

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
СЛОЖНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СЕЧЕНИЙ
Методические указания к решению задач и выполнению
расчетно-графической работы

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Введение	5
1. Понятие о радиусе и эллипсе инерции сечения ..	7
Пример 1	8
Упражнение 1 (для самоконтроля)	9
Ответы и консультации к упражнению 1	9
2. Алгоритм расчета геометрических характеристик плоских сечений	10
Пример 2	12
3. Примерные контрольные вопросы и задачи для защиты расчетно-проектировочной работы "Расчет геометрических характеристик плоских сечений"	17
Библиографический список.....	21

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данные учебно-методические указания по курсу "Сопротивление материалов" предназначены для самостоятельной проработки студентами раздела курса "Расчет геометрических характеристик плоских несимметричных сложных сечений", для приобретения навыков в решении практических задач и задач, относящихся к Вашей расчетно-проектировочной работе "Расчет геометрических характеристик плоских сечений".

В пособии приводятся контрольные вопросы, которые могут быть предложены студентам при защите расчетно-проектировочной работы и подробно решенные примеры и алгоритмы решения некоторых типовых задач.

В учебно-методические указания включены элементы программированного обучения, что позволяет каждому студенту изучать этот материал в приемлемом для него индивидуальном темпе. В конце логически завершенных частей (порций) данного учебно-методического пособия приводятся разобранные примеры, а также упражнения, предназначенные для организации Вашей самостоятельной работы. Выполнение упражнений повышает активность усвоения учебного материала и дает возможность производить самоконтроль по усвоению изучаемого материала по приведенным в пособии упражнениям. Упражнения состоят из вопросов и задач, к которым даны ответы, указания и решения, чтобы оперативно проверить правильность их выполнения. Неправильные ответы анализируются и обсуждаются на приводимых здесь же консультациях.

Для лучшего усвоения порции учебного материала после проработки теоретической части и рассмотрения разобранных примеров рекомендуется выполнить 2/3 части вопросов, приводимых в каждом из упражнений. Если Вы ответили правильно более чем на 0.7 из них, можете переходить к изучению следующей порции расположенного далее учебного теоретического материала. Если же правильные ответы составляют менее 0.7, то необходимо еще раз проработать эту же порцию учебного материала, внимательно разобраться в ответах и консультациях к вопросам, на которые Вы недавно отвечали, а затем ответить на оставшиеся вопросы упражнений для самопроверки.

В заключении проработки учебно-методического пособия производится контроль со стороны преподавателя по изученному материалу.

Только после серьезной проработки данного пособия целесообразно приступать к выполнению Вашего варианта домашнего расчетно-проектировочного задания. В этом случае Вы значительно быстрее его выполните и успешно будете отвечать на экзаменах.

Самопроверка - залог успеха!

Она позволит Вам надежно вести процесс обучения. Желаем успеха!

ВВЕДЕНИЕ

В расчетах на прочность, жесткость и устойчивость, производимых в сопротивлении материалов, для реальных конструкций приходится иметь дело не с простыми, а с достаточно сложными формами сечений. Их, однако, можно представлять состоящими из простейших. Такими простейшими формами сечений являются прямоугольник, круг, кольцо, треугольник, эллипс, а также простейшие стандартные прокатные профили: двутавровые сечения, швеллеры, равнобокие и неравнобокие уголкового профиля, применяемые в строительстве и машиностроении.

Часто подобные составные сложные сечения в целом не являются симметричными, что значительно усложняет производимые расчеты.

Для вычисления геометрических характеристик сложных сечений, состоящих из простейших фигур, они разбиваются на конечное число n простейших частей и в этом случае

$$F = \sum_{i=1}^n F_i \quad (1)$$

Определение положения центра тяжести сложных составных сечений производится по формулам

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n (F_i \cdot z_i)}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (2),$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n (F_i \cdot y_i)}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (3)$$

где z_i, y_i - координаты центра тяжести каждой из простейших фигур.

Моменты инерции (осевые, полярные, центробежные) сложного сечения равны алгебраической сумме моментов инерции составляющих его простейших частей.

$$I = \sum_{i=1}^n I_i \quad (4)$$

Часто при решении практических задач необходимо определять моменты инерции сечения относительно осей, различным образом ориентированных в его плоскости. При этом удобно использовать уже известные значения моментов инерции всего сечения (или отдельных составляющих его частей) относительно других осей, приводимых в технической литературе, специальных справочниках и таблицах, а также подсчитываемые по имеющимся формулам для простейших сечений. Поэтому очень важно установить зависимости между моментами инерции одного и того же сечения относительно разных осей.

