

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
КРУЧЕНИЕ ВАЛОВ И ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ**

Методические указания к решению задач и выполнению
расчетно-графической работы

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Напряжения и деформации при кручении. Условия прочности и жесткости	4
2. Напряжения при кручении по сечениям, наклонным к оси стержня	10
3. Потенциальная энергия деформации при кручении	13
4. Расчет валов на кручение	14
Пример 1.	16
Пример 2.	17
Пример 3.	18
Пример 4.	19
Пример 5.	20
5. Кручение бруса с некруглым поперечным сечением	21
6. Пленочная (мембранная) технология	24
7. Кручение тонкостенных стержней	25
Библиографический список.....	34

1. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ ВАЛОВ. УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ

Напряженное состояние кручение характеризуется наличием в стержне единственного внутреннего силового фактора - крутящего момента $M_{кр}$ (рис. 1.1), действующего в плоскости поперечного сечения стержня.

Стержни, работающие на кручение, называют валами. Под действием скручивающего момента M_k , приложенного к свободному концу (рис. 1.2), любое сечение вала на расстоянии x от заделки будет поворачиваться относительно закрепленного на угол φ при неизменной длине. Чем больше скручивающий момент M_k тем большим будет угол поворота. Если зависимость $\varphi = f(M_k)$ представить графически, то получится диаграмма кручения (рис. 1.3).

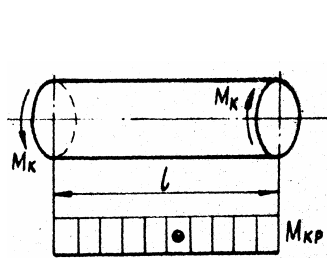


Рисунок 1.1 Кручение вала

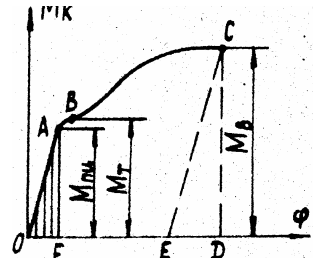


Рисунок 1.3 Диаграмма кручения

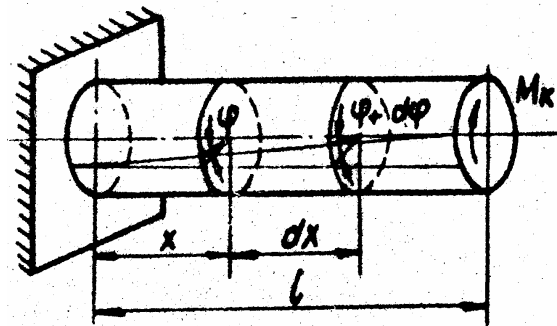


Рисунок 1.2 Поворот сечения вала при кручении

Наибольший интерес представляет участок диаграммы, отвечающий работе материала в пределах пропорциональности, т.е. начальный участок ОА.

Анализируя напряженное состояние вала при кручении, исходим из единственного силового фактора крутящего момента, представляющего собой суммарный момент от касательных напряжений действующих в сечении:

$$\int_F \rho \tau dF = M_{кр} \quad (1.1)$$

где τ - касательное напряжение, действующее в элементарной площадке dF , расположенной на расстоянии произвольного радиуса ρ (рис. 1.4).

Для выяснения характера распределения напряжений по сечению рассмотрим геометрическую картину деформации вала при кручении.

Результаты опытов на кручение круглых валов показывают, что если вал с предварительно нанесенной на его поверхности сеткой, состоящей из линий, параллельных оси, и линий, представляющих собой параллельные круги, закручивать, то первоначально прямые углы сетки будут искажаться, перекашиваться. Контуры параллельных кругов не будут искривляться и расстояния между кругами будут оставаться неизменными, а продольные линии сетки получат винтовой характер (рис.1.4). Радиусы, проведенные в торцевых сечениях вала, останутся прямыми.

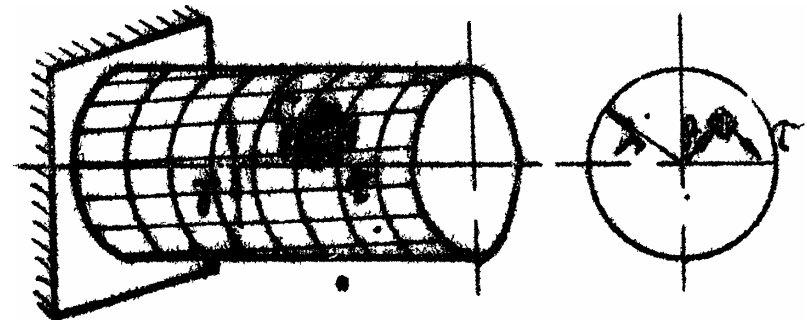


Рисунок 1.4 Поворот сечения вала при кручении

Рассмотрим участок вала длиной dx (рис. 1.5), выделенный из исследуемого вала длиной l . Угол закручивания участка вала длиной

dx будет $d\varphi$ и образующая ab' после деформации займет новое положение ab под углом γ к ее первоначальному состоянию ab' . Если наблюдать за поведением двух образующих ab' и cd' , ограничивающих некоторый элементарный объем наружного слоя материала, то увидим, что искажение формы рассматриваемого элементарного объема типично для сдвига (рис. 1.6). Угол γ между образующими ab' и ab представляет относительный сдвиг или угол сдвига:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b'b}{ab'} \approx \gamma$$

Учитывая, что $ab' = dx$, $a \cdot bb' = rd\varphi$, угол сдвига можно представить в виде

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx}$$

Воспользуемся законом Гука $\tau = G\gamma$ и подставим в него полученное выражение, получим $\tau = Gr \frac{d\varphi}{dx}$

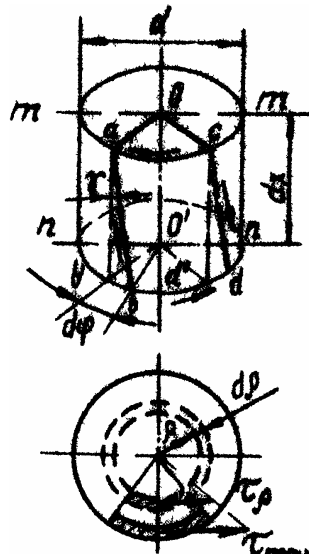


Рисунок 1.5 Элементарный участок вала при закручивании

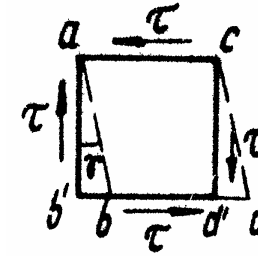


Рисунок 1.6 Искажение формы элементарного объема при закручивании

Так как при закручивании поперечные сечения вала остаются плоскими, а радиусы прямыми, то выражения для угла сдвига и касательного напряжения в сечении на расстоянии ρ от центра можно представить формулами

