta_{r2} = \sum \int \frac{M_{r} \bar{M}_{vII}}{EI} dz = -0,03 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Theta_2 = \sqrt{\Theta_{в2}^2 + \Theta_{r2}^2} = 3,15 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Угол закручивания вычисляем на двух участках:

$$\varphi_{01} = \frac{T_1}{GI_{\rho 1}} = \frac{63,7}{8 \cdot 10^{10} \cdot 7,94 \cdot 10^{-8}} = 0,0100 \text{ рад/м};$$

$$\varphi_{02} = \frac{T_2}{GI_{\rho 2}} = \frac{159,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 16,48 \cdot 10^{-8}} = 0,0121 \text{ рад/м}.$$

Получаем следующие наибольшие деформации:

прогиб $Y = 0,342 \cdot 10^{-3}$ м;

угол поворота $\Theta = 3,55 \cdot 10^{-3}$ рад;

угол закручивания $\varphi_0 = 0,0121$ рад/м.

Допускаемые деформации:

прогиб $Y_{adm} = 0,0002 \cdot 0,4 = 0,08 \cdot 10^{-3}$ м;

угол поворота $\Theta_{adm} = 1 \cdot 10^{-3}$ рад;

угол закручивания $\varphi_{0 adm} = 0,01$ рад/м.

Фактические деформации превышают допускаемые:

по прогибу $0,343 \cdot 10^{-3} : 0,08 \cdot 10^{-3} = 4,3$;

по углу поворота $0,00355 : 0,001 = 3,55$;

по углу закручивания $0,0121 : 0,01 = 1,21$.

Наибольшее превышение составляет 4,3 раза. Для того чтобы деформации стали меньше допустимых, необходимо все диаметры увеличить в следующее число раз:

$$C = \sqrt[4]{4,3} = 1,44.$$

В результате новые диаметры вала будут составлять:

$$30 \cdot 1,44 = 43,2 \text{ мм} \approx 45 \text{ мм};$$

$$36 \cdot 1,44 = 51,84 \text{ мм} \approx 56 \text{ мм}.$$

Вал с новыми размерами изображен на рис. 9, б.

Проверка прочности вала при переменных напряжениях

1. Внутренние усилия в опасном сечении принимаем такими же, что и в расчете по допускаемым напряжениям: $M = 266,1 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $T = 159,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $d = 56 \text{ мм}$. Концентраторы напряжений – галтель, шпонка и напряженная посадка шкива.

2. Вычисляем величину номинальных напряжений:

от изгибающего момента

$$\sigma_u = \frac{M_{\text{сум}}}{W_x} = \frac{266,1}{0,1 \cdot 56^3 \cdot 10^{-9}} = 0,0152 \cdot 10^9 = 15 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

от крутящего момента

$$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{159,2}{0,2 \cdot 56^3 \cdot 10^{-9}} = 0,0045 \cdot 10^9 = 4,5 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Считаем, что нормальные напряжения при вращении вала меняются по симметричному циклу:

$$\sigma_{\max} = \sigma_u = 15 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\sigma_{\min} = -\sigma_u = -15 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\sigma_m = 0;$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = 15 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$r = -1.$$

Касательные напряжения в нереверсивных валах меняются по отнулевому циклу:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \tau = 4,5 \cdot 10^6 \text{ Па}; \\ \tau_{\min} &= 0; \\ \tau_m &= 0,5 \tau = 2,25 \cdot 10^6 \text{ Па}; \\ \tau_a &= 0,5 \tau = 2,25 \cdot 10^6 \text{ Па}; \\ r &= -1.\end{aligned}$$

Пределы выносливости для стали 45 $\sigma_{-1} = 380$ МПа; $\tau_{-1} = 230$ МПа.

Коэффициенты влияния асимметрии цикла: $\psi_\sigma = 0,1$; $\psi_\tau = 0,05$ (см. приложение, табл. 1).

Для стали с пределом прочности $\sigma_u = 800$ МПа эффективные коэффициенты концентрации (приложение, табл. 2):

для галтели $K_\sigma = 2,28$; $K_\tau = 2,37$;

для шпоночной канавки $K_\sigma = 2,01$; $K_\tau = 1,88$;

для напряженной посадки $K_\sigma = 2,09$, $K_\tau = 1,71$.