В самом общем случае переход от любой старой к любой новой системе координат может рассматриваться как два последовательных преобразования старой системы координат:

- 1) путем параллельного переноса осей координат в новое положение. Это преобразование может быть осуществлено по формулам

$$I_z = \sum_{i=1}^n \left[(I_{z_c})_i + m_i^2 \cdot F_i \right] \quad (5)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n \left[(I_{y_c})_i + n_i^2 \cdot F_i \right] \quad (6)$$

$$I_{zy} = \sum_{i=1}^n \left[(I_{z_c y_c})_i + m_i \cdot n_i \cdot F_i \right] \quad (7)$$

где $(z_c)_i$, $(y_c)_i$ - центральные оси для каждой из составляющих простейших фигур F_i , m_i , n_i - соответственно расстояния от старых осей z_{c_i} и y_{c_i} до параллельных им новых осей z и y ;

- 2) путем поворота осей координат относительно начала координат. Чаще всего этот поворот осуществляется на угол α_0 , на который надо повернуть координатные оси z и y , чтобы они совпали с главными осями u и v .

Это преобразование может быть осуществлено по формулам

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} \quad (8)$$

$$I_u = I_z \cdot \cos^2 \alpha_0 + I_y \cdot \sin^2 \alpha_0 - I_{zy} \cdot \sin 2\alpha_0 \quad (9)$$

$$I_v = I_y \cdot \cos^2 \alpha_0 + I_z \cdot \sin^2 \alpha_0 + I_{zy} \cdot \sin 2\alpha_0 \quad (10)$$

При этом центробежный момент инерции относительно главных центральных осей I_{uv} должен быть равен нулю, т.е.

$$I_{uv} = I_{z_0 y_0} = I_{z_{\alpha_0} y_{\alpha_0}} = \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 + I_{zy} \cdot \cos 2\alpha_0 = 0 \quad (11)$$

Главные моменты инерции I_u и I_v могут быть также определены по формулам:

$$I_u = \frac{I_z + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} \quad (12)$$

$$I_v = \frac{I_z + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} \quad (13)$$

При повороте осей координат удовлетворяется следующее равенство:

$$I_z + I_y = I_{z_{\alpha}} + I_{y_{\alpha}} = I_u + I_v = \text{const} \quad (14)$$

Моменты сопротивления относительно главных центральных осей u и v могут быть подсчитаны по формулам:

$$W_u = \frac{I_u}{|u_{\max}|} \quad (15)$$

$$W_v = \frac{I_v}{|u_{\max}|} \quad (16)$$

где u_{\max} , v_{\max} - координаты точек сечения, наиболее удаленных от главных центральных осей u и v . Эти координаты можно вычислить, используя связь между координатами в повернутых на угол α_0 осях по формулам:

$$u = z \cdot \cos \alpha_0 + y \cdot \sin \alpha_0 \quad (17)$$

$$v = y \cdot \cos \alpha_0 - z \cdot \sin \alpha_0 \quad (18)$$

1. ПОНЯТИЕ О РАДИУСЕ И ЭЛЛИПСЕ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

Радиусом инерции плоской фигуры относительно какой-либо оси, называется длина перпендикуляра, отсчитываемая от этой оси и вычисляемая по формуле:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} \quad (19)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} \quad (20)$$

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{F}} \quad (21)$$

$$i_v = \sqrt{\frac{I_v}{F}} \quad (22)$$

Эллипс инерции - эллипс, построенный на полуосях, равных радиусам

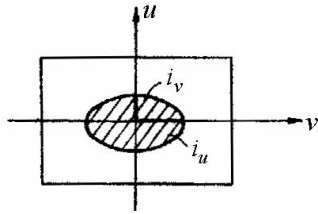


Рисунок. 1 Эллипс инерции прямоугольника

инерции (рис. 1). Он характеризует скорость изменения радиусов и моментов инерций фигуры при повороте осей координат.

ПРИМЕР 1: Определить радиусы инерции для сечения неравнобедренного уголка 160×100×10 (рис. 2). Построить эллипс инерции этого сечения.

Решение: Осевые радиусы инерций сечения определяются по формулам (19)-(22):

$$i_{z_c} = \sqrt{\frac{I_{z_c}}{F}} = \sqrt{\frac{667}{25,3}} = 5,13 \text{ см}$$

$$F_{\text{уголка } \#16/10} = 25,3 \text{ см}^2$$

$$i_{y_c} = \sqrt{\frac{I_{y_c}}{F}} = \sqrt{\frac{204}{25,3}} = 2,84 \text{ см}$$

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{F}} = \sqrt{\frac{750}{25,3}} = 5,44 \text{ см}$$

$$i_v = \sqrt{\frac{I_v}{F}} = \sqrt{\frac{121}{25,3}} = 2,19 \text{ см}$$

Построенный эллипс инерции показан на рис.2.