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx} \quad (1.2)$$

$$\tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

Формулы (1.2) показывают, что касательные напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону прямо пропорционально расстоянию ρ точек от центра сечения. Очевидно, максимальные напряжения будут у поверхности стержня при $\rho = r$. Таким образом,

$$\tau_r = \tau_{\max} = G \frac{d\varphi}{dx} r$$

Подставив выражение (1.2) в уравнение (1.1) будем иметь

$$M_{KP} = G \frac{d\varphi}{dx} \int_F \rho^2 dF = G \frac{d\varphi}{dx} I_p$$

отсюда

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{KP}}{GI_p} \quad (1.3)$$

где GI_p - жесткость сечения вала при кручении,

$$I_p = \int_F \rho^2 dF - \text{полярный момент инерции сечения вала.}$$

Угол закручивания вала φ_l на длине l определяется из (1.3) интегрированием

$$\varphi_l = \int_0^l \frac{M_{KP}}{GI_p} dx$$

Если в пределах вала длиной l крутящие моменты не изменяются, то

$$\varphi = \frac{M_{KP} l}{GI_p} \quad (1.4)$$

Эту формулу называют законом Гука при кручении. Для определения касательного напряжения τ_ρ в любой точке сечения вала подставим (1.3) в (1.2). Тогда

$$\tau_\rho = G \frac{M_{KP}}{GI_p} \rho = \frac{M_{KP}}{I_p} \rho$$

Наибольшего значения это напряжение достигает в точках наружного контура

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{I_p} r = \frac{M_{KP}}{W_p} \quad (1.5)$$

где $W_p = \frac{I_p}{r}$ - эта геометрическая характеристика поперечного сечения вала называется полярным моментом сопротивления. Для сплошного круглого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3 \text{ и } \tau_{\max} = \frac{16M_{KP}}{\pi d^3}$$

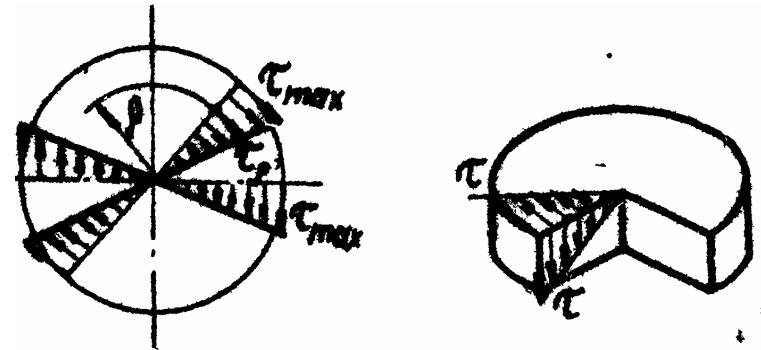


Рисунок 1.7 Эпюра касательных напряжений в сечении сплошного вала

Для трубчатого круглого сечения

$$W_p = \frac{I_p}{\frac{d_H}{2}} = \frac{\pi \frac{(d_H^4 - d_B^4)}{32}}{\frac{d_H}{2}} = \frac{32}{\frac{d_H}{2}} \frac{\pi d_H^4 (1 - C^4)}{32} = \frac{\pi d_H^3 (1 - C^4)}{16} \approx 0,2d_H^3 (1 - C^4)$$

здесь $C = \frac{d_B}{d_H}$, а $\tau_{\max} = \frac{16M_{KP}}{\pi d_H^3 (1 - C^4)}$

Рассмотрим практический вопрос. Какое сечение целесообразнее применять – круглое, сплошное или кольцевое? При каком из них достигается большая экономия материала? При этом предполагается, что валы в обоих вариантах изготовлены из одинакового материала и одинаково нагружены.

Очевидно, что при кручении полый вал выгоднее сплошного. К этому выводу легко прийти, рассматривая эпюры касательных напряжений в сечении (рис. 1.7). В центральной части сплошного вала материал напряжен сравнительно мало и его использование является далеко не полным. В сечении полого вала напряжения распределены относительно более равномерно и степень использования материала повышается.

Возникает желание проектировать валы с минимальной толщиной стенки. Однако идти по этому пути слишком далеко нельзя, т.к. на практике тонкостенный брус даже при малой величине крутящего момента может потерять устойчивость. В связи с этим закручиваемые

тонкостенные брусья необходимо проверять на устойчивость по специальным формулам.

Формула для максимального касательного напряжения позволяет записать условие прочности при кручении

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_p} \leq [\tau] \quad (1.6)$$

где $[\tau]$ - допускаемое напряжение при кручении (чистом сдвиге). Отсюда полярный момент сопротивления вала.

$$W_p \geq \frac{M_{KP}}{[\tau]}$$

Помимо расчета на прочность, валы рассчитывают и на жесткость, ограничивая углы закручивания некоторой допускаемой величиной $[\varphi]$. Эти допускаемые величины углов закручивания таковы: в обычных условиях $[\varphi] = 0,3^\circ$ на каждый метр длины вала; при переменных нагрузках $[\varphi] = 0,25^\circ$; при внезапно (с ударом) меняющихся нагрузок $[\varphi] = 0,15^\circ$. Иногда для обычных условий принимают $[\varphi] = 1^\circ$ на длину, равную 20 диаметрам вала.

Таким образом, размеры вала следует определять не только из условия прочности (1.6), но и из условия жесткости:

$$\varphi_{\max} = \frac{M_{KP} \cdot l}{GI_p} \leq [\varphi] \quad (1.7)$$

Это условие часто выдвигается на первое место при длинных валах.

2. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ ПО СЕЧЕНИЯМ, НАКЛОННЫМ К ОСИ СТЕРЖНЯ

Из анализа общей формулы для касательных напряжений по сечениям, перпендикулярным к оси вала видно, что τ распределены неравномерно и они изменяются по линейному закону, (рис 1.7). В силу закона парности касательных напряжений в осевых сечениях вала возникают такие же по величине, но обратные по знаку напряжения. Таким образом, элементы, выделенные из вала продольными и

поперечными сечениями, будут находиться в условиях неоднородного чистого сдвига (рис. 2.1.). Однако, если вырезать тонкостенный элемент из вала теми же сечениями, то он будет находиться в условиях однородного чистого сдвига.

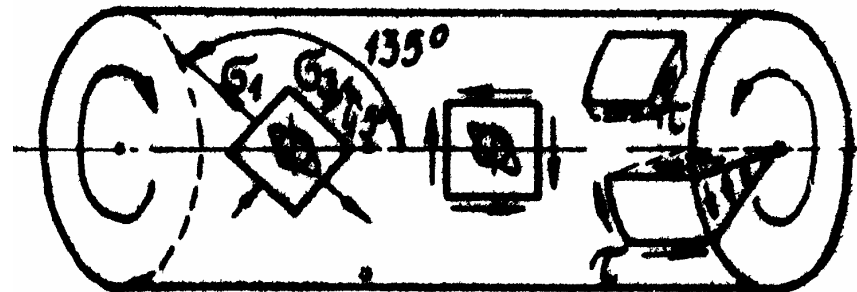


Рисунок 2.1 Неоднородный чистый сдвиг в элементах, выделенных из вала продольными и поперечными сечениями

Определим напряженное состояние на наклонной площадке d_1b_1 определяемой углом α тонкостенного элемента (рис. 2.2). Для чего вырезаем из элементарного параллелепипеда элементарную трехгранную призму cd_1b_1

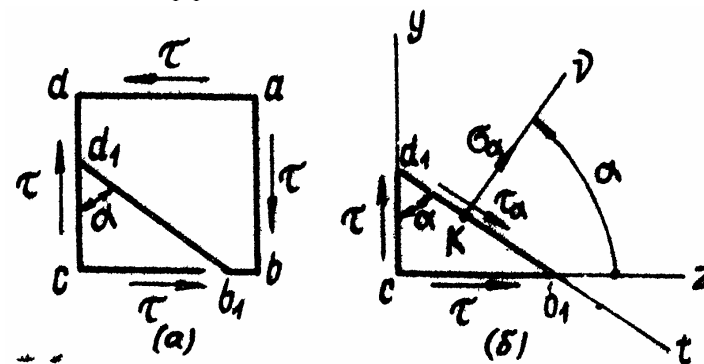


Рисунок 2.2 Напряженное состояние на наклонной площадке в элементарной трехгранной призме вырезанной из вала

(рис. 2.2, б). Наклон площадки d_1b_1 определяется углом α , который образует внешняя нормаль ν к этой площадке с осью Z . Угол α , отсчитанный против хода часовой стрелки, считаем положительным.