В расчет принимаем $K_\sigma = 2,28$ и $K_\tau = 2,37$.

Масштабные коэффициенты для углеродистой стали при $d = 56$ мм: $\varepsilon_\sigma = 0,7$; $\varepsilon_\tau = 0,67$ (приложение, табл. 3).

Коэффициенты состояния поверхности при точении: $\beta_\sigma = 1$; $\beta_\tau = 1$ (приложение, табл. 4).

Коэффициенты запаса прочности определяем по формулам

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta_\sigma} + \psi_\sigma \sigma_m} = \frac{380}{15 \cdot \frac{2,28}{0,7 \cdot 1} + 0,1 \cdot 0} = 7,8;$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\sigma_a \frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \beta_\tau} + \psi_\tau \tau_m} = \frac{230}{4,5 \cdot \frac{2,37}{0,57 \cdot 1} + 0,05 \cdot 2,25} = 12,23;$$

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{7,8 \cdot 12,23}{\sqrt{7,8^2 + 12,23^2}} = 6,6.$$

Допустимый коэффициент запаса прочности $n_0 = 1,5 \dots 1,8$, поэтому все размеры вала оставляем из расчета по допускаемым деформациям.

Расчет вала на поперечные колебания (рис. 10)

1. При расчете на поперечные колебания учитываем силу тяжести шкива G_1 , зубчатых колес G_2 и G_3 , собственную силу тяжести вала.

2. Для упрощения расчетов диаметры коротких участков заменяем диаметрами соседних участков.

3. Собственную силу тяжести вала вычисляем отдельно для консолей и пролета и приводим к сосредоточенным силам G . Плотность стали примем $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Силы тяжести левой консоли (от конца вала до середины подшипника)

$$q_1 l_k = \Sigma \rho g \frac{\pi d^2}{4} l_k = 7,8 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \frac{3,14 \cdot 0,04^2}{4} 0,11 = 10,57 \text{ Н.}$$

Силы тяжести вала в пролете

$$qL = \sum_{i=1}^3 \rho \sigma \frac{\pi d_i^2}{4} l_i = 7,8 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot \frac{3,14}{4} (0,05^2 \cdot 0,10 + 0,06^2 \times \\ \times 0,02 + 0,05^2 \cdot 0,125) = 77,04 \text{ Н.}$$

3. Распределенную силу тяжести вала приводим к сосредоточенным весам по формулам:

для консоли

$$K_2 = 0,3 \frac{l_k^2 (l_k + L)}{c^2 (c + L)} = 0,3 \frac{0,11^2 (0,11 + 0,4125)}{0,10^2 (0,10 + 0,4125)} = 0,38;$$