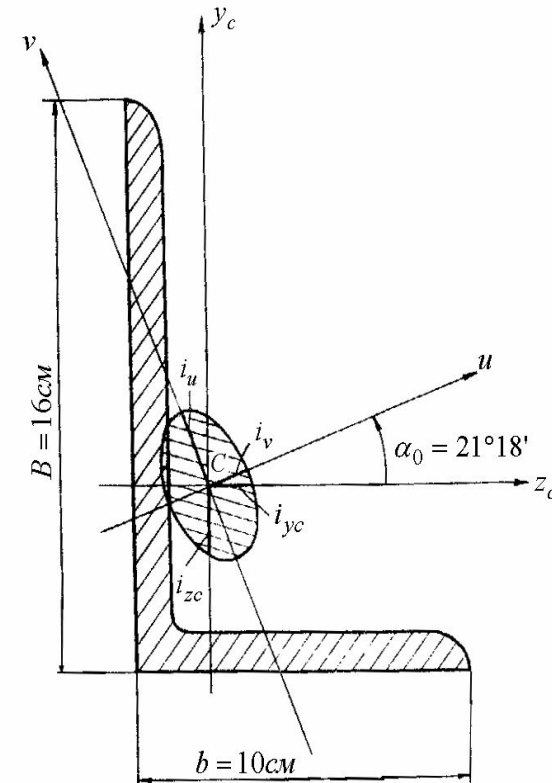


Рисунок. 2 Эллипс инерции неравнобедренного уголка к примеру

Упражнение 1 (для самоконтроля)

- 1.1. Какую размерность имеет радиус инерции сечения?
А - [длина]; Б - [длина]²; В - [длина]³; Г - [длина]⁴.
- 1.2. Определите i_{min} прямоугольного сечения со сторонами a и $4a$ (рис. 3).
- 1.3. Определите i_{oc} для круглого сечения диаметром $d=16$ см.

Ответы и консультации к упражнению 1

- 1.1. А - правильно.

1.1. Б - неправильно, $i_{oc} = \sqrt{\frac{I_{oc}}{F}} = \sqrt{\frac{[\text{длина}]^4}{[\text{длина}]^2}} = [\text{длина}]$.

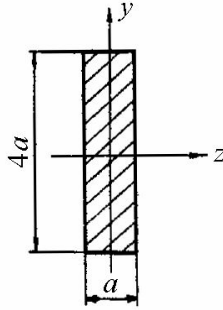


Рисунок. 3 К вопросу 1.2

1.1. В - неправильно, $i_{oc} = \sqrt{\frac{I_{oc}}{F}} = \sqrt{\frac{[\text{длина}]^4}{[\text{длина}]^2}} = [\text{длина}]$.

1.1. Г - неправильно, $i_{oc} = \sqrt{\frac{I_{oc}}{F}} = \sqrt{\frac{[\text{длина}]^4}{[\text{длина}]^2}} = [\text{длина}]$.

1.2. $i_{min} = 0,289a$ (см. рис. 3).

$$I_z = \frac{bh^3}{12} > I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}} = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{4a \cdot a^3}{12 \cdot a \cdot 4a}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = 0,289a$$

1.3. $i_{oc} = 4 \text{ см}$

$$i_{oc} = \sqrt{\frac{I_{oc}}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}}} = \sqrt{\frac{d^2}{16}} = \frac{d}{4} = \frac{16}{4} = 4 \text{ см}$$

2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

При анализе геометрических характеристик плоских сечений любой сложности важнейшей задачей является определение

положения главных центральных осей, величин главных центральных моментов инерции и моментов сопротивления сечений.

Можно рекомендовать следующий порядок определения положения главных центральных осей, величин главных центральных моментов инерции и моментов сопротивления сложного профиля, состоящего из простых частей, характеристики которых либо известны, либо легко определяются.

1. Проводим произвольную прямоугольную систему осей z, y . Разбиваем фигуру на простые части, геометрические характеристики которых представлены в сортаменте, либо могут быть вычислены по элементарным формулам, и определяем по (2), (3) положение её центра тяжести z_c, y_c .

Для самостоятельной проверки правильности, определения координат центра тяжести сложного сечения делается проверка, согласно которой вычисляются статические моменты всего сечения относительно осей z_c и y_c . Должны иметь место равенства $S_{z_c} = 0$ и $S_{y_c} = 0$ в пределах точности производимых вычислений.

2. Проводим систему центральных осей z_c, y_c , таким образом, чтобы наиболее просто можно было вычислить моменты инерции частей фигуры относительно этих осей. Для этого определяем моменты инерции частей фигуры относительно собственных центральных осей, проведенных параллельно осям z_c, y_c , используя при этом формулы перехода к параллельным осям (5)-(7). Суммируя, получаем значения $I_{z_c}, I_{y_c}, I_{z_c y_c}$.

3. Определяем по (8) положение главных центральных осей. Положительный угол α_0 откладывается против хода часовой стрелки, отрицательный - по ходу часовой стрелки.

4. По формулам (9), (10) определяем значения главных центральных моментов инерции I_{z_0} и I_{y_0} , причем ось, относительно которой имеет место максимальный, главный центральный момент инерции, обозначаем буквой u ($I_{max}=I_u$), а ей перпендикулярную ось, относительно которой имеет место минимальный, главный центральный момент инерции, обозначаем буквой v ($I_{min}=I_v$).