По граням призмы cd_1 площадью которой $dF \cos \alpha$, и $c b_1$ - площадью $dF \sin \alpha$ возникают известные касательные напряжения τ , а по наклонной грани $d_1 b_1$ с площадью dF - искомые σ_α и τ_σ . Будем считать, что положительное нормальное напряжение σ_α направлено в сторону внешней нормали (растягивающее). Касательное напряжение τ_σ положительное, если его направление совпадает с направлением внешней нормали U при ее повороте по ходу часовой стрелки до совмещения с вектором τ_σ .

Проектируем все силы, действующие на призму на оси U и t . Условия равновесия дают:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha dF + (\tau dF \cos \alpha) \sin \alpha + (\tau dF \sin \alpha) \cos \alpha &= 0 \\ \tau_\sigma dF - (\tau dF \cos \alpha) \cos \alpha + (\tau dF \sin \alpha) \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= -\tau \sin 2\alpha \\ \tau_\sigma &= \tau \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Если неограниченно уменьшать размеры призмы, то в пределе точка K совмещается с точкой C и, следовательно, формулы (2.1) позволяют вычислить напряжения при чистом сдвиге в произвольной точке элемента вала для любой площадки.

При $0 < \alpha < 90^\circ$ нормальные напряжения σ_α являются напряжениями сжатия. При $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 135^\circ$ касательные напряжения $\tau_\sigma = 0$. Такие площадки (в которых касательное напряжения равны нулю) называют главными.

В общем случае через любую точку тела можно провести три взаимно-перпендикулярных главных площадки. В нашем частном случае третья главная площадка перпендикулярна радиусу вала.

Нормальные напряжения, возникающие в главных площадках, называют главными напряжениями. В порядке возрастания эти напряжения обозначают через σ_3, σ_2 и σ_1 . В рассматриваемом случае $\sigma_1 = +\tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$.

Напряженное состояние, при котором одно из трех главных напряжений равно нулю, называют двухосным или плоским напряженным состоянием.

Таким образом, чистый сдвиг представляет собой частный случай двухосного напряженного состояния, при котором отличные от нуля главные напряжения равны по величине и обратны по знаку.

В наличии растягивающих и сжимающих напряжений можно убедиться экспериментально, скручивая резиновый вал, на поверхность которого краской нанесено множество мелких кружков. При закручивании вала кружки превращаются в эллипсы с главными осями, направленными под углом 45° к образующим. По направлению больших осей эллипса происходит удлинение, а вдоль малых осей – сжатие.

Иллюстрацией этого может служить и характер разрушения хрупких образцов при кручении. Хрупкие материалы разрушаются обычно по поверхности наибольших растягивающих напряжений. Если подвергнуть испытанию на кручение образец из хрупкого материала, например чугуна, то разрушение произойдет по сложной винтовой поверхности, соответствующей максимальным растягивающим напряжениям (рис. 2.3).

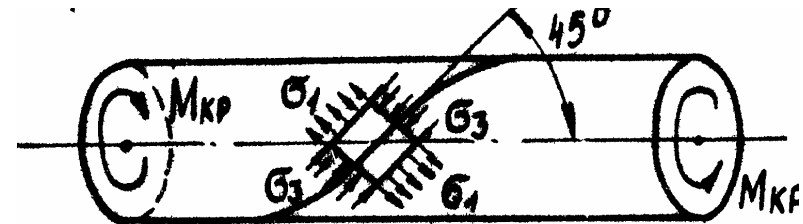


Рисунок 2.3 Разрушение образца из хрупкого материала при кручении

3. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Изучая диаграмму кручения $\varphi = f(M_K)$ мы видели (рис. 1.3), что площадь ОАВСД представляет собой в масштабе работу скручивающих моментов M_K в процессе деформирования образца длиной

l. Часть ее затрачивается на образование пластических деформаций. Она преобразуется, в конечном счете, в тепловую энергию.

Площадь треугольника CDE пропорциональна упругой потенциальной энергии, накапливаемой образцом при сдвиге и освобождающейся при разрушении.

В пределах упругости вся работа, совершаемая статически нарастающим скручивающим моментом, практически равна упругой потенциальной энергии U накапливаемой деформируемым образцом. В этом случае для образца потенциальная энергия равна, в масштабе диаграммы, площади треугольника OAF, т.е.

$$U = \frac{1}{2} M_K \cdot \varphi = \frac{M_{KP}^2 l}{2GI_p}$$

В случае вала переменной жесткости или переменного значения крутящего момента по длине вала потенциальная энергия деформации определяется по формуле

$$U = \int_0^l \frac{M_{KP}^2 dz}{2GI_p}$$

4. РАСЧЕТ ВАЛОВ НА КРУЧЕНИЕ

Для проектирования можно рекомендовать следующий порядок расчета валов на кручение. По схеме вала и действующим на него скручивающим моментам строят эпюру крутящих моментов по отдельным участкам. Выбирают материал для рассчитываемого вала и определяют для этого материала допускаемое напряжение $[\tau]$. Записывают условие прочности (1.6) для участка вала с максимальным значением крутящего момента (согласно эпюре моментов).

Если вал достаточно длинный и по отдельным его участкам действуют существенно разные по величине крутящие моменты, то его следует konstruировать ступенчатым. Диаметр вала каждой ступени рассчитывают, исходя из условия прочности (1.6), но значения крутящих моментов при этом берут разные для разных участков в соответствии с эпюрой крутящих моментов.

Учитывая, что для сплошного круглого вала $W_p = \pi d^3 / 16$,

можно написать расчетную формулу для определения вала из условия прочности

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{KP}}{\pi[\tau]}} \quad (4.1)$$

Определяя диаметр полого вала, из конструктивных соображений задаются соотношением между размерами внутреннего и наружного диаметров, т.е. коэффициентом $C = d_B / d_H$, а затем, учитывая выражение для W_p и условие прочности, находят величину наружного диаметра вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{KP}}{\pi[\tau](1-C^4)}} \quad (4.2)$$

Определив размеры вала из условия прочности, проверяют вал на жесткость по формуле (1.7)

$$\varphi_{\max} = \frac{M_{KP} \cdot l}{GI_p} \leq [\varphi]$$

Учитывая, что углы закручивания при этом выражают в радианах. Если углы закручивания выражать в градусах, то их значения в радианах следует умножить на $180^\circ / \pi$.