$$Q_3 = G_3 + K_2 q l_k = 50 + 0,38 \cdot 10,57 = 54 \text{ Н;}$$

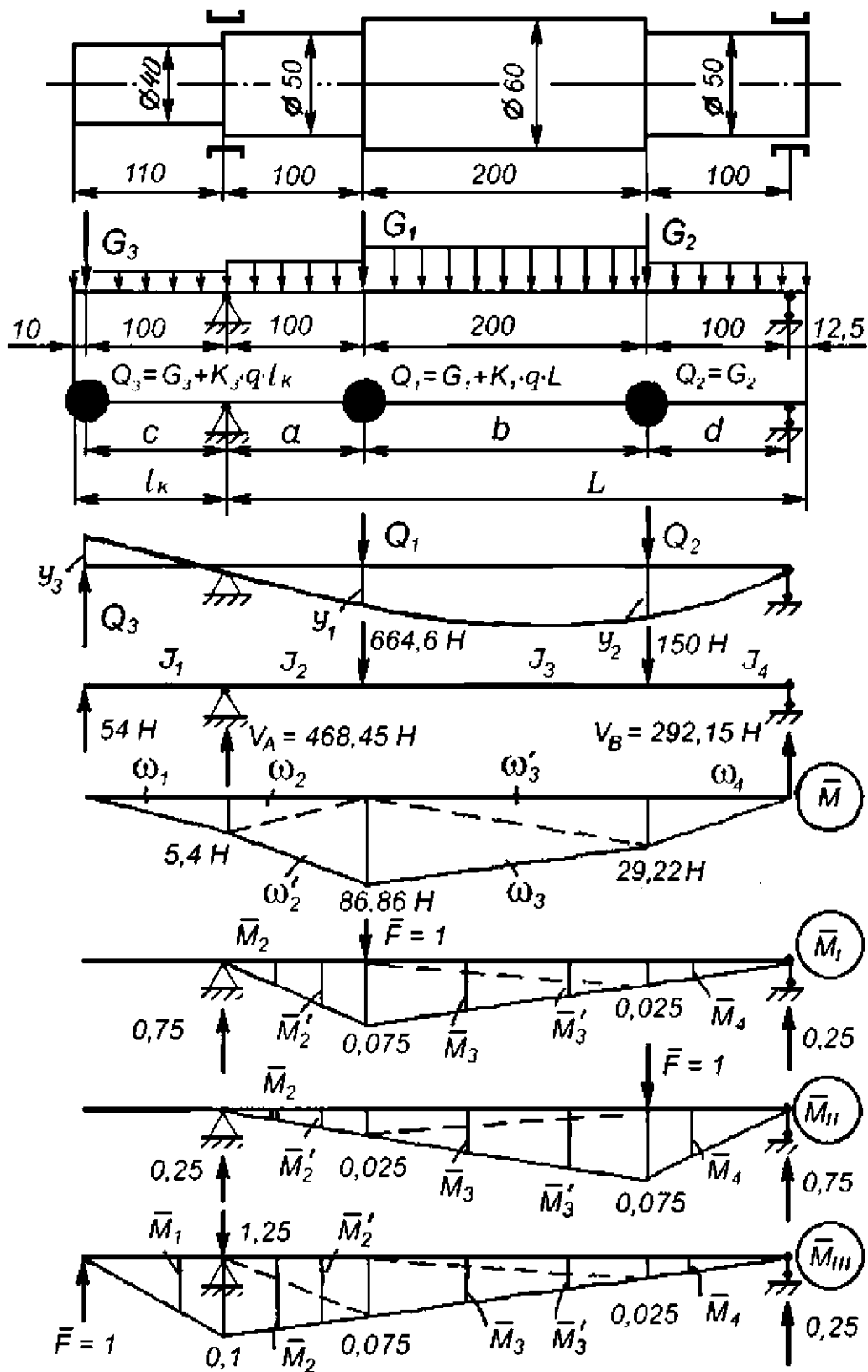


Рис. 10

для пролета

$$K_1 = \frac{0,3L^4}{\pi^2 a^2 (b+d)^2} = 0,3 \frac{0,4125^4}{3,14^2 0,1^2 (0,2+0,1)^2} = 0,98;$$

$$Q_1 = G_1 + K_1 q L = 600 + 0,98 \cdot 77,04 = 675,5 \text{ Н};$$

$$Q_2 = G_2 = 150 \text{ Н}.$$

Для вычисления первой (основной) частоты собственных колебаний силы Q_1 и Q_2 направляем вниз, а Q_3 вверх.

4. Для определения прогибов Y_1 , Y_2 и Y_3 в направлении колебания масс прикладываем единичные силы; эпюры от этих единичных сил \bar{M}_I , \bar{M}_{II} и \bar{M}_{III} перемножаем с эпюрой изгибающих моментов \bar{M} от сил Q_1 , Q_2 и Q_3 способом Верещагина. Моменты инерции поперечных сечений принимаем:

$$I_1 = \frac{3,14 \cdot 0,04^4}{64} = 12,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_2 = \frac{3,14 \cdot 0,05^4}{64} = 30,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_3 = \frac{3,14 \cdot 0,06^4}{64} = 63,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_4 = \frac{3,14 \cdot 0,05^4}{64} = 30,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Вычисляем прогиб