Для самостоятельного контроля правильности решения задачи на данном этапе делаются следующие проверки:

- а) по формуле (11) определяется центробежный момент инерции относительно главных центральных осей $I_{z_0 y_0} = I_{uv}$, который согласно определению должен быть равен нулю, $I_{uv} = 0$.

б) по формулам (12), (13) также могут быть определены главные центральные моменты инерции сложного сечения I_u, I_v .

в) согласно (14) должно удовлетворяться равенство:

$$I_{z_c} + I_{y_c} = I_u + I_v = const$$

5. Для определения моментов сопротивления сложного сечения по формулам (15), (16) необходимо определить точки, наиболее удаленные от главных центральных осей, координаты которых относительно главных центральных осей u_{max} и v_{max} могут быть определены по формулам перехода к повернутым осям (17), (18).

Для проверки, координаты точек, наиболее удаленных от главных центральных осей, могут быть определены и графически непосредственно с чертежа, выполненного в масштабе.

6. Для определения радиусов инерции производятся вычисления по формулам (19)-(22). При построении эллипса инерции от центра тяжести сечения по осям u и v откладываем в масштабе чертежа величины i_v и i_u каждый соответственно перпендикулярно своей оси. На этих отрезках, как на полуосях, строится эллипс инерции.

Для проверки (или более точного построения эллипса инерции) могут быть отложены величины i_{z_c} и i_{y_c} .

ПРИМЕР 2: Определить положение главных центральных осей и вычислить главные центральные моменты инерции для сечения (рис. 4), состоящего из неравнобокого уголка №14/9 (ГОСТ 8510-57) и швеллера №24 (ГОСТ 8240-56).

Решение: Разбиваем фигуру на части, геометрические характеристики которых можно взять из таблиц сортамента, на швеллер и уголок; через их центр тяжести c_1 и c_2 проводим центральные оси z_1, y_1 и z_2, y_2 , параллельные их сторонам. Поскольку z_1 - ось симметрии швеллера, то она и ось y_1 являются его главными центральными осями. Главная центральная ось уголка $v-v$ образует его центральной осью z_2 угол α .

Из таблиц сортамента имеем:

Для швеллера №24 $F_1 = 30,6 \text{ см}^2$

$$I_{z_1} = (I_x)_{сортам} = 2900 \text{ см}^4$$

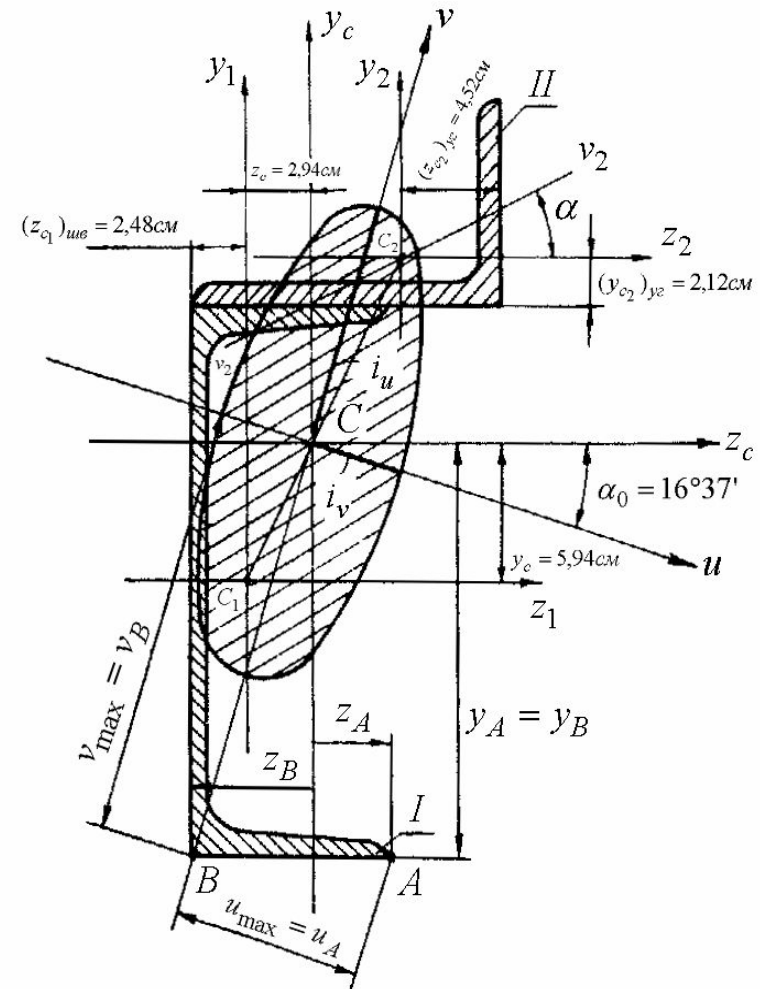
$$I_{y_1} = (I_y)_{сортам} = 208 \text{ см}^4$$