Если при проверке окажется, что условие жесткости удовлетворяется, то на этом обычно и заканчивают расчет вала. В противном случае размеры вала должны быть подобраны из условия жесткости (1.7)

$$I_p \geq \frac{M_{KP} l}{G[\varphi]} \quad (4.3)$$

Подставляя выражение полярного момента инерции и решая последнее уравнение (4.3) относительно диаметра вала, найдем отсюда, что для сплошного вала

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{KP} l}{G\pi[\varphi]}} \quad (4.4)$$

для полого вала

$$d_H \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{KP}l}{G\pi[\varphi](1-C^4)}} \quad (4.5)$$

Иногда при расчете вала известна передаваемая им мощность N в лошадиных силах и число оборотов в минуту. В этом случае крутящий момент в расчетных формулах может быть выражен непосредственно через мощность N и число оборотов n

$$M_{KP} = 7162 \frac{N}{n} [H \cdot m] \quad (4.6)$$

тогда, подставляя его выражение в расчетные формулы (4.4) и (4.5), соответственно получим

$$d \geq 7,14 \sqrt[3]{\frac{N}{n[\tau]}} \quad (4.7)$$

$$d_H \geq 7,14 \sqrt[3]{\frac{N}{n[\tau](1-C^4)}} \quad (4.8)$$

В случае, когда мощность K задана в киловаттах, то учитывая, что $1лс \approx 0,736квт$, крутящий момент может быть выражен формулой

$$M_{KP} = \frac{7162K}{0,736n} = 9736 \frac{K}{n} [H \cdot m] \quad (4.9)$$

ПРИМЕР 1. Найти мощность в квт, передаваемую валом, если диаметр сплошного вала $d = 0,15м$, число оборотов вала в минуту $n = 120$, модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^4 МПа = 8 \cdot 10^{10} Па$ и угол закручивания участка вала длиной 7,5 м равен 1/15 радиан.

Из формулы (1.4)

$$M_{KP} = \frac{GI_p \varphi}{l} = \frac{G \frac{\pi d^4}{32} \varphi}{l} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot 0,15^4}{32 \cdot 7,5 \cdot 15} = 35320 H \cdot m$$

Применив формулу (4.9), определим передаваемую мощность

$$K = \frac{M_{KP} \cdot n}{9736} = \frac{35320 \cdot 120}{9736} = 435 квт$$

ПРИМЕР 2. Определить диаметр сплошного вала на условия прочности и жесткости при следующих значениях передаваемых шкивами моментов:

$M_1 = 600 H \cdot m, M_2 = 800 H \cdot m, M_3 = 2кН \cdot м, M_4 = 600 H \cdot м$.
Допускаемое напряжение $[\tau] = 20 МПа$. Допускаемый угол закручивания $[\varphi] = 0,25$ град/метр. Модуль упругости стали при сдвиге $G = 8 \cdot 10^4 МПа$.

Строим эпюру крутящих моментов. Наибольший момент действует на участке 2-3

$$M_{KP \max} = M_1 + M_2 = 600 + 800 = 1400 H \cdot m$$

Подберем диаметр вала из условия прочности (4.1) и жесткости (4.4)

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{KP}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1400}{3,14 \cdot 20 \cdot 10^6}} \approx 0,07 м = 7 см$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{KP}l}{G\pi[\varphi]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1400 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,25}} \approx 0,08 м = 8 см$$

Из двух найденных значений диаметров следует принять больший ($d = 8$ см), найденный из условия жесткости.

Теперь определим углы закручивания сечений вала по длине относительно левого конечного сечения и построим их эпюру.

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{условно принято}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{KP1} \cdot l_1}{GI_p} = \frac{600 \cdot 0,5 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,08^4} = 93,4 \cdot 10^{-5} рад$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{M_{KP3} \cdot l_2}{GI_p} = 93,4 \cdot 10^{-5} + \frac{1400 \cdot 0,5 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,08^4} = 3114 \cdot 10^{-5} рад$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 - \frac{M_{KP3} \cdot l_3}{GI_p} = 3114 \cdot 10^{-5} - \frac{600 \cdot 0,9 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,08^4} = 1432 \cdot 10^{-5} рад$$

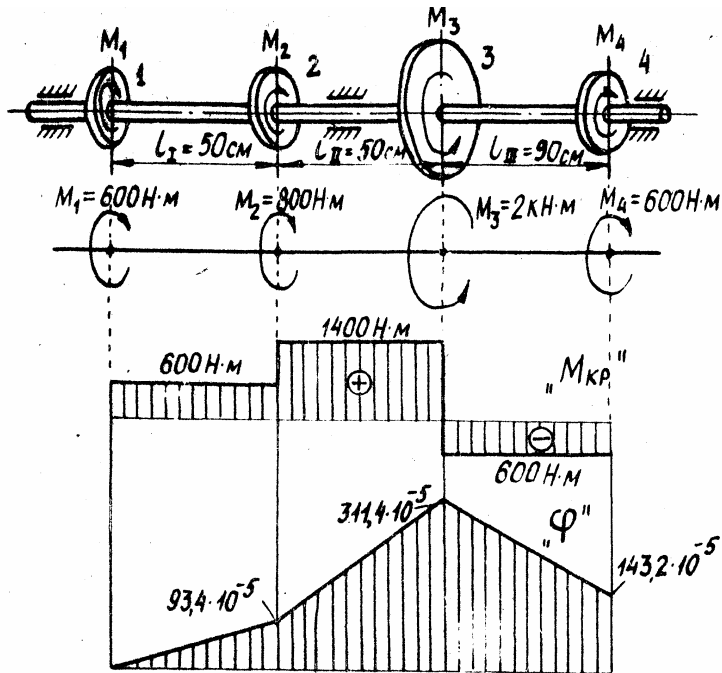


Рисунок 4.1 Схема вала, эпюра крутящих моментов и углов закручивания для примера 2

ПРИМЕР 3. Определить, на сколько процентов увеличится наибольшее напряжение вала при кручении, если в валу сделано центральное отверстие $d_B = 0,4 \cdot d_H$ ($C=0,4$).

На основании формул (4.1) и (4.2), полагая $d_H = d$, получим следующие выражения для напряжений сплошного и полого валов:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{KP}}{\pi d^3} = \tau_C$$

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{KP}}{\pi d^3 (1 - C^4)} = \tau_n$$

Искомая разница в напряжениях

$$\Delta\tau = \frac{\tau_n - \tau_C}{\tau_C} \cdot 100\% = \frac{16M_{KP}}{\pi d^3} \left[\frac{1}{1 - C^4} - 1 \right] \frac{\pi d^3}{16M_{KP}} \cdot 100 = \frac{(0,4)^4}{1 - (0,4)^4} \cdot 100 \approx 2,6\%$$

ПРИМЕР 4. Заменить сплошной вал диаметра $d = 300$ мм полым равнопрочным валом с наружным диаметром $d_H = 350$ мм. Найти внутренний диаметр полого вала d_B и сравнить веса этих валов.