$$\begin{aligned} Y_1 &= \sum \int \frac{M \bar{M}_I}{EI} dz = \frac{\omega_2 \bar{M}_2}{EI_2} + \frac{\omega'_2 \bar{M}'_2}{EI_2} + \frac{\omega_3 \bar{M}_3}{EI_3} + \frac{\omega'_3 \bar{M}'_3}{EI_3} + \frac{\omega_4 \bar{M}_4}{EI_4} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 30,7 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{1}{2} \cdot 5,4 \cdot 0,075 + \frac{1}{2} \cdot 86,86 \cdot 0,1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,075 \right) + \\ &+ \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 63,6 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{1}{2} \cdot 86,86 \cdot 0,2 \left(\frac{2}{3} \cdot 0,075 + \frac{2}{3} \cdot 0,025 \right) + \frac{1}{2} \times \right. \\ &\times 29,22 \cdot 0,2 \left(\frac{2}{3} \cdot 0,025 + \frac{1}{3} \cdot 0,075 \right) + \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 30,7 \cdot 10^{-8}} \times \\ &\times \left. \left(\frac{1}{2} \cdot 29,22 \cdot 0,1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,025 \right) \right) = 0,094 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$Y_2 = \sum \int \frac{M \bar{M}_{II}}{EI} dz = 0,066 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$Y_3 = \sum \int \frac{M \bar{M}_{III}}{EI} dz = 0,12 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

5. Вычисляем по приближенной формуле Рэлея собственную частоту поперечных колебаний

$$\begin{aligned} \omega_k &= \sqrt{g \frac{\sum_{i=1}^3 Q_i Y_i}{\sum_{i=1}^3 Q_i Y_i^2}} = \sqrt{g \frac{Q_1 Y_1 + Q_2 Y_2 + Q_3 Y_3}{Q_1 Y_1^2 + Q_2 Y_2^2 + Q_3 Y_3^2}} = \\ &= \sqrt{9,81 \frac{675,5 \cdot 0,094 + 150 \cdot 0,066 + 54 \cdot 0,12}{675,5 \cdot 0,094^2 + 150 \cdot 0,066^2 + 54 \cdot 0,12^2}} \cdot 10^2 = \\ &= 10,25 \cdot 10^2 = 1025 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

6. Определяем опасную зону угловых скоростей вала

$$\omega_{\text{оп}} = (0,7 \dots 1,3) \omega_k = (0,7 \dots 1,3) \cdot 1025 = 718 \dots 1333 \text{ с}^{-1}.$$

7. Сравниваем фактическую угловую скорость со скоростью опасной зоны:

$$\omega_{\text{факт}} = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 300}{30} = 31,4 \text{ с}^{-1} < \omega_{\text{оп min}}.$$

В пересчете размеров вала нет необходимости.

Если определять частоты собственных колебаний вала через раскрытие определителя

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2} & \delta_{12} m_2 & \delta_{13} m_3 \\ \delta_{21} m_1 & \delta_{22} m_2 - \frac{1}{\omega^2} & \delta_{23} m_3 \\ \delta_{31} m_1 & \delta_{32} m_2 & \delta_{33} m_3 - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0,$$

то предварительно нужно вычислить перемещения в направлении возможных колебаний масс от $\bar{F} = 1$:

$$\delta_{11} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dz = 0,007645 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dz = 0,005635 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3}{EI} dz = 0,0097 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\delta_{22} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI} dz = 0,007645 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_3}{EI} dz = 0,006316 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\delta_{33} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_3 \bar{M}_3}{EI} dz = 0,03045 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

Подставляем полученные значения δ и значения масс $m_1 = 60$ кг, $m_2 = 15$ кг, $m_3 = 5$ кг в определитель, в результате имеем

$$D = \begin{vmatrix} 0,007645 \cdot 10^{-6} \cdot 60 - \frac{1}{\omega^2} & 0,005633 \cdot 10^{-6} \cdot 15 & 0,0097 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \\ 0,005633 \cdot 10^{-6} \cdot 60 & 0,007645 \cdot 10^{-6} \cdot 15 - \frac{1}{\omega^2} & 0,006316 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \\ 0,0097 \cdot 10^{-6} \cdot 60 & 0,006316 \cdot 10^{-6} \cdot 15 & 0,03045 \cdot 10^{-6} \cdot 5 - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим кубическое уравнение

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^3 - 1,29120 \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 - 0,16965 \frac{1}{\omega^2} - 0,08894 = 0.$$

Корнями полученного уравнения являются

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)_1 = 0,96 \cdot 10^{-6}; \left(\frac{1}{\omega^2}\right)_2 = 0,881 \cdot 10^{-6}; \left(\frac{1}{\omega^2}\right)_3 = 0,51 \cdot 10^{-6},$$