координаты центра тяжести $z_{c_1} = (z_0)_{сортам} = 2,42 \text{ см}$ $y_{c_1} = \left(\frac{h}{2}\right)_{сортам} = 12 \text{ см}$

$h = 24 \text{ см}$ $b = 9 \text{ см}$

Для уголка №14/9 $F_2 = 22,2 \text{ см}^2$

$$I_{z_2} = (I_y)_{сортам} = 146 \text{ см}^4$$



$$I_{y_2} = (I_x)_{сортам} = 444 \text{ см}^4$$

$$I_{min} = I_{v_2-v_2} = 85,5 \text{ см}^4 \quad \text{tg } \alpha = 0,409$$

Рисунок 4. Главные центральные оси и эллипс инерции сложного несимметричного сечения к примеру 2

координаты центра тяжести $z_{c_2} = (y_0)_{\text{сортам}} = 4,58 \text{ см}$ $y_{c_2} = (x_0)_{\text{сортам}} = 2,12 \text{ см}$

1) Определим координаты центра тяжести всего сечения, для этого принимаем за исходные оси главные центральные оси швеллера z_1 и y_1 и согласно (2) и (3) получаем:

$$z_c = \frac{\sum S y}{\sum F} = \frac{F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2}{F_1 + F_2} = \frac{30,6 \cdot 0 + 22,2 \cdot 7,00}{30,6 + 22,2} = 2,94 \text{ см}; \quad z_1 = 0$$

$$z_2 = B_{\text{уголка}} - (z_{c_1})_{\text{швеллера}} - (z_{c_2})_{\text{швеллера}} = 14 - 2,42 - 4,58 = 7,00 \text{ см}$$

$$y_c = \frac{\sum S z}{\sum F} = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2}{F_1 + F_2} = \frac{30,6 \cdot 0 + 22,2 \cdot 14,12}{30,6 + 22,2} = 5,94 \text{ см}; \quad y_1 = 0$$

$$y_2 = \left(\frac{h}{2} \right)_{\text{швеллера}} + y_{c_2} = 12 + 2,12 = 14,12 \text{ см}$$

Через центр тяжести C проводим центральные оси z_c и y_c , параллельные проведенным ранее центральным осям швеллера и уголка.

Для проверки правильности определения координат центра тяжести, вычислим статические моменты относительно центральных осей z_c и y_c , которые должны быть равны нулю.

Получаем:

$$S_{z_c} = F_1 \cdot y_{c_1} + F_2 \cdot y_{c_2} = 30,6 \cdot (-5,94) + 22,2 \cdot 8,18 = -181,7 + 181,6 \approx 0$$

$$y_{c_1} = -(y_c) = -5,94 \text{ см}$$

$$y_{c_2} = + \left[\left(\frac{h}{2} \right)_{\text{швеллера}} + (y_{c_2})_{\text{уголка}} - y_c \right] = 12 + 2,12 - 5,94 = 8,18 \text{ см}$$

$$S_{y_c} = F_1 \cdot z_{c_1} + F_2 \cdot z_{c_2} = 30,6 \cdot (-2,94) + 22,2 \cdot 4,06 = -89,96 + 90,13 \approx 0$$

$$z_{c_1} = -(z_c) = -2,94 \text{ см}$$

$$z_{c_2} = + [B_{\text{уголка}} - (z_{c_1})_{\text{швеллера}} - (z_{c_2})_{\text{уголка}} - z_c] = 14 - 2,42 - 4,59 - 2,94 = 4,06 \text{ см}$$

2) Вычислим осевые и центробежный моменты инерции всего сечения в системе центральных осей z_c, y_c по формулам (5)-(7):

$$I_{z_c} = I_{z_c}^I + I_{z_c}^{II} = (I_{z_1}^I + m_1^2 \cdot F_1) + (I_{z_2}^{II} + m_2^2 \cdot F_2) = 2900 + (-5,94)^2 \times 30,6 + 146 + (8,18)^2 \times 22,2 = 5607,6 \text{ см}^4$$

$$m_1 = y_{c_1} = -5,94 \text{ см}$$

$$m_2 = y_{c_2} = +8,18 \text{ см}$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^I + I_{y_c}^{II} = (I_{y_1}^I + n_1^2 \cdot F_1) + (I_{y_2}^{II} + n_2^2 \cdot F_2) = 208 + (-2,94)^2 \times 30,6 + 444 + (4,06)^2 \times 22,2 = 1282,4 \text{ см}^4$$

$$n_1 = z_{c_1} = -2,94 \text{ см}$$

$$n_2 = z_{c_2} = +4,06 \text{ см}$$

$$I_{z_c y_c} = I_{z_c y_c}^I + I_{z_c y_c}^{II} = (I_{z_1 y_1}^I + m_1 \cdot n_1 \cdot F_1) + (I_{z_2 y_2}^{II} + m_2 \cdot n_2 \cdot F_2) = 0 + (-5,94) \times (-2,94) \times 30,6 + 146,7 + (8,18) \times (4,06) \times 22,2 = 1417,3 \text{ см}^4$$

для швеллера $I_{z_1 y_1} = 0$, т.к. оси z_1 и y_2 являются для швеллера главными центральными; для уголка $I_{z_2 y_2} = 146,7 \text{ см}^4$ согласно решению примера 5 [7].