Наибольшие касательные напряжения в обоих валах должны быть равными между собой:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{KP}}{\pi d^3} = \frac{16M_{KP}}{\pi d_H^3 (1 - C^4)}$$

Отсюда определим коэффициент C

$$C = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{d}{d_H}\right)^3} = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{300}{350}\right)^3} = 0,78$$

Внутренний диаметр полого вала

$$d_B = C \cdot d_H = 0,78 \cdot 350 = 273 \text{ мм}$$

Отношение весов равно отношению площадей поперечных сечений:

$$\frac{F_n}{F_C} = \frac{\pi(d_H^2 - d_B^2) \cdot 4}{4\pi d^2} = \frac{d_H^2 - d_B^2}{d^2} = \frac{350^2 - 273^2}{300^2} = 0,534$$

Из приведенных примеров 3 и 4 видно, что изготовление пустотелых валов, т.е. валов, у которых малонагруженная внутренняя часть удаляется, является весьма эффективным средством снижения затраты материала, а следовательно, и облегчения веса валов. При этом наибольшие напряжения, возникающие в пустотелом валу, мало отличаются от максимальных напряжений в валу сплошного сечения при том же наружном диаметре.

Так в примере 3 за счет сверления при $c = d_B/d_H = 0,4$, дающем облегчение вала на 16%, максимальные напряжения в наружных волокнах полого вала возросли всего на 2,6%. В примере 4 равнопрочный пустотелый вал, но с несколько большим наружным диаметром по сравнению со сплошным валом, оказался легче сплошного на 53,4%. Эти примеры наглядно свидетельствуют о рациональности применения пустотелых валов, что широко используется в

некоторых областях современного машиностроения, в частности, в моторостроении.

ПРИМЕР 5. В качестве статически неопределимого стержня подверженного кручению рассмотрим ступенчатый стержень $I_p^a : I_p^B = 1 : 4$, защемленный обоими концами и нагруженный скручивающим моментом M в некотором сечении C (рис. 4.2).

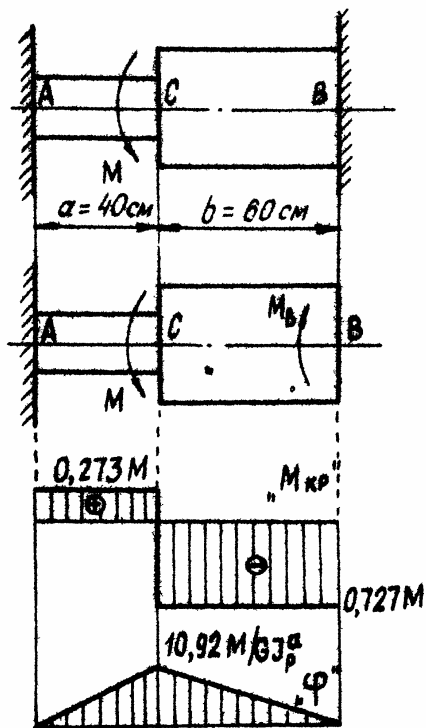


Рисунок 4.2 Схема статически неопределимого стержня при кручении, эпюра крутящих моментов и углов закручивания для примера 5

Система является один раз статически неопределимой. Поэтому сначала раскрываем статическую неопределимость. Для этого отбрасываем правую заделку и ее действие на вал заменяем моментом M_B . Этот момент определяется из того условия, что поворот правого торцевого сечения относительно левого равен нулю. Угол поворота сечения B может быть выражен как алгебраическая сумма взаимных

углов поворота торцовых сечений на участках BC и CA . По формуле (1.4) соответственно этим участкам получаем

$$\frac{M_B \cdot b}{GI_p^b} + \frac{(M_B - M)a}{GI_p^a} = 0$$

Учитывая, что $I_p^b = 4I_p^a$ и $a = 40\text{см}$, $b = 60\text{см}$, находим

$$M_B = 0,727M .$$

Теперь легко построить эпюру крутящих моментов и, определив угол закручивания φ_c из рассмотрения участка AC , построить эпюру углов закручивания φ для всей системы

$$\varphi_c = \frac{M_{KP}^{AC} \cdot a}{GI_p^a} = \frac{0,273M \cdot a}{GI_p^a} = \frac{10,92M}{GI_p^a}$$

5. КРУЧЕНИЕ БРУСА С НЕКРУГЛЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Определение напряжений в брусе с некруглым поперечным сечением представляет собой довольно сложную задачу, которая не может быть решена методами сопротивления материалов. Причина заключается в том, что для некруглого сечения упрочняющая гипотеза неизменности плоских сечений оказывается неприемлемой. Сечения бруса заметно искривляются, в результате чего существенно меняется картина распределения напряжений по сечению. Строгая математическая постановка задачи о кручении и первые решения для ряда сечений были получены Сен-Венаном, поэтому теория кручения стержней некруглого сечения называется теорией кручения Сен-Венана. К настоящему времени получено довольно большое число решений задачи о кручении для сечений различной формы. Основные практические выводы этой теории сводятся к следующему: при кручении призматических стержней материал находится в состоянии чистого сдвига, во всех точках нормальные и ряд касательных напряжений равны нулю, отличны от нуля только касательные напряжения, действующие в плоскости поперечного сечения; наибольшие значения касательных напряжений получают в точках контура сечения, в большинстве случаев наиболее близких к центру тяжести.

Их вычисляют по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_K} \quad (5.1)$$

где W_K - момент сопротивления при кручении, определяемый различными аналитическими выражениями для различных сечений.

Распределение напряжений при кручении в прямоугольном сечении характеризуется эпюрами (рис. 5.1). На контуре сечения в соответствии с общим правилом для стержней, боковая поверхность которых свободна от сил, касательные напряжения направлены вдоль сторон прямоугольника. В центре сечения и в углах они равны нулю, а наибольшие значения имеют в серединах длинных сторон.

Для вычисления углов закручивания в инженерно-технических расчетах пользуются формулой

$$\varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{GI_K} \quad (5.2)$$

где I_K - момент инерции при кручении.

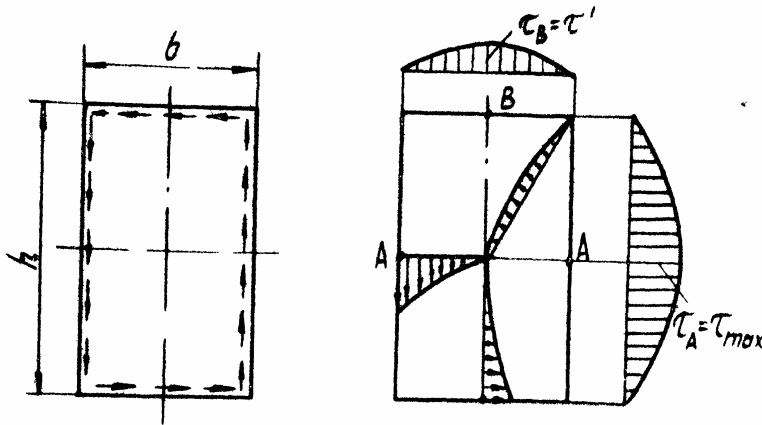


Рисунок 5.1 Распределение напряжений при кручении в прямоугольном сечении вала

Формулы для I_K и W_K находят в результате точных решений задачи о кручении и приводят к удобному для практического применения виду. В случае прямоугольных сечений, например

$$I_K = \beta hb^3, W_K = \alpha hb^2 \quad (5.3)$$

где α и β - коэффициенты, зависящие от соотношения h/b ;

b - меньшая и h - большая стороны сечения. Значения этих коэффициентов приведены в табл.1.