откуда

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{0,96 \cdot 10^{-6}}} = 1021 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{0,881 \cdot 10^{-6}}} = 1065 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{1}{0,51 \cdot 10^{-6}}} = 1400 \text{ с}^{-1}.$$

Наименьшая частота близка к частоте, вычисленной по формуле Рэлея.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Механические характеристики основных материалов валов

Марка стали	Диаметр заготовки, мм, не более	Твердость НВ, не менее	σ_H	σ_V	σ_{-1}	τ_{-1}	Ψ_σ	Ψ_τ
			МПа					
Ст. 5	Не ограничен	190	520	280	220	130	0	0
45	»	200	560	280	250	150	0	0
	120	240	800	550	350	210	0,1	0
	80	270	900	650	380	230	0,1	0,05
40X	Не ограничен	200	730	500	320	200	0,1	0,05
	200	240	800	650	360	210	0,1	0,05
	120	270	900	750	410	240	0,1	0,05
40XH	Не ограничен	240	820	650	360	210	0,1	0,05
	200	270	920	750	420	250	0,1	0,05
20	60	145	400	240	170	100	0	0
20X	120	197	650	400	300	160	0,05	0
12XH3A	120	260	950	700	420	210	0,1	0,05
12X2H4A	120	300	1100	850	500	250	0,15	0,1
18XГТ	60	330	1150	950	520	280	0,15	0,1
30XГТ	Не ограничен	270	950	750	450	260	0,1	0,05
	120	320	1150	950	520	310	0,15	0,1
	60	415	1500	1200	650	330	0,2	0,1

Таблица 2

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений K_σ и K_τ

σ_H , МПа	Галтель		Шпоночная канавка		Посадка колец подшипников качения		Посадка детали			
							напряженная		скользящая	
	K_σ	K_τ	K_σ	K_τ	K_σ	K_τ	K_σ	K_τ	K_σ	K_τ
600	2,17	2,23	1,76	1,54	2,36	1,88	1,77	1,50	1,54	1,32
800	2,28	2,37	2,01	1,88	2,69	2,13	2,09	1,71	1,81	1,50
1000	2,39	2,52	2,26	2,22	3,22	2,43	2,42	1,96	2,10	1,67
1200	2,50	2,66	2,50	2,39	3,68	2,72	2,74	2,10	2,38	1,86

Таблица 3

Коэффициенты влияния абсолютных размеров ε_{σ} и ε_{τ}
(масштабные коэффициенты)

Напряженное состояние и материал	Диаметр вала, мм							
	15	20	30	40	50	70	100	200
Изгиб, углеродистая сталь	0,95	0,92	0,88	0,88	0,85	0,61	0,76	0,61
Изгиб, высокопрочная легированная сталь, кручение для всех сталей	0,87	0,83	0,77	0,73	0,70	0,65	0,59	0,52

Таблица 4

Коэффициенты состояния поверхности при изгибе и кручении

Вид обработки поверхности	σ_H	$\beta_{\sigma} = \beta_{\tau}$
Точение, шлифование	800...1200	1,1...1,2
Закалка с нагревом ТВЧ	600...1200	1,5...2,5
Цементация	1000...1200	2,0
Азотирование	900...1200	1,3...2,0
Обкатка роликом	600...1500	1,3...1,8
Дробеструйная обработка	600...1500	1,1...2,0

Библиографический список

1. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин: справ. – М.: Машиностроение, 1993. – 640 с.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – 5-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.
3. Сопротивление материалов: пособие по решению задач / Н.Н. Миролубов, Ф.З. Алмаметов, Н.А. Курицын и др. – М.: Лань, 2009. – 512 с.

Оглавление

Общие положения _____	3
Составление расчетной схемы _____	3
Определение внутренних усилий в сечениях вала _____	6
Подбор диаметра вала по допускаемым напряжениям _____	7
Проверка по допускаемым деформациям _____	9
Проверка прочности при переменных напряжениях _____	10
Расчет вала на поперечные колебания _____	13
Пример расчета вала _____	15
Приложение _____	36
Библиографический список _____	38