3) По формуле (8) Определяем угол α_0 наклона главных центральных осей u и v относительно центральных осей z_c, y_c :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{z_c y_c}}{I_{y_c} - I_{z_c}} = \frac{2 \cdot 1417,3}{1282,4 - 5607,6} = -0,6554$$

$$2\alpha_0 = -33,24^\circ = -33^\circ 14'$$

$$\alpha_0 = -16,62^\circ = -16^\circ 37'$$

Поскольку угол α_0 отрицательный, он откладывается по ходу часовой стрелки, а т.к. $I_{z_c} > I_{y_c}$, то поворотом оси z на угол, меньший 45° , мы получим направление главной центральной оси u , относительно которой главный момент инерции максимален $I_u = I_{\max}$.

4) Главные моменты инерции определяем по формулам (9), (10).

$$I_{z_0} = I_{z_c} \cdot \cos^2 \alpha_0 + I_{y_c} \cdot \sin^2 \alpha_0 - I_{z_c y_c} \cdot \sin 2\alpha_0 = 5607,6 \times 0,9182 + 1282,4 \times 0,0812 - 1417,3 \times (-0,5481) = 6029,8 \text{ см}^4 = I_{\max} = I_u$$

$$\cos^2 \alpha_0 = (\cos(-16^\circ 37'))^2 = (0,9582)^2 = 0,9182$$

$$\sin^2 \alpha_0 = (\sin(-16^\circ 37'))^2 = (-0,2860)^2 = 0,0812$$

$$\sin 2\alpha_0 = \sin(-33^\circ 14') = -0,5481$$

$$\cos 2\alpha_0 = \cos(-33^\circ 14') = 0,8364$$

$$I_{y_0} = I_{y_c} \cdot \cos^2 \alpha_0 + I_{z_c} \cdot \sin^2 \alpha_0 + I_{z_c y_c} \cdot \sin 2\alpha_0 = 1282,4 \times 0,9182 + 5607,6 \times 0,0812 + 1417,3 \times (-0,5481) = 856 \text{ см}^4 = I_{\min} = I_v$$

Проверки: а) По формуле (11) определяем центробежный момент инерции относительно главных центральных осей $I_{z_0 y_0}$, который должен быть равен нулю:

$$I_{z_c y_c} = \frac{I_{z_c} - I_{y_c}}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 + I_{z_c y_c} \cdot \cos 2\alpha_0 = \frac{56076 - 12824}{2} \cdot (-0,5481) + 14173 \cdot 0,8364 = -11853 + 11854 \approx 0$$

б) Определим главные центральные моменты инерции I_u и I_v по формулам (12), (13):

$$I_{\frac{u}{v}} = \frac{I_{z_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{z_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{z_c y_c}^2} = \frac{56076 + 12824}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{56076 - 12824}{2}\right)^2 + (14173)^2} = 3445,0 \pm 2585,6$$

$$I_u = I_{\max} = 3445,0 + 2585,6 = 6030,6 \text{ см}^4$$

$$I_v = I_{\min} = 3445,0 - 2585,6 = 859,4 \text{ см}^4$$

Максимальное расхождение составляет:

$$\frac{859,4 - 856}{856} \cdot 100\% = 0,40\%$$

в) Должно удовлетворяться условие (14):

$$I_{z_c} + I_{y_c} = I_{z_0} + I_{y_0} = I_u + I_v = \text{const}$$

$$5607,6 + 1282,4 \approx 6029,8 + 856,0 \approx 6030,6 + 859,4$$

$$6890,0 \approx 6885,8 \approx 6890,0$$

Расхождение составляет:

$$\frac{6890,0 - 6885,8}{6885,8} \cdot 100\% = 0,06\%$$

5. Определение моментов сопротивления сечения.

Наиболее удаленными точками от осей u и v являются точки А и В:

$$u_{\max} = u_A = z_{\alpha_0}^A = z_A \cdot \cos \alpha_0 + y_A \cdot \sin \alpha_0 = 3,64 \times 0,9582 + (-17,94) \times (-0,2860) = 8,62 \text{ см}$$

$$z_A = +(b_{\text{швеллера}} - (z_{c1})_{\text{швеллера}} - z_c) = 9 - 2,42 - 2,94 = 3,64 \text{ см}$$

$$y_A = -\left(\left(\frac{h}{2}\right)_{\text{швеллера}} + y_c\right) = -\left(\frac{24}{2} + 5,94\right) = -17,94 \text{ см}$$

$$\sin \alpha_0 = \sin(-16^\circ 37') = -0,2860$$

$$\cos \alpha_0 = \cos(-16^\circ 37') = 0,9582$$

$$v_{\max} = v_B = y_{\alpha_0}^B = y_B \cdot \cos \alpha_0 - z_B \cdot \sin \alpha_0 = (-17,94) \times 0,9582 - (-5,36) \times (-0,2860) = -18,72 \text{ см}$$

$$y_B = y_A = -17,94 \text{ см}$$

$$z_B = -(z_c + (z_{c1})_{\text{швеллера}}) = -(2,94 + 2,42) = -5,36 \text{ см}$$