Применяют также приближенные формулы

$$I_K = \frac{b^3 h}{3 \left[1 + 0,39 \frac{b}{h} + 0,72 \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right]}, W_K = \frac{b^2 h}{3 \left(1 + 0,6 \frac{b}{h} \right)} \quad (5.4)$$

Иногда бывает нужно знать касательные напряжения в серединах коротких сторон прямоугольного сечения. Они связаны с максимальными напряжениями равенством

$$\tau' = \tau_B = \eta \cdot \tau_{\max}$$

где η - коэффициент, значения которого приведены в табл. 1.

Вычисление напряжений при кручении стержней с сечениями, отличными от рассмотренных, круглого, прямоугольного - производится аналогичным образом с помощью таблиц, в которых содержатся все необходимые данные для подсчета перемещений и напряжений в характерных точках, а также часто приводятся графики их распределения. Указанные таблицы можно найти в разного рода инженерно-технических справочниках.

Таблица 1.

h/b	α	β	η
1	0,208	0,141	1,000
1,5	0,231	0,196	0,859
1,75	0,239	0,214	0,820
2	0,246	0,229	0,795
2,5	0,258	0,249	0,766
3	0,267	0,263	0,753
4	0,282	0,281	0,745
6	0,299	0,299	0,743
8	0,307	0,307	0,742
10	0,313	0,313	0,742
∞	0,333	0,333	0,742

6. ПЛЕНОЧНАЯ (МЕМБРАННАЯ) АНАЛОГИЯ

Аналитическое решение задачи о кручении бруса с некруглым поперечным сечением является достаточно сложным, поэтому возникла необходимость создания косвенных методов исследования этого вопроса. Среди таких методов первое место занимает метод аналогий.

В задачах механики часто встречаются случаи, когда совершенно различные по физической сущности задачи сводятся к одним и тем же дифференциальным уравнениям. Тогда между задачами может быть установлена аналогия. Сущность метода аналогий заключается в том, что если два различных по природе физических явления описываются одними и теми же уравнениями, то можно по параметрам одного явления установить исследуемые величины второго явления.

Для описания напряженно деформированного состояния при кручении профилей сложной формы используют параметры изменения геометрической формы пленки-мембраны натянутой на контур исследуемой формы. Пленка находится под определенным давлением, вызывающим ее прогиб. Объем, который образуется начальным и конечным положением пленки, соответствует величине крутящего момента, а угол, который образует касательная к какой-либо точке пленки в начальном и конечном состоянии ее, соответствует касательному напряжению в этой точке.

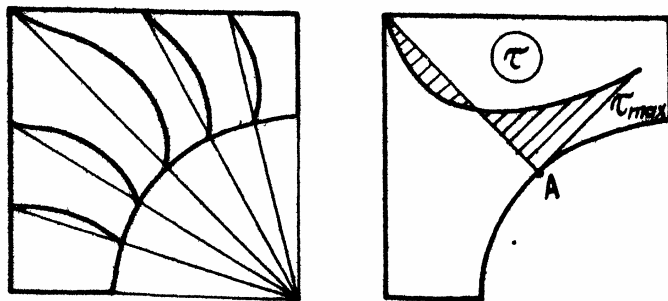


Рисунок 6.1

При помощи пленочной аналогии можно получить не только качественные, но и количественные соотношения. Для этого используется специальный прибор.

Мембранная аналогия была обоснована и разработана в начале нашего века Прандлем - известным ученым механиком, внесшим большой вклад в гидродинамику и теорию деформируемого твердого тела. Эта аналогия не является единственной. Известно еще несколько аналогий из области гидродинамики и электростатики но они не столь наглядны, как мембранная.

7. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

В практике машиностроения, самолетостроения и ракетной техники часто возникает необходимость расчета на кручение тонкостенных стержней, у которых не только длина много больше размеров поперечного сечения, но и в самом поперечном сечении один из размеров (длина дуги) много больше толщины (рис 7.1)

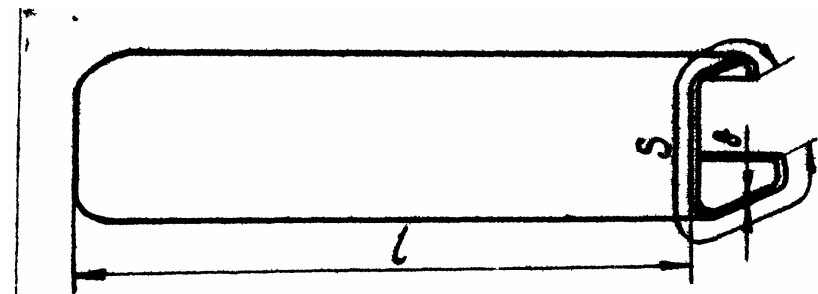


Рисунок 7.1 Кручение тонкостенных стержней

Тонкостенные стержни разделяются на две группы: стержни с открытым профилем (рис.7.2 а) и с замкнутым профилем (рис. 7.2 б).

Между этими двумя группами в законах распределения касательных напряжений при кручении существует большое различие. Для того, чтобы убедиться в этом, обратимся к мембранной аналогии.

Пленка, натянутая на открытый профиль изгибается так, что угол наклона на средней линии контура обращается в нуль и имеет наибольшее значение у краев (рис. 7.3 а). Соответственно углам наклона напряжения по толщине профиля меняются по закону,

близкому к линейному, со сменой знака на средней линии профиля. Если открытый профиль имеет переменную толщину, то наибольшее напряжения будут иметь место в области наибольшей толщины. Пленка там будет прогибаться сильнее и соответственно большими будут и углы ее наклона. Для замкнутого профиля мембранная аналогия

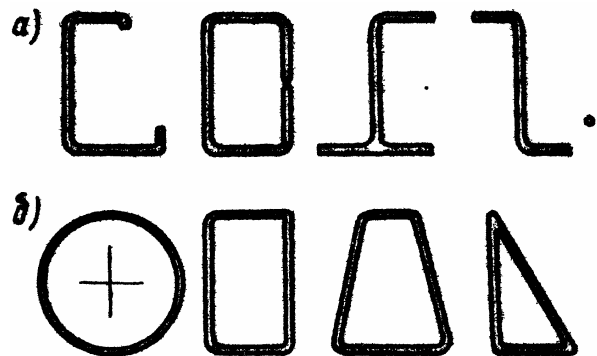


Рисунок 7.2 Тонкостенные стержни с открытым профилем (а) и закрытым профилем (б)

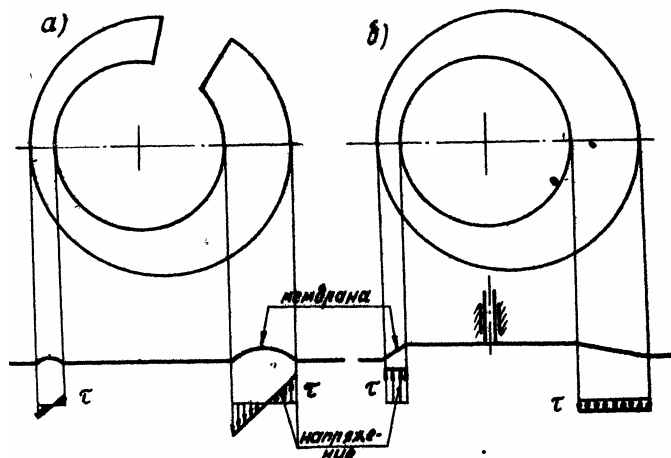


Рисунок 7.3 Распределение касательных напряжений по сечению для тонкостенных стержней с открытым профилем (а) и закрытым профилем (б)

дает перемещение пластины поступательное (рис. 7.3 б), а мембрана по толщине профиля сохраняет угол наклона примерно постоянным. Следовательно, напряжения по толщине остаются также постоянными. Вдоль контура образуется замкнутый поток касательных напряжений. При переменной толщине профиля угол наклона пленки будет наибольшим там, где толщина профиля наименьшая. Там возникают и максимальные касательные напряжения.