По формулам (15) и (16) получаем:

$$W_u = \frac{I_u}{|v_{\max}|} = \frac{6029,8}{18,72} = 322,1 \text{ см}^3$$

$$W_v = \frac{I_v}{|u_{\max}|} = \frac{856}{8,62} = 99,3 \text{ см}^3$$

б. Радиусы инерции вычисляются по формулам (21), (22):

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{F}} = \sqrt{\frac{6029,8}{52,8}} = 10,69 \text{ см}$$

$$F = F_1 + F_2 = 30,6 + 22,2 = 52,8 \text{ см}^2$$

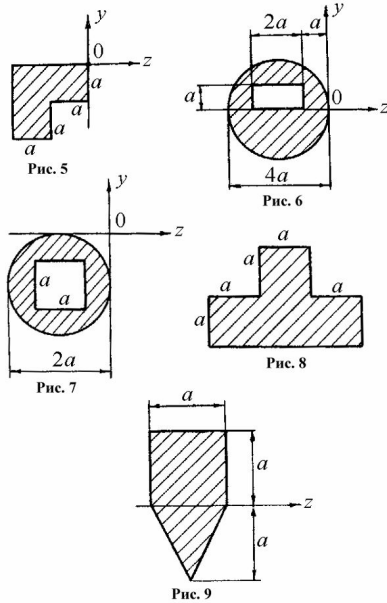
$$i_v = \sqrt{\frac{I_v}{F}} = \sqrt{\frac{856}{52,8}} = 4,03 \text{ см}$$

Откладывая отрезки $i_u = 10,69 \text{ см}$ и $i_v = 4,03 \text{ см}$ перпендикулярно соответствующим осям, строим на них, как на полуосях, эллипс инерции (см. рис. 4).

3. ПРИМЕРНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ЗАЩИТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ "ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК"

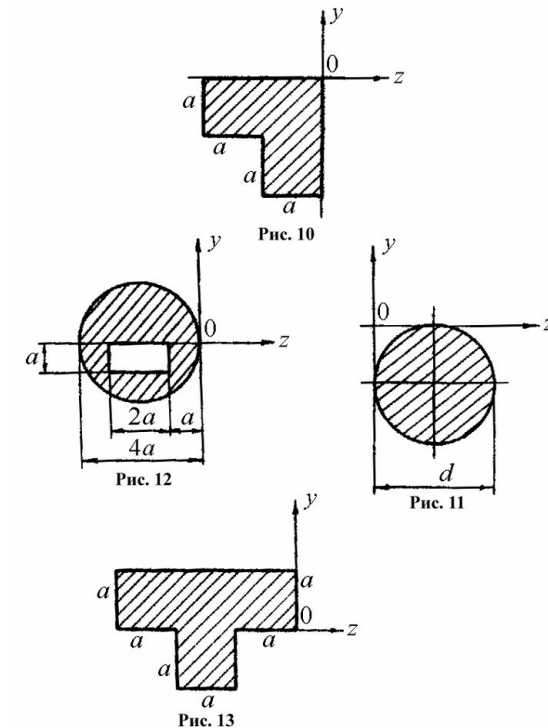
1. Что называется статическим моментом плоской фигуры?
2. Какова размерность статического момента?
3. Может ли статический момент быть отрицательным?
4. Как выражается статический момент фигуры через площадь фигуры и координаты её центра тяжести?
5. Чему равен статический момент фигуры относительно оси, проходящей через центр тяжести фигуры?
6. По каким формулам определяются координаты центра тяжести сечения?
7. Какие координатные оси называются центральными?
8. Найти y_c и z_c (рис. 5).
9. Определить y_c и z_c (рис. 6).
10. S_y - ? S_z - ? (рис. 7).
11. Определить координаты центра тяжести сечения (рис. 8).
12. Определить S_y и S_z (рис. 9).
13. Что называется осевым, полярным и центробежным моментами инерции?
14. Какова размерность моментов инерции?
15. Какие из моментов инерции - величины всегда положительные?
16. В каком случае можно сразу определить, что центробежный момент инерции сечения равен нулю?

17. Как связаны между собой осевые моменты инерции относительно перпендикулярных осей и полярный момент инерции относительно точки пересечения этих осей?
18. В чем выражаются экстремальные свойства центральных осей инерции?