Рассматривая открытый профиль с постоянной толщиной стенки (рис.7.4), можем, развернув его свести к рассмотрению сильно вытянутого прямоугольника.

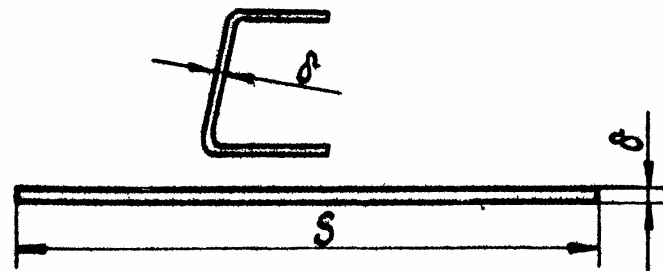


Рисунок 7.4 Преобразование открытого профиля в распрямленный прямоугольник

Форма пленки-мембраны натянутой на отверстие в форме профиля и распрямленного прямоугольника практически будет одинаковой. Следовательно, для такого профиля напряжения и углы закручивания можно вычислять как для прямоугольника, полученного в результате выпрямления дуги контура. Для прямоугольника мы имеем

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{\alpha h b^2}; \varphi = \frac{M_{KP} l}{G \beta h b^3}$$

где α и β при $h/b > 10$ равны 0,333, т.е. 1/3.

Заменяя h на S и b на δ окончательно получим формулы

$$\tau_{\max} = \frac{3M_{KP}}{\delta^2 S} \quad (7.1)$$

$$\varphi = \frac{3M_{кр}l}{G\delta^3S} \quad (7.2)$$

Изложенный метод определения напряжений в незамкнутом профиле является приближенным, поскольку не учитываются повышенные местные напряжения во внутренних углах ломаного профиля. Чем меньше радиус закругления во входящих углах, тем больше местные напряжения. Это наглядно иллюстрируется при помощи пленочной аналогии (рис. 7.5). Местный угол наклона пленки α в точке А больше, чем в остальных точках внутреннего контура. Во избежание местных перенапряжений входные углы в профилях выполняются скругленными.

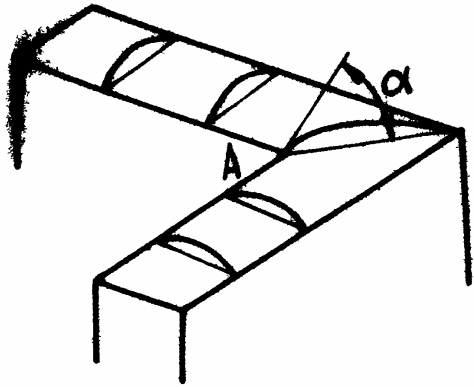


Рисунок 7.5

Рассмотрим замкнутый тонкостенный стержень с сечением переменной толщины (рис. 7.6).

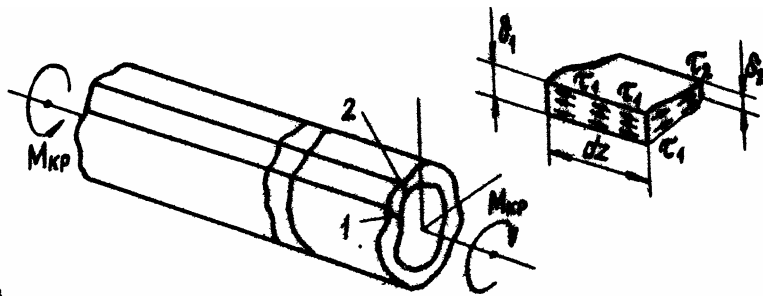


Рисунок 7.6 Кручение замкнутого тонкостенного стержня с сечением переменной толщины

Напряжения по толщине такого профили распределяются равномерно. В продольных сечениях возникают касательные напряжения, парные τ_1 и τ_2 . Продольные силы, соответствующие этим напряжениям, по условию равновесия должны быть равны друг другу.

$$\tau_1\delta_1dz = \tau_2\delta_2dz$$

но $\tau\delta = const$, следовательно τ будут максимальны в тех местах, где толщина будет наименьшей.

Аналитически выразим то обстоятельство, что поток касательных напряжений в сечении дает момент, равный крутящему. Для этого выделим на контуре сечения элементарный отрезок dS (рис. 7.7), настолько малый, чтобы в его пределах величины τ и δ можно было бы рассматривать как постоянные, выбираем какой-то полюс О и пишем выражение момента элементарной силы $\tau\delta dS$ относительно этого полюса. Для этого сила умножается на длину перпендикуляра ОА, опущенного из точки О на линию действия силы.

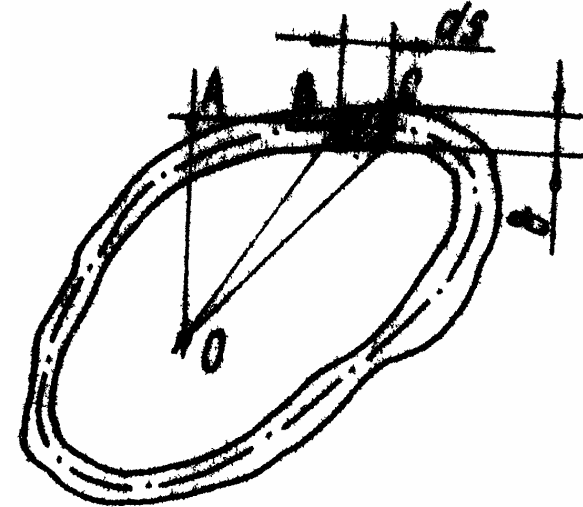


Рисунок 7.7 Выделение элементарного отрезка dS на контуре сечения

$$dM_{кр} = OA\tau\delta dS$$

Выбор точки О не имеет значения. Из условия нагружения следует, что в сечении возникает только, момент, поперечной силы

нет. А из механики известно, что момент системы сил, равнодействующая которых равна нулю, не зависит от точки приведения.

Крутящий момент в сечении равен интегралу от последнего выражения, взятому по всей дуге контура

$$M_{KP} = \int_S OA \tau \delta dS$$

Ни τ , ни δ в отдельности вынести за знак интеграла нельзя, а вместе можно. Это произведение для всех точек контура остается неизменным.

$$\text{Следовательно, } M_{KP} = \tau \delta \int_S OA dS.$$

Легко сообразить, что представляет собой произведение $OA \cdot dS$. Рассматривая треугольник OBC , можно заметить, что dS представляет собой его основание, а OA - его высоту. Следовательно, под интегралом находится удвоенная площадь треугольника OBC . Если это выражение проинтегрировать по всему контуру, получим удвоенную площадь, ограниченную средней линией контура. Обозначим эту площадь через F^* . Звездочка у буквы предназначена для того, чтобы не было возможности спутать эту площадь с площадью "живого" сечения, которую обозначаем F .

Теперь определяем максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{2F^* \delta_{\min}} \quad (7.3)$$

Остается найти угол закручивания для тонкостенного стержня с замкнутым профилем поперечного сечения. Сделаем это путем сопоставления потенциальной энергии деформации стержня, выражая ее через найденные напряжения, а затем энергию приравняем работе внешнего момента на искомом угловом перемещении. Из этого баланса энергии и работы и определяется угол закручивания стержня.

Двумя продольными сечениями выделяем из стержня полоску длиной l и шириной dS . В продольных сечениях обнаруживаются парные касательные напряжения τ (рис. 7.8). Если левый торец полоски принять условно неподвижным, то при деформации полоски работу совершают только сила $\tau \delta dS$. Эта работа переходит в потенциальную энергию деформации.

Таким образом, для полоски получим

$$dA = \frac{1}{2} \tau \delta dS \gamma l, \text{ но } dA = dU$$

Воспользовавшись законом Гука, получим

$$dU = \frac{1}{2} l \frac{\tau^2 \delta^2}{G} \frac{dS}{\delta}$$

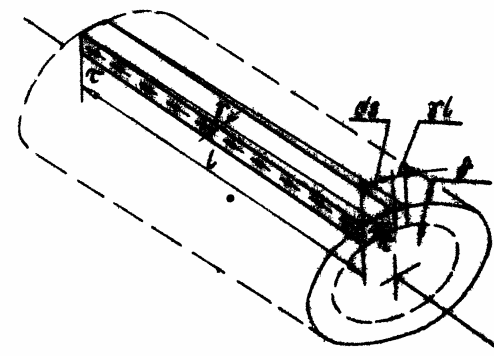


Рисунок 7.8 Выделение элементарной полоски длиной l и шириной dS в тонкостенном стержне замкнутого профиля

Если это выражение проинтегрировать по дуге контура, то получим потенциальную энергию деформации закрученного стержня, которую следует приравнять работе внешнего момента на угловом перемещении φ

$$U = \frac{1}{2} l \frac{\tau^2 \delta^2}{G} \int_S \frac{dS}{\delta}$$

$$A = \frac{1}{2} M_{KP} \varphi$$

$$\frac{1}{2} l \frac{\tau^2 \delta^2}{G} \int_S \frac{dS}{\delta} = \frac{1}{2} M_{KP} \varphi$$

Интеграл, стоящий в левой части этого уравнения, в общем виде вычислен быть не может. Для этого необходимо знать закон изменения толщины вдоль дуги контура. Произведение $\tau \delta$ заменяем согласно предыдущему на $M_{KP} / 2F^*$. В итоге получаем

$$\varphi = \frac{M_{KP} l}{4GF^{*2}} \int_S \frac{dS}{\delta} \quad (7.4)$$

Если толщина профиля постоянна $\delta = const$, то выведенное выражение упрощается и принимает вид

$$\varphi = \frac{M_{KP} l S}{4GF^{*2} \delta} \quad (7.5)$$

После получения выражений для τ_{max} и φ остается провести сопоставление открытых и замкнутых профилей по показателям прочности и жесткости на кручение. Такое сопоставление очень показательно. Проведем его на примере кругового тонкостенного профиля, а сделанные выводы сможем распространить для любых форм открытых и замкнутых профилей.

Пусть стержень диаметром D свернут в круг из плоского листа (рис. 7.9). В первом случае лист по краям не связан, т.е. профиль - открытый. Во втором случае края соединены рядом заклепок и профиль следует рассматривать как замкнутый. Сравним возникающие напряжения.

В первом и во втором соответственно получаем

$$\tau_{max}^1 = \frac{3M_{KP}}{\delta^2 S} = \frac{3M_{KP}}{\pi \delta^2 D}$$

$$\tau_{max}^2 = \frac{M_{KP}}{2F^* \delta} = \frac{2M_{KP}}{\pi D^2 \delta}$$

Для выяснения, какое напряжение больше и во сколько раз, разделим τ_{max}^1 и τ_{max}^2 .

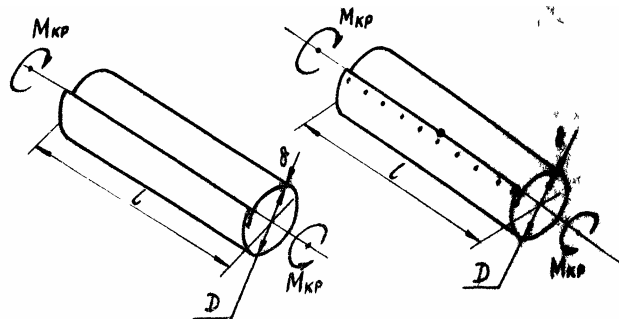


Рисунок 7.9 Сравнение тонкостенных стержней открытого и замкнутого профилей

$$\frac{\tau_{max}^1}{\tau_{max}^2} = \frac{3 D}{2 \delta}$$

Так как размер D по определению тонкостенности существенно больше толщины δ , то при одном и том же крутящем моменте напряжения в открытом профиле оказываются во много раз больше, чем в замкнутом. Такой вывод не является неожиданным. Дело в том, что касательные напряжения в открытом профиле создают момент на плече, имеющем порядок толщины профиля, а в замкнутом профиле момент внутренних сил имеет плечо порядка поперечных размеров сечения. При равном моменте в соответствующем отношении оказываются и напряжения.

Произведем оценку углов закручивания. Для первого и второго случаев получаем

$$\varphi^1 = \frac{3M_{KP} l}{G \delta^3 S} = \frac{3M_{KP} l}{G \delta^3 \pi D}$$

$$\varphi^2 = \frac{M_{KP} l S}{4GF^{*2} \delta} = \frac{4M_{KP}}{G \pi D^3 \delta}$$

Отношение φ^1 к φ^2 будет следующим

$$\frac{\varphi^1}{\varphi^2} = \frac{3 D^2}{4 \delta^2}$$

Таким образом, если касательные напряжения для открытого и замкнутого профиля относились как D/δ , то углы закручивания относятся уже как D^2/δ^2 . Отношение оказалось еще большим. Значит жесткость открытого профиля на кручение неизмеримо меньше жесткости замкнутого профиля. Из сказанного следует очевидный вывод. Там, где от элемента конструкции, работающего на кручение, требуется прочность и жесткость, применение открытых профилей нецелесообразно. Но это только при кручении. На изгиб открытые профили работают не хуже замкнутых.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. В.И. Феодосьев, "Сопротивление материалов", М.: Наука, 1974.
2. А.В. Дарков, Г.С. Шпиро, " Сопротивление материалов", М.: Высшая школа, 1975.
3. "Сборник задач по сопротивлению материалов", Под. ред. А.А. Уманского, М.: Наука, 1973.
4. Н.М. Беляев, "Сборник задач по сопротивлению материалов", М.: Наука, 1966.