19. Как записываются формулы перехода для осевого и центробежного моментов инерции при параллельном переносе осей, одна из которых центральная?
20. Чему равен осевой момент инерции прямоугольника относительно его центральной оси, параллельной основанию?
21. Как связаны между собой моменты инерции для двух систем координат, повернутых относительно друг друга на угол α ?
22. Как изменяется центробежный момент инерции при повороте осей координат на угол 90° ?
23. Какие оси называются главными осями инерции?
24. Какие оси называются главными центральными осями инерции сечения?

25. Почему ось симметрии фигуры всегда является одной из главных осей инерции?
26. Как определяется момент инерции сложного сечения, если его можно разбить на простейшие фигуры, моменты инерции которых легко определяются по формулам или таблицам?
27. Каким образом может быть вычислен центробежный момент инерции уголкового профиля?
28. Укажите знаки, которые будет иметь центробежный момент инерции уголкового профиля, при различной его ориентации относительно осей координат?
29. Укажите один из вариантов положения главных осей инерции сечения (рис. 8).
30. Определить величину момента инерции сечения относительно оси y I_y - ? (рис. 10).
31. Определить величину момента инерции сечения относительно оси z I_z - ? (рис. 11), если $d=2$ см.
32. Определить величину момента инерции сечения относительно оси z I_z - ? (рис. 12), если $a=5$ см.



33. Определить величину центробежного момента инерции сечения I_{zy} - ? (рис. 13).
34. Определить величину центробежного момента инерции сечения I_{zy} - ? (рис. 14), если $d=4$ см.
35. Определить величину момента инерции сечения относительно оси y I_{zy} - ? (рис. 14), если $d=4$ см.
36. Определить величину центробежного момента инерции сечения I_{zy} - ? (рис. 15), если $a=10$ см.
37. Определить величину момента сопротивления сечения W_z - ? (рис. 16), если $a=5$ см.
38. Определить величину момента сопротивления сечения W_y - ? (рис. 17), если $d=10$ см.
39. Определить величину момента сопротивления сечения W_y - ? (рис. 18), если $a=3$ см.
40. Определить величину момента сопротивления сечения W_z - ? (рис. 19), если $a=10$ см.
41. Определить величину радиуса инерции сечения относительно оси z i_z (рис. 16), если $a=5$ см.

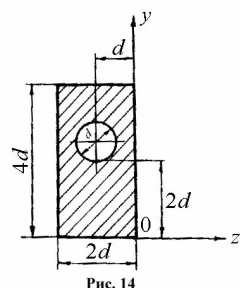


Рис. 14

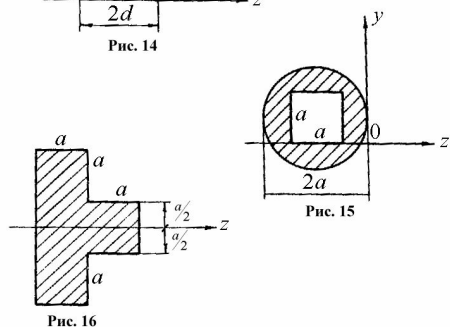


Рис. 16

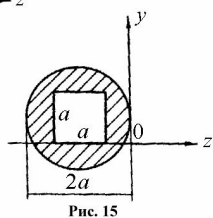


Рис. 15

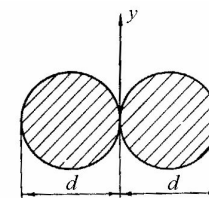


Рис. 17

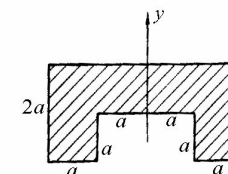


Рис. 18

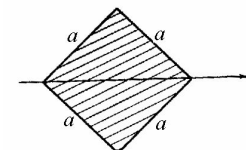


Рис. 19

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. В.И. Феодосьев, "Сопротивление материалов", М.: Наука, 1974.
2. А.В. Дарков, Г.С. Шпиро, "Сопротивление материалов", М.: Высшая школа, 1975.
3. "Сборник задач по сопротивлению материалов", Под. ред. А.А. Уманского, М.: Наука, 1973.
4. Н.М. Беляев, "Сборник задач по сопротивлению материалов", М.: Наука, 1966.
5. М.Н. Степнов, Е.В. Гиацинтов, В.А. Пашков. Расчет геометрических характеристик поперечных сечений простейших форм. Методические указания к решению задач и выполнению расчетно-проектировочной работы (с элементами программированного обучения). М.:МАТИ, 1983.
6. М.Н. Степнов, Е.В. Гиацинтов, В.А. Пашков. Расчет геометрических характеристик сложных симметричных сечений. Методические указания к решению задач и выполнению расчетно-проектировочной работы (с элементами программированного обучения). М.:МАТИ, 1983.

7. М.Н. Степнов, Е.В. Гиацинтов, В.А. Пашков. Определение положения главных центральных осей и вычисление относительно них геометрических характеристик несимметричных простейших сечений. Методические указания к решению задач и выполнению расчетно-проектировочной работы (с элементами программированного обучения). М.:МАТИ, 1983.